

Gravitational Lensing

Yury Holubeu *

2 декабря 2023 г.

Запись не предназначена для распространения.

Обсуждается гравитационное линзирование и его приложения.

Цели:

1) 4 дня как минимум нужно подумать, ну и дописать запись, потом какие-то цели можно формулировать.

Содержание

1	Предисловие	5
1.1	Основная мотивация	5
1.2	Головоломки для мотивации	5
I	Gravitational Lensing in a Nutshell	6
2	Основные законы и модели линзирования в двух словах	6
2.0.1	О типичной теории линзирования в рамках ОТО (??)	6
2.0.2	О типичной математике для линзирования (??)	6
2.0.3	On typical models	6
2.1	On other topics	6
2.1.1	О волновой теории линзирования (??)	6
2.1.2	Об астрономических примерах гравитационных линз (??)	6
II	Fundamentals of Gravitational Lensing	7
3	Основные методы описания	7
3.1	Подход и общие соображения о гравитационном линзировании	7
3.1.1	простейшее линзирование из общей теории относительности	7
3.1.2	Линзирование по Ньютону	9
3.1.3	Основные понятия и свойства	9
3.1.4	Алгоритм получения из вида метрики картину линзирования (!!!)	10
3.2	Линзирование в рамках волновой оптики	10
3.2.1	принципиальные основы волнового описания линзирования	10
3.2.2	волновая модель одиночной линзы и ее обобщения	21
3.2.3	модель линзирования протяженным источником	25
3.2.4	волновая модель бинарной линзы	26
3.2.5	различные типичные волновые модели	29
3.2.6	Волновая оптика гравитационных линз	31
3.2.7	Разные модели	32
3.3	Линзирование в рамках геометрической оптики	35
3.3.1	геометрическая модель точечной линзы	36
3.3.2	слабое линзирование	39
4	Формализм и математика для линзирования	42
4.1	Темы по Захарову	42
4.1.1	Векторные поля Якоби	42
4.1.2	Вывод уравнения линзы	45
4.1.3	Пучки света вблизи вершин и сопряженных точек	49
4.1.4	Вывод уравнения гравитационной линзы	49
4.1.5	Источники сдвига и сходимости	49

*yura.winter@gmail.com

4.1.6	Приближение тонкой линзы	49
4.1.7	Рекуррентное соотношение	49
4.1.8	Угол отклонения, уравнение линзы	49
4.1.9	Усиление потока световых пучков	49
4.1.10	Коэффициент усиления	49
4.1.11	Вывод уравнения гравитационной линзы из принципа Ферма	50
5	Изображение источника на звездном небе в присутствии линзирующего объекта	50
5.0.1	Модели типа креста Эйнштейна	50
5.0.2	модели линзирования черной дырой	51
5.0.3	модели колец Эйнштейна	51
5.0.4	параметры установок для наблюдения изображений	52
6	Другие темы	53
6.1	Микролинзирование	53
6.2	гравитационное линзирование для экспериментаторов	53
6.2.1	напоминание сути происходящего	53
6.2.2	наблюдение гравитационных линз	53
III	Problems	54
7	Основные задачи	54
7.0.1	Задачи на понимание линзирования	54
7.0.2	Типичные задачи линзирования	54
7.0.3	Что может быть, а чего не может быть?	54
7.0.4	Задачи на особые эффекты	54
IV	Другие темы линзирования	55
8	Другие модели линзирования	55
8.1	Типичные модели линзирования	55
8.2	Другие модели линзирования	55
8.2.1	линзирование случайной линзой	55
8.2.2	линзирование с учетом поляризации	56
8.2.3	линзирование двумя подряд линзами	56
8.2.4	Дифракция возле особенности типа складка	56
8.2.5	модели линзирования гравитационными волнами	58
8.2.6	модели линзирования черной дырой	58
8.3	Линзирование гравитационных волн (?)	59
8.3.1	Microlensing of type II gravitational-wave macroimages	59
8.3.2	Observational signatures of microlensing in gravitational waves at LIGO/Virgo frequencies	59
8.3.3	Stellar-mass microlensing of gravitational waves	63
8.4	Другое	67
8.4.1	Линзирование по Эйнштейну (???)	67
8.4.2	Лензирование по Зольднеру	68
9	Экспериментальные данные	71
9.0.1	Бинарная система OGLE-2002-BLG-069	72
10	Отдельные применения линзирования	73
10.1	поиск экзопланет (?)	73

11 Линзирование редкими объектами	73
11.0.1 линзирования FRB-ми	73
11.0.2 линзирования черными дырами	75
11.0.3 линзирования галактикой и кресты Эйнштейна	75
11.0.4 сильные гравитационные линзирования	75
11.0.5 Радиокольца	76
11.0.6 Determining the Dimensionality of Spacetime by Gravitational Lensing	76
11.0.7 линзирование в модифицированных теориях гравитации	77
11.0.8 линзирование ровно назад	77
11.0.9 очень сильное линзирование	77
11.0.10 линзирование в ранних стадиях вселенной	77
 V Adds	 78
A Предисловие	78
A.1 Мотивация	78
A.1.1 Основная мотивация	78
A.1.2 Удивительные факты	79
A.2 Мышление профессионала в линзировании	79
A.2.1 Применения линзирования	79
A.2.2 Особенности эффективного изучения линзирования	79
A.2.3 Обсуждения и споры	82
A.3 Литература по линзированию	82
A.3.1 Теоретическая	82
A.3.2 Экспериментальная	85
A.3.3 Другая	85
A.4 Обзор гравитационного линзирования	86
A.4.1 Популярно о гравитационном линзировании	86
A.4.2 Обзор явлений и методов	86
A.4.3 Результаты гравитационного линзирования	86
A.4.4 О волновом линзировании	86
A.4.5 Удивительные факты	87
A.4.6 Обзор теорий гравитационного линзирования	87
A.4.7 обзор применений линзирования	89
A.4.8 Применения линзирования в других разделах физики	89
A.4.9 Обзор дальнейших развитий линзирования	89
A.5 Головоломки линзирования	90
A.6 История изучения гравитационного линзирования в двух словах	90
A.6.1 Выводы из истории	90
A.6.2 Основная история	90
A.7 Описание записи	96
A.7.1 Части и разделы записи	96
A.7.2 Особенности записи	96
A.7.3 обозначения и константы	96
 B Физика для линзирования	 97
B.1 Некоторая оптика	97
B.1.1 дополнительные концепции оптики	97
B.1.2 приближение тонких линз	99
B.1.3 теория дифракции френеля-кирхгофа	100
B.1.4 гамильтониан и действие для оптических систем	103
B.1.5 каустики и волновые фронты	107
B.1.6 Об интеграле по траекториям	110

В.2	элементы квантовой физики	112
В.2.1	некоторые фундаментальные понятия квантовой физики	112
В.3	астрономические объекты	112
В.3.1	астрономические единицы измерения и типичные значения величин	112
В.3.2	Fast radio bursts (FRB)	112
С	Некоторые методы математики и программирования	112
С.1	О численных расчетах интегралов	112
С.1.1	метод Пикара-Лефшеца в двух словах	112
С.1.2	математическое описание численной реализации метода Пикара-Лефшеца	117
С.1.3	различные теории, помогающие с численными расчетом	122
С.1.4	другие численные методы	122
С.2	математическая физика	123
С.2.1	полезные функции и их свойства	123
С.3	особенности дифференцируемых отображений в приложении к линзированию	124
С.3.1	свойства осциллирующих интегралов	124
С.4	теория катастроф для одномерного линзирования в двух словах	125
С.4.1	складка A_2	126
С.4.2	ласточкин хвост A_4	129
С.4.3	Эллиптическая пупочная катастрофа D_4^-	131
С.4.4	Гиперболическая пупочная катастрофа D_4^-	132
С.5	теория катастроф для двумерного линзирования в двух словах	132
С.5.1	параметры для описания катастроф	132
С.5.2	A generic peak	132
С.5.3	A degenerate peak	132
С.5.4	The swallowtail caustic	132
С.5.5	The elliptic umbilic caustic	132
С.6	дифференциальная геометрия	132
С.6.1	эллиптические координаты	132
С.7	Программирование для линзирования	132
	Литература	133

1 Предисловие

Обсудим подход и мышление для занятий предметом.

1.1 Основная мотивация

Обсудим основную мотивацию, которая позволит нам познать предмет без проблем. Это важнее, чем в других записях, потому что может показаться, что это просто фигня какая-то, так что наличие особой мотивации точно может сыграть важную роль.

Линзированием занимался Эйнштейн, а также многие космологи, Вайнберг, Бауманн, и наверняка очень много кто другой

Если линзирование было бы херней, то они бы не занимались ей. Вот. Так что по крайней мере следовать их примеру чуть можно.

(я не знаю пока, что сильно бы мотивировало изучать линзирование, много аргументов, но они не такие уж сильные, так что они в конце.)

1.2 Головоломки для мотивации

Часть I

Gravitational Lensing in a Nutshell

2 Основные законы и модели линзирования в двух словах

2.0.1 О типичной теории линзирования в рамках ОТО (??)

Main formulas in geometric case (???)

2.0.2 О типичной математике для линзирования (??)

(!! тут целый мир всего странного, мб когда-то я и пойму, тогда и напишу сюда. пока где-то в теории и в дополнениях)

2.0.3 On typical models

One-point lensing

(вот и напишу суть этой модели)

2.1 On other topics

2.1.1 О волновой теории линзирования (??)

(ничего нормально не стал еще понимать я.)

Main Formulas

2.1.2 Об астрономических примерах гравитационных линз (??)

(связь с астрономией, что там на небе у нас как линза?)

Часть II

Fundamentals of Gravitational Lensing

(тут многое переписывать когда-то начну.)

3 Основные методы описания

3.1 Подход и общие соображения о гравитационном линзировании

3.1.1 простейшее линзирование из общей теории относительности

Решим классическую задачу об отклонении луча в ОТО, так как она быстрее всех более подробных методов и является типичной задачей линзирования.

общая идея вывода отклонения луча

отклонение луча в рамках общей теории относительности (?????!!)

(кстати, а если другие центрально-симметричные метрики подставлять, что будет? попробую, когда отработаю остальное)

Общая идея отклонения луча в рамках ОТО состоит в том, что мы должны записать уравнение Гамильтона-Якоби для центрально-симметричной метрики, далее решить его, и взяв производную по моменту количества движения, получить выражение для угла.

(всякие еще комментарии про сам метод в дополнениях будут)

метрическим тензором из (100.14) это уравнение принимает Вид

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2 c^2 = 0$$

где $r_g = 2m'k/c^2$ – гравитационный радиус центрального тела. По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби ищем S в виде

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M\varphi + S_r(r)$$

с постоянными энергией \mathcal{E}_0 и моментом импульса M . Подставив (101.2) в (101.1), найдем производную dS_r/dr и затем:

$$S_r = \int \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \right]^{1/2} dr$$

Зависимость $r = r(t)$ дается, уравнением $\partial S / \partial \mathcal{E}_0 = \text{const}$, откуда

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^{-1/2}.$$

Уравнение распространения луча, как это пояснено в моих дополнениях, определяется уравнением эйконала:

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$$

Поэтому траекторию луча можно получить непосредственно из формулы

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right]^{-1/2} dr,$$

которая является решением уравнения Гамильтона-Якоби, как показано в дополнениях. В ней следует положить $m = 0$, при этом вместо энергии частицы $\mathcal{E}_0 = -\partial S/\partial t$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial \psi/\partial t$.

Введя также вместо постоянной M постоянную ρ согласно $\rho = cM/\omega_0$, получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)}}$$

При пренебрежении релятивистскими поправками ($r_g \rightarrow 0$) это уравнение дает $r = \rho/\cos \varphi$, т.е. прямую, проходящую на расстоянии ρ от начала координат.

Для исследования же релятивистских поправок поступим аналогично тому, как было сделано в предыдущем случае.

Для радиальной части эйконала имеем:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}} dr$$

Производя такие же преобразования, которые служили для перехода от (101.3) к (101.6), получим:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}} dr$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение по степеням r_g/r , имеем:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g \omega_0}{c} \operatorname{Arch} \frac{r}{\rho}$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу.

Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру точки $r = \rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta \psi_r = \Delta \psi_r^{(0)} + 2 \frac{r_g \omega_0}{c} \operatorname{Arch} \frac{R}{\rho}$$

Соответствующее же изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho \omega_0/c$:

$$\Delta \varphi = -\frac{\partial \Delta \psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial \Delta \psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_g R}{\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}}$$

Наконец, переходя к пределу $R \rightarrow \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta \varphi = \pi$, получим:

$$\Delta \varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}$$

кривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру), так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta \varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2 \rho}$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta \varphi$.

связь подхода ОТО с другими подходами

пойму другие - выделю их связь с ОТО!
пока не знаю.

обобщение модели Эйнштейна

Выше мы решили типичную задачу об отклонении света.
(???? как ее обобщить????!!!! хз!!! актуальный вопрос, пока я не настолько зрелый, чтобы ответить.)

3.1.2 Линзирование по Ньютону

Опишем сполна линзирование в рамках Ньютоновой механики.
(это не нужно, так что особо не занимался этим.)

модель

(потом описание добавлю)

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{GM}{r^2} \sin \theta$$

If we substitute $dx = cdt$, then

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \frac{GM}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \xi^2} \cdot \frac{\xi}{(x^2 + \xi^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{GM\xi}{c} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + \xi^2)^{-3/2} dx \end{aligned}$$

The integral in (21.02) is analytic, and works out to $2/\xi^2$. So

$$v_{\perp} = \frac{2GM}{\xi c}$$

and the Newtonian deflection angle (in the limit of a small deflection) is

$$\alpha = \frac{v}{c} = \frac{2GM}{\xi c^2}$$

3.1.3 Основные понятия и свойства

3.1.

Основные понятия

3.2.

Временная задержка

3.3.

Теорема о нечетности числа изображений

5.

сопоставление возмущения в фазе линзирующим объектам

Обсудим, как зная конкретный астрономический объект, получить выражение для возмущения, которое далее будет исследоваться в моделях.

(пока не знаю, как)

3.1.4 Алгоритм получения из вида метрики картину линзирования (!!!)

то, что хочется очень иметь!!

такой шаблонный алгоритм.

тогда и многие статьи сразу будут выдаваться!!

круто будет.

3.2 Линзирование в рамках волновой оптики

(пока надеюсь, такого раздела хватит, потом мб расширю, но вряд ли)

3.2.1 принципиальные основы волнового описания линзирования

вывод уравнения линзы в двух словах

Приведем очень короткий вывод уравнения линзы и укажем самые ключевые его особенности.

основные формулы типичного волнового линзирования Итоговая формула амплитуды света без учета поляризации в модели тонкой линзы имеет вид:

$$\Psi[\mathbf{y}] = \frac{\Omega}{2\pi i} \int_{\mathbf{x}} e^{i\Omega(\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 + \varphi(\mathbf{x}))}$$

Здесь $\Omega = 4GM\omega$, $\varphi(x) = -\sum_i f_i \log|x - x_i|$, f_i - это массовая доля (????) и x_i - это (4-??)координаты каждой массовой линзы, а также введено обозначение $\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^2x$ для интеграла по линзе.

Интенсивность определяется как:

$$I(\boldsymbol{\mu}) = |\psi(\boldsymbol{\mu})|^2.$$

идейные закономерности зависимости количества изображений от потенциала (словами напишем, что там идейно происходит)

Даже слабый гравитационный потенциал может дать большие, не пренебрегаемые эффекты, которые связаны с наличием нетривиальных седловых точек в выражении для амплитуды, так как влияние линзы возрастает с расстоянием (да?)

обзор различных видов функций временной задержки В случае, если у нас N точечных источников, расположенных с координатами \mathbf{x}_i , фаза φ имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^N f_i \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|),$$

здесь f_i - силы оптические линз относительно друг друга, так что $f_1 + \dots + f_N = 1$.

получение формулы линзы в двух словах (пока что это считаю основной моделью, потом мб думать иначе буду)

Следуя известным физическим законам, описание которых дано в дополнениях к этой записи, выведем формулу линзы.

Рассмотрим гравитационное линзирование когерентного монохроматического света с частотой ω с точки зрения квантовой механики, с помощью интеграла по траекториям при постоянной энергии $E = \hbar\omega$.

Амплитуда, которую нам нужно найти, дается интегралом по траекториям от источника к наблюдателю с весом

$$\Psi[\mathbf{y}] = \int e^{iS/\hbar},$$

где действие по определению

$$S = \int p \cdot dr.$$

Запишем действие с учетом метрики пространства-времени. Простейшая возмущенная метрика, как объяснено в дополнениях, имеет вид:

$$ds^2 = -(1 + 2U(r))dt^2 + (1 - 2U(r))dr^2$$

здесь $U(r)$ - гравитационный потенциал.

Уравнение движения объекта, то есть уравнение на p , в гравитационном поле имеет вид (?):

$$p^2/(1 - 2U) + m^2 = E^2/(1 + 2U)$$

Поэтому, так как для света $m \rightarrow 0$, в первом порядке по U действие становится:

$$S \approx E \int |dr|(1 - 2U(r))$$

В первом порядке в действие имеется два вклада.

Мировая линия действия для частицы массы m это $-m \int ds$.

Для заданной начальной энергии E необходимо добавить граничный член $+E(t_f - t_i)$, где t_i и t_f - начальные и конечные времена.

Первый вклад это по сути евклидова длина пути от линзы, которая больше, чем прямая длина от источником света и наблюдателем на (потом проверю по картинке, и почитаю сам!!!)

$$S_1 \approx E \int |dr| \approx \frac{1}{2} |\theta - \theta_{ls}|^2 \frac{r_{lo}r_{os}}{(r_{os} - r_{lo})}.$$

Второй вклад в действие можно записать, оставив в потенциале $U = -GM_i/|r - r_i|$ для массы M_i на r_i для малых $|\theta - \theta_i|$, только логарифм, поэтому действие станет в виде:

$$S_2 \approx -E \int |dr| 2U(r) 2GM_i \ln |\theta - \theta_i|,$$

что почти константа.

Выразим это всё в углах Эйнштейна $\theta_E = \sqrt{4GM(r_{os} - r_{lo})/(r_{lo}r_{os})}$, в котором M - общая масса: $\theta \equiv \theta_E x$ и $\theta_{ls} \equiv \theta_E y$.

Теперь амплитуда, выраженная через интеграл по путям, нормированная для обеспечения унитарности в случае отсутствия линзы, становится равной

$$\Psi[\mathbf{y}] = \frac{\Omega}{2\pi i} \int_x e^{i\Omega(\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 + \varphi(\mathbf{x}))}$$

Здесь $\Omega \equiv 4GM\omega$, $\varphi(x) \equiv -\sum_i f_i \log|x - x_i|$, f_i - это массовая доля (????) и x_i - это (4-??)координаты каждой массовой линзы, а также введено обозначение $\int_x \equiv \int d^2x$ для интеграла по линзе.

(??? тут место доказательства нормировки, которое я всё еще не проделал)

амплитуда и ее вычисление (вот это кстати от Турока вообще ни к чему абзац) А если они перемещаются по небу, $x_i \rightarrow x_i + \mu t$, выражение для амплитуды также будет меняться: $\Psi[y] \rightarrow \Psi[y - \mu t]$.

Обозначим как A площадь сферы с центром в источнике света, на которой линза. Полная интенсивность, дошедшая до линзы $\int_y |\Psi[y]|^2 = A$, не зависит от $\varphi(x)$.

Она единичная, что соответствует сохранению полного потока энергии.

Найдем интенсивность, для этого умножим $\Psi[\mathbf{y}]$ на его комплексно сопряженное выражение, с $x \rightarrow x'$, и полагая $u = \frac{1}{2}(x' + x)$, $\Delta = \frac{1}{2}(x' - x)$ получаем

$$I = \frac{\Omega^2}{4\pi^2} \int_{u,\Delta} e^{-i\Omega(\varphi(u+\Delta) - \varphi(u-\Delta) + 2\Delta \cdot (u-y))}$$

Разложение в ряд тейлора экспоненты по Δ и изменение масштаба $\Delta \rightarrow \Delta/\Omega$ дает линейных, независимый от Ω член, который преобладает при больших Ω .

Переобозначим u как x , теперь получаем:

$$I(y) \approx \int_x \delta(\nabla\varphi(x) + x - y) = \sum_s \frac{1}{|D(x_s(y))|}$$

где $D(x) = \det(\delta_{ij} + \partial_i \partial_j \varphi(x))$, $i, j = 1, 2$, а сумма пробегает решения $x_s(y)$ уравнения

$$\nabla\varphi(x) + x - y = 0$$

то есть уравнения на стационарные точки амплитуды I .

Хотя мы вывели (4) в приближении больших Ω , оно сохраняет нормированность на единицу, как можно видеть, проинтегрировав левую часть равенства по всем y .

В первом порядке по φ уравнение (5) дает $x \approx y$.

Тогда $D(y) \approx 1 + \nabla^2 \varphi(y)$ и ур (4) становится подобием уравнения Пуассона $-\nabla^2 \varphi(y) \approx I(y) - 1$.

Следовательно, при высоких частотах в слабом линзирующем режиме можно получить фазу линзирования из интенсивности.

Для гравитационных линз существует дальнейшее упрощение, а именно, если $I(y) - 1$ можно аппроксимировать суммой дельта-функций, которые выбираются чтобы совпасть с их мультипольными моментами, решение для φ , которое представляет из себя сумму логарифмов, будет хорошо аппроксимировано точным нелинейным решением.

В случае больших Ω уравнения (4) и (5) составляют базис итерационного алгоритма поиска φ .

Далее обсудим, как Ω может быть также найден.

свойства амплитуды волны после линзы У амплитуды имеются некоторые важные математические свойства, на которых остановимся тут.

Амплитуду можно рассматривать как унитарное преобразование

$$(\Omega/2\pi i) \int_x e^{i\frac{1}{2}\Omega(y-x)^2}$$

фазы $e^{i\Omega\varphi(x)}$. В таком случае обратное преобразование $i \int_y e^{-i\frac{1}{2}\Omega(z-y)^2}$.

Применяя его к $\Psi[y]$, получаем $e^{i\Omega\varphi(z)}$, с полностью равномерной интенсивностью для любых $\varphi(z)$.

Следовательно Ω может быть полностью получено из амплитуды линзы.

Рассмотрим сперва линзирование точечной массой.

Применем обратное преобразование для $\Omega' = \Omega + \Delta$, с $\Delta > 0$. Получается картина одиночной линзы, масштабированная на $\sqrt{\Delta/\Omega}$. При $\Delta \downarrow 0$, интенсивность I везде приближается к единице, кроме всплеска в начале координат.

Для $\Delta < 0$, наоборот, получается дыра в интенсивности, фактически из-за линзы с отрицательной массой, размер которой уменьшается до нуля при $\Delta \uparrow 0$.

В случае линзирования многими точечными массами будут наблюдаться пики и спады, которые исчезают при $\Delta = 0$.

В принципе массы точечных линз и их позиции могут быть найдены с очень высокой точностью.

обсуждение нашей модели Ответим на принципиальные вопросы касательно нашей модели.

обсудим связь с волновой оптикой.

какая-то связь есть. (пока не уверен)

обсудим, почему континуальный интеграл применяется тут вообще?

тоже не очень понятно.

большой будет параграф

интерпретация результатов (много сомнений, стоит ли это давать тут)

Итак, нам понятно, что делать (пока нет), обсудим, как интерпретировать наши полученные результаты

переход к волновому линзированию в двух словах Обсудим конкретно, как и зачем переходить в геометрический подход. Подробный переход и продолжение находятся в главе про геометрическую оптику.

подробный вывод уравнения линзы

Приведем подробный вывод уравнения линзы. По сути реализуем те же идеи, описанные в предыдущем разделе, только акцентируем технические моменты вывода.

описание модели Рассмотрим точечный источник, излучающий монохроматические волны частоты ω , часть которых распространяются через гравитационную линзу и достигают наблюдателя на далеком расстоянии. Данная модель изображена на рис. (5).

Метрика пространства времени имеет схожий вид с метрикой Минковского, однако есть небольшое возмущение за счет гравитационного потенциала $U(\vec{r})$ ($\ll 1$) от линзирующего объекта:

$$ds^2 = -(1 + 2U)dt^2 + (1 - 2U)d\vec{r}^2.$$

алгоритм подробного вывода Обсудим алгоритм, который далее будем подробно реализовывать.

Волновое уравнение

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$$

запишем для амплитуды $F(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r})/\tilde{\phi}_0(r)$ волны $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$ в метрике

$$(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}$$

Оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F$$

где $\nabla_\theta^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1}\partial/\partial\theta + \theta^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$.

Решения поищем в формальном виде

$$F(\vec{r}_0) = \int \mathcal{D}\theta(r) \exp \left\{ i \int_0^{r_0} dr L[r, \theta(r), \dot{\theta}(r)] \right\}$$

Для тонкой линзы $\hat{\psi}(\theta) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \theta)$ уравнение для фактора амплитуды запишется в виде

$$F(\vec{r}_0) = \left[\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2\theta_j}{A_j} \right] \exp \left\{ i\omega \left[\epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j r_{j+1}}{2} \left| \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{\epsilon} \right|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}$$

Используя (?) приближения, получим формулу

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2\theta_l \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}$$

которая более приятно выглядит в нормированных угловых координатах:

$$F(w, y) = -i\omega e^{i\omega y^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x) \right] \right\},$$

волновое уравнение Влияние этого потенциала происходит на небольшой области пространства вокруг линзирующего объекта в сравнении с расстоянием между источником и линзой.

(???????) Решая волновое уравнение $\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$ с помощью подстановки $\phi(\vec{r}, t) = \tilde{\phi}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, в первом порядке по U получим уравнение на $\tilde{\phi}$:

$$(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}$$

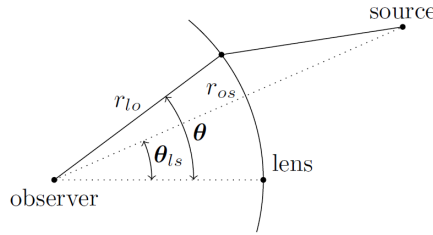


Рис. 1: модель гравитационного линзирования точечной массой

(!! тут позже акцентирую, в каких координатах решаем, ибо от этого напрямую зависит интерпретация нашего ответа и тут можно запутаться!)

Будем использовать сферические координаты (r, θ, φ) с центром в источнике.

Пусть наблюдатель в этой системе имеет координаты $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

В нашем случае $\theta \ll 1$, поэтому положим в уравнении ниже $\sin \theta \simeq \theta$ и будем рассматривать $\theta = \theta(\cos \varphi, \sin \varphi)$ как двумерный вектор на плоскости.

Если бы не было линзирующего объекта, амплитуда бы спадала как $\tilde{\phi}_0(r) = A e^{i\omega r}/r$. (?да?)

Определим усиливающий фактор амплитуды за счет линзы, как $F(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r})/\tilde{\phi}_0(r)$.

Теперь волновое уравнение примет вид (??):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F$$

где $\nabla_\theta^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1}\partial/\partial\theta + \theta^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$.

Предполагая, что

$$\omega/|\partial \ln F/\partial r| \sim (\text{scale on which } F \text{ varies})/(\text{wavelength}) \gg 1,$$

(????) пренебрежем первым членом $\partial^2 F/\partial r^2$ в сравнении со вторым.

(это подробно объяснено в дополнениях, в параграфе про эйконал)

Тогда мы получаем уравнение схожее с уравнением Шредингера, где “ время” это r , “масса частицы” - ω , и “зависящий от времени потенциал” $2\omega U(r, \theta)$.

Тогда соответствующий лагранжиан, который удовлетворяет классическим уравнениям движения это (????????)

$$L(r, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \omega \left[\frac{1}{2} r^2 |\dot{\boldsymbol{\theta}}|^2 - 2U(r, \boldsymbol{\theta}) \right]$$

где $\dot{\boldsymbol{\theta}} = d\boldsymbol{\theta}/dr$.

Используя формализм интеграла по траекториям квантовой механики, решение можно записать в виде

$$F(\vec{r}_0) = \int \mathcal{D}\boldsymbol{\theta}(r) \exp \left\{ i \int_0^{r_0} dr L[r, \boldsymbol{\theta}(r), \dot{\boldsymbol{\theta}}(r)] \right\}$$

свойства решения В этом выражении следующий смысл:

i) подбирая конкретный вид функции $\boldsymbol{\theta}(r)$, представляющей собой путь от источника к наблюдателю на $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0)$;

ii) Вычисляем интеграл в круглых скобках по этому выбранному пути.

В итоге видим "фазу" как функцию от $\boldsymbol{\theta}(r)$;

iii) суммируем все эти фазы для всех возможных $\boldsymbol{\theta}(r)$.

Мы выводим расстояние r_0 между источником и наблюдателем в инфинитизимальные временные отрезки $\epsilon = r_0/N$ за счет бесконечно большого числа N и специфицируем путь $\boldsymbol{\theta}(r)$ за счет введения координат $\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\theta}(r_j)$ ($j = 1, \dots, N$) на j -й сфере радиуса $r_j = j\epsilon$.

(см рис, который это пояснит, пока не вставил его)

Пусть линза будет находиться на l -й сфере (плоскость линзы), так что $r_l = l\epsilon$ это расстояние между источником и плоскостью линзы

модификация фактора амплитуды в случае тонкой линзы Введем "приближение тонкой линзы формально за счет принятия $\frac{1}{2}\delta(r - r_l)\hat{\psi}(\theta)$ для $U(r, \theta)$. То есть мы полагаем

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \boldsymbol{\theta})$$

рассчет для фиксированного θ .

Тогда уравнение для фактора амплитуды запишется в виде

$$F(\vec{r}_0) = \left[\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2\theta_j}{A_j} \right] \exp \left\{ i\omega \left[\epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j r_{j+1}}{2} \left| \frac{\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{j+1}}{\epsilon} \right|^2 - \hat{\psi}(\boldsymbol{\theta}_l) \right] \right\}$$

где множители для нормировки $A_j = 2\pi i\epsilon/(\omega r_j r_{j+1})$ вводятся для того, чтобы было $F = 1$ если $\hat{\psi} = 0$.

Такое приближение не означает, что линза бесконечно тонкая, но означает, что пути, дающие вклады в фазовый интеграл (2.5)) хорошо аппроксимируются за счет постоянного вектора $\boldsymbol{\theta}(r) \simeq \boldsymbol{\theta}_l$ в узкой области $U(\vec{r}) \neq 0$ в сравнении с большими r_0 и r_l .

В итоге получаем формулу:

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2\theta_l \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}$$

где r_{l0} расстояния между линзой и наблюдателем.

За счет приближения тонкой линзы, (2·6)) мы можем ограничить произвол функций $\theta(r)$ теми, пути которых идут прямо от источника в "точку отклонения" θ_l и снова пойти прямо от θ_l к наблюдателю. (?да?)

Первый член квадратных скобок это разница длин пути между прямым путем и от источника к наблюдателю и отклоненным путем и отклоненным, проходящим через плоскость линзы в θ_l .

Второй член это задержка времени, получающаяся за счет гравитационного поля вокруг линзы.

Давайте сменим роли источника и наблюдателя, то есть введем другую систему координат (см какой-то рис) в которой источник находится на позиции наблюдателя, а угловая ось направляется прямо на линзу.

Источник в такой системе находится на $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0)$.

Теперь если повторить процедуру выше, задержки по времени одинаковые вплоть до порядка θ_0^2 .

Следовательно (2·8) также выражает амплитуду после линзирования источника на \vec{r}_0 , если r_l это расстояние между наблюдателем и линзой и r_{l0} это между линзой и источником

переобозначения Перепишем фактор усиления амплитуды

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2\theta_l \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\},$$

в более удобном виде.

Введем характеристический угловой масштаб θ_* (нпр см. (4.1)) и определим безразмерные постоянные

$$x = \theta_l / \theta_*, \quad y = \theta_0 / \theta_*, \quad w = \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \theta_*^2 \omega$$

$$\psi(x) = \frac{r_{l0}}{r_l r_0} \theta_*^{-2} \hat{\psi}(\theta_* x), \quad T(x, y) = \frac{1}{2} |x - y|^2 - \psi(x),$$

теперь амплитуда имеет вид:

$$F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2\mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$$

Это общая формула дифракционного интеграла, которая выражает фактор усиления линзой как функцию частоты w и позиции источника y .

Полное усиление имеет вид $|F|^2$.

Здесь и далее мы будем использовать масштабированные длину и время, как определено в формуле (2·9); например, теперь T будет упоминаться как «временная задержка», а не как «масштабированная временная задержка».

Хотя уравнение метрики (2·1) не учитывает расширение и геометрию нашей Вселенной, все формулы данной записи применимы к космологическим ситуациям, если мы возьмем угловой диаметр расстояния между r_0, r_l и r_{l0} , заменим ω на $\omega(1+z)$ где z будет красным смещением линзы, и предположим, что длина волны линзы гораздо меньше, чем масштаб горизонта.

Также скалярный волновой анализ в этой статье применим для волн любой поляризации, если вращением её направления можно пренебречь.

Если линзирующий объект сферически симметричный, то $\psi(x)$ зависит только от $x = |x|$ и величина $F(\vec{r}_0)$ принимает вид:

$$F(w, y) = -iw e^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp \left\{ iw \left[\frac{1}{2} x^2 - \psi(x) \right] \right\},$$

где J_0 это функция Бесселя нулевого порядка. (??? почему???)

учет вращения поляризации а вот я не знаю как сделать, даже не думал, может, потом подумаю.

Немонохроматические волны от протяженного источника (доделаю в оптике раздел про немонахроматический свет также!)

Обозначим как $\tilde{\phi}_0(w, y)$ амплитуду нелинзированных волн, которые излучены из точки y на поверхности источника с частотой w .

Наблюдаемая амплитуда волны во время τ есть суперпозиция каждой линзированной волны $F\tilde{\phi}_0$ по всем y и w :

$$\phi(\tau) = \int d^2\mathbf{y} \int dw F(w, \mathbf{y}) \tilde{\phi}_0(w, \mathbf{y}) e^{-i w \tau}.$$

Когда источник наблюдается через полосовой фильтр, $\tilde{\phi}_0$ в этом уравнении повторяет спектр источника на \mathbf{y} , умноженный на функцию фильтрации частоты.

Так как $\phi(\tau)$ вещественна, $\tilde{\phi}_0^*(w) = \tilde{\phi}_0(-w)$.

Более того, $\tilde{\phi}_0$ должна также зависеть от времени, потому что существуют флуктуации излучения на источнике. Такая флуктуация $\tilde{\phi}_0$ будет стохастическим процессом, если считать, что активность источника постоянна с течением времени.

Поэтому определим функцию корреляции наблюдаемой амплитуды как

$$C(\tau) = \frac{\langle \phi(\tau') \phi(\tau' + \tau) \rangle}{\langle |\phi(\tau')|^2 \rangle_{F=1}}$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю стохастических функций $\tilde{\phi}_0$.

За счет постоянства активности источника, $\langle \dots \rangle$ можно также интерпретировать как интеграл по τ' за достаточно большое время $\gg 1/w$.

Считая, что разные части источника излучают некогерентно, можно посчитать среднее как (??)

$$\langle \tilde{\phi}_0(w, \mathbf{y}) \tilde{\phi}_0^*(w', \mathbf{y}') \rangle = \hat{I}(w, \mathbf{y}) \delta(w - w') \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{y}'),$$

где $\hat{I}(w, \mathbf{y})$ это яркость поверхности источника.

Следовательно, корреляционная функция может быть представлена в виде:

$$C(\tau) = \int d^2\mathbf{y} \int dw |F(w, \mathbf{y})|^2 I(w, \mathbf{y}) \cos(w\tau)$$

где $I(w, \mathbf{y}) = \hat{I}(w, \mathbf{y}) / \left[\int d^2\mathbf{y} \int dw \hat{I}(w, \mathbf{y}) \right]$.

Фактор усиления интенсивности дается выражением $C(0)$. (???)

обзор предела геометрической оптики Покажем, как можно перейти из волнового описания в геометрическую оптику в случае низких длин волн, чтобы обсудить условия, при которых волновыми эффектами нельзя пренебречь.

Предел геометрической оптики по сути является переходом от

$$F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$$

к

$$F = \sum_j |\mu(\mathbf{x}_j)|^{1/2} \exp[iwT(\mathbf{x}_j) - i\pi n_j]$$

где $\mu(\mathbf{x}) = 1/\det[\partial_a \partial_b T(\mathbf{x})] = 1/\det[\delta_{ab} - \partial_a \partial_b \psi(\mathbf{x})]$

Монохроматические волны от точечного источника с точки зрения геометрической оптики рассматриваем.... (перепишу итог прошлых глав)

Представим функцию временной задержки двумерной поверхностью $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - \psi(\mathbf{x})$ над x -плоскостью для фиксированного y .

В случае коротких длин волн $w \rightarrow \infty$, подынтегральное выражение в факторе усиления $F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ сильно осциллирующая функция, поэтому величина F получается в основном за счет вкладов стационарных точек поверхности $T(\mathbf{x})$.

Стационарные точки определяются условием

$$\partial T(\mathbf{x}) = 0,$$

что то же

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \partial \psi(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_l - \frac{r_{l0}}{r_0} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_l)$$

где $\partial = \partial/\partial \mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_l) = r_l^{-1} \partial \hat{\psi}/\partial \boldsymbol{\theta}_l$.

Эти стационарные точки соответствуют изображения геометрической оптики, и условие $\partial T(\mathbf{x}) = 0$ выражает принцип геометрический Ферма.

По факту уравнение выше это и есть уравнение линзы, которое определяет координаты изображения x (или θ_l) для данных координат источника y (или θ_0) с углом отклонения α от нулевых геодезических.

Для более "сильной" линзы, потенциал $\psi(\mathbf{x})$ таков, что число изображений более, чем одно.

Разложим $T(\mathbf{x})$ в окрестности j -го изображения $\mathbf{x}_j(\mathbf{y})$ как

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \sum_{ab} \bar{x}_a \bar{x}_b \partial_a \partial_b T(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{6} \sum_{abc} \bar{x}_a \bar{x}_b \bar{x}_c \partial_a \partial_b \partial_c T(\mathbf{x}_j) + \dots$$

где $\bar{x} = x - x_j$ и индексы $abc \dots$ пробегают значения 1 и 2.

(!!!! обозначения однозначно меняю потом!!!!)

Если частота w настолько большая, что

$$w |\partial^2 T|^3 \gg |\partial^3 T|^2, \quad w |\partial^2 T|^2 \gg |\partial^4 T|, \quad \dots,$$

можно пренебречь третьим и более высокими членами разложения.

Учитывая все изображения j с координатами \mathbf{x}_j , можно записать гауссов интеграл в приближении геометрической оптики как

$$F = \sum_j |\mu(\mathbf{x}_j)|^{1/2} \exp[iwT(\mathbf{x}_j) - i\pi n_j]$$

где

$$\mu(\mathbf{x}) = 1/\det[\partial_a\partial_b T(\mathbf{x})] = 1/\det[\delta_{ab} - \partial_a\partial_b\psi(\mathbf{x})]$$

и $n_j = 0, 1/2, 1$ - когда x_j это минимум, седловая точка и максимум $T(x)$, соответственно.

Уравнение для F выражает, что наблюдаемая волна это суперпозиция волн от каждого изображения, с соотношением амплитуд $|\mu(\mathbf{x}_j)|^{1/2}$ и фазовым сдвигом $wT(\mathbf{x}_j) - \pi n_j$.

Усиление интенсивности волны принимает вид:

$$|F|^2 = \sum_j |\mu_j| + 2 \sum_{j < k} |\mu_j \mu_k|^{1/2} \cos(wT_{jk} - \pi n_{jk}) \quad (3.1)$$

где $\mu_j = \mu(\mathbf{x}_j)$, $T_{jk} = T(\mathbf{x}_k) - T(\mathbf{x}_j)$ это средняя временная задержка между k -м и j -м изображениями, и $n_{jk} = n_k - n_j$.

Note that in geometric optics, the magnification factor of the image size for an infinitesimal source is given as the Jacobian of the lens mapping $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}$.

$$\mu(\mathbf{x}) = 1/\det[\partial \otimes \mathbf{y}] = 1/\det[\delta_{ab} - \partial_a\partial_b\psi(\mathbf{x})]$$

From the conservation of surface brightness in geometric optics, this image magnification is equal to the amplification of source intensity.

Поэтому первый член в уравнении (3.1) содержит результат геометрической оптики, в котором величина $|\mu_j|$ это фактор усиления от j -го изображения.

Второй член выражает "интерференцию" между изображениями, которое создает различные интерференционные картины (?).

Уравнение (3.1) по сути есть квазиклассическая аппроксимация квантовой механики. (?? в дополнениях допишу)

дифракция возле особенностей линзирующего отображения Согласно геометрической оптике, фактор усиления изображений $|\mu_j|$ от точечного источника расходитя, когда изображение находится на критической кривой, которая определяется как кривая, на x -плоскости, определенная как $\det[\partial_a\partial_b T(\mathbf{x})] = 0$.

Каустика это соответствующая кривая на \mathbf{y} -плоскости, отображенная $\partial T(\mathbf{x}) = 0$. (??) (Figure 6 shows an example of a critical curve and a caustic.)

Namely, when a point source is located near a caustic, some of the images are near a critical curve and have infinitely large magnifications.

Конечно, такие расходимости, это следствие аппроксимации (3 · 4), потому что $|\partial^2 T|$ слишком мала, чтобы удовлетворить (3.3). (??)

Thus the wave amplitude is written as a sum of two terms: $F = F_c + F_d$.

The second term F_d , the diffraction part, is given by Eq.

(2.11) evaluated exactly around these images near the critical curve.

This term describes the diffraction phenomenon in the sense that the non-geodesic paths contribute significantly to the wave amplitude.

Первый член F_c , то есть квазиклассическая часть уравнения (3 · 4), это вклад от нормальных изображений. (?)

Equation (3.3) roughly states that the diffraction effect is unimportant when the time delay T_{jk} between images is much larger than the wave period $1/w$.

This fact is also seen by the following simple consideration.

Regarding the double image in gravitational lensing as the double-slit of Young's interference experiment, the angle of diffraction is $\theta \sim \lambda/d$, where λ is the wavelength and d is distance between the two images.

On the other hand, the deflection angle of gravitational lensing is $\alpha \sim d/r_l$, where r_l is the distance from observer to lens.

Then the condition $\theta \ll \alpha$ эквивалентно обоснованию, что временная задержка $\sim r_l \alpha^2 / c$ гораздо более, чем λ / c .

Для сферически симметричной линзы, точка $y = 0$ находится ровно за линзой, это каустика, созданная кольцом Эйнштейна.

The diffraction effect near this caustic is evaluated with Eq. (2 · 12) for small y .

When $w \rightarrow \infty$ and $y \ll w^{-1/2}$, Eq.

(2 · 12) yields

$$|F|^2 \simeq 2\pi w x_E^2 |1 - \psi''(x_E)|^{-1} J_0^2(w x_E y)$$

where x_E is a (positive) solution of $x = \psi'(x)$.

Therefore the maximum value of the amplification for a spherically symmetric lens is given by $2\pi w x_E^2 / |1 - \psi''(x_E)|$ in the short wavelength limit. 3.3.

немонохроматический света от протяженного источника в двух словах (пока что не актуально)

(там где-то начало уже было, тут тупо продолжение какое-то. У накамуры почему-то в двух местах теория эта)

Let $\tilde{\phi}_0(w, y)$ be the amplitude of unlensed waves which are emitted at a point y on the source plane with frequency w .

Наблюдаемая волновая амплитуда во время τ это суперпозиция линзированных амплитуд $F\tilde{\phi}_0$ по y и w :

$$\phi(\tau) = \int d^2 y \int dw F(w, y) \tilde{\phi}_0(w, y) e^{-i w \tau}$$

Когда источник наблюдается через полосовой фильтр, $\tilde{\phi}_0$ в этом уравнении отражает спектр источника y , умноженный на функцию фильтрации частоты.

Так как $\phi(\tau)$ вещественная, $\tilde{\phi}_0^*(w) = \tilde{\phi}_0(-w)$.

Actually ϕ_0 should also depend on time because of the fluctuation in the source activity.

This fluctuation of $\tilde{\phi}_0$ would be a stochastic process,

assuming that the source activity is stationary in time. Так что определим функцию корреляции наблюдаемой амплитуды волны как

$$C(\tau) = \frac{\langle \phi(\tau') \phi(\tau' + \tau) \rangle}{\langle |\phi(\tau')|^2 \rangle_{F=1}}$$

где символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю стохастических функций $\tilde{\phi}_0$. За счет стационарности излучения источника,

символ $\langle \dots \rangle$ можно интерпретировать как интеграл по τ' over sufficiently long time $\gg 1/w$. Assuming that the different parts of the source radiate incoherently, one has $\langle \tilde{\phi}_0(w, y) \tilde{\phi}_0^*(w', y') \rangle = \hat{I}(w, y) \delta(w - w') \delta^2(y - y')$, where $\hat{I}(w, y)$ is the source surface brightness (times the filtering function).

Therefore one obtains

$$C(\tau) = \int d^2 y \int dw |F(w, y)|^2 I(w, y) \cos(w\tau)$$

where $I(w, y) = \hat{I}(w, y) / \left[\int d^2 y \int dw \hat{I}(w, y) \right]$. The amplification factor of wave intensity is given by $C(0)$.

Пусть Δy и Δw буду типичными расстояниями на поверхности, на которых I не нулевая, а y и w будут центрами этой поверхности;

for example, Δy is the radius of a circular source whose center is at y , and Δw is the width of a band pass filter whose central frequency is w . For definiteness we assume that the source is sufficiently far from caustics, so that the semi-classical approximation (Eq.

(3 · 6)) is valid in this entire region.

Then substituting Eq.

(3 · 6) into Eq.

(2 · 15)

results in

$$C(\tau) = \text{Re} \{ e^{-i w \tau} [C_0(\tau) + C_1(\tau) + C_2(\tau)] \}$$

where

$$C_0(\tau) = \sum_j \int d^2 \mathbf{y}' |\mu_j(\mathbf{y}')| \tilde{I}(\tau, \mathbf{y}')$$

$$C_{1,2}(\tau) = \sum_{j < k} \int d^2 \mathbf{y}' |\mu_j(\mathbf{y}') \mu_k(\mathbf{y}')|^{1/2} e^{\pm i [w T_{jk}(\mathbf{y}') - \pi n_{jk}]} \tilde{I}[\tau \mp T_{jk}(\mathbf{y}'), \mathbf{y}']$$

$$\tilde{I}(\tau, \mathbf{y}') = \int dw' I(w', \mathbf{y}') e^{-i(w' - w)\tau}$$

The terms C_1 and C_2 arise from the interference between images, but the integral in Eq. (3.11) tends to erase the fringe pattern produced by the interference.

If the source size Δy is much larger than the typical fringe width $1/|w dT_{jk}/dy|$, or if the coherence time $1/\Delta w$ is much smaller than the typical time delay $|\tau \mp T_{jk}(\mathbf{y})|$, then this oscillatory integral makes C_1 and C_2 much smaller than C_0 .

Наоборот, когда размер источника соизмерим или меньше, чем ширина полос (??), всегда возможно выбрать такое значение τ , чтобы сделать интерференционный член C_1 или C_2 наблюдаемым.

(??) (e.g. Fig. 4).

In the short wavelength limit $w \rightarrow \infty$, the fringe width goes to zero and so the interference terms vanish.

The geometric optics approximation

учет поляризации в гравитационном линзировании это я не знаю, да и абсолютно не до такого вопроса.

о том, насколько некогерентность источника влияет на дифракционную картину насколько?

обзор пользы волнового описания линзирования

пример определения параметров системы по каустикам Приведем пример, как зная вид каустики, получить информацию об объектах линзирования, а укажем, как получать сами каустики.

(?)

пример задачи, в которой явно геометрическое описание не работает приведем этот пример.

3.2.2 волновая модель одиночной линзы и ее обобщения

Обсудим волновое описание линзирование одиночной линзы.

Это с одной стороны простой пример, с другой - много показывающий.

ТИПИЧНАЯ ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ОДИНОЧНОЙ ЛИНЗЫ

модель точечной линзы в двух словах Для одинокой гравитационной линзы $\varphi(x) = -\ln x$ и $D(x) = 1 - 1/x^4$.

Имеется два решения, $x_{\pm} = \frac{y}{2y} \left(y \pm \sqrt{4 + y^2} \right)$, соответствующие двум классическим лучам, один из которых идет через x_+ , на той же стороне, что и источник, вне кольца Эйнштейна $x = 1$. Этот луч дает решающий вклад в интенсивность в режиме слабого линзирования.

Другой луч идет через $x_- = -x_+/x_+^2$, на обратной стороне от линзы и внутри круга Эйнштейна.

Подставляя эти выражения в (4), получается $I = (2 + y^2) / \left(y \sqrt{4 + y^2} \right)$.

А в волновой оптике имеем

$$I = \frac{\pi\Omega}{1 - e^{-\pi I}} \left| {}_1F_1 \left(i\Omega/2, 1; i\Omega y^2/2 \right) \right|^2,$$

где ${}_1F_1$ гипергеометрическая функция, которая дает результат для волновой оптики при больших Ω .

(это изображено на рис....!!!)

Однако, при небольших возмущениях фазы возникает сильное изменение структуры каустики, а также интерференционной картины.

решение модели Обсудим решения модель линзирования типичной звезды.

(????) из формализма выше известно, что нам нужно просто решить уравнение (???)

$$F(w, y) = -iwe^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp \left\{ iw \left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x) \right] \right\}$$

с учетом того, что у нас именно точечная линза.

У типичной звезды имеется потенциал

$$U(r, \theta) = -GM / (r^2 - 2r_l r \cos \theta + r_l^2)^{1/2},$$

где M обозначает ее массу.

Подставим это в выражение $\hat{\psi}(\theta) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \theta)$, и, используя приближение $\theta \ll 1$, получаем линзирующий потенциал в виде $\hat{\psi}(\theta_l) = 4GM \ln \theta_l + \text{const}$, где постоянный член не важен, так как он вклад дает во все фазы F .

Масштабируя углы θ_* по углу Эйнштейна, получаем (?????)

$$\theta_* = \left(\frac{4GM r_{l0}}{r_l r_0} \right)^{1/2} \sim 3\mu \text{ arcsec} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{r_l r_0 / r_{l0}}{\text{Gpc}} \right)^{-1/2}.$$

Уравнения

$$x = \theta_l / \theta_*, \quad y = \theta_0 / \theta_*, \quad w = \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \theta_*^2 \omega$$

$$\psi(x) = \frac{r_{l0}}{r_l r_0} \theta_*^{-2} \hat{\psi}(\theta_* x), \quad T(x, y) = \frac{1}{2} |x - y|^2 - \psi(x),$$

дают нам, что

$$\psi(x) = \ln x, \quad w = 4GM\omega \sim 10^5 (M/M_\odot) (\nu/\text{GHz}).$$

Заметим, что $w \sim$ (гравитационный радиус от массивной линзы) / (длина волны) - это большая величина в типичных задачах астрофизики.

В любом случае, уравнение $F(w, y) = -iwe^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp \left\{ iw \left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x) \right] \right\}$ интегрируется аналитически, в итоге фактор усиления от монохроматических волн от точечного источника имеет вид:

$$|F|^2 = \frac{\pi w}{1 - e^{-\pi w}} \left| {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}iw, 1; \frac{1}{2}iwy^2 \right) \right|^2 \quad (3.2)$$

где ${}_1F_1$ это гипергеометрическая функция.

В пределе больших длин волн $w \rightarrow 0$, фактор усиления равен единице, и усиление не происходит, то есть по сути волна игнорирует линзу.

Когда $w \gg 1$, фактор усиления точно оценивается квазиклассическим приближением, которое работает, пока $y \gg 1/w$, и $|F|^2 \simeq \pi w J_0^2(wy)$ справедливо, пока $y \ll w^{-1/2}$.

Функция временной задержки $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - \ln x$ имеет две стационарных точки, точку минимума x_1 и стационарную точку x_2 :

$$x_{1,2} = \frac{y}{2y} \left(y \pm \sqrt{y^2 + 4} \right), \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}}$$

Функция временной задержки соответственно,

$$T_{12} = \frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 4} + \ln \frac{\sqrt{y^2 + 4} + y}{\sqrt{y^2 + 4} - y}, \quad n_{12} = \frac{1}{2}$$

В итоге квазиклассическое приближение решения волнового уравнения для точечной линзы имеет вид:

$$|F|^2 = \frac{y^2 + 2 + 2 \sin(wT_{12})}{y\sqrt{y^2 + 4}}$$

В случае $y \ll 1$, получаем выражение

$$|F|^2 \simeq [1 + \sin(2wy)]/y.$$

Член с синусом выражает интерференцию от двух изображений, за счет него появляются круговые дифракционные кольца.

(!!!! тут возникает кольцо Эйнштейна, так что подумаем про это!!!!)

The critical curve (cf. §3.2) is a circle of radius $x = 1$ (Einstein ring) on the lens plane, and the caustic is the single point $y = 0$ on the source plane where Eq. (4 · 6) diverges.

As discussed in §3.2, however, Eq. (4 · 6) is invalid when the time delay between the two images, $T_{12} \simeq 2y$, is comparable to or smaller than the wave period $1/w$.

In reality the amplification $|F|^2$ at $y = 0$ remains finite due to the diffraction and has a maximum value $\pi w / (1 - e^{-\pi w})$ according to Eq. (4.3).

The maximum amplification $\simeq \pi w$ is of order \sim (gravitational radius) / (wavelength) when this ratio is much larger than unity.

простейшие возмущения

пока тут только одно

модель потенциала $-\ln|x| - \frac{1}{2}\gamma(x_1^2 - x_2^2)$ **как простейшее возмущение одиночной линзы** Шаг вперед может быть добавка в потенциал челна

$$\varphi(x) = -\ln|x| - \frac{1}{2}\gamma(x_1^2 - x_2^2).$$

Такой член может, например, отражать гравитационное притяжение второй линзирующей массы.

Для такого потенциала существует четыре стационарные точки, две из которых зависят от того, y находится вне или внутри каустической кривой (положений y при которых $D(x)$ исчезает).

Посчитаем линзирующий интеграл (2) переходы в полярные координаты $x = (x_1, x_2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$.

Теперь только радиальная часть интеграла сложно вычисляема, потому что в нее входит бесконечное число осцилляций.

Перенесем r контур на соответствующий наперсток Лифшица и проинтегрируем по r и θ численно.

Типичная картинка интенсивности показана на Fig. 2.

Более реалистичная ситуация линзирования в случае

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\log(\|\mathbf{x}\|) + \frac{1}{2}\gamma(x^2 - y^2),$$

где $\mathbf{x} = (x, y)$ и величина константы сдвига в потенциале $0 \leq \gamma \leq 1$.

Этот дополнительный член может, например, отражать наличие внешней массы, находящейся на расстоянии $\gamma^{-1/2}$ от линзы.

В геометрическом приближении одиночная линза со сдвиговым потенциалом создает Лагранжево отображение

$$\xi(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \mathbf{x} + \gamma(-x, y),$$

которое отображает точки от плоскости линзы на экран.

каустическая кривая Это отображение создает каустику на критической кривой, определяемой условием

$$\det(\nabla \xi) = 0.$$

Кривая имеет вид: (???)

$$\mathcal{M} = \left\{ r(\cos \theta, \sin \theta) \mid r = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sqrt{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2 2\theta} - \gamma \cos 2\theta} \text{ and } \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

(см тут рис мб вставляю)

Отображение Лагранжа переводит критическую кривую в каустическую $\xi(\mathcal{M})$, состоящую из четырех кривых складки (?) между четырех пиковых точек, формируя искривленный ромб.

(!!! выделю описание ромба подробно)

подготовка интеграла к программному расчету (????) (пока не готов внятно сказать, что и зачем тут пишет Турок.)

Этот ромб это кривая, на которой интенсивность в приближении геометрической оптики расходится.

Интеграл Френеля-Кирхгофа имеет четыре седловые точки, из которых или две, или все являются вещественными, в зависимости от того, находят ли $\boldsymbol{\mu}$ вне или внутри каустической кривой.

Области вне и внутри каустической кривой представляют собой области двойного и четырехкратного изображения соответственно.

Чтобы посчитать линзирующий интеграл в волновом приближении, перейдем к полярным координатам, с центром в линзе $\mathbf{x} = r(\cos \theta, \sin \theta)$.

В этих координатах подынтегральное выражение это аналитическая функция угловых и радиальных координат:

$$\psi(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\nu}{2\pi i} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\{i\nu \left[((r \cos \theta - \mu_x)^2 + (r \sin \theta - \mu_y)^2)/2 - \log r + \frac{\gamma}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right]\} r d\theta dr,$$

где обозначено $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y)$.

Так как угловой интеграл берется по компактной области, воспользуемся теорией Пикара-Лефшеца для радиальной части: (???)

$$g_\theta(\boldsymbol{\mu}) \equiv \int_{\mathcal{J}_\theta} \exp\{i\nu \left[((r \cos \theta - \mu_x)^2 + (r \sin \theta - \mu_y)^2)/2 - \log r + \frac{\gamma}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] + \log r\} dr,$$

с наперстком Лефшеца \mathcal{J}_θ , который представляет собой деформацию в комплексную плоскость исходной области интегрирования $(0, \infty)$.

Вид такого контура можно получить из теории Пикара-Лефшеца, убирая осцилляции из радиальной части. (????)

(тут Фелдбругге рисует диаграмму для Пикара-Лефшеца, мб я тоже нарисую, все-таки как строить ее - не понимаю пока что.)

Оставшийся интеграл по θ

$$\psi(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\nu}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g_\theta(\boldsymbol{\mu}) d\theta,$$

считается обычными методами. (???)

итоговые результаты для сдвигового потенциала (и далее у нас те самые дифракционные интегралы, которые нужно мне бы посчитать наконец-то)

программная реализация

(тут кстати не мало займет место, по сути статья ту рока)

Приведем идейные соображения, которые позволят реализовать модель одиночной линзы, а также эту модель с разными сдвиговыми потенциалами программными средствами. Заинтересовавшийся читатель может найти конкретные коды и инструкции в дополнениях.

главные строчки кода

3.2.3 модель линзирования протяженным источником

пример линзирования протяженным источником Как было обсуждено ранее, интерференционный член $\sin(wT_{12})$ исчезает, когда размер источника гораздо больше, чем расстояние между интерференционными полосами.

This width is π/w at $y \ll 1$ for waves of frequency w , and becomes narrower for larger y .

Поэтому, если размер источника гораздо больше, чем r_0 , то

$$\theta_*(\pi/w) = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{r_0 r_{l0}}{4GM r_l}} \sim 10^7 \text{ km} \left(\frac{\nu}{\text{GHz}} \right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{\text{Gpc}} \right)^{1/2},$$

тогда приближение геометрической оптики выполняется и

$$|F|^2 = (y^2 + 2) / \left(y \sqrt{y^2 + 4} \right).$$

In Fig. 3 is plotted the amplification factor for a circular source of radius Δy whose center is on the caustic $y = 0$.

Here uniform brightness and a monochromatic spectrum are assumed:

$$I(w', y') \propto H(\Delta y - y') \delta(w' - w)$$

where H это ступенчатая функция. (??)

The solid curves are the full results $C(0) = 2 \int_0^{\Delta y} dy |F|^2 / (\Delta y)^2$ (cf. Eq. (2 · 15)) with $w = 10^2, 10^3$ and 10^4 from bottom to top, and the dashed curve is the geometric optics approximation $C_0(0) = [1 + (2/\Delta y)^2]^{1/2}$ (cf. Eq. (3 · 10)). This figure reveals that the diffraction as well as the interference is unimportant when the source size is much larger than Eq. (4 · 7).

As for non-monochromatic waves, the interference terms $C_1(0)$ and $C_2(0)$ (Eq. (3.11)) vanish even for a point source, when the coherence time $1/\Delta w$ is much smaller than the time delay T_{12} (cf. §3.3). For example, for a point source and a uniform spectrum $I(w', y') \propto \delta^2(\mathbf{y}' - \mathbf{y}) H(\Delta w - |w' - w|)$, $C(0)$ becomes Eq. (4.6) with the sine term multiplied by $j_0(\Delta w T_{12})$ (where $j_0(x) = \sin x/x$). Therefore the wave effects are unimportant when $\Delta w T_{12} \gg 1$ as regards $C(0)$. However, if one observes not only $C(0)$ but also $C(\tau)$ with variable τ , then it is possible to detect C_1 or C_2 regardless of Δw . In Fig. 4 $|C_1(\tau)|$ is plotted for a circular source located at $y = 1$. A uniform brightness and a Gaussian spectrum,

$$\tilde{I}(\tau, y') \propto H(\Delta y - |\mathbf{y}' - \mathbf{y}|) \exp[-(\Delta w \tau / 2)^2],$$

are assumed.

Since C_0 and C_2 are negligible

3.2.4 волновая модель бинарной линзы

Обсудим волновое описание линзирования бинарной системы.

модель

итоговые свойства модели (????)

решу - потом пропишу.

потенциал $\varphi(x) = -f_1 \log|x + r| - f_2 \log|x - r|$ **бинарной линзы** Для бинарной линзы возьмем

$$\varphi(x) = -f_1 \log|x + r| - f_2 \log|x - r|,$$

с $f_1 + f_2 = 1, f_1 > f_2$ и $r = (a, 0)$. Например, $f_1 = 2f_2$

Кривая каустики \mathcal{C} показана на рисунке Fig. 3 (a).

Для каждого y , Eq. (5) имеет пять корней x .

Все они вещественные для y внутри \mathcal{C} . Так как y подходит к \mathcal{C} изнутри, мы имеем особенность типа складка, где две точки экстремума перекрываются, или cusp singularity, когда пересекаются три точки.

На таких особенностях интенсивность от лучевой оптики расходится.

Если y находится вне \mathcal{C} , интенсивность падает очень быстро с $I \propto (\Delta y)^{-1}$ вне каустики. Самые левые и самые правые точки каустики самые яркие.

Для задачи волновой оптики мы используем эллиптические координаты с фокусами в $\pm r$, $x(\tau, \sigma) = a(\cosh \tau \cos \sigma, \sinh \tau \sin \sigma)$, где $0 < \tau < \infty$ и $0 < \sigma \leq 2\pi$.

На каждом σ , мы переносим τ контур на соответствующий наперсток Лефшеца, прежде чем интегрировать по τ и σ численно.

Удобно расширить интеграл по τ на вещественную ось до аналитического продолжения. Он принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\left(\frac{1}{2}(x(\tau, \sigma) - y)^2 + \varphi(\tau, \sigma)\right) + \ln J(\sigma, \tau)}$$

где $\varphi(\tau, \sigma) = -f_1 \log(aC_+) - f_2 \log(aC_-)$, также $C_{\pm} = \cosh \tau \pm \cos \sigma$, $J(\tau, \sigma) = \frac{a^2}{2}(\cosh 2\tau - \cos 2\sigma)$.

Для вещественных σ , мнимая часть подынтегрального выражения $\text{Im}(\tau)$ периодическая с периодом 2π , с пятью комплексными седловыми точками на отрезке $-\pi \leq \text{Im}[\tau] < \pi$.

Для каждого σ имеется много точек на $\tau = \pm i\sigma, \pm i(\sigma - \pi)$ и $\pm i(\sigma - 2\pi)$, на которых экспонента (6) расходится.

После аналитического продолжения подынтегрального выражения, интеграл сходится на двух направлениях с асимптотами в $\tau = -\infty - i\frac{\pi}{4}$ и $\tau = +\infty + i\frac{\pi}{4}$.

Соответствующие наперстки Пикара-Лефшеца находятся при переносе вдоль τ контура.

Итоговую интенсивность см на рис. 3.

Near the leftmost and rightmost cusps, the pattern resembles that for a point lens in a shear field. For further details and a selection of intensity maps, see [13].

The binary gravitational lens is described by the phase variation

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|) - f_2 \log(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\|).$$

где мы обозначим $\mathbf{x}_1 = (-a, 0)$ и $\mathbf{x}_2 = (a, 0)$ для некоторого $a > 0$.

В эллиптических координатах,

$$\mathbf{x}(\tau, \sigma) = a(\cosh \tau \cos \sigma, \sinh \tau \sin \sigma),$$

где $0 < \tau < \infty$ and $0 < \sigma \leq 2\pi$.

У эллиптических координат геометрические есть два фокуса, находящихся в координатах центров бинарной системы \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 .

Постоянная контура τ создает овал вокруг фокуса.

(см рис мб вставляю)

with $\mathbf{r} = (a, 0)$ for some $a > 0$.

Отображение Лагранжа

$$\xi(\mathbf{x}) = \left(x_1 - \frac{f_1(x_1 + a)}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|} - \frac{f_2(x_1 - a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}, x_2 - \frac{f_1 x_2}{|\mathbf{x} + \mathbf{r}|} - \frac{f_2 x_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \right)$$

может быть использовано, чтобы создать критическую кривую $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \mid \det \nabla \xi(\mathbf{x}) = 0\}$ и каустическую кривую, $\xi(\mathcal{M})$.

Можно легко показать (?), что вне каустической кривой три изображения дают вклад в интенсивность.

Два изображения из которых были в основном получены от одной из двух линз, а третье - за счет системы вместе.

Внутри каустической кривой область, при которой имеется пять изображений.

(?) Декартовы координаты неудобны, потому что подынтегральная функция имеет разрез на вещественной оси, так что перейдем в эллиптические координаты:

$$\mathbf{x}(\tau, \sigma) = a(\cosh \tau \cos \sigma, \sinh \tau \sin \sigma),$$

где $0 < \tau < \infty$ и $0 < \sigma \leq 2\pi$.

Геометрически, эти координаты имели два фокуса на местах масс нашей бинарной системы $\mp \mathbf{r}$.

Контур с постоянной τ формирует овал вокруг фокусов.

(мб вставляю рисунок)

Контур с постоянной σ проходит между двумя фокусами.

Fig. 5 - Elliptic coordinates for $a = 1$. The red curves are the constant τ contours. The blue curves are constant σ contours. The black line segments connect the upper green point to the foci, at $\mathbf{x} = (\pm 1, 0)$, of the elliptic coordinate system.

Note that the variables τ and σ resemble the radial and angular polar variables r and θ .

В эллиптических координатах выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| &= a(\cosh \tau + \cos \tau), \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\| &= a(\cosh \tau - \cos \tau).\end{aligned}$$

Якобиан перехода из декартовых в эллиптические координаты равен

$$J(\tau, \sigma) = \frac{a^2}{2}(\cosh 2\tau - \cos 2\sigma).$$

Аналогично случаю одиночной гравитационной линзы, вычислим радиальный τ -интеграл по теории Пикара-Лефшеца:

$$g_\sigma(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathcal{J}_\sigma} \exp \left\{ i\nu \left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}(\tau, \sigma) - \boldsymbol{\mu})^2 - f_1 \log(a(\cosh \tau + \cos \tau)) - f_2 \log(a(\cosh \tau - \cos \tau)) \right] + \log(J(\tau, \sigma)) \right\} d\tau. \quad (3.3)$$

Таким образом, интеграл перешел на наперсток Лефшеца \mathcal{J}_σ .

(тут можно нарисовать П-Л диаграмму, и пояснить, что на ней, но я пока не умею это, у Турока есть это мб)

В итоге амплитуда выражается через интеграл по угловым переменным по компактной области,

$$\psi(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\nu}{4\pi i} \int_0^{2\pi} g_\sigma(\boldsymbol{\mu}) d\sigma,$$

который может быть посчитан обычными численными методами.

программная реализация

итоговые результаты для бинарной линзы (много картинок наделаю от Турока позже)

контуры временной задержки для бинарной системы Накамура получил там хаотические контуры.

супер странно! не пойму, почему это?

здесь приведем их.

(?? почему) координаты изображений совпадают с координатами стационарных точек для контуров временной задержки $T(\mathbf{x})$. (!!!!???)

также мы считаем замкнутые циклы в нем.

тоже непонятно, как это делается?

частотная зависимость фактора усиления амплитуды для геометрического и волнового описания (речь от тех графиках колебаний у Накамуры в конце статьи. получим и их тоже)

вроде тут самое интересное то, что мы всего лишь сдвинули γ , а график стал прямо очень заметно другим.

(ниже пока предварительное описание этих графиков, сперва сам их построю, а там посмотрим)

Finally Figs. 9(a) and 9 (b) show the amplification factor $|F|^2$ as a function of the frequency w for a point source in Figs. 6(a) and 6(b).

The dotted, dashed and solid curves correspond to the semi-classical approximation $|F_c|^2$ (Eq. (3·6)), the contribution from the diffraction $|F_d|^2$ (Eq. (5·6)) which is noticeable at low frequencies, and the full result $|F_c + F_d|^2$ respectively.

In Fig. 9(a) $|F|^2$ simply oscillates with period $2\pi/\Delta T$, corresponding to the time delay $\Delta T \sim 0.6$ between the two images in Fig. 6(a).

On the other hand, the spectrum in Fig. 9(b) is rather complex because $|F_c|^2$ has six interference terms out of the four images in Fig. 6(b). Also in Fig. 9(b) the diffraction is noticeable up to high frequency $w \sim 80$ because of the small time delay $\Delta T \sim 0.013$ between the two bright images near the critical curve. This figure exemplifies the conclusion in §3.2 that the diffraction effect is significant when a point source is located near a caustic.

еще как-то график для tide F, но я не пойму, как им пользоваться зачем-то он есть у Накамуры, потом дойду.

графики

типичные графики

!!!! 1д смотрим то, что в 2д вставлено кстати, есть идея тупо шаблоном 1д графика прочитать бинарный файл от 2д графика. что-то интересное уже получается, подумаю про это потом больше.

понять для этого код нужно, чего я не успею до конца науки

оставшиеся вопросы

откуда круги на графиках такие странные круги внезапные!!!
см примерно любой график.

3.2.5 различные типичные волновые модели

дифракция на особенности типа складка

(накамура)

простейшая модель A fold caustic is a one-dimensional curve on the y -plane characterized by $\text{rank} [\partial_a \partial_b T(x)] = 1$.²¹ Examples of fold (and cusp) caustic are found in the elliptical lens model for the galaxy,²² a point mass lens perturbed by external shear²³ Fig. 6), a collection of point mass lenses,²⁴ etc.

A point source of monochromatic waves is located at y close to the fold caustic. Let y_0 be a point on the caustic closest to the source, and let x_0 be the corresponding point on the critical curve satisfying $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 - \partial\psi(\mathbf{x}_0)$ (cf. Eq. (3·1)). In computing the diffraction integral (Eq. (2·11)), we neglect possible contributions from stationary points of $T(\mathbf{x})$ far from \mathbf{x}_0 , since the integral near \mathbf{x}_0 should be the dominant contribution to the wave amplitude.

We set Cartesian coordinates $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ and $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ such that $\partial_1^2 T(\mathbf{x}_0)$ and $\partial_1 \partial_2 T(\mathbf{x}_0)$ vanish using $\text{rank} [\partial_a \partial_b T(\mathbf{x}_0)] = 1$ (Then the tangent vector to the caustic at y_0 is parallel to the y_2 -axis.) The time delay $T(x) = \frac{1}{2}|x - y|^2 - \psi(x)$ is expanded around x_0 as

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}} + \frac{\bar{x}_2^2}{2p} + \frac{1}{6} \sum_{abc} \bar{x}_a \bar{x}_b \bar{x}_c \partial_a \partial_b \partial_c T(\mathbf{x}_0) + \dots$$

where $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, and $p = 1/[\partial_2^2 T(\mathbf{x}_0)] = 1/[1 - \partial_2^2 \psi(\mathbf{x}_0)]$ is assumed to be of order unity. Due to the absence of a \bar{x}_1^2 term, the third order terms contribute to the diffraction

integral in the \bar{x}_1 -direction. The fold caustic further requires the non-vanishing of $\partial_1^3 T(\mathbf{x}_0)$ (which guarantees the non-vanishing of the tangent vector to the fold caustic at \mathbf{y}_0), and we choose θ_* (Eq. (2 · 10)) so that $q = 2/[\partial_1^3 T(\mathbf{x}_0)] = -2/[\partial_1^3 \psi(x_0)]$ is of order unity.

In the case of a point mass lens with external shear or a collection of point mass lenses,²⁴) the choice of θ_* in Eq. (4 · 1) makes q order unity. Without loss of generality q is taken to be positive by inversion of coordinates ($\bar{\mathbf{x}} \leftrightarrow -\bar{\mathbf{x}}$ and $\bar{\mathbf{y}} \leftrightarrow -\bar{\mathbf{y}}$). We omit all the third order terms except the \bar{x}_1^3 term, since these terms ($\bar{x}_1^2 \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2^2$ and \bar{x}_2^3) do not contribute to the wave amplitude (Eq. (2 · 11)) in the short wavelength limit $w \rightarrow \infty$.

Without these terms the caustic and critical lines coincide with the \bar{y}_2 -axis and \bar{x}_2 -axis, respectively, and the amplification factor of the wave intensity is

$$|F|^2 = \frac{w^2}{4\pi^2} \left| \int d\bar{x}_1 \int d\bar{x}_2 \exp \left[iw \left(-\bar{x}_1 \bar{y}_1 - \bar{x}_2 \bar{y}_2 + \frac{\bar{x}_2^2}{2p} + \frac{\bar{x}_1^3}{3q} \right) \right] \right|^2, \\ = 2\pi\mu_* \text{Ai}^2(-\bar{y}_1/Y)$$

where $\mu_* = |p|(q^2 w)^{1/3}$, $Y = (qw^2)^{-1/3}$ and Ai is the Airy function. When $|\bar{y}_1|^{3/2} \gg 1/w$, Eq. (4 · 10) is evaluated accurately by the semi-classical approximation. On the positive side $\bar{y}_1 > 0$ of the caustic, the phase of Eq. (4.9) has two stationary points (cf. Eq. (3 · 6)):

$$\bar{\mathbf{x}}_{\pm} = (\pm\sqrt{q\bar{y}_1}, p\bar{y}_2), \quad \mu_{\pm} = \pm \frac{1}{2}p(q/\bar{y}_1)^{1/2}$$

$$\Delta T = T(x_-) - T(x_+) = \frac{4}{3}(q\bar{y}_1^3)^{1/2}, \quad n_- - n_+ = 1/2$$

On the negative side $\bar{y}_1 < 0$, there are not real stationary points but are imaginary ones. Hence the semi-classical approximation of Eq. (4.10) is

$$|F|^2 = |p|(q/|\bar{y}_1|)^{1/2} \times \begin{cases} 1 + \sin(w\Delta T), & (\bar{y}_1 > 0) \\ \frac{1}{2} \exp(-w|\Delta T|), & (\bar{y}_1 < 0) \end{cases}$$

In Fig. 5(a) $|F|^2$ is plotted as a function of \bar{y}_1 . As a point source crosses the caustic line $\bar{y}_1 = 0$ from its positive side to its negative side with fixed \bar{y}_2 , one observes two images of equal brightness which approach each other, merge on the critical line $\bar{x}_1 = 0$, and finally disappear. The sine term expresses the interference between these two images, and according to Eq. (4 · 13) the wave intensity diverges at the instant of merging. As discussed in §3.2, however, the semi-classical approximation is invalid when the source is so close to the caustic that the time delay between the two images, $|\Delta T| \sim |\bar{y}_1|^{3/2}$, is comparable to or smaller than the wave period $1/w$. In reality, according to Eq. (4.10), the amplification factor $|F|^2$ has a finite value of $0.792\mu_*$ at $\bar{y}_1 = 0$, and a maximum value of $1.803\mu_*$ at $\bar{y}_1 = 1.019Y$. Despite the absence of images on the negative side of the caustic, the wave intensity on that side is not exactly zero but decreases exponentially with $|\bar{y}_1|$, due to the diffraction of waves from the positive side.

The width between interference fringes is $\sim Y \sim w^{-2/3}$ at small \bar{y}_1 and becomes narrower for larger \bar{y}_1 . Therefore, from the discussion in §3.3, if the size of an extended source is much larger than $r_0\theta_*/w^{2/3} \sim$

$$\left[\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{(4GM\omega^4)^{1/3}} \right]^{1/2} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ km} \left(\frac{\nu}{\text{GHz}} \right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/6} \left(\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{\text{Gpc}} \right)^{1/2}$$

then the geometric optics approximation, $|F|^2 = \mu_*(\bar{y}_1/Y)^{-1/2} H(\bar{y}_1)$, is satisfactory (where H is the step function). In Fig. 5(b) – (d) is plotted the amplification factor for extended sources of various sizes $\Delta y = 0.2Y, 0.5Y$ and Y . A Gaussian brightness profile and monochromatic

spectrum, $I(w', \mathbf{y}') \propto \exp[-(|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|/\Delta y)^2/2] \delta(w' - w)$, are assumed. (Figure 5 is independent of the value of w .) Solid and dotted curves represent the full result $C(0)$ (cf. Eq. (2 · 15)) and the geometric optics approximation $C_0(0)$ (cf. Eq. (3 · 10)), respectively. This figure verifies the above statement that both the diffraction and the interference are insignificant when the source size is much larger than Eq. (4.14).

3.2.6 Волновая оптика гравитационных линз

(тут пока что теория от Захарова, разберу - будет вписано в нормальную теорию)
5.1.

Предварительные сведения

5.1.1.

Пример асимптотического разложения

5.1.2.

Оптика в искривленном пространстве-времени

5.1.3.

Усиление вблизи особенности типа складки.

5.2.

Взаимная интерференция изображений

введение

5.2.2.

Уравнение линзы, критические кривые, каустики

5.2.3.

Общие положения

5.2.4.

О стационарных кривых

5.2.5.

Решение уравнения линзы в окрестности критической точки

5.2.6.

Расчет степени взаимной когерентности

5.2.7.

Случай двухточечной линзы

5.2.8.

Обсуждение

Дифракция

5.3.1.

Интенсивность света вблизи каустики

Обсуждения

3.2.7 Разные модели

выгрузки мб потом на раскидку

В завершение теории остановимся на паре коротких концепций, имеющих большое отношение к реальным случаям линзирования и стимулирующих дальнейшие исследования.

Немонохроматические волны от протяженного источника Обозначим как $\tilde{\phi}_0(w, \beta)$ амплитуду нелинзированных волн, которые излучены из точки y на поверхности источника с частотой w . Наблюдаемая амплитуда волны во время τ есть суперпозиция каждой линзированной волны $F\tilde{\phi}_0$ по всем β и w :

$$\phi(\tau) = \int d^2\beta \int dw F(w, \beta) \tilde{\phi}_0(w, \beta) e^{-i w \tau}.$$

Когда источник наблюдается через полосовой фильтр, $\tilde{\phi}_0$ в этом уравнении повторяет спектр источника на β , умноженный на функцию фильтрации частоты. Так как $\phi(\tau)$ вещественна, $\tilde{\phi}_0^*(w) = \tilde{\phi}_0(-w)$.

Более того, ϕ_0 должна также зависеть от времени, потому что существуют флуктуации излучения на источнике. Такая флуктуация $\tilde{\phi}_0$ будет стохастическим процессом, если считать, что активность источника постоянна с течением времени.

Поэтому определим функцию корреляции наблюдаемой амплитуды как

$$C(\tau) = \frac{\langle \phi(\tau') \phi(\tau' + \tau) \rangle}{\langle |\phi(\tau')|^2 \rangle_{F=1}}$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю стохастических функций $\tilde{\phi}_0$.

За счет постоянства активности источника, $\langle \dots \rangle$ можно также интерпретировать как интеграл по τ' за достаточно большое время $\gg 1/w$.

Считая, что разные части источника излучают некогерентно, можно посчитать среднее как

$$\langle \tilde{\phi}_0(w, \beta) \tilde{\phi}_0^*(w', \beta') \rangle = \hat{I}(w, \beta) \delta(w - w') \delta^2(\beta - \beta'),$$

где $\hat{I}(w, \beta)$ это яркость поверхности источника. Следовательно, корреляционная функция может быть представлена в виде:

$$C(\tau) = \int d^2\beta \int dw |F(w, \beta)|^2 I(w, \beta) \cos(w\tau)$$

где $I(w, \beta) = \hat{I}(w, \beta) / \left[\int d^2\beta \int dw \hat{I}(w, \beta) \right]$.

Фактор усиления интенсивности дается выражением $C(0)$.

Дифракция возле особенностей линзирующего отображения Согласно геометрической оптике, фактор усиления изображений $|\gamma_j|$ от точечного источника расходится, когда изображение находится на критической кривой, которая определяется как кривая, на x -плоскости, определенная как $\det [\partial_a \partial_b T(\mathbf{x})] = 0$.

Каустика это соответствующая кривая на β -плоскости, отображенная $\partial T(\mathbf{x}) = 0$. (??) (Figure 6 shows an example of a critical curve and a caustic.)

Namely, when a point source is located near a caustic, some of the images are near a critical curve and have infinitely large magnifications.

Конечно, такие расходимости, это следствие аппроксимации (3 · 4), потому что $|\partial^2 T|$ слишком мала, чтобы удовлетворить (3.3). (??)

Thus the wave amplitude is written as a sum of two terms: $F = F_c + F_d$.

The second term F_d , the diffraction part, is given by Eq.

(2.11) evaluated exactly around these images near the critical curve.

This term describes the diffraction phenomenon in the sense that the non-geodesic paths contribute significantly to the wave amplitude.

Первый член F_c , то есть квазиклассическая часть уравнения (3 · 4), это вклад от нормальных изображений. (?)

Equation (3.3) roughly states that the diffraction effect is unimportant when the time delay T_{jk} between images is much larger than the wave period $1/w$.

This fact is also seen by the following simple consideration.

Regarding the double image in gravitational lensing as the double-slit of Young's interference experiment, the angle of diffraction is $\theta \sim \lambda/d$, where λ is the wavelength and d is distance between the two images.

On the other hand, the deflection angle of gravitational lensing is $\alpha \sim d/r_l$, where r_l is the distance from observer to lens.

Then the condition $\theta \ll \alpha$ эквивалентно обоснованию, что временная задержка $\sim r_l \alpha^2 / c$ гораздо более, чем λ / c .

Для сферически симметричной линзы, точка $\beta = 0$ находится ровно за линзой, это каустика, созданная кольцом Эйнштейна.

The diffraction effect near this caustic is evaluated with Eq. (2 · 12) for small β .

When $w \rightarrow \infty$ and $\beta \ll w^{-1/2}$, Eq.

(2 · 12) yields

$$|F|^2 \simeq 2\pi w x_E^2 |1 - \psi''(x_E)|^{-1} J_0^2(w x_E \beta)$$

where x_E is a (positive) solution of $x = \psi'(x)$.

Therefore the maximum value of the amplification for a spherically symmetric lens is given by $2\pi w x_E^2 / |1 - \psi''(x_E)|$ in the short wavelength limit. 3.3.

немонохроматический света от протяженного источника в двух словах (пока что не актуально)

(там где-то начало уже было, тут тупо продолжение какое-то. У накамуры почему-то в двух местах теория эта)

Let $\tilde{\phi}_0(w, \beta)$ be the amplitude of unlensed waves which are emitted at a point y on the source plane with frequency w .

Наблюдаемая волновая амплитуда во время τ это суперпозиция линзированных амплитуд $F\tilde{\phi}_0$ по β и w :

$$\phi(\tau) = \int d^2\beta \int dw F(w, \beta) \tilde{\phi}_0(w, \beta) e^{-i w \tau}$$

Когда источник наблюдается через полосовой фильтр, $\tilde{\phi}_0$ в этом уравнении отражает спектр источника β , умноженный на функцию фильтрации частоты.

Так как $\phi(\tau)$ вещественная, $\tilde{\phi}_0^*(w) = \tilde{\phi}_0(-w)$.

Actually ϕ_0 should also depend on time because of the fluctuation in the source activity.

This fluctuation of $\tilde{\phi}_0$ would be a stochastic process,

assuming that the source activity is stationary in time. Так что определим функцию корреляции наблюдаемой амплитуды волны как

$$C(\tau) = \frac{\langle \phi(\tau') \phi(\tau' + \tau) \rangle}{\langle |\phi(\tau')|^2 \rangle_{F=1}}$$

где символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю стохастических функций $\tilde{\phi}_0$. За счет стационарности излучения источника,

символ $\langle \dots \rangle$ можно интерпретировать как интеграл по τ' over sufficiently long time $\gg 1/w$. Assuming that the different parts of the source radiate incoherently, one has $\langle \tilde{\phi}_0(w, \beta) \tilde{\phi}_0^*(w', \beta') \rangle = \hat{I}(w, \beta) \delta(w - w') \delta^2(\beta - \beta')$, where $\hat{I}(w, y)$ is the source surface brightness (times the filtering function).

Therefore one obtains

$$C(\tau) = \int d^2\beta \int dw |F(w, \beta)|^2 I(w, \beta) \cos(w\tau)$$

where $I(w, \beta) = \hat{I}(w, \beta) / \left[\int d^2\beta \int dw \hat{I}(w, y) \right]$. The amplification factor of wave intensity is given by $C(0)$.

Пусть $\Delta\beta$ и Δw буду типичными расстояниями на поверхности, на которых I не нулевая, а β и w будут центрами этой поверхности;

for example, $\Delta\beta$ is the radius of a circular source whose center is at y , and Δw is the width of a band pass filter whose central frequency is w . For definiteness we assume that the source is sufficiently far from caustics, so that the semi-classical approximation (Eq.

(3 · 6)) is valid in this entire region.

Подстановка

$$|F|^2 = \sum_j |\mu_j| + 2 \sum_{j < k} |\mu_j \mu_k|^{1/2} \cos(wT_{jk} - \pi n_{jk})$$

в уравнение

$$C(\tau) = \int d^2y \int dw |F(w, \mathbf{y})|^2 I(w, \mathbf{y}) \cos(w\tau)$$

дает

$$C(\tau) = \text{Re} \left\{ e^{-i w \tau} [C_0(\tau) + C_1(\tau) + C_2(\tau)] \right\}$$

where

$$C_0(\tau) = \sum_j \int d^2\beta' |\gamma_j(\beta')| \tilde{I}(\tau, \mathbf{y}')$$

$$C_{1,2}(\tau) = \sum_{j < k} \int d^2\beta' |\gamma_j(\beta') \gamma_k(\beta')|^{1/2} e^{\pm i[wT_{jk}(\beta') - \pi n_{jk}]} \tilde{I}[\tau \mp T_{jk}(\beta'), \mathbf{y}']$$

$$\tilde{I}(\tau, \beta') = \int dw' I(w', \beta') e^{-i(w' - w)\tau}$$

The terms C_1 and C_2 arise from the interference between images, but the integral in Eq. (3.11) tends to erase the fringe pattern produced by the interference.

If the source size $\Delta\beta$ is much larger than the typical fringe width $1/|wdT_{jk}/dy|$, or if the coherence time $1/\Delta w$ is much smaller than the typical time delay $|\tau \mp T_{jk}(\beta)|$, then this oscillatory integral makes C_1 and C_2 much smaller than C_0 .

Наоборот, когда размер источника соизмерим или меньше, чем ширина полос (??), всегда возможно выбрать такое значение τ , чтобы сделать интерференционный член C_1 или C_2 наблюдаемым.

In the short wavelength limit $w \rightarrow \infty$, the fringe width goes to zero and so the interference terms vanish.

The geometric optics approximation

пример линзирования протяженным источником Как было обсуждено ранее, интерференционный член $\sin(wT_{12})$ исчезает, когда размер источника гораздо больше, чем расстояние между интерференционными полосами.

This width is π/w at $\beta \ll 1$ for waves of frequency w , and becomes narrower for larger y .

Поэтому, если размер источника гораздо больше, чем r_0 , то

$$\theta_E(\pi/w) = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{r_0 r_{l0}}{4GM r_l}} \sim 10^7 \text{ km} \left(\frac{\nu}{\text{GHz}} \right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{\text{Gpc}} \right)^{1/2},$$

тогда приближение геометрической оптики выполняется и

$$|F|^2 = (\beta^2 + 2) / (\beta \sqrt{y^2 + 4}).$$

Here uniform brightness and a monochromatic spectrum are assumed:

$$I(w', \beta') \propto H(\Delta\beta - \beta') \delta(w' - w)$$

where H это ступенчатая функция. (??)

The solid curves are the full results $C(0) = 2 \int_0^{\Delta\beta} d\beta \beta |F|^2 / (\Delta y)^2$ (cf. Eq. (2 · 15)) with $w = 10^2, 10^3$ and 10^4 from bottom to top, and the dashed curve is the geometric optics approximation $C_0(0) = [1 + (2/\Delta\beta)^2]^{1/2}$ (cf. Eq. (3 · 10)). This figure reveals that the diffraction as well as the interference is unimportant when the source size is much larger than Eq. (4 · 7).

As for non-monochromatic waves, the interference terms $C_1(0)$ and $C_2(0)$ (Eq. (3.11)) vanish even for a point source, when the coherence time $1/\Delta w$ is much smaller than the time delay T_{12} (cf. §3.3). For example, for a point source and a uniform spectrum $I(w', \beta') \propto \delta^2(\beta' - \beta) H(\Delta w - |w' - w|)$, $C(0)$ becomes Eq. (4.6) with the sine term multiplied by $j_0(\Delta w T_{12})$ (where $j_0(x) = \sin x/x$). Therefore the wave effects are unimportant when $\Delta w T_{12} \gg 1$ as regards $C(0)$. However, if one observes not only $C(0)$ but also $C(\tau)$ with variable τ , then it is possible to detect C_1 or C_2 regardless of Δw . In Fig. 4 $|C_1(\tau)|$ is plotted for a circular source located at $\beta = 1$. A uniform brightness and a Gaussian spectrum,

$$\tilde{I}(\tau, \beta') \propto H(\Delta\beta - |\beta' - \beta|) \exp[-(\Delta w \tau/2)^2],$$

are assumed.

Since C_0 and C_2 are negligible

линзирование в трехмерном случае

тоже интересный вопрос, пока не брался

3.3 Линзирование в рамках геометрической оптики

обсудим всю геометрическую теорию линзирования.

(почитаю Вайнберга, пока не дошел к сожалению!)

линзирования космической струной

(см. Вайнберг)

доказательство того, что геометрическое линзирование на самом деле имеет смысл — то есть из волнового уравнения покажем явно этот предел и перейдем к лучам. Далее им будем пользоваться.

3.3.1 геометрическая модель точечной линзы

обсудим самый простой пример — линзирование точечной массой.
(Накамура)

еще одно описание линзы, только от Захарова Рассмотрим основные понятия теории гравитационных линз на примере точечной гравитационной линзы.

Будем считать, что свет движется не по кривой, похожей на гиперболу, а по асимптотам этой кривой. (??)

Ясно также, что идеальная гравитационная линза является ахроматической, но в реальной ситуации разные части источника могут иметь различный цвет, и, тем самым, могут возникнуть различные эффекты, связанные с цветом.

Итак, рассмотрим идеальную точечную гравитационную линзу.

Пусть расстояние между источником и наблюдателем — D_s , расстояние между гравитационной линзой и наблюдателем — D_d , расстояние между гравитационной линзой и источником — D_{ds} .

Проведем через точку, в которой находится гравитационная линза, плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей линзу и наблюдателя, которую назовем плоскостью линзы.

Аналогично через источник проведем плоскость, параллельную плоскости линзы, которую назовем плоскостью источника.

(???? какими параметрами всё описываем??? это важно указать!!)

Тогда в предположении, что угол отклонения мал уравнение гравитационной линзы имеет следующий вид

$$\eta = D_s \xi / D_d + D_{ds} \Theta(\xi)$$

где векторы η , ξ определяют координаты в плоскости источника и в плоскости линзы соответственно, а угол определяется из соотношения

$$\Theta(\xi) = 4GM\xi/c^2\xi^2$$

Для условия, когда наблюдатель находится на одной прямой ($\eta = 0$), приравняем к нулю правую часть этого уравнения.

Соответствующее значение

$$\xi_0 = \sqrt{4GM D_d D_{ds} / (c^2 D_s)}$$

называется радиусом Эйнштейна-Хвольсона.

Можно вычислить так- же угол Эйнштейна-Хвольсона

$$\theta_0 = \xi_0 / D_d.$$

Вычислим значение угла θ_0 для типичной ситуации, когда гравитационной линзой и источником являются звезды, и когда источником является квазар, а гравитационной линзой галактика.

Будем считать, что $D_s \gg D_d$, тогда

$$\theta_0 \approx 2'' \times 10^{-3} \left(\frac{GM}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{\text{кпк}}{D_d} \right)^{-1/2}$$

Если гравитационная линза это одна из ближайших галактик с массой $M = 10^{12} M_\odot$, удаленная на расстояние $D_d = 100$ кпк, то $\theta_0 \approx 200''$.

Если линза находится на расстоянии 1 кпк от наблюдателя (возможно, в нашей Галактике) и имеет массу порядка солнечной $M = M_\odot$, то $\theta_0 \approx 2'' \times 10^{-3}$.

Запишем уравнение линзы, отнормировав угловые переменные на угол Эйнштейна-Хвольсона, а именно, используя переменные

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}/\xi_0, \quad \mathbf{y} = D_s \boldsymbol{\eta}/(\xi_0 D_d), \quad \alpha = \Theta D_{ds} D_d / (D_s \xi_0)$$

тогда уравнение гравитационной линзы имеет вид:

$$y = x - \alpha(x) \quad \text{или} \quad y = x - x/x^2$$

Решая это уравнение относительно x , получаем

$$x^\pm = y \left[1/2 \pm \sqrt{1/4 + 1/y^2} \right]$$

Отсюда без труда может быть вычислено расстояние между изображениями источника:

$$x^+ = y \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}} \right], \quad x^- = y \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}} \right],$$

поэтому

$$l = x^+ + x^- = 2y \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}}$$

качественное объяснение Нетрудно понять качественно, почему возникает двойное изображение источника при обратно пропорциональной зависимости угла отклонения луча света от прицельного параметра (легко видеть, что подобное рассуждение остается в силе и в том случае, если угол отклонения луча света (возможно в среде) есть монотонно убывающая функция прицельного параметра, такая, что последующие рассуждения оказываются применимыми).

Действительно, рассмотрим плоскость $u_1 0 v_1$, в которой находятся источник, гравитационная линза и наблюдатель.

Пусть гравитационная линза находится в начале координат, наблюдатель на оси абсцисс ($u_1 > 0$), и положение источника характеризуется значениями координат ($u_1 < 0, v_1 > 0$).

Пусть источник испускает лучи во всевозможных направлениях, тогда в любую точку на полупрямой $0u_1$ ($u_1 > 0, v_1 = 0$) попадает луч от источника при движении луча в полуплоскости ($v_1 > 0$).

Это связано с зависимостью угла отклонения от прицельного параметра $\Theta \sim p^{-1/2}$.

Аналогично для каждой точки на полупрямой $0u_1$ существует такое направление луча, частично проходящего в полуплоскости ($v_1 < 0$), попадающего в эту точку.

Т.о., если мы имеем точечный источник, а гравитационная линза - материальная точка, то всегда возникает двойное изображение, за исключением вырожденного случая, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой. В реальных ситуациях, в случае, когда источник значительно удален от оси $0u_1$, изображение, соответствующее

прохождению луча света частично в полуплоскости ($v_1 < 0$), может экранироваться гравитационной линзой (безусловно, в этом случае модель материальной точки для гравитационной линзы является неудовлетворительной). В случае, если $y \ll 1$, то $l \approx 2$, т.е. расстояние между изображениями порядка диаметра Эйнштейна. На рис. 1.3 – 1.4 представлены изображения источника при разном расстоянии источника от начала координат. Легко понять, почему круглый источник имеет изображения, вытянутые вдоль окружности с центром в начале координат. Действительно рассмотрим источник, расположенный недалеко от начала координат $y \ll 1$. Тогда его изображения находятся вблизи Окружности Эйнштейна (x_+ вне круга, x_- внутри). Дуга окружности с центром в начале координат и проходящая через точки пересечения диаметра источника, перпендикулярного оси абсцисс, отображается в два сильно вытянутые изображения (примерно в $1/y$ раз).

Рассмотрим, как изменяется при преобразовании гравитационной линзой размер источника в радиальном направлении, в предположении, что источник находится на оси абсцисс

(это предположение можно сделать без ограничения общности)

При $y \rightarrow 0$

$$\frac{dx^\pm}{dy} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{2} + O(y^2)$$

поэтому ясно, что изображения сужаются в этом направлении примерно в два раза по сравнению с источником. В случае, если точечный источник находится на оси симметрии, изображение является кольцом, которое впервые обсуждалось в работе Хвольсона (1924), а затем в заметке Эйнштейна (1965б). Следует заметить, что выше цитировалось утверждение Эйнштейна о том, что маловероятно наблюдать подобное кольцо. Более точно было бы говорить в данном случае о том, что наблюдать подобное кольцо в случае точечного источника невозможно, т. к. кольцо является структурно неустойчивым (Арнольд (1978)), поскольку при малом изменении параметров кольцо исчезает и появляется два точечных изображения (Захаров (1992), (1993), (1994)). В случае, если источник не точечный, тогда появление кольца в принципе возможно, хотя и менее вероятно, чем появление дуг.

Определим коэффициент усиления гравитационных линз. Следует заметить, что вследствие того, что коэффициент усиления изображения больше 1 (в некоторых случаях), рассматриваемое искривление света гравитирующим телом может называться гравитационным линзированием, а гравитирующее тело - гравитационной линзой. Если мы введем вместо линейных величин угловые, а именно рассмотрим $\theta = \xi/D_0$, $\beta = \eta/D_s$, то изменение величины телесного угла при переходе от источника к изображениям характеризуется коэффициентом усиления гравитационной линзы. Т.о., если источнику соответствовал телесный угол $\Delta\omega_0$, а изображениям - телесный угол

$\Delta\omega$, то коэффициент усиления равен

$$\mu = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} = |\det d\beta/d\theta|^{-1} = |\det d\mathbf{y}/d\mathbf{x}|^{-1}$$

поскольку $\mathbf{y} = \beta/\theta_0$, $\mathbf{x} = \theta/\theta_0$.

Выберем систему координат для заданной точки т.о., что $x_2 = y_2 = 0$. Вычислим якобианы преобразования $x_\pm \mapsto y$ (в точке $y = (y_1, 0)$), которые будем обозначать $\mu_\pm = |\det dx^\pm/dy|$.

В этом случае лишь диагональные члены определителя отличны от нуля, а именно:

$$\left. \frac{\partial x_{1\pm}}{\partial y_1} \right|_{(y_1,0)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y_1}{\sqrt{4+y_1^2}} \right), \quad \left. \frac{\partial x_{2\pm}}{\partial y_2} \right|_{(y_1,0)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{4+y_1^2}}{y_1} \right)$$

Тогда

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \left(\frac{y_1}{\sqrt{4 + y_1^2}} + \frac{\sqrt{4 + y_1^2}}{y_1} \pm 2 \right)$$

и ясно, что отношение коэффициентов усиления изображений определяется следующим соотношением

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \left(\frac{\sqrt{4 + y_1^2} + y_1}{\sqrt{4 + y_1^2} - y_1} \right)^2$$

Рассмотрим предельные значения для величин μ_{\pm} и их отношения при малом отклонении источника от оси симметрии $y_1 \rightarrow 0$ (аналогично Шнайдеру и др. (1992)) $\mu_+ = \frac{1}{2y_1} + \frac{1}{2} + O(y_1)$, $\mu_- = \frac{1}{2y_1} - \frac{1}{2} + O(y_1)$, $\frac{\mu_+}{\mu_-} = 1 + y_1 + O(y_1^2)$.

В пределе $y_1 \rightarrow \infty$ получим $\mu_+ = 1 + y_1^{-4} + O(y_1^{-6})$, $\mu_- = y_1^{-4} + O(y_1^{-6})$, $\frac{\mu_+}{\mu_-} = y_1^4 + O(y_1^0)$. Следует заметить, что модель точечной гравитационной линзы (с помощью которой можно проследить возникновение двойного изображения), хотя и является весьма поучительной, но, по-видимому, использовать ее следует с большой осторожностью, поскольку в реальных ситуациях или угловое расстояние между изображениями слишком мал (мал угол Эйнштейна как в наблюдаемых случаях микролинзирования), или линза имеет большую массу и большие размеры, так что ее нельзя рассматривать как материальную точку (как в первых наблюдаемых примерах гравитационных линз).

изменение размера источника в радиальном направлении Рассмотрим, как изменяется при преобразовании гравитационной линзой размер источника в радиальном направлении, в предположении, что источник находится на оси абсцисс (это предположение можно сделать без ограничения общности). При $y \rightarrow 0$

$$\frac{dx^{\pm}}{dy} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{4 + y^2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{2} + O(y^2)$$

(и там дальше куча теории, которую не хочу просто разбирать, ее слишком много)

линзирование в случае нахождения источника и линзирующего объекта ровно на одной прямой с наблюдателем решим такую задачу.

3.3.2 слабое линзирование

(пока что эта глава тут, потом посмотрим, может перенесу)

слабое линзирование в двух словах

начало слабого линзирования от Вайнбега Для космологии наиболее обещающее применение гравитационных линз, по всей видимости, состоит в обследовании слабого линзирования, в изучении искажения изображений удаленных галактик многочисленными небольшими отклонениями света по пути к нам сквозь слегка неоднородное распределение вещества.

Рассмотрим луч света от точечного источника в удаленной галактике с сопутствующими координатами $r_s \hat{n}$, где \hat{n} — единичный вектор.

Независимо от того, являются промежуточные линзы галактиками, или галактическими скоплениями, или сгустками межгалактического вещества, о полном отклонении можно думать как о сумме отклонений, вызванных встречами светового луча с точечными линзами L с массами m_L , с координатами \mathbf{x}_L . Поскольку в полном отклонении будут

рассматриваться вклады только первого порядка, эти линзы можно считать отдельными частицами, даже если они входят в состав протяженных объектов.

Для слабого линзирования значение угла α_L между направлениями к источнику и линзе много больше параметра «кольца Эйнштейна» β_{EL} для линзы L , поэтому, как мы видели, возникает единственное изображение, получающееся выбором знака «+» в уравнении (9.1.6), из которого при $\alpha \ll \beta_E$ получается обусловленное присутствием линзы значение отклонения $\beta_{+L} - \alpha_L = \beta_{EL}^2 / \alpha_L$.

Разложим сопутствующий пространственный вектор линзы \mathbf{x}_L на параллельные и перпендикулярные световому лучу компоненты:

$$\mathbf{x}_L = r_L \hat{n} + \mathbf{y}_L, \quad r_L \equiv \hat{n} \cdot \mathbf{x}_L, \quad \mathbf{y}_L \equiv \mathbf{x}_L - \hat{n} (\hat{n} \cdot \mathbf{x}_L)$$

Линза L отклоняет световой луч в направлении $-\hat{y}_L$, поэтому полное отклонение, вызванное всеми имеющимися линзами равно

$$\Delta \hat{n} = - \sum_L \frac{\hat{y}_L \beta_{EL}^2}{\alpha_L} = - \sum_L \hat{y}_L \frac{4M_L G d_y(LS)}{d_y(ES) d_y(EL) \alpha_L}$$

где для любых точек P и Q $d_y(PQ)$ является расстоянием по угловому диаметру до Q , если смотреть из точки P .

Согласно определению расстояния по угловому диаметру $d_y(EL)$ до линзы, если смотреть на нее с Земли, угол между направлениями до источника и линзы равен $\alpha_L = a_L |\mathbf{y}_L| / d_y(EL)$, где a_L - это масштабный фактор Робертсона-Уокера в момент прохождения светом линзы L . Помимо этого, удобно воспользоваться уравнением (9.1.2) и записать $d_y(LS) = a(t_S) r(r_L, r_S)$ и $d_y(ES) = a(t_S) r_S$, где t_S - время испускания света источником, а $r(r_L, r_S)$ и r_S являются радиальными координатами источника в системе координат Робертсона-уокера с началами отсчета соответственно на линзе и на Земле.

Согласно уравнению (9.2.15), получаем

$$r(r_L, r_S) = r_S \sqrt{1 - K r_L^2} - r_L \sqrt{1 - K r_S^2}$$

Тогда отклонение равно

$$\Delta \hat{n} = - \sum_L \mathbf{y}_L \frac{4M_L G r(r_L, r_S)}{r_S a_L |\mathbf{y}_L|^2}$$

Само по себе полученное выражение бесполезно, потому что, как правило, мы не знаем, где будет находиться изображение точки источника в отсутствие линз.

Более интересно рассмотреть вариацию отклонения по отношению к положению точки испускания луча.

Предположим, что рассматривается малое изменение θ неотклоненного направления в точку испускания луча, причем θ перпендикулярно \hat{n} и $|\theta| \ll 1$. Тогда изменение вектора \mathbf{y}_L от светового луча до линзы L в точке наибольшего сближения, вызванное смещением источника, равно

$$\delta \mathbf{y}_L = -\theta (\hat{n} \cdot \mathbf{x}_L) - \hat{n} (\theta \cdot \mathbf{x}_L)$$

Отбрасывая пропорциональный \hat{n} вклад, видим, что в первом порядке изменение отклонения изображения в направлении поперечном к лучу зрения равно

$$\Delta \theta_a = \sum_b M_{ab}(r_S, \hat{n}) \theta_b$$

где индексы a и b нумеруют два ортогональных направления, поперечных к \hat{n} , а $M_{ab}(r_S, \hat{n})$ — это 2×2 матрица сдвигов для изображений источника на расстоянии r_S :

$$M_{ab}(r_S, \hat{n}) = \sum_L \frac{4M_L G r(r_L, r_S) r_L}{r_S a_L} \left(\frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{y}_L|^2} - \frac{2y_{La}y_{Lb}}{|\mathbf{y}_L|^4} \right)$$

Удобно переписать эту матрицу в следующем виде

$$M = \begin{pmatrix} \kappa + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix}$$

где κ называется сжатием, а γ_i известны как поле сдвигов.

Матрицу сдвигов можно удобным образом переписать в терминах возмущения полного ньютоновского потенциала с учетом линз⁴⁰)

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = - \sum_L \frac{M_L G}{a_L |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L(t)|} = - \sum_L \frac{M_L G}{a_L [(r - r_L(t))^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_L(t))^2]^{1/2}}$$

где $\mathbf{x} = r\hat{n} + \mathbf{y}\hat{n} \cdot \mathbf{y} = 0$ Здесь явно учитывается тот факт, что линзы могут иметь временную зависимость, вследствие, например, пекулярного движения или эволюции Вселенной.

В уравнении (9.5.6) используются сокращения

$$r_L \equiv r_L(t_{r_L}), \quad \mathbf{y}_L \equiv \mathbf{y}_L(t_{r_L}),$$

где t_r — момент времени, когда световая волна, приходящая к нам сейчас, имела радиальную координату r , задаваемую

$$r = \int_0^{t_r} \frac{dt}{a(t)}$$

В частности, вторые поперечные производные потенциала на световом луче равны

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0} = \\ & = \sum_L \frac{M_L G}{a_L} \left(\frac{\delta_{ab}}{[(r - r_L(t))^2 + |\mathbf{y}_L(t)|^2]^{3/2}} - \frac{3y_{La}(t)y_{Lb}(t)}{[(r - r_L(t))^2 + |\mathbf{y}_L(t)|^2]^{5/2}} \right) \end{aligned}$$

Функции $((r - r_L)^2 + |\mathbf{y}_L|^2)^{-3/2}$ и $((r - r_L)^2 + |\mathbf{y}_L|^2)^{-5/2}$ имеют острые максимумы в $r = r_L$, поэтому интеграл от этой второй производной, умноженной на любую гладкую функцию $f(r)$ (гладкую в том смысле, что она мало меняется при изменении r на величину порядка $|\mathbf{y}_L|$), равен

$$\int f(r) dr \left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} = \sum_L \frac{f(r_L) M_L G}{a_L} \left(\frac{2\delta_{ab}}{|\mathbf{y}_L|^2} - \frac{4y_{La}y_{Lb}}{|\mathbf{y}_L|^4} \right)$$

Сравнивая полученное выражение с (9.5.6), видим, что матрица сдвигов M_{ab} для источника с радиальной координатой r_S равна

$$M_{ab}(r_S, \hat{n}) = 2 \int_0^{r_S} \frac{r(r, r_S) r}{r_S} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} dr$$

Поэтому измерение матрицы сдвигов может дать информацию о возмущениях гравитационного потенциала массами, расположенными вдоль луча зрения.

В частности,

сворачивая индексы a и b , получаем, что

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{tr } M = \int_0^{r_S} \frac{r(r, r_S) r}{r_S} \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} dr$$

Если линзирование возникает благодаря присутствию набора объектов (таких как скопления галактик), которые все находятся примерно на одном радиальном расстоянии r_L , то при больших $|r - r_L|$ функция $\delta\phi$ быстро убывает, так что фактор $r(r, r_S) r$ можно заменить на $r(r_L, r_S) r_L$, при этом интеграл можно положить равным нулю.

С помощью уравнения Пуассона

$$a^{-2} \nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho_m$$

итоговое выражение можно представить в терминах флуктуации плотности $\delta\rho_M$

$$\kappa = \frac{4\pi G(t_{r_L}) d_y(LS) d_y(EL)}{d_y(ES)} \int \delta\rho_M(r\hat{n}, t_{r_L}) a(t_{r_L}) dr$$

интеграл берется по значениям r , проходящим сквозь линзу.

Следовательно, предполагая, что нам известны расстояния по угловому диаметру, возникающие в (9.5.10), измерение значения κ для источников, видимых в некоторых направлениях, может дать плотность полной массы скопления линзирующих масс, расположенных вдоль луча зрения, спроецированных на плоскость, поперечную этому лучу зрения.

(далее у Вайнбегра куча теории, которой займусь не совсем в ближайшее время)

4 Формализм и математика для линзирования

(по идее тут основная теория)

4.1 Темы по Захарову

(по Захарову обязательно буду писать)

(пока что это то, что я не понял, так что просто оставил на каком-то этапе. пока не увижу конкретное использование этого - бесполезно писать это)

(вообще, много мотивации все это переписать и разобраться, просто сперва с на самом деле нормальными статьями завершу, потом сюда пойду.)

вкратце о виде уравнения линзы и его решениях

(а как оно выглядит?)

4.1.1 Векторные поля Якоби

захаров говорит, что много монографий им посвящено, но вряд ли я буду ими заниматься, посмотрим.

мотивация

у захарова с этого начинается теория, а я всё не пойму, зачем они?

обзор векторных полей

(?? вкратце о всех них)

Векторные поля Якоби рассматриваются в теории вариационного исчисления при анализе второй вариации функционала.

Известно, что если имеется задача нахождения экстремалей функционала, $S[\gamma]$

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} L(x, \dot{x}) dt,$$

то необходимым условием того, что на кривой γ реализуется минимум (или максимум) функционала $S[\gamma]$, является то, что кривая $\gamma : x^i = x^i(t)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

В частности, известно, что если $L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, то уравнение Эйлера-Лагранжа для экстремалей совпадает с уравнением геодезической

вторая вариация через оператор Якоби

Для нахождения минимума функционала $S[\gamma]$, где γ удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа, необходимо вычислить билинейную форму (вторую вариацию)

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} S[\gamma + \lambda \xi + \mu \eta] \right|_{\lambda=0, \mu=0} = G_{\gamma}(\xi, \eta) = G_{\gamma}(\eta, \xi)$$

где η, ξ - векторные поля, заданные на кривой $\gamma(t)$, обращающиеся в нуль в точках $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Справедливо следующее утверждение: если $\gamma : \{x^i = x^i(t)\}$ удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа, то имеет место соотношение (??? откуда "??")

$$G_{\gamma}(\xi, \eta) = - \left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} S[\gamma + \lambda \xi + \mu \eta] \right|_{\lambda=0, \mu=0} = - \int_a^b (J_{ij} \xi^j) \eta^i dt$$

где

$$J_{ij} \xi^j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \xi^j \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{\xi}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \xi^j$$

Линейный оператор J , действующий на векторные поля $\xi(t)$, заданные вдоль кривой γ , называется оператором Якоби.

вторая вариация для геодезических

Рассмотрим случай, где уравнения Эйлера-Лагранжа совпадают с уравнениями геодезической. Выберем действие в виде

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$$

Тогда справедлива

Теорема: (докажу ее в дополнениях, если дойду)

Билинейная форма $G_{\gamma}(\xi, \eta)$ для функционала $S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$ и любой геодезической $\gamma : \{x^i = x^i(t)\}$ имеет вид

$$G_{\gamma}(\xi, \eta) = - \int_a^b (\nabla_{\dot{x}}^2 \xi^j + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R_{jkl}^i) \eta^m g_{im} dt$$

или

$$G_\gamma(\xi, \eta) = - \int_a^b \langle J\xi, \eta \rangle dt,$$

где оператор Якоби в случае геодезической имеет вид:

$$(J\xi)^i = \nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R_{jkl}^i,$$

R_{jkl}^i - тензор кривизны, t - натуральный параметр вдоль геодезической.

Напомним, что если операцию ковариантного дифференцирования тензора $T_{(j)}^{(i)}$, $((i), (j))$ - мультииндексы) обозначать ∇ , т.е.

$$\nabla_k T_{(j)}^{(i)} \equiv T_{(j);k}^{(i)},$$

то производная по направлению вектора $\xi = (\xi^k)$ любого тензора $T_{(j)}^{(i)}$ типа (p, q) , равна

$$\nabla_\xi T_{(j)}^{(i)} = \xi^k \nabla_k T_{(j)}^{(i)}$$

определение поля Якоби

Введем следующее определение: векторное поле ξ вдоль экстремали γ называется якобиевым, если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi = 0$ (?) и обращается в нуль на концах.

В частности, для функционала $S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$ имеем

$$(J\xi)^i = \nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R_{jkl}^i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

или в координатах

$$\dot{x}^k \nabla_k (\dot{x}^j \nabla_j \xi^i) + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R_{jkl}^i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Это уравнение называется также уравнением девиации геодезических.

(место мотивации, зачем оно)

сопряженные точки

Имеет место также следующее определение: точки P и Q называются сопряженными вдоль геодезической γ , идущей из P в Q , если существует ненулевое якобиево поле ξ вдоль кривой γ .

Укажем геометрический смысл определения сопряженных точек.

Грубо говоря, точки P и Q сопряжены, если "бесконечная геодезическая" пересекает кривую γ в точках P и Q .

Например, северный и южный полюс для сферы в римановой геометрии являются сопряженными точками каждой "широтной геодезической" (меридиана).

Тем не менее, заметим, что в определении требуется только существование поля Якоби, обращающегося в нуль в точках P и Q , а не существование геодезической, отличной от γ и проходящей через точки P и Q .

И обратно, существование геодезической, отличной от γ и проходящей через P и Q не означает, что точки P и Q сопряжены и не означает даже, что существует некоторая точка, сопряженная точке P и находящаяся между P и Q .

(место мотивации, зачем они)

о том, насколько нужны векторные поля Якоби

(?)

может, можно жить спокойно, не зная вообще их?

4.1.2 Вывод уравнения линзы

изучим подход Захарова, а потом сравним с Накамуры

В настоящем разделе рассматривается вывод уравнения гравитационной линзы для достаточно общих пространственно-временных псевдоримановых многообразий.

Приведем вывод уравнения гравитационной линзы и получим доказательство теоремы об усилении изображений гравитационной линзой, опираясь лишь на формализованные и вполне естественные гипотезы.

поля девиации (???)

Рассмотрим приближение геометрической оптики для уравнений Максвелла в пространстве-времени со структурой $(M, g_{\alpha\beta})$, причем локально плоская электромагнитная волна, распространяясь без взаимодействия с веществом, связывается с конгруэнцией (?) нулевых геодезических, которые описывают световые лучи.

Рассмотрим траекторию луча света (описываемую кривой γ_0) и обозначим через Y^α любой вектор (поле Якоби) девиации, связывающий γ_0 с другой светоподобной геодезической из своей окрестности.

Тогда $k_\alpha Y^\alpha$ — константа на γ_0 .

Если рассмотреть 4-скорость U^α наблюдателя в событии p на кривой γ_0 , то можно получить, что Y^α — пространственно-подобный вектор для вектора U^α , т. е. $U_\alpha Y^\alpha = 0$.

(????)

сопряженные события и пучки

Введем следующее определение: два события p, q сопряжены на γ_0 , если существует тождественно не равное нулю поле Якоби, которое есть нуль в точках p и q .

Для такого поля Якоби справедливо соотношение $k_\alpha Y^\alpha = 0$.

Вектор отклонения, удовлетворяющий последнему уравнению, связывает лучи, содержащиеся в одной и той же фазовой гиперплоскости $S = \text{const}$.

Эти семейства будем называть пучками.

свойства векторов девиации Y^α

Для векторов девиации имеет место соотношение $k_\alpha Y^\alpha = 0$, и размер, форма и ориентация пучка не зависят от 4-скорости наблюдателя.

Выбрав 4-скорость U^α наблюдателя в событии p на кривой γ^0 , можно выбрать векторы девиации для всех лучей в окрестности.

Кроме соотношения $k_\alpha Y^\alpha = 0$, выполнено также $U_\alpha Y^\alpha = 0$.

(позже это дополним)

экран - определение и свойства

Векторы девиации для всех лучей в окрестности точки наблюдения образуют двумерное пространственно-подобное подпространство касательного пространства M_p в точке p , называемое экраном, адаптированным к k_α и U^α .

(свои комментарии тут позже запишу, так что всё это будет объяснено мной подробно)

конусы событий и каустики (???)

Рассмотрим нулевой конус будущего C_s^+ для события s , т.е. всевозможные лучи, испускаемые из точки, соответствующей событию s .

Конус прошлого \mathcal{C}_o^- - соответствует всевозможным событиям, которые могут быть наблюдаемы в событии O .

\mathcal{C}_o^- образуется всеми нулевыми геодезическими, заканчивающимися в событии O .

Множество всех событий, сопряженных с вершиной O на таких лучах, образует каустику \mathcal{C}_o^- .

(???)

\mathcal{C}_o^- имеет форму гиперконуса только между O и первым листом каустики.

Затем это многообразие может бифурцировать и самопересекаться.

(?????)

В этом и состоит теоретическое основание феномена появления кратных изображений при гравитационном линзировании.

(???)

дифференциал по аффинному параметру и наблюдатель (???)

Рассмотрим наблюдателя, обладающего скоростью U^{α} в точке O , $U^{\alpha}U_{\alpha} = 1$ и световой конус прошлого.

Выберем аффинный параметр λ этих лучей т.о., что

1) $\lambda = 0$ в точке O ,

2) λ увеличивается в прошлое,

3) в точке O имеет место $\tilde{k}_{\alpha}U^{\alpha}_o = -1$.

Тогда $k^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$ направлен в прошлое, и для событий на \mathcal{C}_o бесконечно близких к точке O , $d\lambda$ характеризует расстояние от точки O , измеренное выбранным наблюдателем.

(????)

Величина k^{α} связана с волновым вектором следующим образом: $k^{\alpha} = -\omega_0 \dot{k}^{\alpha}$ если ω_0 - частота, связанная с волновым числом k^{α} в событии O .

Заметим, что величина \tilde{k}^{α} является кинематической в том смысле, что все монохроматические волны движутся в направлении, определяемом этим вектором.

Пусть γ_0 описывает траекторию луча, и пусть $U^{\tilde{\alpha}}$ параллельный перенос на γ_0 вектора U^{α}_o .

экран и уравнение изменения его компонент (???)

Вдоль γ_0 выберем ортонормированный базис $(E^{\alpha}_1, E^{\alpha}_2)$ на экранах, адаптированных к векторам \tilde{k}^{α} и U^{α} .

Векторы девиации на пучке с "центром" γ_0 могут быть записаны как $Y^{\alpha} = -\xi_1 E^{\alpha}_1 - \xi_2 E^{\alpha}_2 - \xi_3 \tilde{k}^{\alpha}$, (компоненты $\xi_3 U^{\alpha}$ нет, поскольку справедливо соотношение $U_{\alpha}Y^{\alpha} = 0$).

Тогда компоненты экрана меняются в соответствии с соотношением

$$\dot{\xi} = S_{ij}\xi_j,$$

где $S_{ij} = E^{\alpha}_i \tilde{k}_{\alpha;\beta} E^{\beta}_j$ и точка означает дифференцирование по отношению к аффинному параметру.

В матричной форме последнее уравнение имеет вид

$$\dot{\xi} = S\xi$$

матрица оптической деформации S и оптические скаляры

Матрица оптической деформации определяется с помощью оптических скаляров Сакса, т.е. скоростью расширения пучка

$$\theta(\lambda) = \tilde{k}^{\alpha}_{;\alpha}/2$$

и комплексной скоростью сдвига

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \tilde{k}_{;\beta}^{\alpha} \epsilon^{*\alpha}(\lambda) \epsilon^{*\beta}(\lambda),$$

где $\epsilon^{\alpha} = E_1^{\alpha} + iE_2^{\alpha}$.

В соответствии с введенными ранее определениями, можно определить матрицу

$$\mathcal{S}(\lambda) = \begin{pmatrix} [\theta(\lambda) - \operatorname{Re} \sigma(\lambda)] & \operatorname{Im} \sigma(\lambda) \\ \operatorname{Im} \sigma(\lambda) & [\theta(\lambda) + \operatorname{Re} \sigma(\lambda)] \end{pmatrix}$$

Поскольку $k_{\alpha} = -S_{,\alpha}$ — градиент фазы, то ясно, что \mathcal{S} симметричная матрица.

Дифференцируя по λ соотношение $\dot{\xi} = \mathcal{S}\xi$, получим

$$\ddot{\xi}(\lambda) = \mathcal{T}\xi(\lambda)$$

где $\mathcal{T} = \dot{\mathcal{S}} + \mathcal{S}^2$.

Вводя обозначения $\mathcal{R} := \theta + \theta^2 + |\sigma|^2$, $\mathcal{F} := \dot{\sigma} + 2\theta\sigma$, можно где \mathcal{T} по получить выражение для оптической приливной матрицы \mathcal{T}

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} [\mathcal{R}(\lambda) - \operatorname{Re} \mathcal{F}(\lambda)] & \operatorname{Im} \mathcal{F}(\lambda) \\ \operatorname{Im} \mathcal{F}(\lambda) & [\mathcal{R}(\lambda) + \operatorname{Re} \mathcal{F}(\lambda)] \end{pmatrix}$$

где оптические скаляры

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda) &= -\frac{1}{2} R_{\beta\gamma} \tilde{k}^{\beta}(\lambda) \tilde{k}^{\gamma}(\lambda) \\ \mathcal{F}(\lambda) &= -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha*}(\lambda) \tilde{k}^{\beta}(\lambda) \epsilon^{\gamma*}(\lambda) \tilde{k}^{\delta}(\lambda) \end{aligned}$$

Оптическая приливая (ух, Захаров...) матрица симметрична вследствие симметрии тензора конформной кривизны.

Уравнения для $\mathcal{R}(\lambda)$ и $\mathcal{F}(\lambda)$ определяют, каким образом тензор Риччи и тензор конформной кривизны влияют на эволюцию бесконечно малого светового пучка.

Эти уравнения эквивалентны уравнению девиации геодезических (уравнению Якоби) для экранных векторов.

(про них тут подробнее раскрою, что за скаляры то?)

решение уравнения Якоби

Из линейности уравнения Якоби следует, что его решение связано с начальным условием $\theta := \xi(0)$ линейным преобразованием, зависящим от λ , т.е.

$$\xi(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)\theta$$

Поскольку $\xi(0) = 0$ и $\dot{\xi}(0) = \theta$, то $\mathcal{D}(\lambda)$ определяется или дифференциальным уравнением

$$\ddot{\mathcal{D}}(\lambda) = \mathcal{T}(\lambda)\mathcal{D}(\lambda)\theta$$

с начальными условиями $\mathcal{D}(0) = 0$, $\dot{\mathcal{D}}(0) = I$, или эквивалентным ему линейным интегральным уравнением

$$\mathcal{D}(\lambda) = \lambda I + \int_0^{\lambda} d\lambda' (\lambda - \lambda') \mathcal{T}(\lambda') \mathcal{D}(\lambda')$$

Заметим, что в отличие от \mathcal{S} и \mathcal{T} , матрица \mathcal{D} , вообще говоря, не симметрична.

Из обыкновенного дифференциального уравнения для $\mathcal{D}(\lambda)$ следует, что

1) Если $\mathcal{T}(\lambda)$ непрерывно дифференцируема k раз, то $\mathcal{D}(\lambda)$ непрерывно дифференцируема $k + 2$ раз.

2) $\mathcal{D}^T \mathcal{D} - \mathcal{D}^T \dot{\mathcal{D}}$ – первый интеграл отображения Якоби.

Действительно, при $\lambda = 0$, как следует из интегрального уравнения выше, справедливо равенство $\mathcal{I}_1 = \dot{\mathcal{D}}^T \mathcal{D} - \mathcal{D}^T \dot{\mathcal{D}} = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что производная от \mathcal{I}_1 не зависит от времени, тем самым \mathcal{I}_1 – первый интеграл отображения Якоби.

(??????)

связь аффинного параметра и сопряженной вершины (???)

Согласно приведенным ранее определениям, значение параметра λ_c соответствует точке p_c , сопряженной вершине (наблюдателю), тогда и только тогда, когда $\det \mathcal{D}(\lambda_c) = 0$.

Действительно, если события p_c и O сопряжены, то поле Y^α обращается в нуль в точке p_c , то уравнение $\xi(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda)\theta$ имеет нулевое решение при ненулевом значении $\xi(0)$, т.о. $\det \mathcal{D}(\lambda_c) = 0$

свойства оператора \mathcal{D} в уравнении Якоби

Если $\det \mathcal{D}(\lambda_c) = 0$, то существует такой ненулевой вектор $\theta = \dot{\xi}(0)$, что $\mathcal{D}(\lambda_c)(\theta) = 0$, т.е. $\xi(\lambda_c) = 0$.

Тогда $Y^\alpha(\lambda_c) = -\xi_0 \tilde{k}^\alpha$, и поскольку $k_\alpha Y^\alpha = 0$ то $\xi_0 = 0$, т.е. $Y^\alpha(0) = Y^\alpha(\lambda_c) = 0$, т.о., существует тождественно не равное нулю поле Якоби, которое обращается в нуль в событиях p_c и O . через точку O , пересекаются в точке p_c .

В этом случае точка p_c называется фокусом (или вырожденной сопряженной точкой).

В случае, если $\text{Rg} \mathcal{D}(\lambda_c) = 0$, Т.е. $\mathcal{D}(\lambda_c) = 0$, то все лучи, проходящие через точку O , пересекаются в точке p_c . В этом случае точка p_c называется фокусом (или вырожденной сопряженной точкой).

Если $\text{Rg} \mathcal{D}(\lambda_c) = 1, 0$, то сечение пучка лучей вырождается в бесконечно малый отрезок. В этом случае p_c называется невырожденной или простой сопряженной точкой.

Нетрудно заметить из соотношений $\dot{\xi} = \mathcal{S}\xi$ и уравнения на \ddot{D} , что изменение матрицы описывается следующим соотношением:

$$\dot{\mathcal{D}}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda)\mathcal{D}(\lambda)$$

уравнения Фокусировки Сакса

Рассмотрим соотношения, определяющие изменение якобиана. Из определения матрицы \mathcal{D} следует, что абсолютная величина ее определителя равна площади сечения пучка света $-\delta A(\lambda)$, деленной на величину телес. ного угла $-\delta\Omega$, т.е.

$$|\det \mathcal{D}(\lambda)| = \delta A / \delta\Omega.$$

В невырожденной сопряженной точке определитель меняет свой знак, а в фокусе его знак сохраняется. Т.о., $\mathcal{D}(\lambda)$ содержит информацию о площади $\delta A(\lambda)$, также как и информацию о четности, т.е. ориентацию пучка относительно вершины, т.е. точки, где находится наблюдатель. Между вершиной и сопряженными точками площадь $\delta A(\lambda)$ описывается уравнениями фокусировки Сакса:

$$(\sqrt{A(\lambda)})^* = [\mathcal{R}(\lambda) - |\sigma(\lambda)|] \sqrt{A(\lambda)} \quad (4.1)$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет C^2 – решение на любом отрезке, где $[\mathcal{R}(\lambda) - |\sigma(\lambda)|]$ непрерывна. Это условие нарушается в том случае, если интервал содержит простые сопряженные точки.

Начальные условия для решения уравнения (4.1) следующие: $\sqrt{A(0)} = 0$ ($d\sqrt{A(0)}/d\lambda = \sqrt{\Omega}$), где Ω – телесный угол из точки, где находится наблюдатель.

Если имеется нечетное число невырожденных сопряженных точек между наблюдателем и пучком, которому соответствует значение λ , то необходимо выбрать квадратный корень со знаком $-$ в противном случае необходимо выбрать знак $+$. Выражение $\mathcal{R} - |\sigma|$ неположительно, поскольку уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости приводят к тому, что сходимость \mathcal{R} неположительна. То же самое оказывается справедливым и в том случае, когда имеется космологическая постоянная.

Тем самым, уравнение (4.1) описывает, каким образом световой пучок фокусируется при заданном значении λ , что обусловлено локальной кривизной и скоростью сдвига при этом значении аффинного параметра.

Введем следующее определение:

$$w(\lambda) := \text{sign}(\det \mathcal{D}(\lambda)) \sqrt{|\det \mathcal{D}(\lambda)|}$$

Для абсолютной величины функции $w(\lambda)$ справедливо соотношение

$$|w(\lambda)| = \sqrt{|\det \mathcal{D}(\lambda)|} = \sqrt{\delta A(\lambda)/\delta \Omega}$$

Т.о., функция $w(\lambda)$ между сопряженными точками также удовлетворяет уравнению фокусирования Сакса.

Начальные значения для функции w следующие: $w(0) = 0, \dot{w}(0) = 1$

4.1.3 Пучки света вблизи вершин и сопряженных точек

4.1.4 Вывод уравнения гравитационной линзы

2.2.4.

4.1.5 Источники сдвига и сходимости

4.1.6 Приближение тонкой линзы

4.1.7 Рекуррентное соотношение

2.2.7.

4.1.8 Угол отклонения, уравнение линзы

2.3.

4.1.9 Усиление потока световых пучков

2.3.1.

4.1.10 Коэффициент усиления

2.4.

4.1.11 Вывод уравнения гравитационной линзы из принципа Ферма

5 Изображение источника на звездном небе в присутствии линзирующего объекта

Обсудим линзирование с точки зрения того, какое изображение может быть получено при различных параметрах линзирования. Именно на эту главу опирается моделирование визуальных эффектов линзирования.

5.0.1 Модели типа креста Эйнштейна

Крест Эйнштейна - одно из наиболее известных изображений, представляет из себя четыре изображения источника. Обсудим, как он появляется, и как его описывать.

качественные объяснения двойного изображения

(? пока не понял)

Нетрудно понять качественно, почему возникает двойное изображение источника при обратно пропорциональной зависимости угла отклонения луча света от прицельного параметра

Подобное рассуждение остается в силе и в том случае, если угол отклонения луча света есть монотонно убывающая функция прицельного параметра.

Рассмотрим плоскость $u_1 0 v_1$, в которой находятся источник, гравитационная линза и наблюдатель.

(добавлю рисунок!!!!)

Пусть гравитационная линза находится в начале координат, наблюдатель на оси абсцисс ($u_1 > 0$), и положение источника характеризуется значениями координат ($u_1 < 0, v_1 > 0$).

Пусть источник испускает лучи во всевозможных направлениях, тогда в любую точку на полупрямой $0u_1$ ($u_1 > 0, v_1 = 0$) попадает луч от источника при движении луча в полуплоскости ($v_1 > 0$).

Это связано с зависимостью угла отклонения от прицельного параметра $\Theta \sim p^{-1/2}$. Аналогично, для каждой точки на полупрямой $0u_1$ существует такое направление луча, частично проходящего в полуплоскости ($v_1 < 0$), попадающего в эту точку.

Т.о. если мы имеем точечный источник, а гравитационная линза - материальная точка, то всегда возникает двойное изображение, за исключением вырожденного случая, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой.

В реальных ситуациях, в случае, когда источник значительно удален от оси $0u_1$, изображение, соответствующее прохождению луча света частично в полуплоскости ($v_1 < 0$), может экранироваться гравитационной линзой (безусловно, в этом случае модель материальной точки для гравитационной линзы является неудовлетворительной).

В случае, если $y \ll 1$, то $l \approx 2$, т.е. расстояние между изображениями порядка диаметра Эйнштейна.

На рис. 1.3 - 1.4

представлены изображения источника при разном расстоянии источника от начала координат.

Легко понять, почему круглый источник имеет изображения, вытянутые вдоль окружности с центром в начале координат. Действительно рассмотрим источник, расположенный недалеко от начала координат $y \ll 1$.

Тогда его изображения находятся вблизи окружности Эйнштейна (x_+ вне круга, x_- внутри). Дуга окружности с центром в начале координат и проходящая через точки

пересечения диаметра источника, перпендикулярного оси абсцисс, отображается в два сильно вытянутые изображения (примерно в $1/y$ раз).

(потом подумаю про это)

почему изображения ровно 4 штуки?

вывод полученных результатов

приведем вывод этого креста?

5.0.2 модели линзирования черной дырой

Существует много конфигураций, линзирование от которых черной дырой интересно исследовать, обсудим их.

(возможно, просто программировать научусь, так и буду исследовать, вроде бы именно так и делают люди)

изменение изображения на небе при пролете черной дыры мимо источника

обсудим, как будет видно изображение, если между ним и наблюдателем пролетает черная дыра.

правда ли, что изображение становится кругом, потом снова точкой?

5.0.3 модели колец Эйнштейна

введение

(популярный текст)

Теория эйнштейна гравитации легла в основе нашего понимания космоса, а также объяснила много явлений, такие как черные дыры, гравитационные волны и гравитационные линзы.

еще один вывод формулы Эйнштейна для угла

(по Захарову, потом когда-нибудь сравню с другими выводами)

Выведем формулу для угла отклонения луча света в рамках ОТО.

Пусть прицельный параметр равен Δ .

(вставка, откуда оно??)

Уравнение, описывающее изменение координаты r в зависимости от угла ϕ :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{1}{\Delta^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right)^2$$

где $r_g = 2GM/c^2$.

Решим это уравнение.

Сделаем замену $u = 1/r$.

Пренебрегая малой величиной $r_g u$, получаем

$$\phi = \int_0^u \Delta du [1 - (\Delta u)^2]^{-1/2} = \arcsin(\Delta u)$$

Тогда $u = \sin \phi / \Delta$ или $r = \Delta / \sin \phi$.

Получается, приближенное решение дифференциального уравнения на $r(\phi)$ имеет вид прямой, удаленной от начала координат на расстояние Δ , причем движущаяся точка находится на минимальном расстоянии при $\phi = \pi/2$ и уходит на бесконечность при $\phi \rightarrow \pi$.

Теперь исходное уравнение может быть записано в виде

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right) = \left[\frac{1}{\Delta^2} - u^2(1 - r_g u)\right]^{1/2}$$

Если ввести новую переменную (??? так можно???)

$$\sigma = \Delta u (1 - r_g u)^{1/2} = \Delta u \left(1 - \frac{r_g u}{2}\right)$$

то

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right) = \frac{1}{\Delta} (1 - \sigma^2)^{1/2}$$

Поскольку $r_g u$ - малая величина, то

$$\Delta u = \sigma (1 - r_g u)^{-1/2} \approx \sigma \left(1 + \frac{r_g u}{2}\right) \approx \sigma \left(1 + \frac{r_g \sigma}{2\Delta}\right)$$

Тогда

$$\Delta du = d\sigma \left(1 + \frac{r_g \sigma}{\Delta}\right)$$

Из уравнения на $\left(\frac{du}{d\phi}\right)$ получаем, что

$$\phi = \int_0^u \Delta du (1 - \sigma^2)^{-1/2} = \int_0^\sigma \frac{(1 + r_g \sigma / \Delta) d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = \arcsin(\sigma) - \frac{r_g}{\Delta} (1 - \sigma^2)^{1/2} + \frac{r_g}{\Delta}$$

Согласно уравнению на $\left(\frac{du}{d\phi}\right)$, максимальному значению u_m (апоцентру) соответствует значение $\sigma = 1$.

(?????)

Угол, соответствующий апоцентру, определяется, исходя из значения интеграла:

$$\phi_m = \frac{\pi}{2} + \frac{r_g}{\Delta}$$

Следовательно отклонение луча света равно удвоенной разности $\Theta = 2(\phi_m - \pi/2)$, т.е.

$$\Theta = 2r_g / \Delta.$$

Подставляя значение $\sigma = 1$ в соотношение (1.36), получим значение u_m , соответствующее периаstrу,

$$u_m = \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{r_g}{2\Delta}\right)$$

Пренебрегая малым членом в последнем соотношении, получим формулу Эйнштейна для угла отклонения луча света в рамках ОТО

$$\Theta \approx 2r_g u_m = \frac{4GM}{c^2 r_m}$$

Следует напомнить, что последнее соотношение получено в предположении, что $r_g \ll \Delta$

о том, что вероятность наблюдать кольцо Эйнштейна мала

Захаров говорит, что так писал Эйнштейн и Арнольд.

5.0.4 параметры установок для наблюдения изображений

Обсудим, как оценивать параметры

величина диаметра объектива

6 Другие темы

6.1 Микролизнирование

(пока не актуально, потом почитаю.)

6.2 гравитационное линзирование для экспериментаторов

Приведем вкратце теорию, которая используется экспериментаторами. Эта теория заметно отличается от теоретических моделей, о чем можно убедиться, посмотрев на экспериментальные статьи, указанные в списке литературы.

6.2.1 напоминание сути происходящего

о том, насколько падает интенсивность с расстоянием

почему, например, не будет такого, что тупо ничего не дойдет до земли, потому что расстояние слишком большое? там ведь падение интенсивности вроде как как квадрат расстояния?

проверю.

6.2.2 наблюдение гравитационных линз

(захаров часть 7)

о том, как на самом деле видно линзирование?

правильная ли та картина двигающейся черной дыры?

Часть III

Problems

7 Основные задачи

(пока это очень бедный раздел, но пусть лучше будет, так больше мотивации, и все-таки по идее мб я и когда-то придумаю задачи.)

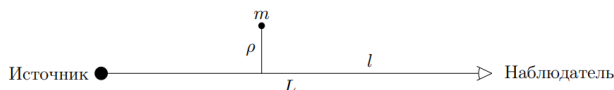
7.0.1 Задачи на понимание линзирования

7.0.2 Типичные задачи линзирования

Лашкевич-л12.5* Простейшее линзирование (???)

Наблюдатель смотрит на сферический источник света радиуса r , находящийся на расстоянии L от него. Между наблюдателем и телом на расстоянии ρ от соединяющей их прямой находится темное тело массы m (см. рисунок ниже). Предполагается, что $r_g, r \ll \rho \ll l, L - l$, где $r_g = 2Gm$. Найдите положение и форму изображений источника, которые видит на небе наблюдатель.

Рассмотрите два предельных случая: $r_g l, r_g(L - l) \ll \rho^2$ и $r_g l, r_g(L - l) \gg \rho^2$. Все вычисления выполняйте в первом порядке по малым параметрам.



Решение (???)

7.0.3 Что может быть, а чего не может быть?

(много тут вопросов можно написать, все это по статьям скорее всего будет.)

7.0.4 Задачи на особые эффекты

(ничего нормально не стал еще понимать я.)

Часть IV

Другие темы линзирования

Обсудим редко встречающиеся концепции линзирования.

8 Другие модели линзирования

(главы точно хватит, не такое важное это дело)

8.1 Типичные модели линзирования

Крест Эйнштейна (???)

Кольцо Эйнштейна (???)

8.2 Другие модели линзирования

Обсудим многие модели, которыми можно пользоваться при описании линзирования. Многие из этих моделей так и не применяются, тем не менее, возможно, именно одна из моделей ниже даст многое.

(по актуальности позже отсортирую)

дисперсия при линзировании Оказывается, может быть так, что разные частоты пролинзируются по-разному.

(я пока это не решал, но в плазменной модели линзы от Турока есть указания про это. что параметр в фазе зависит от частоты. так что можно потом прорешать задачу такую)

линзирование двумерной плазмой

Обсудим простейшую модель линзирования плазмой.

модель Рассмотрим двумерную модель ассиметричной капли:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{0.65}{1 + x^2 + 2y^2}$$

(там дальше считаем это мб)

(потом подробно про эту модель запишу, пока ее не смотрел)

результаты (тут картинки Турока, запущу код его потом, пока не дошел еще)

программный код для двумерной плазмы (где-то там у Фельдбругге есть, пока даже не скачал)

линзирование гауссовой линзой

8.2.1 линзирование случайной линзой

описание модели

Линзирование случайной турбулентной средой может быть смоделировано с помощью случайного изменения фазы φ .

Предположим, что фаза будет представлено случайным полем гауссова типа (?)

(см тут рис будет, где будет иллюстрация, что же это такое)

Спектр будет рассматривать в виде (???) $P(\mathbf{k}) \propto k^{-1}$.

Спектр можно рассматривать в виде колмогоровского степенного спектра (???) $P(\mathbf{k}) \propto k^{-5/3}$.

(больше деталей потом запишу, пока непонятно тут многое)

результаты интенсивности

(Турок и Фельдбругге напрограммировали много картинок, мб и я повторю, вставлю тогда позже)

(почитаю про это отдельно и отдельно коды по анализирую.)

8.2.2 линзирование с учетом поляризации

решим такую задачу...

8.2.3 линзирование двумя подряд линзами

(накамура вроде отдельную статью про это написал, отдельная задача, вряд ли буду ей заниматься)

8.2.4 Дифракция возле особенности типа складка

(статья Накамуры)

(пара строчек введения)

Поговорим о линзировании на ней.

итоги модели дифракции на складке (?)

необходимые знания про складку Приведем необходимые знания про складку, более подробно о складке можно почитать в дополнениях.

Складка, или складчатая каустика, это одномерная кривая на y -плоскости, характеризующая $\text{rank} [\partial_a \partial_b T(\mathbf{x})] = 1$.

о важности этой модели она также у Захарова обсуждена, так что судя по всему она важная.

может быть, пока не знаю.

Складки встречаются, например, когда имеется в эллиптической модели линзы для галактики, вокруг которой много дополнительных линз, состоящих из многих точечных линзирующих масс (?).

модель дифракции на особенности типа складка (???)

Пусть точечный источник монохроматических волн находится в координате y , близкой к особенности типа складка.

Пусть y_0 будет ближайшая к источнику точка на каустике и x_0 будет соответствующая точка на критической кривой, которая удовлетворяет

$$y_0 = x_0 - \partial \psi(x_0).$$

(??? явно запишу уравнение)

В вычислении дифракционного интеграла

$$F(w, y) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2x \exp[iwT(x, y)]$$

мы пренебрегаем возможными вкладами от стационарных точек $T(x)$, которые далеки от x_0 , так как интеграл возле x_0 должен вносить решающий вклад в амплитуду волны.

(?????!!!!) Введем декартовы координаты $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ такие что $\partial_1^2 T(x_0)$ и $\partial_1 \partial_2 T(x_0)$ исчезают при использовании $\text{rank}[\partial_a \partial_b T(x_0)] = 1$

(тогда касательный вектор к каустике на y_0 параллелен y_2 - осям.)

(переименую позже, чтобы вместо черты над x , были просто другие координаты, потому что это странное у Накамуры обозначение)

Временная задержка $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - \psi(\mathbf{x})$ может быть разложена в оёности \mathbf{x}_0 следующим образом: (????)

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{y}} + \frac{\bar{x}_2^2}{2p} + \frac{1}{6} \sum_{abc} \bar{x}_a \bar{x}_b \bar{x}_c \partial_a \partial_b \partial_c T(\mathbf{x}_0) + \dots$$

где $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, и $p = 1/[\partial_2^2 T(x_0)] = 1/[1 - \partial_2^2 \psi(x_0)]$ считаются порядка единицы.

За счет отсутствия члена, содержащего \bar{x}_1^2 , третий по порядку член дает вклад в дифракционный интеграл в направлении \bar{x}_1 (????).

Особенность складки требует сохранение $\partial_1^3 T(x_0)$ (которое гарантирует неисчезающий касательный вектор к складчатой каустике на y_0), и мы выбираем θ_* , так что $q = 2/[\partial_1^3 T(x_0)] = -2/[\partial_1^3 \psi(x_0)]$ по порядку единица. (??? откуда этот θ ???)

В случае линзирования точечной массы с внешним сдвигом или совокупности линз точечной массы, выбор θ_* in Eq. (4 · 1) makes q order unity. Without loss of generality q is taken to be positive by inversion of coordinates ($\bar{\mathbf{x}} \leftrightarrow -\bar{\mathbf{x}}$ and $\bar{\mathbf{y}} \leftrightarrow -\bar{\mathbf{y}}$).

Мы пренебрегаем всеми членами третьего порядка, кроме члена \bar{x}_1^3 , так как они ($\bar{x}_1^2 \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2^2$ и \bar{x}_2^3) не дают вклад в амплитуду волны $F(w, \mathbf{y})$ в случае малых длин волн $w \rightarrow \infty$.

Без этих членов каустика и критическая линия совпадают с осью \bar{y}_2 и \bar{x}_2 соответственно, а коэффициент усиления интенсивности волны равен

$$|F|^2 = \frac{w^2}{4\pi^2} \left| \int d\bar{x}_1 \int d\bar{x}_2 \exp \left[iw \left(-\bar{x}_1 \bar{y}_1 - \bar{x}_2 \bar{y}_2 + \frac{\bar{x}_2^2}{2p} + \frac{\bar{x}_1^3}{3q} \right) \right] \right|^2 \quad (8.1)$$

$$= 2\pi \mu_* \text{Ai}^2(-\bar{y}_1/Y) \quad (8.2)$$

где $\mu_* = |p|(q^2 w)^{1/3}$, $Y = (qw^2)^{-1/3}$ и Ai это функция Айри.

When $|\bar{y}_1|^{3/2} \gg 1/w$, Eq. (4 · 10) is evaluated accurately by the semi-classical approximation. On the positive side $\bar{y}_1 > 0$ of the caustic, the phase of Eq. (4 · 9) has two stationary points (cf. Eq. (3.6)):

$$\bar{\mathbf{x}}_{\pm} = (\pm \sqrt{q\bar{y}_1}, p\bar{y}_2), \quad \mu_{\pm} = \pm \frac{1}{2} p (q/\bar{y}_1)^{1/2}$$

$$\Delta T = T(\mathbf{x}_-) - T(\mathbf{x}_+) = \frac{4}{3} (q\bar{y}_1^3)^{1/2}, \quad n_- - n_+ = 1/2$$

On the negative side $\bar{y}_1 < 0$, there are not real stationary points but are imaginary ones. Hence the semi-classical approximation of Eq. (4 · 10) is

$$|F|^2 = |p|(q/|\bar{y}_1|)^{1/2} \times \begin{cases} 1 + \sin(w\Delta T), & (\bar{y}_1 > 0) \\ \frac{1}{2} \exp(-w|\Delta T|). & (\bar{y}_1 < 0) \end{cases}$$

In Fig.

5 (a) $|F|^2$ is plotted as a function of \bar{y}_1 . As a point source crosses the caustic line $\bar{y}_1 = 0$ from its positive side to its negative side with fixed \bar{y}_2 , one observes two images of equal brightness which approach each other, merge on the critical line $\bar{x}_1 = 0$, and finally disappear.

The sine term expresses the interference between these two images, and according to Eq. (4.13) the wave intensity diverges at the instant of merging.

As discussed in §3.2, however, the semi-classical approximation is invalid when the source is so close to the caustic that the time delay between the two images, $|\Delta T| \sim |\bar{y}_1|^{3/2}$, is comparable to or smaller than the wave period $1/w$.

In reality, according to Eq.

(4 · 10), the amplification factor $|F|^2$ has a finite value of $0.792\mu_*$ at $\bar{y}_1 = 0$, and a maximum value of $1.803\mu_*$ at $\bar{y}_1 = 1.019Y$. Despite the absence of images on the negative side of the caustic, the wave intensity on that side is not exactly zero but decreases exponentially with $|\bar{y}_1|$, due to the diffraction of waves from the positive side.

The width between interference fringes is $\sim Y \sim w^{-2/3}$ at small \bar{y}_1 and becomes narrower for larger \bar{y}_1 . Therefore, from the discussion in §3.3, if the size of an extended source is much larger than $r_0\theta_*/w^{2/3} \sim$

$$\left[\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{(4GM\omega^4)^{1/3}} \right]^{1/2} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ km} \left(\frac{\nu}{\text{GHz}} \right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/6} \left(\frac{r_0 r_{l0}/r_l}{\text{Gpc}} \right)^{1/2}$$

then the geometric optics approximation, $|F|^2 = \mu_* (\bar{y}_1/Y)^{-1/2} H(\bar{y}_1)$, is satisfactory (where H is the step function).

Тут у нас есть картинка, где...

In Fig.

5(b) – (d) is plotted the amplification factor for extended sources of various sizes $\Delta y = 0.2Y, 0.5Y$ and Y .

Гауссова яркость и монохроматический свет равны

$$I(w', \mathbf{y}') \propto \exp \left[-(|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|/\Delta y)^2/2 \right] \delta(w' - w).$$

Тут есть возможность посмотреть на график полного значения $C(0)$ из (2.15) и геометрического приближения $C_0(0)$ от (3 · 10)). (?)

Это изображение доказывает выше утверждение, что дифракционный и интерференционный вклады недостаточны, когда размер источника гораздо больше, чем (4.14).

8.2.5 модели линзирования гравитационными волнами

обзор решений задачи

казалось бы, с чего вообще начать тут?

идея просто снова посчитать дифракцию от фронта волны то есть по сути все то же самое, как в одиноком источнике, только теперь у нас как будто задача о дифракции на решетке.

потом посмотрим, насколько хорошая эта идея?

8.2.6 модели линзирования черной дырой

почему это то же, что и линзирование точечным источником чет не понимаю...

8.3 Линзирование гравитационных волн (?)

(весь мастерский тезис буду тут и готовить.)

8.3.1 Microlensing of type II gravitational-wave macroimages

Simon M. C. Yeung,¹ Mark H. Y. Cheung,² Joseph A. J. Gais,¹ Otto A. Hannuksela¹ and Tjonnie G. F. Li¹

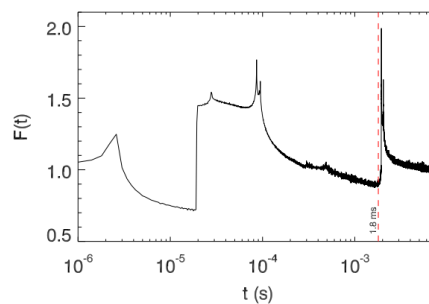
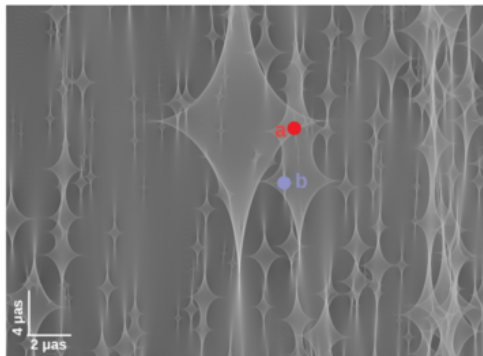
8.3.2 Observational signatures of microlensing in gravitational waves at LIGO/Virgo frequencies

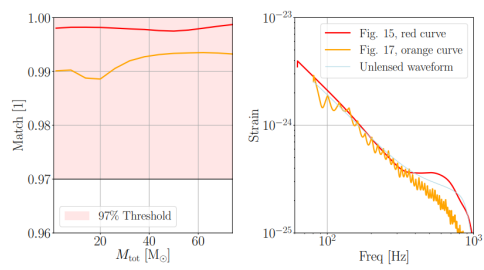
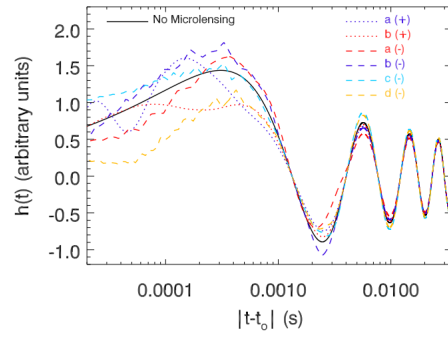
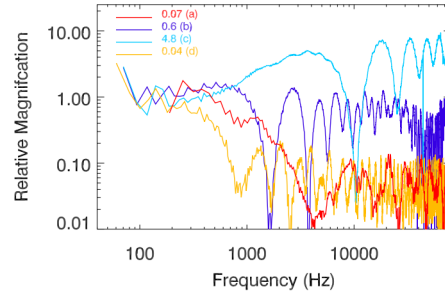
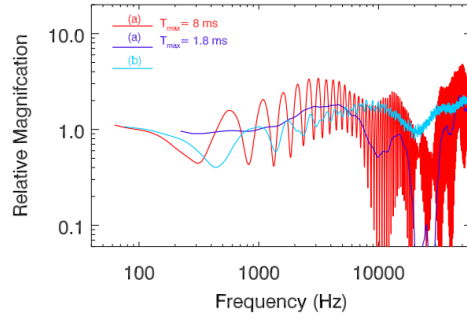
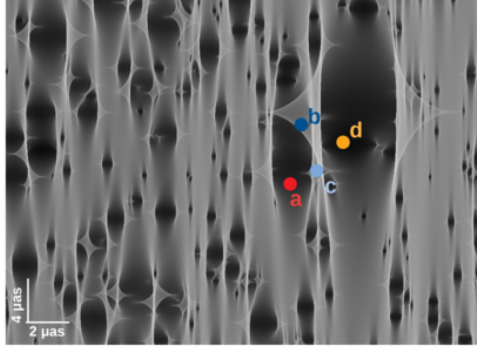
J.M. Diego^{1,?}, O.A. Hannuksela², P.L. Kelly³, T. Broadhurst^{4, 5, 6}, K. Kim², T.G.F. Li², and G.F. Smoo

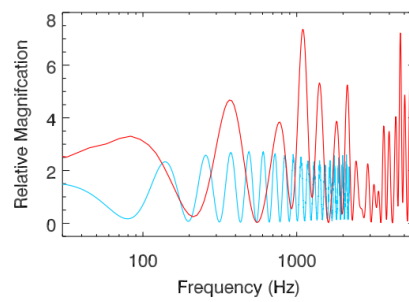
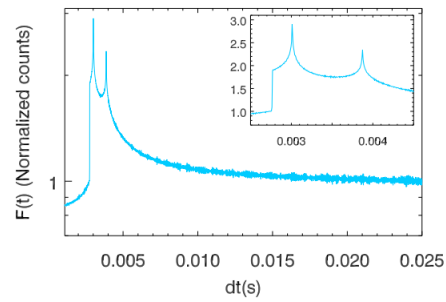
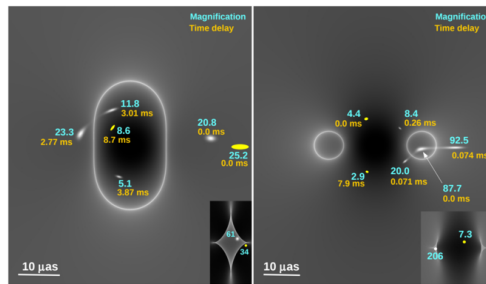
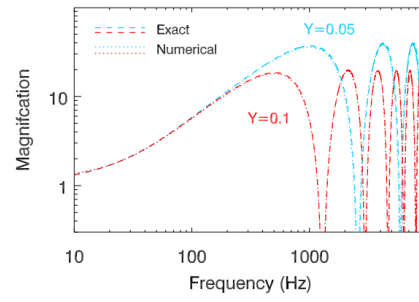
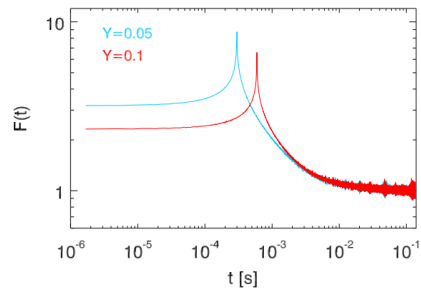
Суть (????)

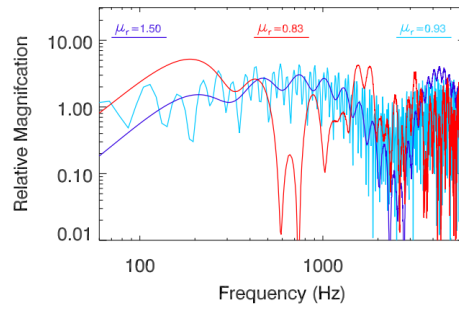
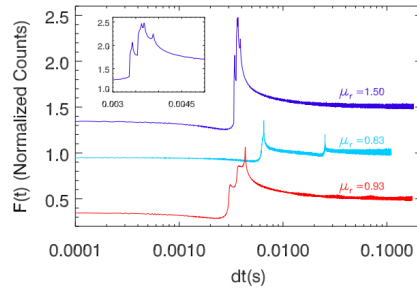
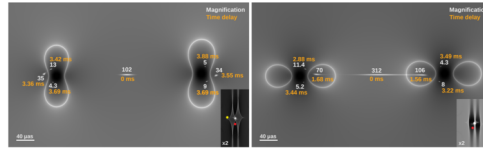
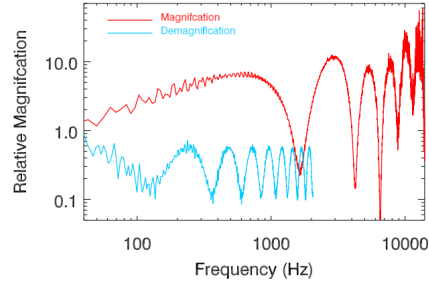
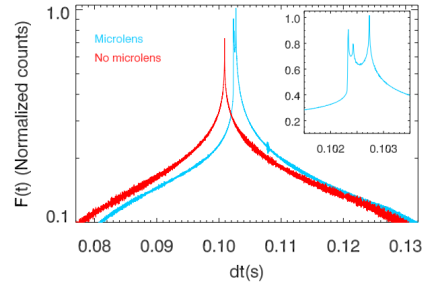
(пока хз, но напишу, если займусь.)

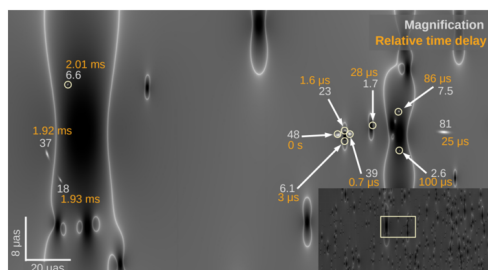
Теория





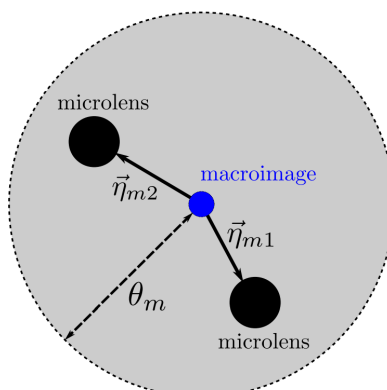
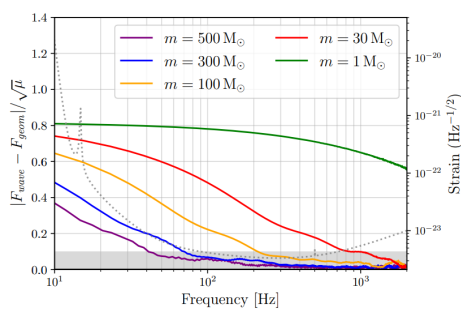


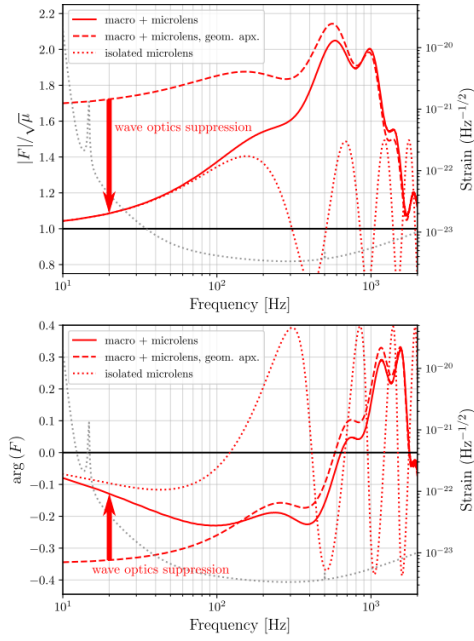
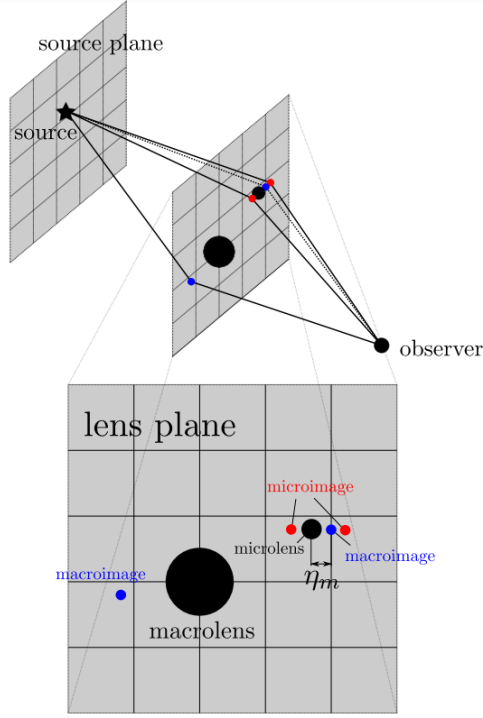
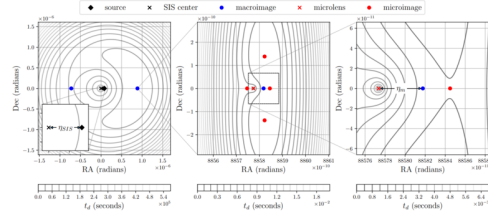


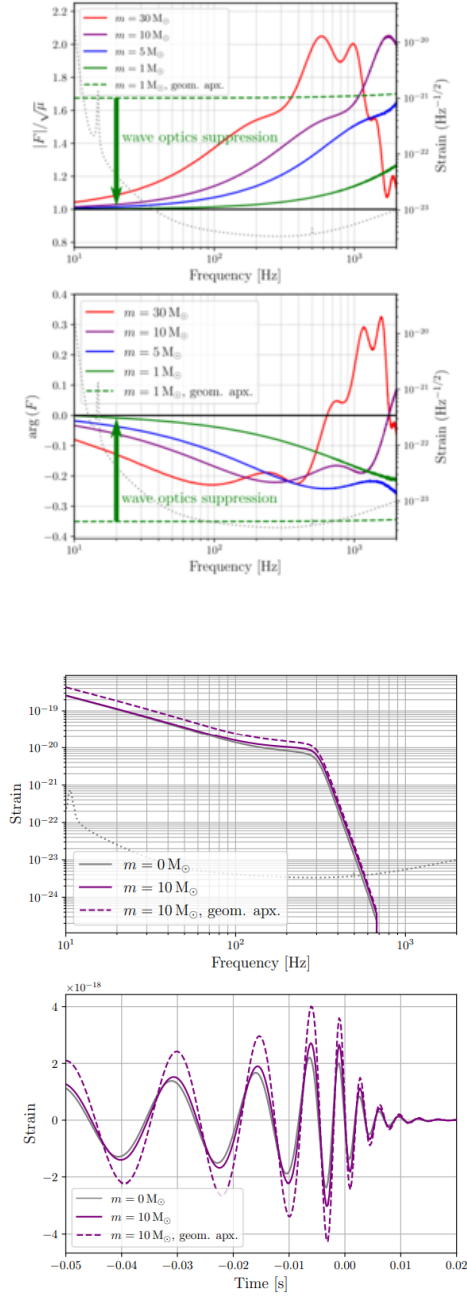
Mark H. Y. Cheung,¹ Joseph A. J. Gais,¹ Otto A. Hannuksela^{2,3} and Tjonnie G. F. Li

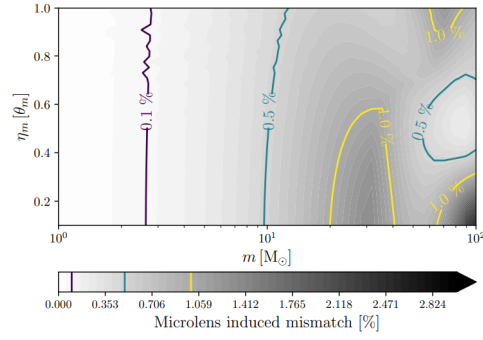
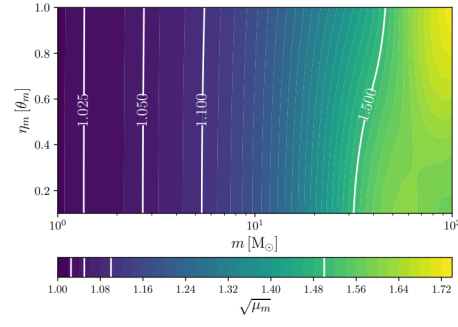
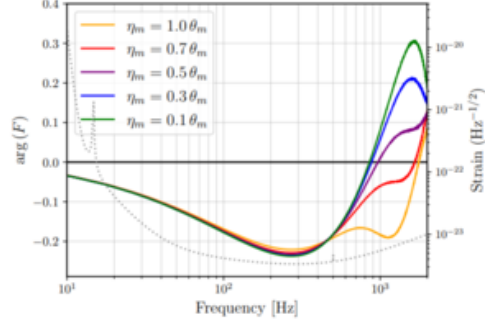
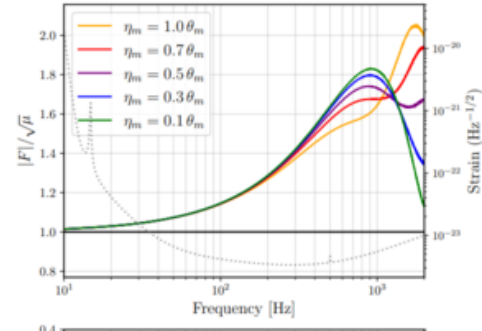
(пока хз, но напишу, если займусь.)

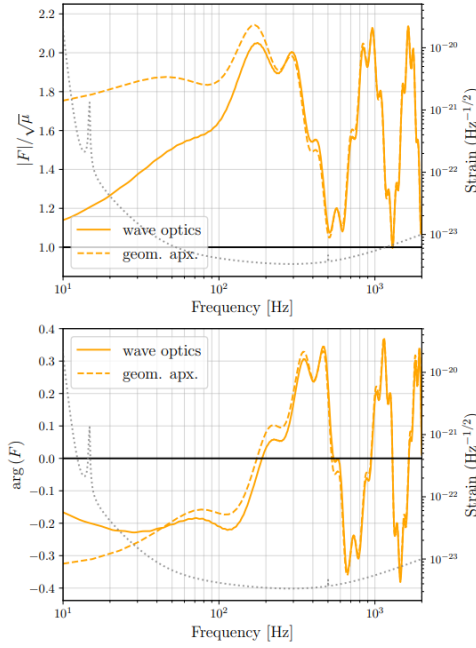
Теория











8.4 Другое

8.4.1 Линзирование по Эйнштейну (???)

(идея в том, чтобы написать, что Эйнштейн про это думал, все-таки он тоже там придумал что-то)

вкратце результаты теории Эйнштейна

Приведем короткие выводы теории гравитационного линзирования Эйнштейна.

Гравитационное линзирование от далекого источника за счет точечной массы M характеризуется углом Эйнштейна $\theta_E = 2GM/c^2$, радиусом Шварцшильда и расстоянием d между линзой и источником.

Рассмотрим два параллельных луча, идущих на линзу.

Их отклонение друг относительно друга $d\theta_E$ может быть рассчитано как и отклонение в двухщелевом эксперименте Юнга. (да?)

Отношение длины волны к углу отклонения такого же порядка, как и классическое отклонение $d\theta_E$ для $\lambda \sim R_s$

Для линз массами от планет до звезд R_s находится в диапазонах от миллиметров до километров, так что можно было бы надеяться обнаружить эффекты волновой оптики с радио телескопами на этих длинах волн.

чтобы детектировать интерференционные полосы, апертура измерительного прибора должна быть меньше, чем ширина между полосами λ/θ_E

Это очень напоминает эксперимент Юнга, где такие же условия наблюдения интерференционных полос.

(????)

формализм и координаты в теории линзирования Эйнштейна

Обсудим все параметры нашей системы, которыми далее будем описывать линзирование.

считаем свет скалярной волной (?)

а также работаем в сферических координатах, и радиальная часть у нас фиксирована.

параметры гравитационных линз

обсудим оптические силы, потенциал гравитационных линз.

далее эти параметры сразу вставляются в интеграл и их происхождение нас уже волновать не будет.

угол Эйнштейна

угол Эйнштейна - важный параметр, который встречается...

8.4.2 Лензирование по Зольднеру

Получим угол отклонения в рамках ньютоновской теории, как делал Зольднер.

(очень не актуально, ну делал что-то он - и пофиг, есть многое в 100 раз важнее.)

вкратце о формуле Зольднера

Рассматривая в рамках модели Ньютоновской гравитации действие гравитационного поля на свет, можно найти величину угла его отклонения от прямолинейного распространения.

Интересно, что хотя сила, действующая на безмассовый свет равна нулю, тем не менее, ее действие не нулевое и (? совершается ли?) работа над частицей. (??)

Первый вывод угла отклонения траектории движения фотона был сделан И. Зольднером, который нашел величину угла отклонения:

$$\Theta = \frac{2GM}{c^2 R}.$$

применения формулы Зольднера

Формула Зольднера является простейшим примером описания гравитационного линзирования.

(нигде короче говоря не нужна она, да?)

(можно потом подумать, что понимание ее дает в понимании профессиональных формул?)

вывод формулы Зольднера

Пусть из точки А в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору, соединяющему гравитирующий центр С и точку А, испускается луч света. Через время t луч света будет находится в точке М. Введем следующие обозначения: радиус $AB = r$, проекция частицы на одну ось $BD = x$, на вторую - $CD = y$, угол, заемаемый частицей света $ABC = \varphi$.

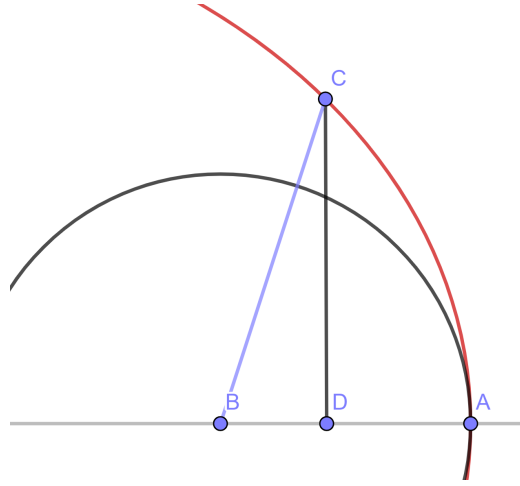


Рис. 2: Иллюстрация задачи Зольднера

Пусть сила, действующая на свет, создает ускорение в направлении центра, равное GM/r^2 . Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \cos \varphi, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \sin \varphi \quad (8.3)$$

Эту систему можно переписать в виде двух более удобных уравнений. Первое уравнение получим, домножая первое из уравнений системы (8.3) на $-\sin \varphi$, второе - на $\cos \varphi$ и складывая. Второе - домножая первое из уравнений системы (8.3) на $\cos \varphi$, второе на $\sin \varphi$ и складывая. В итоге уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2x}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d^2y}{dt^2} \cos \varphi &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \varphi &= -\frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, в которых

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \dot{\varphi} \cos \varphi - r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r \ddot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

В этих координатах система имеет вид:

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{GM}{r^2} \end{aligned}$$

Величина $S = r^2 \dot{\varphi}$ есть первый интеграл уравнений движения, ведь

$$\frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = 0.$$

Этот интеграл определяет удвоенную площадь треугольника, заматаемого частицей при смещении на малое время dt .

(????) Под каким бы направлением ни двигалась частица, при заданной скорости площадь ее эллипса будет одной и той же.

В случае движения по окружности, эта площадь равна $S = r \cdot v$.

Для удобства будем измерять расстояние в единицах этого радиуса, тогда тогда $S = r^2 \cdot v = v$. Отсюда

$$\dot{\varphi} = v/r^2$$

Подставим значение скорости во второе уравнение:

$$\ddot{r} - \frac{v^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение имеет первый интеграл - интеграл энергии:

$$D = \dot{r}^2 + \frac{v^2}{r^2} - \frac{2GM}{r},$$

тогда

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{D + 2GM/r - v^2/r^2}}$$

Переходя от переменной t к переменной φ с помощью уравнения $d\varphi = dt \cdot v/r^2$, получим значение $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{vdr}{r^2 \sqrt{[D + 2GM/r] - v^2/r^2}}$$

Выделим в корне скобку в квадрате:

$$d\varphi = vdr / \left[r^2 \sqrt{D + (GM)^2/v^2 - (v/r - GM/v)^2} \right]$$

Для интегрирования $d\varphi$ сделаем замену переменной $z = v/r - GM/v$. (?? скорость v считается постоянной?) Для этой переменной $dz = -vdr/r^2$, поэтому через нее получаем

$$\varphi = \int d\varphi = - \int \frac{dz}{\sqrt{[D + (GM)^2/v^2] - z^2}}.$$

Это известный интеграл \arccos , поэтому

$$\varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{D + (GM)^2/v^2}} + \alpha$$

или

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{z}{\sqrt{D + (GM)^2/v^2}}$$

Переходя обратно от z к переменной r , получим

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{v^2 - (GM)r}{r\sqrt{v^2D + (GM)^2}}$$

Пусть начало отсчета для угла φ выбрано таким образом, что $\varphi = 0, r = 1$, тогда $\alpha = 0$
и

$$\cos \varphi = \frac{v^2 - (GM)r}{r\sqrt{v^2D + (GM)^2}}$$

(???????)

Из условия выбора начала отсчета угла φ получаем величину константы D , т.к. при $\varphi = 0$ имеем $\sqrt{v^2D + (GM)^2} = v^2 - GM$, то

$$\cos \varphi = \frac{v^2 - (GM)r}{r(v^2 - GM)}$$

При этом считаем, что $v^2 > GM$, иначе бы свет просто втянулся.

Перейдем обратно к декартовым координатам, но отличным от исходных: $x = 1 - r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тогда

$$y^2 = \frac{v^2(v^2 - 2GM)}{(GM)^2}(1 - x)^2 - \frac{2v^2(v^2 - GM)}{(GM)^2}(1 - x) + \frac{v^4}{(GM)^2}.$$

Или

$$y^2 = \frac{2v^2}{GM}x + \frac{v^2(v^2 - 2GM)}{(GM)^2}x^2.$$

Ясно, что последнее уравнение определяет коническое сечение, при чем если $v^2 > 2GM$, то траектория - гипербола, если $v^2 = 2GM$, то траектория - парабола, если $v^2 < 2GM$, то траектория - эллипс, если $v^2 = GM$, то траектория - окружность.

Поскольку не существует такого небесного тела, чтобы неравенство $v^2 > 2GM$ было не выполнено, то свет движется по гиперболе.

Кстати, Лаплас в это время уже рассматривал случай большой гравитации, в этом случае движение может быть по эллипсу (??)

Поскольку уравнение гиперболы может быть записано в следующей форме:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

где a - большая полуось, b - малая полуось, тогда угол отклонения определяется из соотношения (?????????)

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a}{b}$$

или

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{GM}{v\sqrt{v^2 - 2GM}}.$$

Поскольку $v^2 \gg 2GM$, то угол отклонения луча света достаточно мал,

$$\omega = \frac{GM}{v^2}$$

Полное отклонение луча света равно $\Theta = 2\omega$, поскольку ω - угол между асимптотой гиперболы и осью y , и, вспоминая, что радиус притягивающего тела был выбран равным 1, получаем формулу

$$\Theta = \frac{2GM}{c^2 R}.$$

Вычислим угол отклонения луча света вблизи поверхности Солнца.

В этом случае $R_{\odot} = 6.96 \times 10^{10}$ см, $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ г, $G = 6.673 \times 10^{-8}$ см³/гс², $c = 2.997 \times 10^{10}$ см/с и угол отклонения равен $0.875''$. Зольднером было получено значение $0.84''$. Расхождение в результате связано с уточнением значений констант, используемых для вычислений по формуле Зольднера.

9 Экспериментальные данные

(идея была в том, что много есть статей с результатами экспериментов, так что про них тоже много можно написать.)

обзор существующих линзирующих объектов

какие есть они?

пока не знаю.

объект 1

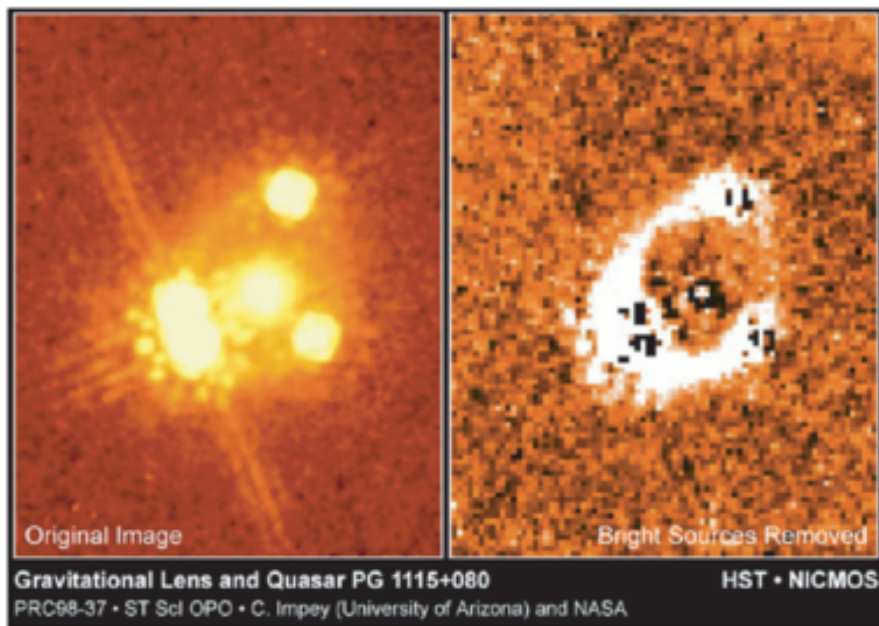


Рис. 3

объект 2



Рис. 4

9.0.1 Бинарная система OGLE-2002-BLG-069

изучаю эту статью, Пишу ее.

в двух словах

Full characterization of binary-lens event OGLE-2002-BLG-069 from PLANET observations
D. Kubas, A. Cassan, J.P. Beaulieu, C. Coutures, M. Dominik, M.D. Albrow, S. Brilliant, J.A.R. Caldwell, D. Dominis, J. Donatowicz, P. Fouque, U.G. Jorgensen, J. Greenhill, K. Hill, K. Horne, S. Kane, J.B. Marquette, R. Martin, J. Menzies, K.R. Pollard, K.C. Sahu, C. Vinter, J. Wambsganss, R. Watson, A. Williams (The Planet Collaboration), C. Fendt, J. Heinmueller, C. Thurl We analyze the photometric data obtained by PLANET and OGLE

on the caustic-crossing binary-lens microlensing event OGLE-2002-BLG-069. Thanks to the excellent photometric and spectroscopic coverage of the event, we are able to constrain the lens model up to the known ambiguity between close and wide binary lenses. The detection of annual parallax in combination with measurements of extended-source effects allows us to determine the mass, distance and velocity of the lens components for the competing models. While the model involving a close binary lens leads to a Bulge-Disc lens scenario with a lens mass of $M=(0.51 \pm 0.15) M_{\text{sol}}$ and distance of $D_L=(2.9 \pm 0.4)$ kpc, the wide binary lens solution requires a rather implausible binary black-hole lens ($M \geq 126 M_{\text{sol}}$). Furthermore we compare current state-of-the-art numerical and empirical models for the surface brightness profile of the source, a G5III Bulge giant. We find that a linear limb-darkening model for the atmosphere of the source star is consistent with the data whereas a PHOENIX atmosphere model assuming LTE and with no free parameter does not match our observations.

10 Отдельные применения линзирования

Приведем теорию, позволяющую проанализировать наблюдения, и открыть что-то новое. Также приведем примеры. Будем использовать теорию предыдущей части, уже без повторений ее.

10.1 поиск экзопланет (?)

Захаров в статье своей это изучал, мб почитаю.

11 Линзирование редкими объектами

11.0.1 линзирования FRB-ми

Обсудим линзирование быстрыми радиовсплесками.

проявление каустик в быстрых радиовсплесках

(турок 88 стр)

A Fast Radio Burst (FRB) is a millisecond transient radio pulse, caused by some yet to be identified high-energy astrophysical process.

The first burst was found by Duncan Lorimer and his student David Narkevic in 2007 while scanning through archival pulsar survey data [58].

The burst in question had been detected in 2001 by the Parkes Observatory in Australia.

In subsequent years, several other bursts were observed, among which the first repeating source (named FRB 121102) [8] was detected in 2012 by the Arecibo Observatory in Puerto Rico.

In the last few months, several new detections have been announced by the Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment (CHIME) collaboration, including the second repeating FRB source (named FRB 180814) [59].

FRBs are now known to be relatively common, with approximately 10; 000 bright fast radio bursts occurring per day over the entire sky.

Телескопы, способные уловить большую часть этих всплесков должно стать возможным в ближайшие десятилетия, и это действительно захватывающая перспектива.

The source of fast radio bursts is yet to be identified. Many different models have been proposed but none is yet compelling. They range from rapidly spinning neutron stars or black holes and regions of very high electromagnetic fields, to more exotic sources [60,61]

It seems likely that the bursts are extragalactic in origin, as the first observed repeater, FRB 121102, has been identified with a galaxy at a distance of approximately 3 billion light years [62 – 64]. As mentioned in the introduction, it is likely that the phenomenology of fast radio bursts is strongly affected by astrophysical plasma lensing. They have a characteristic time-frequency profile, their frequency typically falling during the pulse, or series of pulses.

This profile is probably due to the fact that lower frequencies are more strongly lensed and thus follow longer geometrical paths, and also because they propagate more slowly.

The methods and results we have reported here should be helpful in modeling the effects of plasma lensing on observed FRBs. The lensing may take place in a variety of places - near the source, near the observer or in between. If the line of sight encounters a caustic due to a plasma lens, the FRB may be amplified, enhancing the chances of detection. For reasons we have explained, caustics are likely to be localized in frequency, leading to the observed spectral shape. The "marching down" features could also be due to asymmetric structures in the lens, leading to angled caustics. This requires a preferred time asymmetry, which could in turn provide hints about the structure of the lens itself. In the lensing example of B1957 + 20[13], the lens is due to a companion wind. In this specimen, the time-frequency caustics march both up and down. This symmetry could be broken if the wind contained shock waves, which could preferentially move retrograde in the rotating frame.

Quantitative lens modeling can be tested on the pulsar binary system, and then applied to FRB data. This could be the scope of a future paper.

Since the observed radio waves have a relatively long wavelength, the corresponding diffraction catastrophes are likely to fill a significant volume in the parameter space of the normalized intensity maps.

Therefore it is important to study the complete interference pattern.

It follows from Table II that the elliptic (D_4^-), the hyperbolic (D_4^+) umbilic and to a lesser extent the swallowtail (A_4) caustic lead to the largest spikes in the normalized intensity map.

Of these three caustics, the swallowtail (A_4) and the hyperbolic (D_4^+) umbilic caustics are most likely to be realized in simple lenses, of which the hyperbolic caustic gives the greatest amplification.

However, these caustics will not generically occur in time-frequency data, as they are formed at point in three-dimensional functions.

The line of sight, is, however, reasonably likely to pass close to them, as they fill a finite volume of the parameter space.

In principle, we do expect to see the cusp (A_3) points and the fold (A_2) lines caustics, in the data.

However, note that these caustics lead to a lesser amplification of the source. As we observed in the previous sections, caustics due to multi-dimensional lenses never occur as isolated events.

The caustics of co-dimension four, i.e., the umbilics D_4^\pm , and the swallowtail A_4 caustics, are always accompanied by cusp (A_3) points and fold (A_2) lines.

It thus follows that when a fast radio burst is indeed amplified by a lens, that the corresponding peak in time-frequency space will be of characteristic shape.

More concretely, after identifying the time and the frequency with the two of the unfolding parameters μ , we expect the peak to resample the normalized intensity map of the corresponding elementary catastrophe computed in Section V.

That is to say, the peak corresponding to elliptic (D_4^-) umbilic caustic should exhibit a triangular symmetry and the peak corresponding to the swallow (A_4) caustic will exhibit the characteristic swallowtail geometry in the fold-line and two cusps caustics.

Further investigation is required to estimate the number density of the different caustics for generic two-dimensional lenses and the most likely normalized intensity profiles along the line of sight.

11.0.2 линзирования черными дырами

11.0.3 линзирования галактикой и кресты Эйнштейна

пример креста Q2237+030

(Захаров тоже про него писал)

Крест Эйнштейна или Q2237+030 или QSO 2237+0305 — гравитационно линзированное изображение квазара, который располагается по оси зрения за галактикой ZW 2237+030.

Это учетверённое изображение образует крест с галактикой-линзой в центре, поэтому его называли Крест Эйнштейна.

Этот квазар располагается примерно в 8 млрд световых лет от Земли, а линзирующая галактика — в 400 млн световых лет.

Крест Эйнштейна в созвездии Пегаса

Крест Эйнштейна может быть найден в созвездии Пегаса по координатам 22h40m30s +3d21m30s.

Однако для визуального наблюдения необходим телескоп с диаметром объектива не менее полуметра.

попробуем посчитать его численно.

Космическая подкова - линзирование галактикой LRG 3-757

система из двух гравитационно-линзированных галактик в созвездии Льва.

Объект представляет собой далёкую галактику, прямо перед которой на луче зрения расположена массивная галактика LRG 3-757.

Свет дальней галактики, проходя через гравитационное поле ближней, линзируется им, и изображение фоновой галактики становится подковообразным (кольцо Эйнштейна).

«Подкова» охватывает около 300° и имеет диаметр 10,2 секунды дуги[3].

Галактика переднего плана, LRG 3-757, чрезвычайно массивна: примерно в сто раз массивнее нашей галактики Млечный Путь.

Галактика LRG 3-757 принадлежит к редкому классу галактик, называемых яркими красными галактиками (англ. luminous red galaxies (LRG)), которые испускают сильное инфракрасное излучение.

Система была открыта в 2007 году международной группой учёных[3] в рамках проекта SDSS и изучена космическим телескопом «Хаббл».

11.0.4 сильные гравитационные линзирования

снимки Хаббла

Телескоп Хаббл увидел несколько снимков сильного линзирования.

GAL-CLUS-022058s

Gravitational lensing system SDSS J0928+2031.[7]

SDSS J1138+2754 taken by Hubble's WFC3 camera.[8]

Так говорит Википедия.

что-нибудь про это тоже скажу.

The Twin Quasar

The Twin Quasar (also known as Twin QSO, Double Quasar, SBS 0957+561, TXS 0957+561, Q0957+561 or QSO 0957+561 A/B), was discovered in 1979 and was the first identified

gravitationally lensed object. It is a quasar that appears as two images, a result from gravitational lensing caused by the galaxy YGKOW G1 that is located directly between Earth and the quasar.

(также в главе про историю пару слов про него скажу)

11.0.5 Радиокольца

(захаров)

Впервые на радиотелескопе VLA были открыты новые протяженные радио- Источники, наиболее распространенная интерпретация которых состоит в том, что протяженный источник находится на каустической кривой типа астроида (или "бриллианта": Рефсдал и Сюрдей A994)).

Тогда изображение может иметь форму эллиптического кольца.

1131+0456

Хьюитт и др.

(1988) обнаружили эллиптическое кольцо и два компакт- НБ1х изображения, лежащих с противоположных сторон от кольца (угловое Расстояние между изображениями примерно 2.1").

Кочанек и др.

A989) предложили довольно сложную модель радиоисточника, искаженного гравитационной линзой.

Численная модель, предложенная в данной работе

и использованная для интерпретации наблюдаемых изображений, привела к выводу, что, возможно, в качестве линзы имеется обычная галактика, имеющая потенциал типа эллиптического, и фоновый радиоисточник, имеющий структуру с двумя полостями.

В этой модели два компактных изображения соответствуют изображениям (связанным с действием гравитационной линзы) центрального ядра источника, а кольцо связано с радиоджетом, который лежит на каустике, имеющей форму типа астроида.

Хаммер и др.

A991) провели оптические наблюдения данного объекта, используя телескоп E80-1 ЧТТ.

В оптическом диапазоне было обнаружено повышенное излучение в красном диапазоне из области, где наблюдается радиокольцо Эйнштейна.

Исходя из предположения, что линза является массивной эллиптической галактикой, произведено вычитание излучения галактики-линзы и получено, что оптическое изображение источника весьма похоже на изображение радиокольца.

Получен также спектр всего источника, из анализа которого сделан вывод, что фоновому источнику соответствует значение красного смещения $z_a = 1.13$, а галактике-линзе - значение красного смещения $z_d = 0.85$.

11.0.6 Determining the Dimensionality of Spacetime by Gravitational Lensing

статья от:

Jop Briet

David W. Hobill

Department of Physics and Astronomy, University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, T2N 1N4 Abstract The physics associated with spherically symmetric charged black holes is analyzed from the point of view of using weak gravitational lensing as a means for determining the dimensionality of spacetime. In particular, for exact solutions of electro-vac black holes in four and five spacetime dimensions the motion of photons is studied using the equations for the null geodesics and deriving the weak limit bending angles and delays in photon arrival times

(очень крутая со многими моделями. потом дополню ей многие структуры, в том числе эту!!! пишу пока про это в ОТО, потом сюда суть перенесу. по сути статья про то, что мы хорошо решаем ОТО и всё.)

11.0.7 линзирование в модифицированных теориях гравитации

11.0.8 линзирование ровно назад

постановка задачи

а могут ли быть такие параметры системы, чтобы свет тупо назад улетап и всё?
не знаю :)

11.0.9 очень сильное линзирование

постановка задачи

Представим себе настолько сильно искаженное гравитационным полем пространство, что его нельзя считать малым возмущением.

как тогда линзирование происходит?

например, может быть, это происходит внутри массивных галактик, там от одной звезды к другой свет идет через кучу массивных объектов, в итоге что придет - непонятно. интересно задуматься.

вопросы, с которых начинать нужно

научиться волновое уравнение решать не в случае малых метрик.

11.0.10 линзирование в ранних стадиях вселенной

постановка задачи

представим, что мы находимся миллиарды лет назад, когда еще не было Земли.

Гравитационное поле имело другой вид и лучи искажались по-другому.

Как тогда выглядели картины звездного неба?

Опишем линзирование в таких случаях.

вопросы, с которых начинать нужно

космологию изучить, понять четко, что вообще тогда было?

Часть V

Adds

Обсудим все необходимые концепции наук, используемых в гравитационном линзировании.

(тут всё, на что опирается то, чем я занимаюсь в линзировании! пока не до этого, ибо нужно лучше бы другие структуры улучшать!!)

А Предисловие

Приведем соображения о подходе к гравитационному линзированию.

А.1 Мотивация

Обсудим, что нас мотивирует изучать гравитационное линзирование.

А.1.1 Основная мотивация

(потом раскрою, так с ходу нормально не напишу)

Возможность понять оптику глубже

тоже аргумент.

...

(далеко не первым будет он стоять)

Поняв численные вычисления линзирования, станет сполна понятно вычисление осциллирующего интеграла и модели с ним

Это очень круто, потому что теперь по сути в любом какому угодно случае можно взять и за считанные минуты его вычислить. Это было бы неподъемно тем, кто не владеет этими методами, однако после тренировки вычислений таких интегралов на гравитационном линзировании, аналогичные интегралы посчитаются прямо сразу.

(где они еще встречаются?)

О большом развитии в математике при изучении линзирования

можно начать изучать интересную топологию кривых и волновых фронтов (?)

(опишу, что там методов много, так что многое прокачать можно.)

Развитие навыков численно моделировать, если занимаешься им

(можно как программист прокачаться, что я чуть и сделал. порассуждаю, насколько это хорошо.)

Крутая математика

(тоже сколько всего можно глубже понять, понимая формализм! Ух, целый мир особых разделов математики!)

Крутые картинки

(тоже аргумент, выглядит ведь это очень круто!)

А.1.2 Удивительные факты

(потом раскрою)

А.2 Мышление профессионала в линзировании

Мышление профессионала, применяющего линзирование, приведено в этой части.

А.2.1 Применения линзирования

Изучение свойств астрономических объектов

Существует множество исследований линзирующих событий, некоторые из них приведены в списке литературы в этой записи. Очень интересно исследовать звездное небо, когда есть владение методами линзирования.

поиск экзопланет

По крайней мере об этом есть статьи, например [Захарова](#). Может быть, потом посмотрю, пока не до этого.

Исследование размерности пространства-времени

(это можно делать, см. статью: Determining the Dimensionality of Spacetime by Gravitational Lensing Jop Briet David W. Hobill. потом пропишу, очень крутая статья, которая на теоремине помогла.)

А.2.2 Особенности эффективного изучения линзирования

Обсудим, что очень полезно знать для эффективного изучения. Конечно, это лишь особенности, по сути - все те же принципы, которые и для любого предмета, их тоже много, они тоже важные, но я предполагаю, что они известны.

1/3) Сперва хорошая подготовка, потом уже можно в принципе рассматривать всерьез изучение линзирования и нужного для нее

Считаю, что трата времени заниматься линзированием, если нет базы по ОТО, оптике и некоторым важным для линзирования разделом математики. Так что сперва качественно основные темы прорабатываются, потом уже можно фокусироваться на особых методах линзирования.

В прочем, это не так и сложно, просто некоторым может очень много времени понадобится, пока там нормально усвоится ОТО, пока наreshаются задачи, пока основные темы линзирования продумаются. Это обычные навыки науки, но на них много нужно времени, начать видеть, что нужно, а что нет. Если не видишь - сколько же можно времени просто впустую потратить, потому что хаос в голове! Так что всерьез не следует думать про исследования тут, если у Вас нет уровня бакалавриата. Слишком много будет хаоса.

2/3) Как и всегда, убедись в будущем и настоящем своей работы, стоит ли это того?

Если не стоит - забей. Тоже много тут того, что очень много сил и времени займет. Проверь, окупится ли это? Если нет, то и лучше найти занятие полезнее, а линзированием заниматься уже в свободное время.

3/3) Как и всегда, фокусируй внимание на нужном, думай, и не занимайся много чем!

Больше думать, причем о нужном, меньше читать или что угодно делать! Это общий навык, очень важный для исследований, тут особо важно откладывать не актуальные темы. Если так не делать - забей просто сразу, будет каша в голове. Собственно, кто наукой занимается, а не ерундой страдает, тот четко понимает, что имеется в виду под этими словами.

Нужного тут - не так много, некоторые концепции и некоторые формулы, над которыми и нужно думать, а остальное все следует откладывать как можно на дольше.

Программирование тут - одно направление, теория и математика - вообще другое, модели для экспериментов и размышление о приложениях - третье. Не смешивай эти направления! Фокусируйся на одном. Иначе ничего не сделаешь, ну или займет $\times 4$ больше времени, что не стоит того. Определи, что хочешь узнать, вот и узнавай это.

Конечно же, не старайся понять все, первые года 3 это абсолютно бессмысленная цель. Потом, если судьба сложится заниматься линзированием много, то и постепенно поймешь многое. Вряд ли. Есть и другие интересные разделы физики.

Необходимые темы для изучения линзирования

Линзирование не возьмется без хорошего уровня по некоторым разделам науки, которые я укажу в этом разделе.

Важность общей теории относительности Общая теория относительности - главный предмет, на который опирается линзирование, хотя оно и крайне далеко и развито очень сильно. Тем не менее, пока ОТО не собрано как следует - просто ни шагу не сделаешь в фундаментальном понимании. Соответственно, для ОТО тоже нужно знать основы механики и теории поля.

Так что сперва идет проработка ОТО, только потом линзирование двигать следует! Иначе в общую картину мира не впишется, а значит, смысла заниматься им нет.

Важность оптики на прикладном уровне Главнейший фактор успешного познания линзирования - это хорошая база по оптике.

важно понимать дифракцию и волновое описание, знакомым быть с волновым уравнением.

именно базы оптики достаточно и необходимо.

то есть тут на самом деле и структуру по оптике нужно развить, и иметь какие-то исследования по ней не так важно в каком направлении.

Без знаний оптики любые теории линзирования будут идти медленно, статьи будут непонятны, по итогу на переучивание оптики всё и отлетит.

(подробнее потом связь раскрою)

C++/Wolfram Знать языки программирования крайне важно, потому что именно с помощью них происходят реализация теоретических моделей.

потому что у нас коды пусть и не такие уж сложные, без базовых знаний не прокатит. При малейшем изменении кодов эти знания необходимы, чтобы не застревать на ошибках.

хотя самые типичные ошибки пользователя я прописал, тем не менее, чтобы заниматься прикладным линзированием, считать численно дифракционные картины, программирование необходимо.

без этого - будешь максимально тормозить в кодах

Важность астрономии Линзирование во многом опирается на эксперименты и претендует на описание различных явлений космоса, поэтому очень важно иметь нормальную ориентацию в происходящем касательно космоса.

Поэтому прежде чем начинать линзирование, пару дней следует активно поизучать просто астрономию!

теория катастроф и каустик (?) (спорно, насколько она необходима, кстати)

Теория катастроф уже не один десяток лет используется в задачах линзирования.

Без этих знаний всё равно придется отдельно отходить, заниматься этими темами.

континуальный интеграл (?) (так и не понял, почему он так нужен тут?)

Тема эта встречается во многих статьях по линзированию, а также сильно связана с методом Пикара-Лефшеца, который просто везде встречается.

математическая физика хотя мы решаем волновое уравнение, методы его решения знать также не обязательно.

бесселей много, гипергеометрическая функция, их слишком много, нужно уметь с ними работать.

используются часто специальные функции, также решаются многие уравнения. Если основы УМФ не заложены, на них тоже отлететь можно долго

дифференциальная геометрия (??) (?? не знаю, насколько она нужна, но мб нужна)

Дополнительные темы для линзирования

Обсудим темы, по которым не имея почти никакой подготовки, можно успешно понять гравитационное линзирование, а при потребности - быстро их доделать. Некоторые из этих тем раскрыты в дополнениях, а некоторые для уменьшения объема опущены.

квантовая физика да, идеи ее используются, тем не менее, не до нее.

топология например, каустики подробно разбираются в топологии.

неплохо бы знать их, но не обязательно.

космология Хотя линзирование и дает некоторые возможности для составления космологических гипотез, тем не менее, она далека от него.

После нее можно изучать космологию, это будет хорошей подготовкой, но изначально готовить ее не нужно.

классическая теория поля и электродинамика (?) Хотя мы решаем по сути задачу электродинамики в искривленном пространстве, оптических методов более, чем хватает для понимания.

Излишне знать то, что дается в теории поля и изучать природу электромагнитных волн.

(мб и не излишне, пока просто с этим не столкнулся)

обзор сферы моделирования оказывается, есть многие программы, многие проекты, которые этим занимаются.

это большая развитая сфера, так что ориентироваться в ней также очень нужно.

Труды Felbrugge в двух словах такие есть, давно знаком с ними

Единственное - что по итогу непонятно что мы моделируем этим.

и вообще, стремный код, но ладно, потом буду разбираться.

А.2.3 Обсуждения и споры

О том, кто что открыл

(пофиг полностью пока что)

о вкладе Ньютона там кто-то говорит, что много он сделал, кто-то, что он не доказал ничего, на самом деле мне не очень интересно в этом копаться.

А.3 Литература по линзированию

Обсудим книги и статьи по гравитационному линзированию. Линзирование наиболее хорошо представлено в статьях, однако есть и пара больших полезных книг.

А.3.1 Теоретическая

Основная

[1] Вайнберг С. Космология

В этой книге хорошо раскрыт геометрический подход к линзированию (???). Вообще, большая книга, часто не до нее.

[2] Job Feldbrugge, Ue-Li Pen, and Neil Turok Oscillatory path integrals for radio astronomy

Интересная, но крайне непонятная книга, потом буду доделывать. Для её усвоения, необходимо иметь базу по оптике и по дифференцируемым отображениям Арнольда.

[3] Захаров Гравитационные линзы и микролинзы

Странная большая книга, для которой нужен отдельный подход, при этом я так и не понял, можно ли получить от неё пользу. (впишу по У раздел про то, как такие книги изучать, это на самом деле большая тема.)

[4] Dominik M. Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities

Обещается, что тут подробное руководство по моделированию и интерпретации кривых блеска, потом посмотрю, пока итак каша в голове. Википедия на него цитируется.

Другие книги

(эти - хз для чего, потом посмотрю, всё равно нет времени усваивать)

Gravitational Lensing Strong, Weak and Micro Saas-Fee Advanced Course 33 (Saas-Fee Advanced Courses) by Peter Schneider, Christop.

Vajnborg S. Kosmologija (URSS, 2013).pdf
 отличная лекция из Гарварда по линзированиюlecture12.pdf
 Gravitational Lenses by Dr. Peter Schneider, Professor Dr. Jürgen Ehlers, Dr. Emilio E. Falco (auth.) (z-lib.org).pdf
 Kayser-R-Gravitational-Lenses.djvu Vasilev-VA-Vvedenie-v-topologiyu.djvu
 More on Homological Supersymmetric Quantum Mechanics Aliresa Behtash.pdf
 Klaus Lamotke. The topology of complex projective variety after S. Lefschetz.pdf
 Moran-JM-Gravitational-Lenses.djvu
 топология комплексных особенностей.pdf Real-time Feynman path integral with Picard-Lefschetz theory.pdf
 статья про оупенсорские моделирования линзирования.pdf описание функционального интеграла Witten.pdf
 квантовое туннелирование с методами пикара-лефшица.pdf
 A path integral description of quantum nonlinear optics in arbitrary media.pdf

О волновом линзировании

(а честно, я пока что хз, потому что мне не зашло оно, потом собирать буду.)
 [5] Takahiro T. Nakamura, Shuji Deguchi Wave Optics in Gravitational Lensing
 Короткая, хорошая теория, для нормального усвоения которой необходимо иметь усвоенными разные теории.
 Feldbrugge Multi-plane lensing in wave optics
 давно хочу почитать, очень крутые и мб актуальные модели, есть про что подумать.

Популярные статьи и книги

[6] Шиллинг Г. Складки на ткани пространства-времени: Эйнштейн, гравитационные волны и будущее астрономии
 популярные параграфы по нему напишу. пока что тут по сути напоминание, что неплохо бы еще популярную точку зрения потом добавить.
 [7] Чернин А. Д. Космические иллюзии и миражи
 небольшая популярная статья, добавлю ее тоже потом, там просто рассказывается на 7 страниц что происходит в линзировании, полезно очень

Литература с дополнительными методами линзирования

Обсудим литературу по линзированию, которая менее использовалась для этой записи, тем не менее, в которой многие идеи хорошо изложены.
 (пока тут просто литература до которой я не дошел еще)
 [8] Frederic Courbin и др. Quasar Lensing
 Интересно, но так её нормально и не смотрел, так что сказать нечего.
 [9] R. Kayser и др. Gravitational Lenses
 Интересно, но так её нормально и не смотрел, так что сказать нечего.

Статьи с теоретическим рассмотрением разных задач линзирования

[10] Job Feldbrugge, Neil Turok Gravitational lensing of binary systems in wave optics
 Приведен обзор происходящего, даны ссылки на источники, с которыми можно продолжить изучения. Без объясняющих книг статья эта бесполезна, потому что ничего в ней непонятно. Бинарная система очень вкратце обсуждена и приведены просто итоги. Вся эта статья успешно добавлена.

[11] древняя интересная статья, где сделано то же, что делал Турок. Прикольно, что уже 40 лет назад это было сделано.

[12] Захаров А. Ф. Поиски экзопланет с помощью гравитационного микролинзирования интересно, потом посмотрю.

[13] Takahiro T. Nakamura, Kenji Tomita и др. Various Approaches to Cosmological Gravitational Lensing in Inhomogeneous Models

Накамура еще например эту статью написал, где изучаются космологические модели и что-то еще. позже дойду, выглядит очень интересно.

[14] Gianfranco Grillo and James Cordes Wave asymptotics and their application to astrophysical plasma lensing

вроде простая статья, изучающая что-то то же, что и я делаю, только без теории Пикара-Лефшеца, вроде с использованием Фурье методов когда сделаю основу свою - скорее всего почитаю, мб добавлю.

Литература по другим наукам в помощь

Обсудим книги по другим наукам, которые помогут в осознании тем линзирования. (тип чуть что на теорию из этих книг я бы падал.)

[15] Ландау Л Д Теория поля

[16] Alireza Behtash и др. Toward Picard-Lefschetz Theory of Path Integrals, Complex Saddles and Resurgence

Очень хорошая статья про метод Пикара-Лефшеца, континуальный интеграл, и многое, до чего пока я не дошел. Здесь постараюсь что-то добавить, но вообще это в других записях должно будет раскрыто.

[17] Witten E. New look at Path integral

наверное, континуальный интеграл по нему буду изучать. Пока просто не понимаю, что его статье такого особенного?

[18] Арнольд и др. Особенности дифференцируемых отображений том 1
наверное много этой теории буду применять.

[19] Арнольд и др. Особенности дифференцируемых отображений том 2
а второй том нужен вообще?

[20] Васильев В.А. Ветвящиеся интегралы

Предположительно, эта книга, в которой теория вычислений осциллирующих интегралов. потом, наверное, дойду.

[21] Liviu I. Nicolaescu Notes on the Topology of Complex Singularities

книга по топологии комплексных особенностей, которую мб буду использовать для понимания того, что происходит. пока просто знаю, что такая есть.

источники программных кодов для вычислений и визуализации

Обсудим программы, которые я использовал для расчетов и визуализации. (пока не использовал)

<https://p-lpi.github.io/glwo.html> Job Feldbrugge and Neil Turok Gravitational lensing in wave optics

Обсуждение численного решения задач гравитационного линзирования. Вроде бы информации там очень мало, тем не менее, с этой мини статьи начну. Именно этот код использовался в разделе про численное решение.

<https://p-lpi.github.io/> Job Feldbrugge, Ue-Li Pen and Neil Turok Picard-Lefschetz Path Integrals

Буду изучать численный метод Пикара-Лефшеца по нему, а там посмотрим. В принципе, там только обзор и результаты, для понимания нужно смотреть сам код от Feldbrugge.

<https://p-lpi.github.io/klwo.html> Job Feldbrugge and Neil Turok Kolmogorov lens in wave optics

интересная небольшая статья про колмогоровские линзы, вроде это как случайные линзы. потом досмотрю, пока есть важнее дела.

А.3.2 Экспериментальная

её прямо очень много будет, так что отдельный раздел на неё.

Статьи с экспериментальными исследованиями астрономических объектов с помощью линзирования

(с ними проблема, что я в них ничего пока не понимаю, так что позже уже отдельно буду разбирать)

[22] Jung, Youn Kil и др. KMT-2016-BLG-1820 and KMT-2016-BLG-2142: Two Microlensing Binaries Composed of Planetary-mass Companions and Very-low-mass Primaries

вроде, статья про линзирование как раз бинарной системой. интересно посмотреть потом будет, как на самом деле на практике применяется то, что я исследую, наверное, тут это и рассказывается, что-то там открыли авторы. посмотрю, когда с теорией закончу.

[23] Herrera-Martin A. OGLE-2018-BLG-0677Lb: A Super-Earth Near the Galactic Bulge
статья про обнаружение супер Земли с помощью линзирования. Когда буду заниматься экспериментальными методами, посмотрю. Турок на нее ссылается, так что и я доучу.

[24] S. Mao, “Astrophysical Applications of Gravitational Microlensing,”
интересная статья про приложения микролинзирования, на которую ссылается Турок. Пока без этой статьи непонятно вообще, что он там в перспективах наблюдений написал, так что нужно бы дочитать.

А.3.3 Другая

[25] Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehnert, Neil Turok Lorentzian Quantum Cosmology
44 страницы обсуждения каких-то деталей и различные крутейшие иллюстрации, которые обязательно прочитаю и вставлю сюда. а кстати, что за квантовая космология?

Статьи о явлениях, в которые я не очень верю

[26] Diego, J. M. et. al. Observational signatures of microlensing in gravitational waves at LIGO/Virgo frequencies

Авторы обещают, что можно узнать о линзировании гравитационных волн. Хз, правы ли они? Вот мб когда-то подучу теорию для этого, пока прямо много подумать нужно, чтобы оценить эти результаты.

[27] Simon M. C. Yeung et. al. Microlensing of type II gravitational-wave macroimages
Что-то про линзирование гравитационных волн, пока не на том уровне, чтобы понять это, нужно отдельно долго разбираться. Мб что-то и годное, не знаю.

Программные коды

PyAutoLens <https://github.com/Jammy2211/PyAutoLens>

Вроде как какие-то симуляции тут обещаются, я хз.

А.4 Обзор гравитационного линзирования

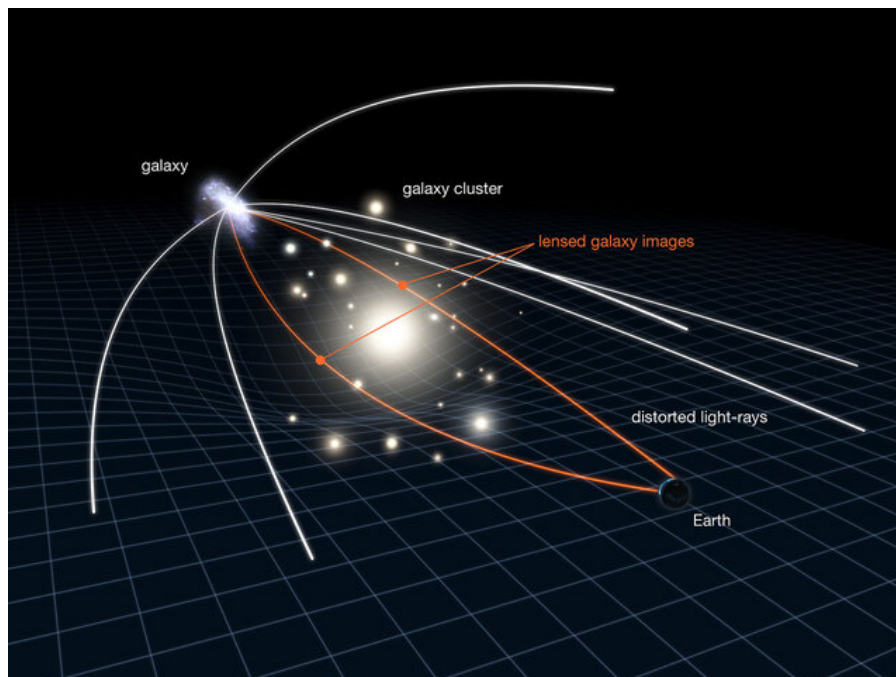
Несмотря на то, что казалось бы гравитационное линзирование встречаться должно повсеместно, пока что все еще оно не было детектировано.

Также многие исследования гравитационного микролинзирования обнаружили тысячи линз, включая многие экзопланеты.

Многие пульсары были также обнаружены за счет гравитационного линзирования.

А.4.1 Популярно о гравитационном линзировании

Иллюстрация линзирования



А.4.2 Обзор явлений и методов

обзор различных существующих моделей

А.4.3 Результаты гравитационного линзирования

(а вот результаты не могу написать, потому что так до них я и не дошел)

Обсудим, что полезного теории гравитационного линзирования дают миру. Именно эти пункты важно помнить, потому что именно в этих направлениях дальше эта запись будет играть ключевую роль.

А.4.4 О волновом линзировании

(тут описание его будет, пока не шарю.)

Ситуации, в которых волновыми эффектами нельзя пренебречь

(так и не понял, когда конкретно? потом опишу это.)

Не является ли это странной теорией со странными результатами?

(странные графики я получал, пока не пойму, они вообще нормальные? скорее всего обсужу это с кем-то.)

А.4.5 Удивительные факты

Обзор удивительных фактов, за счет которых линзирование и ощущается как интересный предмет. Это же как раз шаблоны, которые можно использовать в общении с дургом, чтобы заинтересовать его темой или классно пообщаться.

(их много, напишу потом, пока не до них, плохо готов еще)

А.4.6 Обзор теорий гравитационного линзирования

обзор геометрического и волнового подходов к описанию гравитационного линзирования

есть там подход геометрической оптики, есть волновой.

еще какой-то подход есть?

обсудим плюсы и минусы, а также особенности реализации.

Например, волновые эффекты пренебрежимы в некоторых оптических системах, таких как квазары, но непренебрежимы в случае фемтолинзирования гамма-лучей или гравитационном линзировании от гравитационных волн. (? так сказал Накамура)

Геометрическая оптика дает достаточно хорошие результаты в описании гравитационного линзирования, поэтому часто волновую оптику, которая более фундаментальная, не рассматривают.

Когда длина волны малая в сравнении с радиусом Эйнштейна, для этого интеграла можно использовать приближение геометрической оптики.

Что более важно, геометрическая оптика не работает в случае каустик, когда в ней получается бесконечная яркость от источника (да?)

короткий обзор типов линзирования и их применений

Существует три типа гравитационных линз: сильное, слабое и микролинзирование.

Сильное гравитационное линзирование, вызывающее легко различимые искажения, такие как эйнштейновское кольцо, дуги и размноженные изображения.

Слабое гравитационное линзирование, вызывающее лишь малые искажения в изображении объекта, который находится позади линзы (далее — объект фона).

Эти искажения могут быть зафиксированы только после статистического анализа большого количества объектов фона, что позволяет найти небольшое согласованное искажение их изображений.

Линзирование проявляется в небольшом растяжении изображения перпендикулярно направлению к центру линзы.

Изучая форму и ориентацию большого количества отдалённых галактик фона, мы получаем возможность измерить линзирующее поле в любой области.

Эти данные, в свою очередь, могут быть использованы, чтобы восстановить распределение масс в данной области пространства; в частности, этим методом можно исследовать распределение тёмной материи.

Поскольку галактики сами по себе обладают эллиптической формой и искажения от слабого линзирования малы, для использования этого метода необходимо наблюдение большого числа галактик фона.

Такого рода обзоры должны тщательно учитывать многие источники систематической погрешности: собственную форму галактик, пространственную функцию отклика светочувствительной матрицы, атмосферные искажения и т. д.

Результаты этих исследований важны для оценки космологических параметров, для лучшего понимания и развития модели Λ -CDM, а также для того, чтобы обеспечить проверку непротиворечивости с другими космологическими наблюдениями.

Микролинзирование не вызывает никакого наблюдаемого искажения формы, но количество света, принимаемое наблюдателем от объекта фона, временно увеличивается.

Линзирующим объектом могут быть звёзды Млечного Пути, их планеты, а источником света — звёзды отдалённых галактик или квазары, находящиеся на ещё более далёком расстоянии.

В отличие от первых двух случаев, изменение наблюдаемой картины при микролинзировании происходит за характерное время от секунд до сотен дней.

Микролинзирование позволяет оценить количество слабосветящихся объектов с массами порядка звёздных (например, белых карликов) в Галактике, которые могут вносить некоторый вклад в барионную компоненту тёмной материи.

общие характеристики линзирования

(пока не уверен, верны ли они)

Обсудим параметры, которые используются в задачах линзирования.

общая интенсивность от источника меняется, так как

(???) таково решение нашего уравнения,

(???) что физически означает в случае интерпретации лучами,

что лучи отклоняются от линзирующего объекта и уходят в другие направления.

уравнение гравитационной линзы

Приведем вид этого уравнения и покажем его свойства.

доказательство, что в случае большого угла между линзирующим объектом и источником, нет искажения изображения

(да, интересно это вывести, это было бы очевидно тому, кто понял)

о частоте наблюдения линзирования

(говорят, что наблюдать линзирование удастся очень редко, см. Википедию)

Обсудим, насколько часто происходят события линзирования.

перспективы наблюдения гравитационных линз

(данный параграф станет понятным после прочтения экспериментальных статей. пока тут теория Турока, которая не объяснена абсолютно)

Обсудим перспективы наблюдения линз. (со слов Турока, еще проверить эту информацию нужно)

Оптические телескопы детектируют примерно 2000 гравитационных микролинз за год за счет звезд в нашей галактике. (?)

Оптическая глубина (часть неба, освещенная этими звездами), составляет около 10^{-6} . (?)

С большим числом источников радио волн, в перспективе 10^4 или даже более FRB за день и до 10^5 пульсаров, гравитационное линзирование может быть наблюдено.

В удобных (?) единицах $\theta_E \approx 1 \text{ mas} (M/M_\odot)^{\frac{1}{2}} (8 \text{ kpc}/d)^{\frac{1}{2}}$ и $\Omega \approx 1.2 \times 10^5 (M/M_\odot) (\nu/\text{GHz})$, из которых находится угол разделения полос, как (??? почему)

$$\theta_F = \pi \theta_E / \Omega \approx 2.61 \cdot 10^{-5} \text{ mas} (M_\odot/M)^{\frac{1}{2}} (8 \text{ kpc}/d)^{\frac{1}{2}} (\text{GHz}/\nu).$$

Типичные звезды имеют $M \sim 0.3 M_\odot$ и создают выпуклость $d \sim 8 \text{ kpc}$.

(????) Типичные угловые скорости $\mu \sim 5 \text{ mas/yr}$, так что события микролинзирования могут наблюдаться в течение месяцев, а экзопланеты выглядят как "выпуклости" на кривых блеска их звезд.

(??) Дифракционные полосы пересекут радиотелескоп за время $\theta_F/\mu \sim$, то есть от минут до дней.

FRB до сих пор были обнаружены только на низких частотах, где телескопы имеют более широкое поле зрения. Однако, они имеют довольно ровные спектры вплоть до 8 ГГц.

Если их можно будет локализовать с помощью телескопов с выносными опорами на частотах ГГц, набор высокочастотных телескопов, направленных на них одновременно, сможет вместе наблюдать полосы, расположенные на расстоянии $\approx 300(100 \text{ GHz}/\nu) \text{ km}$ на поверхности Земли.

Частотная зависимость была как раз признаком волнового описания гравитационного линзирования.

А.4.7 обзор применений линзирования

Обсудим с примерами, подробно, как используется линзирование?

оценка космологических постоянных

обзор применения линзирования для оценки космологических постоянных

развитие модели Лямбда-CDM

Приведем обзор применения линзирования для развития модели Лямбда-CDM

проверка непротиворечивости космологических наблюдений

Приведем обзор применения линзирования для проверки непротиворечивости космологических наблюдений

А.4.8 Применения линзирования в других разделах физики

Теория линзирования богата как рассматриваемыми объектами, так и математическими методами, так что наверняка эти же идеи и методы могут иметь применения в других, совершенно не связанных с линзированием разделах. Обсудим эти различные применения.

(пока ни одного не знаю, но я и не смотрел)

(?) где-то наверное осциллирующие интегралы тоже есть

А.4.9 Обзор дальнейших развитий линзирования

(вот это пока что плохо понимаю)

А.5 Головоломки линзирования

Приведем интересные задачки, которые весело было бы решать, если бы теория была усвоена. За счет этой главы заниматься линзированием становится интересно и увлекательно, всегда есть, что порешать. Задачи тут не так уж актуальны, они скорее как развлечение на случай, если хочется развить теорию.

(У Шнайдера вроде их много)

докажите, что от звезд линзирование едва ли заметно

хз, так говорят,
галактики - видно, звезды - нет.

как понять, объект был искажен линзирующим телом или нет?

очень актуально.
описываем ведь экспериментальные картинки мы...
пропишу эту связку с экспериментами и их объяснением.

Вот фото линзирования, что ты можешь сказать про него с помощью своей теории?

(жесткий вопрос, который меня сейчас бы слил, потом додумаю.)

А.6 История изучения гравитационного линзирования в двух словах

Посмотрим вкратце историю гравитационного линзирования.
(тут многое удалю и сокращу, сейчас куча лишнего.)

А.6.1 Выводы из истории

польза знания истории развития линзирования

пока польза в том, что создается неплохой кругозор, а также просто интересно.
если какая-то нормальная польза будет обнаружена, пропишу ее сюда.

может, зная, как открывалось в прошлом линзирование, можно придумать, как открыть что-то в настоящем?

Можно узнать классические работы, позже их посмотреть и по ним изучать линзирование. Разве что так лучше не делать, потому что есть уже готовые книги, с них правильное будет начать.

А.6.2 Основная история

(какие-то большие отдельные темы в отдельный раздел тут напишу, все повествование - тут. совсем лишнее - удалю, такое тоже может быть тут.)

главные факты из истории

первое открытие линзирования
?
главные даты
?

первая обнаруженная гравитационная линза

?

появление гравитационного линзирования

?

Эффект гравитационной линзы был предсказан А.Эйнштейном, который в 1915 г. в рамках общей теории относительности впервые правильно вычислил угол отклонения луча света в гравитационном поле.

Во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 г. английские астрономы измерили отклонение света звезд, проходящего вблизи поверхности Солнца: смещение изображений звезд составило 1.75" в полном согласии с предсказанием Эйнштейна.

Английский физик О.Лодж в 1919 г., по-видимому, первым использовал термин "линза" говоря об отклонении электромагнитного луча гравитацией.

Петербургский физик О.Хвольсон в 1924 г. опубликовал в журнале "Astronomische Nachrichten" заметку о том, что луч света далекой звезды может быть отклонен притяжением другой звезды-линзы, в результате чего возникнет второе изображение далекой звезды; в случае, когда обе звезды и наблюдатель находятся на одной прямой, изображение будет иметь форму кольца.

Эйнштейн опубликовал в 1936 г. в журнале "Science" заметку, в которой по просьбе чешского инженера Р.Мандла рассмотрел линзоподобное действие одной звезды на другую и также указал на возможность кольцеобразного изображения.

Ни Хвольсон, ни Эйнштейн не верили в возможность экспериментального обнаружения эффекта гравитационной линзы в случае обычных звезд.

развитие идей линзирования

Однако в 1937 г. американский астроном швейцарского происхождения Фриц Цвикки пришел к выводу, что эффект гравитационной фокусировки света можно наблюдать в том случае, если линзой является галактика.

В 1979 г. английские астрономы Д. Волш и др. впервые обнаружили "двойной квазар" QSO 0957+16 A,B (красное смещение $z=1.4$ и угловое расстояние между компонентами около 6").

Когда выяснилось, что оба квазара изменяют свой блеск в унисон, астрономы поняли, что в действительности это два изображения одного квазара, обязанные эффекту гравитационной линзы.

Вскоре нашли и саму линзу - далекую галактику ($z=0.36$), лежащую между Землей и квазаром. К концу XX в. обнаружено несколько десятков гравитационных линз.

Некоторые изображения действительно имеют форму ровного или разорванного кольца, которое называют "кольцом Эйнштейна" или "кольцом Хвольсона-Эйнштейна".

Позже был обнаружен эффект гравитационной линзы и в пределах нашей Галактики: однократная спонтанная переменность блеска некоторых звезд указывает на то, что между ними и Землей проходят массивные и довольно темные тела, природа которых пока не ясна.

современный вид гравитационного линзирования в двух словах

(??? абсолютно непроверенная информация!!!)

В конце 19го века сформировался окончательный подход к гравитационному линзированию через волновую или геометрическую оптику.

Появилась теория катастроф и исследования по каустикам, которые легли в основу современного видения линзирования.

Также появилось много странных книг, в которых непонятно какая теория, и такие я просто откладываю, потом напишу про них точно, то ли я тупой, то ли они на самом деле специально читателя в тупик уводят.

сейчас книги по линзированию представляю собой просто пересказ статей (?????)

Может быть, это не так, но, посмотрев пару книг, такое впечатление создается.

Теорию просто дают одну за другой, не связывая их вместе.

закрадывается подозрение, что это все специально такое формализованное и непонятное, потому что если бы это автору текста было бы понятно, почему бы не написать нормально?

так что подозреваю, что общая картина происходящего в линзировании есть у единиц, а не у сотен тех, кто пишет статьи.

Может быть, это не так, но пока что именно такое ощущение.

выводы из истории линзирования

Так как история во многом изучается для того, чтобы делать из прошлого выводы, этим и займемся в этом параграфе.

(мб какие-то я и придумаю, не знаю)

часто линзирование забывали, однако возвращались к нему снова. Думаю, это нормально, потому что это на самом деле не самая главная тема в физике. (?)

вклад Ньютона

Отклонение лучей света от прямой линии обсуждалось вскоре после создания Ньютоном классической механики.

Ньютон в 1687 сформулировал следующий вопрос: "не действуют ли тела на свет на расстоянии, и не является ли это действие наиболее сильным на наименьшем расстоянии?" т.о., можно говорить о том, что Ньютон сформулировал словами закон об отклонении луча света в гравитационном поле:

$$\Theta = \frac{2GM}{c^2 R}$$

Точнее, $\Theta \sim R^{-1}$, поскольку численные коэффициенты в то время не выписывались, так как не было общепринятой системы единиц.

Кроме того, Ньютон рассматривал движение тела по гиперболе, откуда следовало, что ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния до центра.

Аналогичные утверждения были доказаны в предположении, что тело движется по параболе, эллипсу.

Ньютон утверждал, что под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояний до центра, тело движется по коническому сечению, фокус которого лежит в центре.

Считается, что Ньютон это доказал, хотя есть споры.

Поскольку при рассмотрении движения тела по гиперболической траектории Ньютоном были вычислены и полуоси, тем самым, ему был известен и угол между асимптотами.

Т.о., учитывая то, что Ньютон достаточно часто не публиковал результаты, и форма представления им результатов также была весьма не простой, можно, по-видимому, утверждать, что формула отклонения света была Ньютону известна, более того, скорее всего,

ему была известна соответствующая величина отклонения луча света вблизи поверхности Солнца, поскольку все необходимые значения констант ко времени опубликования "Начал" были известны.

Действительно, Кассини определил расстояние от Земли до Солнца в 1672 г., время обращения Земли вокруг Солнца определил Тихо Браге (1546-1601) с точностью до 1 с, а из третьего закона Кеплера, зная расстояние от Солнца до Земли и период обращения Земли, можно определить произведение GM_{\odot} , т.к. $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM_{\odot})$. Результаты Ремера по измерению скорости света на основании изменения периода обращения спутника Юпитера Ио были опубликованы в 1677 г.

Тем не менее в явном виде в научном наследии формулы угла отклонения нет, не приведено также и значение для отклонения луча света вблизи поверхности Солнца, возможно, по причине слишком малого его значения $-0.87''$.

Интересно кстати, что если посчитать отклонение луча света вблизи поверхности Солнца, используя величину скорости света, определенную Ремером $c = 2 \times 10^{10}$ см/с, то для величины угла отклонения получится результат $\Theta = 1.73''$, что практически совпадает с результатом, полученным в рамках ОТО.

Несмотря на то, что формула (1.1) Ньютоном, повидимому, была известна, первое упоминание о вычислении величины угла отклонения относится к 1784 году; когда соотношение (1.1) получил Генри Кавендиш, стимулированный перепиской со своим другом Джоном Митчеллом (тем самым, кто в 1783 г.

за несколько лет до Лапласа рассмотрел звезды, гравитационное поле которых является столь сильным, что луч света не может покинуть поверхность звезды).

Кавендиш не опубликовал свои вычисления, тем не менее, они были записаны "на отдельном листе бумаги".

вклад Зольднера

(а заодно Захаров считает важным его биографию сказать)

В 1801 г. немецкий астроном Иоганн Георг фон Зольднер представил в Берлинский астрономический ежегодник статью об отклонении луча света в гравитационном поле звезды, которую опубликовали в 1804г.

Т.о., вывод формулы угла впервые был опубликован Зольднером.

То, что эта замечательная работа Зольднера не была известна научному сообществу почти 120 лет (и то, что его имя чаще всего не упоминается в монографиях и учебниках по механике и теории гравитации), заставляет упомянуть некоторые страницы биографии этого ученого.

вклад Эйнштейна

В 1911 г.

Эйнштейн получил в рамках специальной теории относительности (СТО) то же самое значение для угла отклонения луча света вблизи поверхности Солнца, что и вычисляемое с использованием формулы угла отклонения.

К началу XX века астрономы уже могли измерить подобные углы отклонения.

Действительно, в 20-х годах XIX века, благодаря работам Фраунгофера, были созданы телескопы, с помощью которых Бессель и Струве измерили звездные параллаксы, которые много меньше $1''$.

Группа астрономов из Берлинской обсерватории во главе с Фрейндлихом заинтересовалась предсказаниями Эйнштейна и собралась провести измерения во время предстоящего полного солнечного затмения в Крыму в августе 1914 г.

Астрономы уже были в Крыму, но началась I мировая война, они были арестованы и вскоре обменены на граждан России, арестованных в Германии.

Т.о., по замечанию Брехера (1982) к счастью для Эйнштейна, наблюдения не были проведены.

В 1915 в рамках общей теории относительности Эйнштейн (1965б) получил удвоенное значение для угла отклонения

$$\Theta = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Вскоре после окончания I мировой войны были проведены наблюдения отклонения луча света во время полного солнечного затмения 29 мая 1919г.

Как сообщалось в публикации результатов экспедиции, ее задачей был выбор одной из трех возможностей:

- 1) гравитационное поле Солнца не оказывает влияния на траекторию луча света;
- 2) гравитационное поле Солнца действует на световой луч как на обычное вещество, если закон тяготения носит ньютоновский характер, что приводит к кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края солнечного диска, равному $0.87''$;
- 3) Ход луча согласуется с ОТО, что приводит кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края диска, равному $1.75''$.

При формулировке задач экспедиции было замечено, что "смещение впервые было вычислено проф. А.Эйнштейном на основе принципа относительности".

Результаты наблюдений были получены в двух географических точках: в Собрале и на Принсипи.

В Собрале было получено среднее отклонение $1.98'' \pm 0.12''$, на Принсипи $1.61'' \pm 0.30''$. Тем не менее, в Собрале были получены пластины, давшие отклонение $0.93''$.

Эти результаты были отброшены, поскольку случайная ошибка была слишком велика.

Т. о., в результате наблюдений приведено убедительное подтверждение предсказаний А Эйнштейна.

Немецкий нобелевский лауреат Ф. Ленард (1921), заметив, что впервые формула (1.1) получена в работе Зольднера, и привел в своей статье фрагмент этой работы и аргументацию того, что результаты согласуются с предсказанием отклонения $0.87''$.

Тем не менее, последующие наблюдения с помощью методов радиоинтерферометрии подтвердили предсказания Эйнштейна с точностью выше 1%

По-видимому, первый, кто использовал термин "линза" в контексте отклонения луча света гравитацией, был О. Лодж (1919), который, однако, отметил, что "гравитационное поле действует, как линза, но не имеет фокусной длины".

Петербургский физик О. Хвольсон (1924) опубликовал короткую заметку, в которой заметил, что в случае, когда рассматривается отклонение луча света фоновой звезды звездой-линзой, возможно возникновение второго изображения фоновой звезды, но угол между двумя изображениями столь мал, что эти изображения нельзя разрешить с помощью наземного телескопа.

В случае, когда наблюдатель линза и источник находятся на одной прямой, возникает изображение типа кольца.

По утверждению американского астронома Барноти (1989), эти кольца, называемые сейчас "кольцами Эйнштейна" должны называться "кольцами Хвольсона а Шнайдер и др.(1992) приводят по этому поводу пословицу "the biggest cat gets all the milk".

В настоящее время в основном используется термин "кольцо Эйнштейна" и значительно реже "кольцо Хвольсона-Эйнштейна".

Следует заметить, что значительно большая популярность работы Эйнштейна связана не только со значительно большей его известностью по сравнению с Хвольсоном, но и

со значительно большей популярностью журнала Science" по сравнению с потсдамским астрономическим журналом "Astronomische Nachrichten".

В 1936 г. А. Эйнштейн (1965г) опубликовал заметку, где по просьбе чешского инженера Мандла рассмотрел линзообразное действие звезды на фоновую звезду, в частности, появление кольца в случае, если наблюдатель, линза и источник находятся на одной прямой (в этом случае появляется "кольцо Эйнштейна").

А. Эйнштейн заметил, что "конечно нельзя надеяться на то, что удастся прямо наблюдать это явление".

Ниже мы постараемся обсудить это замечание А. Эйнштейна.

Кроме того, в данной заметке был вычислен коэффициент усиления источника гравитационной линзой.

Следует заметить, что и Хвольсон, и Эйнштейн считали, что не может наблюдаться эффект гравитационной линзы (в смысле наблюдения двойной звезды или "кольца Эйнштейна"), поскольку они рассматривали случай, когда и источник, и гравитационная линза являются звездами.

Однако Цвикки (1937) пришел к выводу, что эффект может быть наблюдаем в случае, если источником является туманность, а гравитационной линзой-галактика.

приведем цитату из работы Цвикки: "Прошлым летом доктор В.К. Зворыкин (которому подобная идея была сообщена Мандлом), заметил мне о возможности образования изображения как результат действия гравитационных полей. Как следствие, я провел некоторые вычисления. Внегалактические туманности имеют гораздо больше шансов, чем звезды, для наблюдения эффектов гравитационной линзы".

Эта цитата может быть образцом стиля научных работ более чем полвека назад со ссылками на чужие, даже не до конца опро деленно сформулированные идеи.

Для того, чтобы убедиться в том, что это не единичный пример, можно привести цитату из работы А. Эйнштейна: "Некоторое время тому назад меня посетил Р. Манда и попросил опубликовать результаты небольшого расчета, которые я провел по его просьбе. Уступая его желанию, я решил опубликовать эту заметку".

Цитата из работы Цвикки демонстрирует самое широкое влияние на развитие мировой науки широкого влияния русской научной школы, в том числе, блестящих представителей первой русской эмиграции, таких, как В.К.Зворыкин, технические открытия которого фактически позволяют назвать его "отцом" телевидения.

Насколько плодотворным было замечание Зворыкина и, безусловно последующий анализ Цвикки, стало ясным спустя более сорока лет. Действительно, когда Волшем и др. была обнаружена первая гравитационная линза при наблюдении двойного квазара QSO 0957 + 16 А, В ($z \approx 1.4$, угловое расстояние между изображениями порядка $6''$), и гравитационной линзой являлась галактика ($z_d \approx 36$) то стало возможным говорить о том, что предсказание Цвикки подтвердилось.

Работа Цвикки была практически забыта, и только С Либес (1964) и С. Рефсдал (1964) вновь рассмотрели эффект гравитационного линзирования точечной массой и провели его всесторонний анализ.

В частности, Рефсдал (1964) аргументировал возможность использования приближения геометрической оптики.

последние этапы развития линзирования

К 1996 г. имелось 10 установленных объектов, связываемых гравитационными линзами, и 15 объектов, предложенных для дальнейшей проверки, кроме того, 5 радиодуг, связываемых с гравитационными линзами (Рефсдал и Сюрдей (1994)).

Следует заметить также, что в то время когда были опубликованы сообщения об обнаружении

первых микролинз группами МАСНО, они явились, по-видимому, самым крупным астрономическим открытием года.

Популярное изложение этих результатов приведено в работе Сажина (1995).

С 1979 г. количество опубликованных работ, посвященных гравитационным линзам, столь велико, что невозможно коротко упомянуть даже самые значительные.

По этой причине укажем лишь монографии Блиоха и Минаков' (1989) и Шнайдера и др. (1992), а также обзор Рефсдала и Сюрдеї (1994), совместную работу крупнейшего теоретика и замечательного астронома, обнаружившего несколько гравитационных линз.

А.7 Описание записи

(!!! в ней потом будет много картинок, потом добавлю.)

А.7.1 Части и разделы записи

Опишем, что из себя представляет эта запись.

(кст, пока что структура не полностью ясна, буду её менять, потом только буду описывать её.)

О разделе про численное моделирование

(будет - опишу, чем хорош, пока не до него.)

А.7.2 Особенности записи

Важность дополнений к записи

(потом раскрою, насколько подготовка из дополнений важна)

А.7.3 обозначения и константы

Условные обозначения и типичные параметры

Угол Эйнштейна описывается в разделе про теорию эйнштейна, обозначается иногда θ_E , иногда θ_* и равен

$$\theta_* = \theta_E = \left(\frac{4GM r_{l0}}{r_l r_0} \right)^{1/2} \sim 3\mu \operatorname{arcsec} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{r_l r_0 / r_{l0}}{\operatorname{Gpc}} \right)^{-1/2}$$

Он встречается очень часто, так что нужно быть знакомым с его видом. (пара комментариев будет, когда опыта наберусь)

(?) заметим, что это не абсолютная константа, а именно важный параметр линзирующей системы.

его кстати легко получить из (??? скоро уже готов буду записать)

В разделе про гравитацию работаем в системе единиц $c = 1$

Гравитационный радиус:

$$r_g = \frac{2km}{c^2},$$

его кстати легко получить из (??? скоро уже готов буду записать)

константы и типичные численные значения

(Вайнберг себе писал такой список, я тоже напишу)

В Физика для линзирования

Соберем различные соображения, которые нам понятны, занимаясь гравитационным линзированием.

Эти темы не обязательные, но можно задуматься над некоторыми общими физическими вопросами, так что сформулируем их и приведем на них ответы.

В.1 Некоторая оптика

Обсудим основы оптики на языке, который применяется в задачах гравитационного линзирования.

В.1.1 дополнительные концепции оптики

В линзировании встречаются некоторые оптические темы, которые далеки от всем известных. Обсудим тут их, чтобы если встретиться - понимать, о чем речь.

отображение Лагранжа

(??)

Критические точки могут быть описаны с помощью отображения Лагранжа $\xi : X \rightarrow M$, переводящего точки (?) координатного пространства $x \in X = \mathbb{R}^N$ в точки пространства параметра $\mu \in M$ согласно уравнению на критические точки

$$\nabla_x \phi(x; \mu)|_{\mu=\xi(x)} = 0.$$

То есть по сути отображение Лагранжа определяется есть градиент фазы линзы:

$$\nabla_x \phi(x; \mu) = 2(x - \mu) + \nabla \varphi(x) \implies \mu = \xi(x) = x + \frac{1}{2} \nabla \varphi(x)$$

Отображение Лагранжа ξ определяет оптические лучи, давая чисто геометрическое описание линзирования.

Каждая точка x отображается в точку μ в пространстве наблюдаемых параметров.

В общем случае, точка $\mu \in M$ может быть получена из нескольких точек $x \in X$.

Область в μ , где каждая точка получена из n точек в X называются n -точечными областями.

В многоточечных областях интенсивность больше, чем в малоточечных, за счет вкладов каждого пути, ведь на нем вычисляется гауссов интеграл и в итоге получается нормированная интенсивность:

$$I(\mu; \infty) = \sum_{x \in \xi^{-1}(\mu)} \frac{2}{|\lambda_1(x)| \dots |\lambda_N(x)|}$$

где ξ^{-1} это прообраз изображения при отображении Лагранжа и $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ это собственные значения деформационного тензора:

$$\mathcal{M}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j},$$

вычисленный в соответствующих критических точках $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Ниже мы изучим эти многоточечные области в деталях, при конечных ν , где происходят интерференционные картины.

На границах между областями с разными числом изображений как минимум одно из собственных значений λ_i должно обнулиться.

Таким образом, мы видим бесконечный пик на графике, изображающим нормированную интенсивность, из таких пиков и формируется каустика.

(
картинка и пример тут, мб посмотрю
пример перехода из области 1 изображения в области трех изображений
)

По сути отображение Лагранжа ξ формирует каустику на таких координатах $x_c \in X$, на которых деформационный тензор обнуляется.

В то же время пространство параметров системы X не наблюдается.

В пространстве наблюдаемых параметров M , каустика на x_c появляется в точке $\mu_c = \xi(x_c)$.

Для одномерной линзы каустики появляются в отдельных точках.

Для случаев более высокой размерности the determinant of the deformation tensor vanishes on a manifold $X_c = \{x \in X \mid \mathcal{M}(x) = 0\}$ which is mapped to a caustic set $M_c = \xi(X_c)$ in the parameter space.

Note that the set M_c is generally not a manifold, as it includes higher order caustics, such as cusps and swallowtails, at which the variety is non-differentiable and therefore M_c is not locally homeomorphic to Euclidean space.

We shall discuss examples of this kind later, but note here that they are exactly the points at which the lensing integral exhibits the most interesting behaviour.

The geometric optics limit is attained in two stages: at short wavelengths, each real stationary point corresponds to a distinct image.

As the wavelength is increased, each image itself forms an interference pattern, as illustrated in the Young's double slit experiment examined in Appendix B.

The limit of short wavelengths, in which phase coherence is maintained, is often called the eikonal approximation.

However, when phase coherence is lost - for example, when the source size becomes larger than the spacing of its fringes, interference effects disappear altogether.

This assumption of loss of coherence is implicit in the geometric optics limit.

However, objects smaller than the Fresnel scale are still seen to scintillate, as a result of coherent interference effects on unresolved scales.

пример применения отображения Лагранжа для исследования интенсивности (???)

это то, что приведено в примерах у Турока
потом разберу.

отличие линзирования звезд от линзирования планет ????

This is reflected in the expression stars twinkle, planets don't.

Interstellar scintillation typically occurs for sources smaller than about a micro arcsecond, corresponding to the Fresnel angle $\theta_F = \sqrt{\lambda/d}$ (with λ the wavelength and d the distance from the lens) on the sky.

This condition is true for most FRBs and pulsars.

Interplanetary scintillation due to the solar wind is commonly seen for many compact extragalactic radio sources at low frequencies.

In this case, the characteristic Fresnel angle for wavelengths of a few meters and distances of an astronomical unit is a fraction of an arcsecond.

Ionospheric scintillation is strongest at the lowest frequencies, and is commonly seen at solar maximum or at equatorial locations near sunrise or sunset [46] , and causes loss of lock in GPS.

The Fresnel angular scale for a screen at a distance of 200 km at wavelengths of a meter is 8 arc minutes, causing all celestial sources except the sun and the moon to scintillate.

классический переход геометрической оптики в волновую

обсудим подробно этот переход

как обычно мы рассуждаем????????

типичный переход обсудим.

ибо скорее всего он куда важнее для понимания, чем подход Турока

связь методов оптики и методов интеграла по путям квантовой механики

кака она?

никакая?

связь принципа Гюйгенса-Френеля с континуальным интегралом

(?)

В.1.2 приближение тонких линз

Обсудим это приближение и его детали.

приближение тонких линз в формализме интеграла по траекториям

в случае тонких линз интеграл по путям сводится к интегралу по угловой поверхности (????)

(тут абзац введения в формализм)

....

В итоге для случая тонкой линзы, существование которой задается выражением $U(r, \theta) = \frac{1}{2} \delta(r - r_l) \hat{\psi}(\theta)$, можно ввести $\hat{\psi}(\theta) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \theta)$ и континуальный интеграл примет вид:

$$F(\vec{r}_0) = \left[\prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2 \theta_j}{A_j} \right] \exp \left\{ i\omega \left[\epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j r_{j+1}}{2} \left| \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{\epsilon} \right|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\},$$

где обозначено $A_j = 2\pi i \epsilon / (\omega r_j r_{j+1})$, чтобы было $F = 1$, если $\hat{\psi} = 0$.

Докажем, что эта формула эквивалентна интегралу по угловой поверхности.

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2 \theta_l \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\},$$

Первые $l - 1$ интегралы от $j = 1$ до $l - 1$ это гауссовы интегралы и дают единицу, так что $j = 1$ под \prod и \sum могут быть заменены на $j = l$.

Воспользуемся равенствами, которые доказываются по индукции:

$$\sum_{j=l}^{N-1} r_j r_{j+1} |\theta_j - \theta_{j+1}|^2 = \epsilon \frac{r_l r_0}{r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 + \sum_{j=l+1}^{N-1} r_j^2 \frac{r_{l,j+1}}{r_{lj}} |\theta_j - u_{lj}|^2$$

где $r_0 = r_N$, $r_{lj} = r_j - r_l$ и $u_{lj} = [r_l \theta_l + (j - l) r_{j+1} \theta_{j+1}] / (j r_{l,j+1})$.

Теперь имеем

$$F(\vec{r}_0) = \int \frac{d^2\theta_l}{A_l} \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\} \times \left[\prod_{j=l+1}^{N-1} \int \frac{d^2\theta_j}{A_j} \right] \exp \left[\frac{i\omega}{2\epsilon} \sum_{j=l+1}^{N-1} r_j^2 \frac{r_{l,j+1}}{r_{lj}} |\theta_j - u_{lj}|^2 \right]$$

Остается посчитать гауссов интеграл во второй линии выражения выше, так что обозначив $A : F(\vec{r}_0) = \int \frac{d^2\theta_l}{A_l} \exp \left\{ i\omega \left[\frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\} \cdot A$, имеем:

$$A = \prod_{j=l+1}^{N-1} \frac{1}{A_j} \frac{2\pi i \epsilon}{\omega r_j^2} \frac{r_{lj}}{r_{l,j+1}} = \prod_{j=l+1}^{N-1} \frac{r_{j+1}}{r_j} \frac{r_{lj}}{r_{l,j+1}} = \frac{r_0}{r_{l+1}} \frac{\epsilon}{r_{l0}}$$

В итоге получаем ответ:

(????)

переход от континуального интеграла к интегралу по поверхности в случае других геометрий линз

а если у нас нельзя сказать, что $U(r, \theta) = \frac{1}{2} \delta(r - r_l) \hat{\psi}(\theta)$, то что?

приближение тонких линз в обычной оптике

Покажем, что в обычной оптике тонкие линзы имеют тот же смысл.

(? не думал про это, но это важно сделать для связи с оптикой)

В.1.3 теория дифракции френеля-кирхгофа

Так как линзирование напрямую использует теорию оптики, приведем ее тут, чтобы понимать эти аналогии.

(тут ил Ландау суть выпишу, что там происходит? более менее понимаю)

типичная теория

Приведем типичную теорию дифракции, которой мы пользуемся в типичном негравитационном линзировании для полноты записи.

вкратце формулы Френеля-Кирхгофа

Итоговая амплитуда волны имеет вид:

$$\Psi(\mathbf{x}_{obs}, \mathbf{x}_s; \nu) \propto \int d\mathbf{x} \exp \left[i \frac{\omega}{2c} \left(\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^2}{\bar{d}} - \frac{\Sigma_e(\mathbf{x}) e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \right) \right]$$

необходимая теория

что там раньше было выведено, что использовать тут будем?

вычисление интеграла Френеля-Кирхгофа

Рассмотрим квант радиоволны, летящий от ее начального положения у источника $x_i = x_s$ до ее конечного положения у наблюдателя $x_f = x_{obs}$ через астрофизическую плазму.

Для простоты предположим, что плазма принимает форму тонкой плоской линзы с фазовой скоростью $c_p(x) = c$, скоростью света в вакууме, везде, кроме линзы

Переопределим пространственные координаты $\mathbf{x} \rightarrow (x, z)$, чтобы отделить координаты в плоскости линзы x от ортогональной им координаты z .

Реальные классические траектории являются кусочно-линейными с возможным изгибом линзы, и интеграл по этим траекториям сводится к обычному интегралу по плоскости линзы.

Амплитуда интеграла по путям для (бесспинового) фотона получается интегрированием по всем путям, взвешенным с помощью фазового множителя $e^{iS_r[\mathbf{x}]/\hbar}$, так что с учетом выведенной формулы для действия $S_r[\mathbf{x}] = E \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \frac{d\mathbf{x}}{c_p(\mathbf{x})}$, имеем:

$$\Psi(\mathbf{x}_{obs}, \mathbf{x}_s) = \int d\mathbf{x} \exp \left[i\omega \int_{x_s}^{x_{obs}} |d\mathbf{x}| \frac{n(\mathbf{x})}{c} \right]$$

где мы заменили E на $\hbar\omega$, ω - это угловая частота света и фазовая скорость $c_p(\mathbf{x})$ с $c/n(\mathbf{x})$ где c - скорость света в вакууме, а $n(\mathbf{x})$ - показатель преломления.

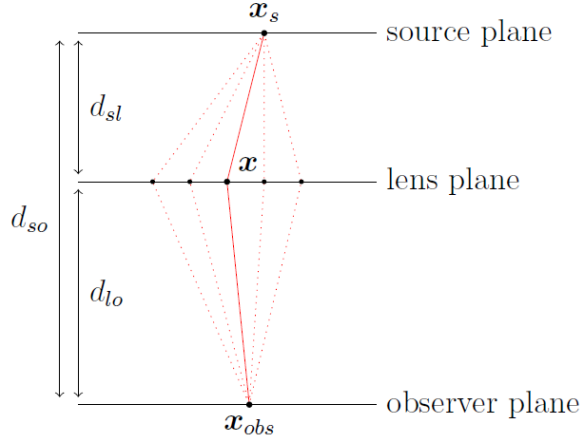


Рис. 5: геометрическая модель линзы

Упростим значение амплитуды. Для астрофизической плазмы, при высокой частоте имеется соотношение

$$n(x) \approx 1 - \omega_p^2(x)/\omega^2,$$

где ω_p является плазменной частотой, заданной как $\omega_p^2(\mathbf{x}) \approx n(\mathbf{x})^2 / (m\epsilon_0)$, где $n_e(\mathbf{x})$, e и m_e - соответственно локальная электронная плотность, заряд и масса электрона в единицах СИ.

Мы явно демонстрируем зависимость от x , поскольку она является ключевой в линзе.

В приближении тонкой линзы изменения фазы возникают частично геометрически, из-за изменения длины отрезков прямой линии по обе стороны линзы, а частично из-за прохождения через линзу.

Первые прямолинейно вычисляются с использованием теоремы Пифагора в приближении, что относительные горизонтальные перемещения на рис. 3, $|x_{obs} - x|$ и $|x_s - x|$ гораздо меньше, чем вертикальные расстояния d_{lo} и d_{sl} .

Последние также вычисляются приблизительно, отмечая, что для самого низкого порядка пути проходят вертикально через линзу, поэтому мы можем заменить $\int n_e(\mathbf{x}, z) dz$ через $\Sigma_e(\mathbf{x})$, плотностью электронов на поверхности.

То есть получаем

$$\Psi(\mathbf{x}_{obs}, \mathbf{x}_s) = \int d\mathbf{x} \exp \left[i\frac{\omega}{c} \int_{x_s}^{x_{obs}} |d\mathbf{x}| \frac{1 - n(\mathbf{x})^2}{m\epsilon_0\omega^2} \right]$$

????? короче, тут у меня не вышло доделать это!!!

В итоге амплитуда интеграла по путям тогда становится

$$\Psi(\mathbf{x}_{obs}, \mathbf{x}_s; \nu) \propto \int d\mathbf{x} \exp \left[i \frac{\omega}{2c} \left(\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^2}{\bar{d}} - \frac{\Sigma_e(\mathbf{x})e^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \right) \right]$$

где $\bar{d} = d_{sl}d_{lo}/(d_{sl} + d_{lo})$ это приведенное расстояние, а $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{x}_s d_{lo} + \mathbf{x}_{obs} d_{sl})/d_{so}$ это средневзвешенное значение поперечных смещений источника и наблюдателя.

Обратите внимание, что $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$ зависит только от относительных перемещений источника, линзы и наблюдателя, так что ответ не зависит от выбора начала координат для поперечных координат.

нормализация амплитуды

Удобно нормализовать амплитуду, разделив ее на амплитуду, полученную с той же геометрией, но без линзы.

Затем мы можем записать полученную нормированную амплитуду в виде безразмерного интеграла.

Переобозначив $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu} \rightarrow a\boldsymbol{\mu}$ где a это некоторый удобный физический масштаб, связанный с линзой, положим $\nu = \omega a^2/(2c\bar{d}) = a^2/(2R_F^2)$ где $R_F = (\lambda\bar{d})^{1/2}$ это масштаб Френеля. ???

Заметим, что так как как линзирование увеличивает угол распространения, расстояние между полосами увеличивается с расстоянием между источником и наблюдателем. ???

Hence, it is the Fresnel scale - the geometric mean of the distance and the wavelength - rather than the wavelength which should be compared with the source dimensions to determine whether the interference pattern is observed in the heavily diffracted (low ν) or eikonal (high ν) regime.

радиус Френеля

наверное, в оптике он выведен и полезен, но я что-то не помню, потом допишу.

$$R_F = (\lambda\bar{d})^{1/2}$$

линза в n размерностях

Finally, we define $\varphi(\mathbf{x}) = -\Sigma_e(\mathbf{x})e^2\bar{d}/(m_e\epsilon_0 a^2\omega^2)$ to obtain the normalized, dimensionless amplitude,

$$\Psi(\boldsymbol{\mu}; \nu) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{x} \exp[i\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})\nu], \quad \text{with} \quad \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^2 + \varphi(\mathbf{x})$$

for an N -dimensional lens. Since $\nu \propto \omega$, we see that the eikonal limit is high frequency limit. However, the strength of the lens is controlled by φ which is proportional to ω^{-2} . Therefore the lens becomes stronger at lower frequencies where, of course, diffraction becomes important.

The highest magnifications attained involve a payoff between strong lensing, creating effects like caustics and catastrophes, and diffraction which tends to smear out intensity peaks.

Hence, to model the most interesting regime for astrophysical plasma lenses, one must go beyond geometrical optics and include diffractive effects.

The intensity corresponding to the amplitude (13) is proportional to the probability for a photon to be detected at $\boldsymbol{\mu}$:

$$I(\boldsymbol{\mu}; \nu) \propto |\Psi(\boldsymbol{\mu}; \nu)|^2.$$

Наблюдаемая интенсивность должна быть нормирована на энергию излучения на каждой частоте, проинтегрированную по всем частотам μ .

Except in special cases, the Fresnel-Kirchhoff integral (13) is not possible to evaluate analytically.

At large ν (and with the dimensionless form of the lens $\varphi(\mathbf{x})$ held fixed) and in the geometric optics limit, one can easily model the intensity, as we shall explain.

However, the most interesting regime for astrophysical plasma lenses occurs in the intermediate regime, where focusing and caustic catastrophes generate bright features whose peak intensity is controlled by diffraction.

In this regime, there are characteristic patterns in the intensity, controlled by the topological character of the lens.

In this intermediate- ν regime, conventional integration techniques typically fail, and it is hard to capture the complex, oscillatory interference pattern numerically.

For example, G. Grillo and J. M. Cordes [25] implemented a procedure based on Fourier methods but found this technique to generate numerical artifacts.

Here, motivated by our earlier work on Picard-Lefschetz theory, we instead employ analytic continuation and Cauchy's theorem to unambiguously define and to evaluate the relevant oscillatory integrals.

We have developed a custom numerical scheme (made available online ^{3.}) which is fast and accurate, and applicable to a generic one dimensional oscillatory integral. A two dimensional version will be made available shortly. A nice feature of our method is that it typically becomes more efficient, i.e., its convergence is improved, as the integrand becomes more oscillatory and difficult to handle via conventional techniques.

В.1.4 гамильтониан и действие для оптических систем

обсудим все нужные принципиальные основы.

действие и гамильтониан оптических систем - обзор

действие для оптических систем имеют вид:

$$S_r[\mathbf{x}] = -Et_i - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x}(t))}{E} = \int_{x_i}^{x_f} |d\mathbf{x}| |\mathbf{p}| = E \int_{x_i}^{x_f} \frac{|d\mathbf{x}|}{c_p(\mathbf{x})}$$

??? когда какой вид мы используем??

гамильтониан для оптических систем имеют вид:

$$\mathcal{H} = -p_0^2 c^2 + p^2 c^2 + \hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})$$

хотя, казалось бы, что

$$H = \hbar \omega$$

связь интеграла по траекториям с принципом Ферма и дифракцией Френеля-Кирхгофа

(пока тут статья Турока, важный вопрос, который решим. пока не проверял, насколько это правильно)

Рассмотрим источник когерентных электромагнитных волн, которые летят к Земле, минуя двигающуюся астрофизическую плазму.

Опишем распространение такой волны в терминах элементарных квантов (?), которые будем считать релятивистскими частицами.

Фейнмановский интеграл по путям для траекторий этих частиц даст амплитуду распространения к любой конечной точке (?).

Квадрат этой амплитуды даст интенсивность, которую можно представить как интерференционную картину частоты и геометрического расположения объекта.

Как увидим позже, одна или несколько классических траекторий определяют амплитуду, именно об их выделении и говорит оптический принцип Ферма.

Мы должны увидеть одну или более классическую траекторию, которая дает наибольший вклад в амплитуду, так как существование этой траектории удовлетворяет принципу Ферма.

фундаментальные оптические соотношения

Далее будут использованы многие известные всем соотношения, приведем их тут, чтобы удобно было пользоваться.

???? чет я не знаю честно говоря, получится повторить преобразования ниже - напишу тут, чего не хватало мне.

???

$$dt = \frac{|dx|}{c} \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

????

$$|p| = E/c_p(x) = \frac{E}{c} \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

дисперсионные соотношения для плазмы

Так что сформулируем простейшие дисперсионные соотношения для астрофизической плазмы, которые верны для высокочастотного излучения, дальнейшее развитие которых на более сложные системы идейно понятно.

Начнем с дисперсионного соотношения для разряженной плазмы:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2(\mathbf{x})$$

Здесь ω это частота, k волновое число, c это скорость света, а $\omega_p(\mathbf{x})$ это плазменная частота в координате \mathbf{x} , которая определяется локальной плотностью электронов.

Мы для общности считаем, что плазменная частота различна в разных точках пространства, расстояние между которыми во многом больше, чем длина электромагнитной волны.

Заметим, что эти соотношения точно такие же, как и для описания релятивистской частицы, чья масса меняется в зависимости от положений в пространстве.

фазовая и групповая скорости

Фазовая скорость находится из закона дисперсии:

$$v_p(\mathbf{x}) \equiv \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2(\mathbf{x})}{k^2 c^2}}$$

которая больше, чем скорость света, что часто происходит в подобных системах, ведь информация распространяется с групповой скоростью $\mathbf{v}_g \equiv \nabla_{\mathbf{k}} \omega$, чья величина $c_g = c^2/c_p$ всегда менее, чем скорость света.

обнуление гамильтониана ???

Квант такой волны может быть описан релятивистской частицей, которая движется по параметризованной мировой линии в пространстве-времени: $x^\mu(\lambda) = (ct(\lambda), x(\lambda))$. Изменение параметризации $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}(\lambda)$ генерированные гамильтонианом могут быть сделаны таким образом, что гамильтониан обнулится $\mathcal{H} = 0$ (????).

Гамильтониан - типичное значение???

Выражение для Гамильтониана \mathcal{H} имеет вид:

$$\mathcal{H} = -p_0^2 c^2 + p^2 c^2 + \hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})$$

Действительно, оно может быть получено из дисперсионного соотношения, используя соответствие $p_\mu = (p_0, \mathbf{p}) \leftrightarrow \hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu = \hbar(-\omega/c, \mathbf{k})$.

пока что я просто принял, что он такой.

действие ?????

действие с точностью до первого порядка по фазе при фиксированных начальном и конечных пространственно-временных координат, имеет вид:

$$S[x; x^\mu(0), x^\mu(1)] = \int_0^1 d\lambda (p_0 \dot{x}^0 + p \cdot \dot{x} - \tau(\lambda) \mathcal{H})$$

где точка означает производную по λ , взятую от 0 до 1, как и траектория частицы пробегает траекторию от начальной пространственно-временной координаты $x^\mu(0) \equiv (ct_i, x_i)$ до конечной $x^\mu(1) \equiv (ct_f, x_f)$.

(?) 'эйнштейн' $\tau(\lambda)$ играет роль множителя лагранжа, принуждая Гамильтониан быть ограниченным (????) и гарантируя калибровочную инвариантность (он меняется под преобразованиями перепараметризации так, что $d\lambda\tau(\lambda)$ неизменна).

Варьируя действие по импульсу, получаем уравнение Гамильтона для импульса $p_0 c^2 = -\dot{x}^0/(2\tau)$ и $p c^2 = \dot{x}/(2\tau)$.

Варьирование действия по τ удовлетворяет ограничению $\mathcal{H} = 0$.

Энергия $E = -p_0 c$ сохраняется, потому что действие инвариантно относительно сдвигов по времени x^0 .

добавление граничного члена

Верное выражение для действия имеет вид:

$$S[x; E, x_i, t_f, x_f] = p_0 x^0(0) + \int_0^1 d\lambda (p_0 \dot{x}^0 + p \dot{x} - \tau(\lambda) \mathcal{H}),$$

то есть вид как и ранее, только с добавлением граничного члена.

Действительно, иначе за счет того, что начальные времена t_i и конечные t_f зафиксированы, может показаться, что $t_f - t_i$ варьироваться не может.

?????Однако, для монохроматического потока света мы должны фиксировать начальную энергию E , а не начальное время t_i .

Обе величины зафиксировать нельзя в силу соотношения неопределенности энергии-времени, которая следует из коммутатора $[\hat{p}_0, \hat{x}^0] = -i\hbar$.

(????как следует)

Граничный член должен быть выбран так, чтобы вариация действия была нулем в случае, если начальная энергия и конечное время, как и начальные и конечные пространственные координаты, были зафиксированы, и уравнения движения удовлетворялись.

????? Общее действие имеет вид:

$$S[x; E, x_i, t_f, x_f] = p_0 x^0(0) + \int_0^1 d\lambda (p_0 \dot{x}^0 + p \dot{x} - \tau(\lambda) \mathcal{H})$$

где $\mathcal{H} = -p_0^2 c^2 + p^2 c^2 + \hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})$ был обсужден выше.

Так как действие квадратично по импульсу и линейно по τ , мы можем проинтегрировать по этим переменным.

В соответствующем минимуме (???) мы можем использовать уравнения Гамильтона для импульсов, и ограничение, чтобы получить сокращенное действие, выраженное исключительно в терминах репараметризационно-инвариантных величины: ??? я не знаю, как прийти к этой формуле

$$S_r[\mathbf{x}] = -Et_i - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x}(t))}{E}$$

вывод принципа Ферма

Модифицируем формулу $S_r[\mathbf{x}]$. Представляя $t_i = t_f - \int_{t_i}^{t_f} dt$, где конечное время t_f зафиксировано, мы находим с точностью до несущественной постоянной фазы, что

$$S_r[\mathbf{x}] = E \int_{t_i}^{t_f} dt \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})}{E^2} \right) = E \int_{x_i}^{x_f} \frac{|d\mathbf{x}|}{c} \left(1 - \frac{\hbar^2 \omega_p^2(\mathbf{x})}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{x_i}^{x_f} |d\mathbf{x}| |\mathbf{p}|$$

где снова, мы использовали уравнения Гамильтона для импульса и гамильтонову связь (????)

Представляя результат в терминах фазовой скорости, получаем

$$S_r[\mathbf{x}] = E \int_{x_i}^{x_f} \frac{|d\mathbf{x}|}{c_p(\mathbf{x})}$$

Заметим, что хотя фазовая скорость $c_p(\mathbf{x})$ всегда более, чем скорость света, нигде в наших выводах настоящая частица не перемещается с такими скоростями.

Полученное действие представляет собой принцип Ферма минимального времени, или более точно, принцип, состоящий в том, что время, взятое на доминирующих классических траекториях, стационарно. (???)

Интеграл по путям с весом $e^{iS_r[\mathbf{x}]/\hbar}$, это как раз интеграл Френеля-Кирхгофа, который мы ищем.

релятивистское действие

вообще не понял.

Кстати, можно получить действие выше, начиная с типичного релятивистского действия

$$S = -mc \int_a^b ds = - \int_{t_1}^{t_2} mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

для частицы с пространственно зависящей массой $m(\mathbf{x})$, за счет использования соответствия $m(\mathbf{x})c^2 \leftrightarrow \hbar \omega_p(\mathbf{x})$, а именно

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}] = - \int_{t_i}^{t_f} dt \hbar \omega_p(\mathbf{x}(t)) \left(1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

где точка обозначает производную по t .

Такое действие инвариантно относительно репараметризаций с самого начала (?).

Только в этом действии фиксируется начальное время t_i , тогда как нам нужно фиксировать именно начальную энергию E . Как и ранее, устраняется это добавлением граничного члена, имеющего вид $+E(t_f - t_i)$.

One can easily check that the identity $\partial S_{cl}/\partial t_i = E$ for Hamilton's principal function S_{cl} implies the total action is stationary, provided the desired boundary conditions and the equations of motion are fulfilled.

Используя $E = \hbar\omega_p/(1 - \dot{x}^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$, the total action reduces (again, up to a constant phase) to $S_r[\mathbf{x}] = \int_{x_i}^{x_f} |d\mathbf{x}| |\mathbf{p}|$ как и раньше. ????

??? связь с действием Намбу-Гото

пока этот вопрос без ответа, ну и не важно

??? репараметризационная инвариантность

пока этот вопрос без ответа, ну и не важно

понимать важно, что этим займусь я не ранее, чем когда начну теорию струн, то есть супер не скоро.

В.1.5 каустики и волновые фронты

Обсудим суть каустик, а также их применение в линзировании.

обзор каустик

Каустика — огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке.

Каустики в оптике — это особые линии (в двумерном случае) и особые поверхности, вблизи которых резко возрастает интенсивность светового поля.

???? Вблизи монохроматических каустик наблюдаются характерные интерференционные полосы, интенсивность которых описывается функцией Эйри.

каустики в обычной жизни

Яркие световые кривые причудливой формы возникают на освещённом столе, на который поставлен бокал с водой.

Движущиеся каустики можно увидеть на дне неглубокого водоёма, водная поверхность которого находится в волнении.

Радуга — разноцветная каустика, возникающая при преломлении солнечных лучей на дождевых каплях.

Каустики возникают не только при распространении света, но и в ряде других волновых явлений.

Корабельные волны можно считать каустикой гравитационных волн на воде.

обзор каустик в теории гравитации

В работах Я. Б. Зельдовича показано, что за счёт гравитационной неустойчивости первоначально почти однородно распределённая во Вселенной масса концентрируется на каустиках, что приводит к образованию нитевидной крупномасштабной структуры Вселенной.

В астрономии оптические каустики можно использовать для определения геометрии компактного тёмного объекта — гравитационной линзы.

В рамках геометрической оптики каустики представляют собой линии и поверхности бесконечно малой толщины.

В геометрическом плане каустика представляет собой эволюту волнового фронта; волновой фронт — эвольвенту каустики.

С учётом волновых свойств света, каустики обязаны иметь некоторую толщину, заведомо не меньшую, чем длина волны света.

??? связь каустик и теории катастроф

Теория каустик напрямую связана с одним из разделов современной математики — теорией катастроф.

??? связь каустик и дифференциальных уравнений

В дифференциальных уравнениях каустики соответствуют опрокидыванию решений.

интенсивность света вблизи каустики - идея вывода

Интенсивность света находится как и в любом другом случае дифракции, за счет возведения в квадрат амплитуды $I \sim |u_P|^2$, которая определяется в общем случае как:

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n,$$

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3$$

Поэтому амплитуда имеет вид:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3} d\theta = 2 \int_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

Итоговая интенсивность:

$$I = 2A \left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{1/6} \Phi^2\left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

(о выборе постоянного множителя см. ниже).

При больших положительных значениях x имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{4x^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

интенсивность света вблизи каустики - вывод

Определим распределение интенсивности света вблизи точки касания луча с каустикой.

Интенсивность света находится как и в любом другом случае дифракции, за счет возведения в квадрат амплитуды $I \sim |u_P|^2$, которая определяется в общем случае как:

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n,$$

Для вычисления амплитуды интенсивности необходимо выразить расстояние R от поверхности волны до нужной нам точки вблизи каустики через какой-то параметр. ????

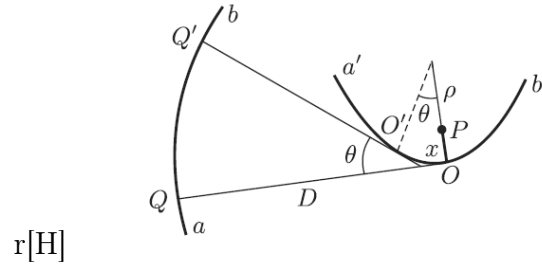


Рис. 6: неудачная иллюстрация от Ландау, потом сменю на понятные обозначения, если нужно будет

Нам известно какое-то расстояние D , так что попробуем как-то выразить R через него и какую-то переменную, позволяющую перемещаться по поверхности волнового фронта, и находить расстояние до нужной точки P .

(тут не самое удачное описание рисунка от Ландау)

в эту геометрию так нормально я и не въехал всё еще, мб потом переделаю сам это, если будет нужно.

ab есть сечение этой волновой поверхности, a' b' — сечение каустики; a' b' есть эволюта??? кривой ab.

Мы интересуемся распределением интенсивности вблизи точки O касания луча QO с каустикой; длина D отрезка QO луча предполагается достаточно большой.

Посредством x обозначим расстояние от точки O вдоль нормали к каустике, причем будем считать положительными значения x для точек, лежащих на нормали по направлению к центру кривизны

По известному свойству эволюты сумма длины отрезка $Q'O'$ касательной в точке O' , и длины дуги OO' равна длине QO касательной в точке O .

Для близких друг к другу точек O и O' имеем $OO' = \theta\rho$ — радиус кривизны каустики в точке O).

Поэтому длина $Q'O' = D - \theta\rho$.

Расстояние же $Q'O$ (по прямой) равно приблизительно (угол θ предполагается малым):

$$Q'O \approx Q'O' + \rho \sin \theta = D - \theta\rho + \rho \sin \theta \approx D - \frac{\rho\theta^3}{6}$$

Наконец, расстояние $R = Q'P$ равно $R \approx Q'O - x \sin \theta \approx Q'O - x\theta$, т.е.

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3$$

Подставляя R в u_P , найдем:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3} d\theta = 2 \int_0^{\infty} \cos \left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3 \right) d\theta,$$

где опущен медленно меняющийся множитель $1/D$ в подынтегральном выражении, так как он не существен по сравнению с экспоненциальным множителем.

Вводя новую переменную интегрирования $\xi = (k\rho/2)^{1/3}\theta$, можно записать амплитуду через функцию Эйри $\Phi(t)$ в виде:

$$u_P \sim \Phi \left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}} \right).$$

Соответственно, интенсивность имеет вид:

$$I = 2A \left(\frac{2k^2}{\rho} \right)^{1/6} \Phi^2 \left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}} \right)$$

(о выборе постоянного множителя см. ниже).

При больших положительных значениях x имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp \left(-\frac{4x^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} \right)$$

т.е. интенсивность экспоненциально убывает (область «тени»).

При больших же по абсолютной величине отрицательных значениях x имеем:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \sin^2 \left[\frac{2(-x)^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4} \right]$$

т.

е.

интенсивность быстро осциллирует; усредненное по этим осцилляциям значение равно

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}$$

Отсюда выясняется смысл постоянной A , она определяет интенсивность вдали от каустики, которая получилась бы из геометрической оптики без учета явлений дифракции.

Наибольшее значение, равное 0,949, функция $\Phi(t)$ имеет при $t = -1,02$; соответственно этому наибольшая интенсивность достигается при $x (2k^2/\rho)^{1/3} = -1,02$ и равна

$$I = 2,03 A k^{1/3} \rho^{-1/6}$$

(в самой же точке касания луча с каустикой, $x = 0$, имеем $I = 0,89 A k^{1/3} \rho^{-1/6}$, так как $\Phi(0) = 0,629$).

Таким образом, вблизи каустики интенсивность пропорциональна $k^{1/3}$, т.е. $\lambda^{-1/3}$.

При $\lambda \rightarrow 0$ интенсивность, как и следовало стремиться к бесконечности.

конечная интенсивность света в каустике

геометрическая оптика дает бесконечность, что не верно, но что тогда дает волновая оптика???

как ее посчитать?

изменение фазы при прохождении через каустик

такое есть, пока что я не смотрел, почему, но у Ландау это вроде написано.

обзор применений каустик в гравитационной оптике

В.1.6 Об интеграле по траекториям

Обсудим конструкцию интеграла по траекториям и укажем, каким образом она нужна в гравитационном линзировании.

Тема эта очень важная, потому что именно формализм интеграла по траекториям сполна отвечает на вопрос (? наверное), что же происходит, и почему мы получаем такие уравнения.

Этому вопросу посвящена большая часть записи, а также для этого вставлен раздел с экспериментом Юнга - очень хорошо иллюстрирует методы.

принципиальные основы интеграла по траекториям

применение континуального интеграла в гравитационном линзировании (???)
пока большой вопрос, нужен он или нет?

пока что думаю, что он сводится к интегралу Френеля из дифракции, так что по сути можно про него и не думать.

однако какую-то фундаментальную роль он играет, с этим мы разберемся.

можно ли на масштабах галактики считать, что у частицы много траекторий? это же мы делали для микро уровня?

принципиальные понятия континуального интеграла обсудим его принципиально важные для понимания моменты.

(что не важно - в другой параграф перенесу)

думаю, именно за счет многих путей наши волновые эффекты и проявляются.

если бы был один путь, было бы линзирование геометрической оптики, что изучено в отдельных главах.

(???) об использовании интеграла по траекториям в оптике дело в том, что там не волновая функция, а что ли амплитуда интенсивности.

и мы вообще не частицы рассматриваем, а волну.

так что тут вообще забыл метод интеграла по траекториям - большой вопрос.

почему он вообще применим?

континуальным интегралом можно решать многие линейные уравнения (про это отдельно позже почитаю, пока что достаточно того, что тут написано)

Одно из распространенных применений континуального интеграла - это решение через него любых линейных уравнений.

Действительно, они такие же линейные, как и уравнение Шредингера, так что формально для любого уравнения можно записать решение в таком виде.

В таком случае про интерпретации траекториями не идет речь, а следует уметь из формального решения выйти в что-то полезное. Обсудим тут это, а также приведем примеры.

например:

(???)

(пока что сказать про это нечего, не думал.)

о существовании траекторий в континуальном интеграле они там есть или нет?

если есть, откуда берутся?

пропишу позже

(отдельный параграф, потому что это не обязательно понимать)

континуальный интеграл в гравитационном линзировании

обсудим отдельно этот метод.

В.2 элементы квантовой физики

Обсудим методы, пришедшие из квантовой физики, которые применяются в гравитационном линзировании.

обзор связи квантовой физики с гравитационным линзированием

В.2.1 некоторые фундаментальные понятия квантовой физики

В.3 астрономические объекты

Выше нам встречались многие астрономические объекты, про которые было сказано совершенно не много. Здесь посмотрим более детально их свойства.

В.3.1 астрономические единицы измерения и типичные значения величин

Обсудим систему единиц, которая используется в астрономии, а также укажем типичные характеристики объектов.

кпк

(??)

В.3.2 Fast radio bursts (FRB)

Быстрые радиовсплески или Fast radio bursts (FRB)....

Обсудим их свойства подробно

мотивация из изучать

я не знаю, зачем

С Некоторые методы математики и программирования

С.1 О численных расчетах интегралов

Обсудим, какие численные методы мы применяли для вычисления интегралов. Именно эти методы реализуются в разделе про программирование.

С.1.1 метод Пикара-Лефшеца в двух словах

Обсудим вкратце метод Пикара-Лефшеца, который используем для расчетов дифракционных интегралов.

типичная теория расчета дифракционного интеграла

В квазиклассическом приближении, нужно считать точно исходное выражение

$$F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} e^{i w T(\mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

потому что уравнение $|F|^2 = \sum_j |\mu_j| + 2 \sum_{j < k} |\mu_j \mu_k|^{1/2} \cos(w T_{jk} - \pi n_{jk})$ не работает из-за дифракции ???

Обсудим численные методы вычисления этого выражения для произвольного потенциала $\psi(\mathbf{x})$. ????? где этот ψ ?????

Сперва следует высчитать следующую величину для фиксированного y (????) :

$$\tilde{F}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} e^{-iw\tau'} F(w) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{x} \delta[T(\mathbf{x}) - \tau]$$

Заметим, что $d\tilde{F}/d\tau$ отражает форму волны после линзирования от дельта-импульса, излученного от точечного источника, и \tilde{F} определена с точностью до добавления произвольной постоянной.

Контур постоянства временной задержки получаются решением уравнения $\tau = T(\mathbf{x})$ для выбранного τ и изображаются на \mathbf{x} -плоскости.

(!!! место рисунка!!! запрогаю - сделаю они имеют хаотический вид, их получение и обсуждение отдельно позже напишу)

Уравнение для $\tilde{F}(\tau)$ может быть переписано в терминах интегрирования по контуру C , как

$$\tilde{F}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_C \oint_C du$$

где суммирование взято по некоторому числу замкнутых контуров, и

$$\frac{dx_1}{du} = -(x_2 - y_2) + \partial_2 \psi(\mathbf{x}), \quad (C.1)$$

$$\frac{dx_2}{du} = x_1 - y_1 - \partial_1 \psi(\mathbf{x}) \quad (C.2)$$

в декартовых координатах $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$, так что dx/du является касательной к контурам с длиной $|\partial T|$.

Дифференциальные уравнения выше могут быть численно решены, например, методом Рунге-Кутты, а далее по контуру, соответствующим их решению, считается нужный интеграл.

Интегрирование начинается ?????? при $u = 0$ из точки на контуре и продолжается с положительными шагами u , пока x не вернется обратно в начальную точку.

Когда этим способом вычислена \tilde{F} , нужная нам F получается из обратного преобразования Фурье от $d\tilde{F}/d\tau$:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{iw\tau} \frac{d}{d\tau} \tilde{F}(\tau)$$

Так как $d\tilde{F}/d\tau$ это линзированная форма волны для импульса вида дельта-функции, величина $\tilde{F}(\tau)$ должна иметь прерывистое или расходящееся поведение, при τ равно времени прихода T_j импульса.

Здесь T_j есть значение $T(x)$ в стационарной точке x_j . ???

???? Также количество замкнутых контуров меняется на одну, когда $\tau = T_j$, и становится нулем, когда $\tau \rightarrow -\infty$.

Предполагая, что источник находится не точно на каустике, можно показать, что $\tau = T_j$ претерпевает прерывистый подъем (упадок) на величину $\mu_j^{1/2}$, когда when \mathbf{x}_j это точка минимума (максимума), и что она расходится как $\pi^{-1} |\mu_j|^{1/2} \ln |\tau - T_j|^{-1}$, когда \mathbf{x}_j это седловая точка.

Запишем прерывистый вклад в \tilde{F} как

$$\tilde{F}_c(\tau) = \sum_{n_j=0,1} (-1)^{n_j} \mu_j^{1/2} \text{H}(\tau - T_j) - \frac{1}{\pi} \sum_{n_j=1/2} |\mu_j|^{1/2} \ln |\tau - T_j|$$

где H это кусочно-непрерывная функция.

Заметим, что $F_c = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} d\tilde{F}_c/d\tau$ (cf. это квазиклассическое приближение F).

Следовательно, уравнение на $\tilde{F}_c(\tau)$ должно пониматься как квазиклассическая часть \tilde{F} .

Оставшаяся дифракционная часть $F_d = F - F_c$ может быть получена, применяя $\tilde{F}_d = \tilde{F} - \tilde{F}_c$ к уравнению на Фурье преобразование:

$$F_d(w) = e^{i\omega\tau} \tilde{F}_d(\tau) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - i\omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau e^{i\omega\tau} \tilde{F}_d(\tau).$$

Диапазон интегрирования (τ_1, τ_2) содержит все T_j , однако он конечен в настоящих вычислениях, потому что $\tilde{F}_d(\tau)$ логарифмически расходится из-за второго члена в $\tilde{F}_c(\tau)$.

Поэтому после удаления прерывистой части \tilde{F}_c из \tilde{F} , возможно уверенно рассчитать второй член в (5 · 6) для непрерывной функции \tilde{F}_d , используя, например, быстрые преобразования Фурье.

итоговый алгоритм численного расчета

Подводя итог, алгоритм следующий:

1. Вычисляем $\tilde{F}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_C \oint_C du$ за счет решения

$$\frac{dx_1}{du} = -(x_2 - y_2) + \partial_2 \psi(x), \quad \frac{dx_2}{du} = x_1 - y_1 - \partial_1 \psi(x)$$

2. из $\tilde{F}(\tau)$ вычитаем

$$\tilde{F}_c(\tau) = \sum_{n_j=0,1} (-1)^{n_j} \mu_j^{1/2} H(\tau - T_j) - \frac{1}{\pi} \sum_{n_j=1/2} |\mu_j|^{1/2} \ln |\tau - T_j|$$

и подставляем итоговый ответ в

$$F_d(w) = e^{i\omega\tau} \tilde{F}_d(\tau) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - i\omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau e^{i\omega\tau} \tilde{F}_d(\tau)$$

3. суммируем $F_d(w)$ и $F = \sum_j |\mu(x_j)|^{1/2} \exp[i\omega T(x_j) - i\pi n_j]$, в итоге получаем требуемое

$$F(w, y) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2x \exp[i\omega T(x, y)]$$

обзор применения идей Пикара-Лефшеца

Рассмотрим осциллирующий интеграл:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x)} d\mathbf{x}$$

с аналитическим аргументом экспоненты $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Заметим, что если ϕ вещественно, то интеграл условно сходящийся.

И такой интеграл сложно определить и посчитать за счет больших осцилляций.

Можно улучшить свойства интеграла с помощью теоремы Коши.

Продолжим аналитически интеграл в \mathbb{C}^n

и непрерывно деформируем область интегрирования в наперсток Лефшеца $\mathcal{J} \subset \mathbb{C}^n$, в то же время сохраняя конечные точки фиксированными, таким образом, убирая осцилляции:

$$I = \int_{\mathcal{J}} e^{i\phi(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

Чтобы найти наперсток Лефшеца, мы сперва представим $i\phi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + iH(\mathbf{x})$, где, кстати h это амплитуда, то есть $|e^{i\phi}| = e^h$, далее определим поток спадания $\gamma_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ функции h как

$$\frac{d\gamma_\lambda(\mathbf{x}_0)}{d\lambda} = -\nabla h(\gamma_\lambda(\mathbf{x}_0))$$

с граничными условиями $\gamma_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$.

Поток спадания представляет собой непрерывную деформацию области интегрирования, $\gamma_\lambda(\mathbb{R}^n)$, от изначальной области при $\lambda = 0$ до наперстка Лефшеца в пределе $\lambda \rightarrow \infty$, то есть

$$\mathcal{J} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_\lambda(\mathbb{R}^n)$$

Note that, when the endpoints of the original integration domain are located on singularities of the exponent, such as for the Kirchhoff-Fresnel integral, the flow automatically preserves the endpoints.

Since the thimble \mathcal{J} is a fixed point of the downward flow γ_λ , it can generally be expressed as a formal sum over steepest descent contours

$$\mathcal{J} = \sum_i n_i \mathcal{J}_i$$

with $n_i \in \mathbb{Z}$ and \mathcal{J}_i the steepest descent contour of the saddle point $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{C}^n$ of the exponent $i\phi$. Using the Cauchy-Riemann equation, $\nabla h \cdot \nabla H = 0$, it straightforwardly follows that the imaginary part, H , is constant along the steepest descent contours, i.e.,

$$I = \int_{\mathcal{J}} e^{i\phi(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \sum_i n_i e^{iH(\bar{\mathbf{x}}_i)} \int_{\mathcal{J}_i} e^{h(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

For more details see ...

Discretizing the integration domain

We first discretize the original integration domain.

In the one-dimensional case, we represent a segment of the real line \mathbb{R} by a collection of line segments

$$J = \{(l_1, l_2), (l_2, l_3), \dots\},$$

with $l_i \in \mathbb{N}$, referring to a point x_{l_i} in the set

$$S = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{C},$$

separated by no more than δ , i.e., if $(i, j) \in J$ we impose the condition $|x_i - x_j| < \delta$.

In the two-dimensional case, we represent a segment of the real plane \mathbb{R}^2 by a collection of quadrilaterals

$$J = \{(l_1, l_2, l_3, l_4), (l_5, l_6, l_7, l_8), \dots\},$$

with $l_i \in \mathbb{N}$, referring to a point \mathbf{x}_{l_i} in the set

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\} \subset \mathbb{C}^2,$$

with the property that when $(i, j, k, l) \in J$, the sides of the quadrilateral are smaller than δ , i.e., $\max(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|, \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|, \|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i\|) < \delta$. The simplices in J are implemented in the simplex class;

принцип Морпетюи

тоже он много используется!!!

так что проработать его нужно!!

был бы проработан - вставил бы в научку, это и нужно ине сложно.

потом вот пропишу, тут геометрическая оптика также использует его.

также самую геометрическую оптику пропишу обязательно!

расчет интеграла Френеля от $-\infty$ до $+\infty$ методом Пикара Лефшеца

Рассмотрим интеграл Френеля как самый элементарный пример осциллирующего интеграла.

(Минус этого примера в том, что абсолютно непонятно, откуда взялся наперсток Лефшеца и что делать с слегка другими интегралами!!!! то есть ни о чем пример вроде бы)

Посчитаем интеграл Френеля:

$$I_F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx.$$

Для этого продолжим его на комплексную плоскость \mathbb{C} и использование направлений спада γ_λ

$$\gamma_\lambda(\mathbf{x}_0) = [x_{r0} \cosh(2\lambda) + x_{i0} \sinh(2\lambda)] + [x_{r0} \sinh(2\lambda) + x_{i0} \cosh(2\lambda)] i$$

где $\operatorname{Re}[x_0] = x_{r0}$ и $\operatorname{Im}[x_0] = x_{i0}$, таким образом мы получаем наперсток Лефшеца: (???? как узнать, какой его вид?)

$$\mathcal{J} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_\lambda(\mathbb{R}) = \{(1+i)u \mid u \in \mathbb{R}\}$$

(???)

И вдоль этого наперстка Лефшеца интеграл Френеля становится обычным гауссовым интегралом без осциллирующих выражений:

$$I_F = \int_{\mathcal{J}} e^{ix^2} dx = (1+i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2u^2} du = (1+i) \sqrt{\pi/2}$$

Напомним, что интеграл Френеля - типичный пример условно сходящегося интеграла, потому что так как $|e^{ix^2}| = 1$, то в одном направлении он может сходиться, в другом нет.

Этот интеграл можно посчитать определяется как предел $I_F = \lim_{R \rightarrow \infty} I_F(R)$, где $I_F(R) = \int_{-R}^R e^{ix^2} dx$. Для этого заметим, что интегралы $I_F(R)$ пробегает спираль Эйлера и достигает точки $(1+i)\sqrt{\pi/2}$, переходы к пределу $R \rightarrow \infty$, мы получили ответ.

для этого примера нужно понимать как строить спираль Эйлера, что обсуждать нам излишне (?).

границы применимости этого метода

если до него дойду, буду думать про это.

наперсток Лефшеца всегда является конутром наискорейшего спуска (????)

я не знаю, это просто утверждение на проверку, в программе пока что получается, что нет.

но там скорее всего ошибка, тем не менее, я теоретической точки зрения мне сказать нечего, тут место ответа на этот вопрос.

когда метод Пикара-Лефшеца не применим????

вроде, тогда, когда нет аналитического продолжения, но я такое еще не встречал.

С.1.2 математическое описание численной реализации метода Пикара-Лефшеца

обзор методов поиска наперстков

(статья 88 стр)

Обсудим вычисление выражения

$$\Psi(\mu; \nu) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{N/2} \sum_i \int_{\mathcal{J}_i} e^{i\phi(x; \mu)\nu} dx.$$

Сперва нужно определить, какие наперстки Лефшеца вносят вклад.

Для этого существуют два метода, где второй более эффективен для численных целей.

поиск наперстков через перенос контура наибольшего подъема

(судя по всему, тут только для конкретного примера всё задано..)

Рассмотрим задачу поиска контуров наискорейшего спуска для аргумента экспоненты

$$i\phi(x; \mu)\nu = i \left[(x - \mu)^2 + \frac{\alpha}{1 + x^2} \right] \nu$$

мнимый для вещественных μ и x . Его аналитическое продолжение имеет два полюса на $x = \pm i$, и пять седловых точек в комплексной x -плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial \phi(x; \mu)}{\partial x} = 2(x - \mu) - \frac{2\alpha x}{(1 + x^2)^2} = 0$$

Для П-Л теории начнем с аналитического продолжения экспоненты во мнимую часть:

$$i\phi(\mathbf{x}; \mu)\nu = h(\mathbf{u} + i\mathbf{v}; \mu) + iH(\mathbf{u} + i\mathbf{v}; \mu),$$

с комплексным расширением $x = u + iv$ и вещественными функциями h, H .

Для общности опишем поток контура интегрирования в N размерностях.

Вещественная часть h в теории Пикара-Лефшеца известна как h -функция. Нисходящий поток от h -функции $\gamma_\lambda : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ определен как

$$\frac{\partial \gamma_\lambda(z)}{\partial \lambda} = -\nabla_{u+iv} h[\gamma_\lambda(z)]$$

с учетом граничного условия $\gamma_0(z) = z \in \mathbb{C}^N$, (???) параметр λ в подмножестве \mathbb{R} , и комплексный градиент определен как

$$\nabla_{u+iv} h = \nabla_u h + i\nabla_v h$$

Заметим, что в определении градиента было предположено существование соответствующей метрики на \mathbb{C}^N .

Далее будем ассоциировать \mathbb{C}^N с \mathbb{R}^{2N} и использовать соответствующую евклидову метрику.

Зная особые точки, мы можем сосчитать контуры наискорейшего спуска и подъема, и пересечь их с вещественной осью чтобы найти нужные точки (?).

В зависимости от μ и α или одна или три точки вещественные. (???)

За счет этого после линзирования мы можем видеть или одну или три изображения.

(тут Турок посчитал рисунок с кучей крышесносных контуров, его рис. 7)

За счет переноса вещественной оси на контур, мы получим наперсток Лефшеца.

(стандартно он его голубым обозначает)

(интересно кстати, что далеко не каждый перенос это наперсток Лефшеца, мб потому что некоторые контуры это не контуры спадания?? а если два варианта контуров спадания есть?

и кст, для случая больших размерностей, это же типа уже не линии, я так думаю)

(а еще удивительно, что меняя параметры их меняется именно принципиальный вид! вроде...)

Наперстки существуют от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, переходя полюсы на $x = \pm i$.

(короче, тут дальше классификация, ей займусь, когда лучше пойму, что происходит, пока правильное оставить)

(там где-то рисунок каустик, про которые речь ниже, пока не разобрался)

Из структуры каустик на рис ??? можно выделить три режима:

- в режиме $\alpha < 1$, линза формирует одиночное изображение.

В соответствующем анализе Пикара-Лефшеца существует единственная вещественная критическая (седловая??) точка.

For large $|\mu|$ there is, in addition, a relevant complex saddle point.

When $|\mu|$ decreases to 0, the complex saddle point becomes irrelevant due to a Stokes transition.

это подробно объяснено далее (?).

Для $\mu = 0$, только вещественные точки имеют смысл.

Заметим, что наперсток может для всех μ продеформироваться в исходный \mathbb{R} .

See the lower panels of Fig. 5. (???? не пойму, к чему там то, что есть)

- В режиме $\alpha = 1$, линза имеет пиковую каустику на $\mu_c = 0$.

(???)

For $\mu \neq \mu_c$, the Picard-Lefschetz analysis is similar to the $\alpha < 1$ regime.

The thimble passes through one real-valued and one complex-valued saddle point.

At the caustic $\mu = \mu_c$, three non-degenerate saddle points merge forming a degenerate saddle point.

This is the signature of the cusp caustic, whose normal form is the quartic function x^4 .

See the middle panels of Fig.

5

- Режим $\alpha > 1$, характерен тем, что Пикара-Лефшеца анализ разбивается на три интервала.

In the single-image region, i.e., μ in $(-\infty, -\mu_c)$ or (μ_c, ∞) , the Picard-Lefschetz analysis consists of two relevant saddle points; one real and one complex.

At the caustic, the complex saddle point approaches the real line and merges with its complex conjugate saddle point.

This is the signature of the fold caustic.

In the triple-image region, i.e., $\mu \in (-\mu_c, \mu_c)$, the analysis consists of three real-valued relevant saddle points.

See the upper panels of Fig.

5.

явление Стокса

потом напишу.

я так понял, что

суть феномена Стокса в том, что контур наискорейшего спуска с одной кривой переходит на другую.

(?? когда он может быть?)

поиск наперстков через перенос области интегрирования

(у Турока это метод 2)

чет еще какой-то метод у него описан, непонятно, чем отличен от первого?? потом пропишу в обзорном параграфе.

алгоритм для 1d интеграла

(турок 88 стр)

Require: Представим отрезок $[a, b]$ изначальной области интегрирования $X = \mathbb{R}$ сеткой $p_i = a + i\Delta x$ с шагом $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Получаем отрезки $(p_0, p_1), (p_1, p_2), \dots, (p_{n-1}, p_n)$.

while variance of the imaginary part H on the points p_i exceeds threshold (????) T_1 **do**

flow the points: $p_i \mapsto p_i - \nabla h(p_i) \Delta t$

if the h -function evaluated in the point p_i is smaller than the threshold T_2 then remove the corresponding line segments

end if

if the length of the line-segments (p_i, p_{i+1}) exceeds the threshold T_3 **then**

split the line segment into the two lines $(p_i, \frac{p_i+p_{i+1}}{2}), (\frac{p_i+p_{i+1}}{2}, p_{i+1})$.

end if

end while

with the parameters $a, b, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}$, and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

алгоритм

void flow();

Поток области интегрирования J выражается методом Эйлера, то есть для всех точек \mathbf{x} в S , их координата сдвигается по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \tau \frac{\nabla h(\mathbf{x})}{\|\nabla h(\mathbf{x})\|}$$

с шагом $\tau > 0$, определенным в функции flow

Нормализуем градиент чтобы улучшить поведение потока в окрестности особенностей h -функции.

Точка в множестве S становится неактивной, когда h -функция падает ниже опускается ниже порога thres .

Порог определяет точность приближения интеграла.

Подразделение симплексов

После каждой итерации потока мы проверяем, активны ли точки активного симплекса.

В противном случае мы отключаем симплекс.

Для каждого активного симплекса мы проверяем, меньше ли расстояние между ребрами, чем δ .

Когда активный симплекс имеет ребро, превышающее δ , мы заменим его двумя новыми симплексами.

Например, в случае одной размерности, когда $(i, j) \in J$ относится к двум точкам большим расстоянием, чем δ , мы добавляем новую точку $x_k = (x_i + x_j)/2$ в множество S и заменяем симплекс новыми симплексами (i, k) и (k, j) .

Старый симплекс делаем неактивным.

Двумерный случай происходит аналогично.

Это всё выражается в функции

```
void subdivide();
```

За счет итерирования потока и процесса разделения, симплексы J будут подходить к наперстку Лефшеца \mathcal{J} .

Есть несколько способов, которыми можно проверить, действительно сходятся ли симплексы к наперстку Лефшеца.

В данном коде, мы итерируем на фиксированном числе шагов. (и?)

После того, как мы нашли наперсток, сохраняем точки в симплексный класс J и удаляем множество S .

(?) Поскольку поток делает симплексы неактивными в подпрограмме потока и пополняет их в подпрограмме subdivide, мы удаляем все неактивные симплексы из J с помощью чистой процедуры

```
void clean();
```

до вычисления интеграла.

интегрирование вдоль наперстка

Given a Lefschetz thimble \mathcal{J} for a range of α and μ , obtained with either one of the abovedescribed methods, we perform the resulting integral along the thimble with the trapezium rule.

Given a thimble \mathcal{J} represented as a set of line-segments $l_i = (p_{i,1}, p_{i,2})$, the integral is approximated by

$$\Psi(\mu; \nu) \approx \sum_i \frac{e^{i\phi(p_{i,1}; \mu)\nu} + e^{i\phi(p_{i,2}; \mu)\nu}}{2} (p_{i,2} - p_{i,1})$$

summed over the line segments.

For multi-dimensional oscillatory integrals, we evaluate the integral on a linear approximation of the integrand on the tessellation of the thimble. Naively, one might expect to have to compute the Lefschetz contour \mathcal{J} for every μ for which one wishes to perform the integral.

However, since the thimble is a smooth function of μ , it suffices to compute the thimble for a range of μ .

When integrating, we instead evaluate the integral on the thimble corresponding to the closest μ for which we have evaluated the thimble.

Finally, it should be noted that for increasing ν , the support of the integral is increasingly concentrated around the relevant saddle points.

As a consequence we can, for large ν , restrict the integral to the line segments close to the saddle points.

It follows from this that the numerical evaluation of the integral along the thimble becomes more and more efficient as the frequency is increased.

This is in sharp contrast with conventional integration techniques which need to trace many oscillations of the integrand along the real line.

See Fig.

11 for the normalized intensity profiles of the lens evaluated along the thimble for frequencies $\nu = 50, 100, 500$.

We observe the following properties of the normalized intensity profiles: - In the regime $\alpha < 1$, the lens leads to a single-image region.

The normalized intensity profile does not oscillate and is moreover independent of the frequency ν .

See the

lower panels of Fig. 11 - For $\alpha = 1$, the lens forms a cusp caustic.

The caustic corresponds to the peak at $\mu_c = 0$.

For increasing frequency, ν , the peak is enhanced and becomes increasingly narrow.

In the eikonal limit $\nu \rightarrow \infty$, the normalized normalized intensity diverges as $\nu^{1/2}$ at the caustic μ_c (see the scaling relations in Table II).

See the middle panels of Fig.

11. - In the regime $\alpha > 1$, the lens forms a triple-image region which is bounded by two-fold caustics.

We see that the triple-image region $(-\mu_c, \mu_c)$, with $\mu_c = 0.206751 \dots$ for $\alpha = 2$, consists of an interference pattern bounded by two peaks at $\mu = \pm\mu_c$.

The interference pattern in the triple-image region is the result of the three real saddle points.

The oscillations in the single-image region result from the interplay between the relevant real and the complex saddle point.

For increasing ν , the fringes of the interference pattern shrink and spikes corresponding to the fold get sharper and are increasingly enhanced.

For the relevant scalings see Table II.

See the upper panels of Fig.

11.

Note that the normalized intensity in the cusp exceeds the normalized intensity in the fold caustic.

This related to the co-dimension of the caustic as described in Section III B. Moreover remark that the cusp caustic only exists at a single α for the one-dimensional lens, while the fold caustic appears for a range of α .

Table II shows the frequency dependence of the pattern.

Furthermore, note that the normalized intensity profiles at frequency $\nu = 500$, for $\alpha = 1/2, 1$, and 2, are close to the normalized intensity maps predicted by geometric optics (see Fig. 6).

In the context of astronomical radio sources, the signal is dramatically enhanced when the relative position of the observer and the source move through the fold or the cusp caustic of the lens.

One would in this context interpret the μ axis as the line traced by the source on the sky, i.e.

$\mu = vt + \mu_0$ with μ_0 the initial position, v the speed of the source in parameter space and t the time.

This amplification of the signal may be relevant as an selection effect for the recently observed Fast Radio Bursts.

Note that if the observed FRBs are indeed the result of caustics in plasma lenses, we expect the peaks to evolve in a characteristic way and satisfy specific scaling relations in frequency space.

See Section VII for a more detailed discussion.

интегрирование Ромберга

После того, как мы имеем симплификационное приближени J наперстка Лефшеца \mathcal{J} , вычислим интеграл кусочно по схеме Ромберга.

В данном симплексе J вычисляем по правилу трапеции симплекс $T(1)$ и N уточнений симплекса $T(2), T(3), \dots, T(N)$.

На каждом уточнении мы делим пополам существующие симплексы.

Заметим, что для правила трапеции аппроксимация $T(i)$ может быть использована в эффективном вычислении $T(i+1)$.

Имея набор приближений $T(1), T(2), \dots, T(n)$ интеграла по симплексу J , мы используем аппроксимацию Рундсона для улучшения сходимости к истинному значению интеграла.

!!! тут Турок пишет, что использует

```
std::complex<double> romberg();
```

но по факту в коде такого нет, так что непонятно, что это значит???

Обсудим вычисление множества интегралов.

Когда имеется множество достаточно схожих интегралов, можно создать каталог наперстков J_i для нескольких внешних параметров μ_i .

Когда мы хотим вычислить интеграл для конкретного параметра μ , нужно найти соответствующий наперсток для ближайшей точки в каталоге и вычислить интеграл вдоль него.

Заметим, что хотя этот наперсток J_i не оптимальный контур интегрирования, для μ , теорема Коши гарантирует, что итоговый результат не зависит от этого. Вдоль такого неидеального наперстка интеграл также достаточно быстро сходится, а подынтегральная функция не сильно осциллирует.

С.1.3 различные теории, помогающие с численными расчетом

теория Морса-Смейла

теория Морса-Смейла имеет доказательство, что

???

переносной контур по методу Пикара-Лефшеца сойдется к контуру наискорейшего спуска, если h -функция имеет точку перегиба на комплексной плоскости.

и что еще?

о ней можно почитать в:

M. Morse, "Relations between the critical points of a real function on n independent variables," Transaction of the American Mathematical Society 27 (1925) 345 396.

[56] E. Stein, J. Milnor, M. Spivak, R. Wells, R. Wells, and J. Mather, Morse Theory. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1963.

однако этим заниматься не актуально.

С.1.4 другие численные методы

Обсудим другие полезные для линзирования численные методы.

(они вообще нужны?)

обзор других схем

Турок писал, что их много, но их самая лучшая.

может, дойду, посмотрю на другие, пока что не так уж интересно, есть ведь работающая.

обзор схемы Ромберга

возможно, именно эту схему мы и используем. (??)

С.2 математическая физика

По сути всегда ответ выражается с помощью одной из функций, изучаемой математической физикой, так что обсудим их, а также некоторые формулы, используемые в задачах гравитационного линзирования.

С.2.1 полезные функции и их свойства

(все в параграфах, потому что особо много писать про это излишне)

δ -функция от сложной функции

Обсудим δ -функцию от сложной функции и укажем все про нее, что необходимо знать. Имеет место формула.

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}$$

Действительно....

в случае векторных аргументов, у нас возникает определитель:

$$I(y) \approx \int_x \delta(\nabla\varphi(x) + x - y) = \sum_s \frac{1}{|D(x_s(y))|}$$

Это используется в (?)

Гипергеометрическая функция - свойства

обсудим с точки зрения гравитационного линзирования ее, приведем свойства ее. может, можно смотря на нее, и понять, что она есть решение нужной задачи?

Гипергеометрическая функция - применения в линзировании

обсудим ее применения в линзировании
уравнение

$$F(w, y) = -iwe^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp \left\{ iw \left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x) \right] \right\}$$

интегрируется аналитически, в итоге фактор усиления от монохроматических волн от точечного источника имеет вид:

$$|F|^2 = \frac{\pi w}{1 - e^{-\pi w}} \left| {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}iw, 1; \frac{1}{2}iwy^2 \right) \right|^2$$

где ${}_1F_1$ это гипергеометрическая функция.

Функция Айри - свойства

обсудим свойства функции Айри.

Функция Эйри $\Phi(t)$ определяется формулой

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t \right) d\xi$$

При больших положительных значениях t функция Айри экспоненциально убывает по асимптотическому закону:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях t функция $\Phi(t)$ осциллирует с убывающей амплитудой по закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]$$

Функция Эйри связана с функцией Макдональда порядка $1/3$:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)$$

????? Формула (2) соответствует асимптотическому выражению функций $K_\nu(t)$:

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Функция Айри - применения в линзировании

обсудим ее применения в линзировании

Она применяется в интенсивности света вблизи каустики

функция Бесселя - свойства

а серьезно что ли интеграл от функции Бесселя это гипергеометрическая функция???? судя по всему, именно это и используется.

Функция Бесселя - применения в линзировании

обсудим ее применения в линзировании

(????) В простейшем случае фактор усиления амплитуды $F(w, \mathbf{y}) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2\mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$ для линзирующего сферически симметричного объекта, $\psi(x)$ зависит только от $x = |\mathbf{x}|$ и величина $F(\vec{r}_0)$ выражается через функции Бесселя.

$$F(w, y) = -iwe^{iwy^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wxy) \exp\left\{iw\left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x)\right]\right\},$$

где J_0 это функция Бесселя нулевого порядка. (??? почему???? пояснения необходимы!!!)

С.3 особенности дифференцируемых отображений в приложении к линзированию

Наиболее часто в линзировании приходится исследовать осциллирующие интегралы, поэтому важно понимать общие их свойства.

С.3.1 свойства осциллирующих интегралов

они часто используются.

турок кстати их там тоже приводил в статье, причем с картинками..

это и я тоже сделаю.

анализ наперстков, всё такое.

С.4 теория катастроф для одномерного линзирования в двух словах

(в 88 стр от Турока эта теория, ее тут изложим, а выше в примерах уже ее использовали (пока нет))

(пока не время ей заниматься)

введение в теорию катастроф

Теория катастроф это математическая классификация устойчивых критических точек.

Каустики классифицируются Лагранжевой теорией катастроф, в которой они являются частным случаем.

После того, как понятна суть отображений Лагранжа ξ , связь между каустиками в оптических системах и критическими точками отображений становится очевидна.

Для одномерных функций классификация составляет только минимумы и максимумы.

Эти локальные минимумы и максимумы устойчивы, то есть малое возмущение системы возвращает ее назад в эту точку.

Degenerate critical points are not included, as they are not stable in one dimension.

For example, a cubic critical point decomposes into a minimum and a maximum, or no critical point at all, when perturbed.

In the catastrophe theory of higher-dimensional functions, degenerate critical points are included because they are stable.

René Thom (1972) proved [49] that the stable critical points with co-dimension 4K less than or equal to 4 are classified by the seven "elementary catastrophes."

These seven singularities suffice to classify the full range of caustics emerging in three-dimensional lenses.

Thom named the seven catastrophes: the fold, cusp, swallowtail, butterfly, and the elliptic, hyperbolic and parabolic umbilic.

The caustics were in the subse-

quent years connected and labeled by the Coxeter reflection groups (Arnol'd [50,51]).

The theory was subsequently applied to optical interference patterns by Berry and collaborators, and beautiful experiments were performed [6].

For a more recent theoretical investigation of catastrophe theory and caustics with applications to large-scale structure formation see [52].

Here we briefly review catastrophe theory and its application to oscillatory integrals. Table I lists the seven "elementary catastrophes" and their unfoldings $\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$.

The unfolding $\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$ evaluated at $\boldsymbol{\mu} = 0$ is the normal form of the catastrophe, representing the archetypical form of the critical point near $x = 0$.

We observe that the fold and the cusp respectively correspond to a cubic and quartic critical point of x .

The parameter μ represents the ways in which the caustic can decompose into lower-order caustics.

In the case of the fold, we see that a linear perturbation decomposes the fold into a minimum and a maximum for $\mu < 0$ and no critical point at all for $\mu > 0$.

The seven catastrophes belong to two families, classified by their co-rank ⁵.

The A -family is of co-rank $N = 1$, while the D -family is of co-rank $N = 2$.

Critical points with higher co-rank have a co-dimension higher than 4, and for this reason are not included here.

The co-rank N and the co-dimension K characterize the critical point.

It generally takes N variables to describe the critical point, and it takes K parameters to describe its unfolding.

In more precise terms, N is the dimension of the space of \mathbf{x} 's and K is the dimension of the space of $\boldsymbol{\mu}$'s.

обзор и примеры применений теорий катастроф в гравитационном линзировании

когда дойду - подумаю.

сама теория катастроф

(?)

С.4.1 складка A_2

о применении особенности складка

может быть, именно про эту особенность и писал Накамура, не знаю.

теория

The fold singularity is the simplest degenerate critical point and can be viewed as the superposition of two non-degenerate saddle points.

The Picard-Lefschetz analysis of the unfolding of the fold singularity is illustrated in Fig. 12.

For negative μ , there are two relevant real saddle points (see Fig. 12a).

As μ approaches the caustic at $\mu_c = 0$, the two saddle points merge and form the fold singularity (see Fig.

12 b).

Note that the fold saddle point emanates three steepest ascent and three descent curves.

The thimble is non-differentiable at the degenerate saddle point.

When μ is increased passed the caustic μ_c , the two saddle points move off the real axis and into the complex plane (see Fig.

12c).

In this regime only one of them remains relevant.

The Fresnel-Kirchhoff integral for the fold singularity can be related to the Airy function

$$\Psi(\mu; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{x^3}{3} + \mu x\right)\nu} dx = 2\sqrt{\pi}\nu^{1/6} \text{Ai} [\nu^{2/3}\mu]$$

Note the appearance of the singularity and fringe indices $1/6$ and $2/3$ as listed in Table II. It is straightforward to derive the scaling of the amplitude and the fringes, with the change of coordinates $z = \nu^{1/3}x$.

The other scaling relations are derived analogously.

The Airy function is a good illustration of the interference phenomenon present in multi-image regions (seen in Fig.

13).

The range $\mu < 0$, for which the two relevant saddle points reside on the real line corresponds to a double-image region, where two saddle points lead to an interference pattern.

The range $\mu > 0$ corresponds to a zero-image region in which the amplitude asymptotes to zero as $\nu \rightarrow \infty$.

АСИМПТОТИКИ

Using the Picard-Lefschetz diagrams (Fig.

12) we can derive asymptotics for the integral $\Psi(\mu; \nu)$. For $\mu > 0$ the Picard-Lefschetz analysis consists of a single relevant saddle point located at $i\sqrt{\mu}$.

The exponent can be approximated around the saddle point by

$$\phi(x; \mu) = i\frac{2}{3}\mu^{3/2} + i\sqrt{\mu}(x - i\sqrt{\mu})^2 + \mathcal{O}((x - i\sqrt{\mu})^3)$$

The saddle point approximation for this point gives an exponential falloff

$$\Psi(\mu; \nu) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\mu^{3/2}\nu}}{\sqrt{2}\mu^{1/4}}$$

This matches the the behaviour in Fig.

13. For $\mu < 0$, the Picard-Lefschetz analysis consists of two real relevant saddle points located at $x = \pm\sqrt{|\mu|}$. A saddle point approximation around these points gives us the oscillatory behaviour

$$\Psi(\mu; \nu) \approx \frac{e^{-\frac{2i}{3}\mu^{3/2}\nu} + ie^{\frac{2i}{3}\mu^{3/2}\nu}}{\mu^{1/4}}$$

seen in Fig.

13.

Observe that wave function becomes increasingly oscillatory and falls off as a power law $\Psi(\mu; \nu) \propto \frac{1}{|\mu|^{1/4}}$ in the geometric limit $\nu \rightarrow \infty$. B.

The cusp A_3 The cusp singularity consists of the superposition of three non-degenerate saddle points. The singularity is of co-dimension $K = 2$ and has two unfolding parameters μ_1 and μ_2 , i.e.,

$$\Psi(\boldsymbol{\mu}; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{x^4}{4} + \mu_2 \frac{x^2}{2} + \mu_1 x\right)\nu} dx$$

See Fig.

14 for an illustration of unfolding of the cusp caustic and the Picard-Lefschetz analysis in the (μ_1, μ_2) -plane.

The the exponent $\phi(x; \mu)$ has three saddle points \bar{x}_i , given by the roots of the cubic equation

$$x^3 + \mu_2 x + \mu_1 = 0$$

Depending on μ , either one or three of the saddle points are real-valued.

The complex-valued saddle points always come in conjugate pairs since $\phi(x; \mu)$ is a real-valued function, i.e.

real for real x .

Geometric optics applied to this integral shows that the cusp caustic at $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ emanates two fold-lines $A_2 \subset M$, given by cubic root

$$\mu_2 = -\frac{3}{2^{2/3}} |\mu_1|^{2/3}$$

(и тут снова жестчайшие диаграммы пошли)

The fold lines are non-differentiable at the cusp singularity $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$. In the triple-image region enclosed by the two fold-lines, the thimble passes through three real-valued saddle points.

When approaching one of the fold lines, we see that two of the real saddle points merge and move in the complex plane.

Only one of the two complex saddle points remains relevant to the integral.

This is analogous to the behavior observed in the analysis of the fold caustic.

At the cusp saddle point at $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$ all three saddle points merge at the origin.

Finally, note that the single-image region consists of three subregions, for which the Picard-Lefschetz analysis either consists of one or two relevant saddle points.

These subregions are separated by two Stokes lines (red dashed lines in Fig.

14).

Along these lines, the Lefschetz thimbles flip while the saddle points remain separated.

The Stokes lines can be found by equating the imaginary parts of the exponents evaluated at the saddle points, i.e.,

$$\text{Im} [i\phi(\bar{x}_i; \boldsymbol{\mu}) \nu] = \text{Im} [i\phi(\bar{x}_j; \boldsymbol{\mu}) \nu]$$

for $i \neq j$.

For the unfolding of the cusp, we see that the Stokes lines are described by

$$\mu_2 = 3 \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-5}{2}} |\mu_1|^{2/3}$$

for $\mu_1 < 0$ and μ_2 .

Note that the amplitude across a Stokes line is smooth, even though the saddle point structure changes abruptly.

The Stokes lines can be interpreted as the points for which the saddle point approximation of the integral fails.

численные расчеты

Given the Lefschetz thimble, we can numerically evaluate the amplitude (see Fig.

15). In the eikonal limit $\nu \rightarrow \infty$ we observe the emergence of a fold-line (A_2) with a sharp exponential falloff in most of the single-image region and the power-law falloff in the triple-image region.

We also see the emergence of a cusp caustic at the origin with a power-law falloff along the line $\{\mu_1 = 0\}$.

The Picard-Lefschetz diagrams (Fig.

14) allow us to derive limiting behaviour for $\Psi(\mu; \nu)$. From the functional form of $\phi(x; \boldsymbol{\mu})$ along the line $\{\mu_1 = 0\}$, i.e.,

$$\phi(x; \boldsymbol{\mu}) = \frac{\mu_2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

we observe that one of the relevant saddle points is located at the origin $x = 0$. For $\mu_2 > 0$ this is the only relevant saddle point, whereas for $\mu_2 < 0$ it is one of three real relevant saddle points. In the case $\mu_2 > 0$, we find that the single saddle leads to a power-law

$$\Psi(x; \boldsymbol{\mu}) \approx \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu_2 \nu}{2} x^2} dx = \sqrt{2} (-i\mu_2)^{-1/2}$$

which in the normalized intensity corresponds to the falloff

$$I(x; \mu) = |\Psi(x; \mu)|^2 \approx \frac{2}{\mu_2}$$

independent of the frequency.

This feature is absent in the unfolding of the fold caustic. For $\mu_2 < 0$, the Picard-Lefschetz analysis consists of three real relevant saddle points

located at $\pm\sqrt{\mu_2}$ and 0. The exponent at the saddle point $\pm\sqrt{-\mu_2}$ can be approximated by

$$\phi(x; \boldsymbol{\mu}) = -\frac{\mu_2^2}{4} - \mu_2 (x \pm \sqrt{-\mu_2})^2 + \mathcal{O}\left((x \pm \sqrt{-\mu_2})^3\right)$$

In the saddle point approximation,

$$\Psi(\mu; \nu) \approx \sqrt{2} \frac{-(-1)^{3/4} + (1+i)e^{-\frac{i}{4}\mu_2^2\nu}}{\sqrt{-\mu_2}}$$

The normalized intensity $I(\mu; \nu)$ thus oscillates in μ_2 with increasing frequency with power-law suppression

$$I(\boldsymbol{\mu}; \nu) \propto \frac{2}{\mu_2}$$

Along the line $\{\mu_2 = 0\}$, the Picard-Lefschetz analysis consists of two relevant saddle points, one real and one complex.

The real relevant saddle point is located at $\bar{x} = -\mu_1^{1/3}$, giving the oscillatory behaviour

$$\Psi(\mu; \nu) \approx \sqrt{2} \frac{(-1)^{1/4} e^{-i\mu_1^{4/3}\nu}}{-\sqrt{3}\mu_1^{1/3}}$$

so that the normalized intensity again falls off as a power-law

$$I(\boldsymbol{\mu}; \nu) = |\Psi(\boldsymbol{\mu}; \nu)|^2 \approx 2\mu_1^{-2/3}.$$

C.4.2 ласточкин хвост A_4

теория

The swallowtail singularity is more complicated, as it consists of the superposition of four non-degenerate saddle points. The singularity is of co-dimension $K = 3$ and has three unfolding parameters μ_1, μ_2 and μ_3 , i.e.,

$$\Psi(\mu; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{x^5}{5} + \mu_3 \frac{x^3}{3} + \mu_2 \frac{x^2}{2} + \mu_1 x\right)\nu} dx$$

See figures 17 and 18 for an illustration of unfolding of the swallowtail caustic and the Picard-Lefschetz analysis in the (μ_1, μ_2, μ_3) -space.

The analytic continuation of the exponent $i\phi(x; \boldsymbol{\mu})\nu$ has four saddle points \bar{x}_i , given by the roots of the quartic equation

$$x^4 + \mu_3 x^2 + \mu_2 x + \mu_1 = 0$$

Depending on μ , either zero, two or four of the saddle points are real-valued. The complex-valued saddle points always come in conjugate pairs since $\phi(x; \boldsymbol{\mu})$ is a real-valued function. Geometric optics applied to this integral shows that the swallowtail caustic at $\mu = (0, 0, 0)$ emanates a cusp-line and a fold-surface (see Fig. 16). The fold-surface (the yellow surface in Fig. 16) is given by

$$A_2 = \{(3u^4 + u^2 v, -4u^3 - 2uv, v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \subset M$$

satisfying the two constraints

$$\frac{d\phi(x; \boldsymbol{\mu})}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\phi(x; \boldsymbol{\mu})}{dx^2} = 0$$

The cusp-line (the black curve in Fig. 16) lays on the fold-surface and is given by

$$A_3 = \{(-3t^4, 8t^3, -6t^2) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset M$$

satisfying the three constraints

$$\frac{d\phi(x; \boldsymbol{\mu})}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\phi(x; \boldsymbol{\mu})}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\phi(x; \boldsymbol{\mu})}{dx^3} = 0$$

Note that the caustics are symmetric in the (μ_1, μ_3) -plane and that caustics only appear for negative μ_1 . This aids our analysis, since we can consider the three-dimensional swallowtail unfolding as a one parameter family of unfoldings in the $\{\mu_3 = \text{const}\}$ planes.

In figures 17 and 18 we plot three slices of the fold-surface and cusp-line for $\mu_3 = -1, 0$ and $+1$. For $\mu_3 = -1$ we obtain the characteristic swallowtail shape in the fold-surface with the cusp-line intersecting at the tips, which gives the singularity its name. For $\mu_3 = 0$ we see

the actual swallow caustic. The slice $\mu_3 = +1$, is simpler as it does not contain intersections with the cusp-line and only consists of the fold-surface separating two regions.

Given the caustics of geometric optics, we can evaluate the Lefschetz thimble. It again suffices to study the three cases $\mu_3 < 0$, $\mu_3 = 0$ and $\mu_3 > 0$: - We start by analysing the saddle points in the $\mu_3 = -1$ plane (Fig. 17). The Picard- Lefschetz analysis for the enclosed region in the middle of the circle consists of four relevant real saddle points. This is a quadruple-image region. Note that multiple- image regions for localized lenses always consist of an odd number of images. In such lenses, the swallowtail will in practice always appear near another caustic such as a fold.

Starting from the quadruple-image region and moving through the fold-line on the left, we observe that the two central saddle points merge to form a fold saddle point. The two saddle points subsequently move in the complex plane, one remaining relevant. Since this region corresponds to two real saddle points it is a double-image region. Again, starting from the quadruple-image region and moving in the vertical direction, we observe that two of the outer saddle points merge to form a fold saddle point and

subsequently move into the complex plane. The resulting Picard-Lefschetz analysis again consists of three relevant saddle points; two real and one complex. This again is a double-image region. If we, however, move from this double-image region to the double-image region on the left of the quadruple-image region, we pass through two Stokes lines, at which the complex saddle point switches from relevant to irrelevant.

The Stokes lines are defined by

$$\text{Im}[i\phi(\bar{x}_i; \boldsymbol{\mu}) \nu] = \text{Im}[i\phi(\bar{x}_j; \boldsymbol{\mu}) \nu]$$

for $i \neq j$. Note that the Stokes lines can be associated with the cusp caustic at the tips of the fold-line. Note that the three relevant saddle points merge at these tips, to form a cusp saddle point.

Finally, if we move from the quadruple-image region along the line $\mu_2 = 0$ to the right, we pass through the intersection of the fold lines. At this point, both the left and right two real saddle points merge to form a 'double' fold caustic. After passing this point, the four saddle points move in the complex plane. The Picard-Lefschetz analysis consists here of two relevant complex saddle points. This is a zero-image region (which will not be realized in localized lenses). If we pass from the double- image region to the zero-image region, we again observe a fold caustic in which two relevant real saddle points merge and move in the complex plane. This completes the analysis of the unfolding of the swallowtail caustic at $\mu_3 = -1$.

For $\mu_3 = 0$, the geometry of the fold-line is simpler as the quadruple-image region has merged into the swallowtail caustic at the origin (see Fig. 18a). The Picard-Lefschetz analysis

of this slice is largely similar to the one at $\mu_3 = -1$. The double-image region (including the Stokes lines) has been deformed but is otherwise the same. The zero-image region is also unchanged. However, the intersection of the two fold-lines is replaced by the swallowtail saddle point at the origin of in the (μ_1, μ_2) -plane. Since this saddle point is the superposition of four non-degenerate saddle points, the amplitude integral is enhanced.

- For $\mu_3 = +1$, the geometry of the caustics is depicted in Fig. 18b. The fold-line separates the zero-image region on the right from the double-image region on the left. Since the Picard-Lefschetz diagram in the zero-image region consists of four complex saddle points - two of them being relevant - there exist two distinct ways in which we can pass to the double-image region; either by merging the two saddle points on the left or on the right (see upper and lower diagram). The transition between these two takes place at the origin, where the four saddle points are located on the imaginary

axis. The double-image region consists of three subregions. The rightmost Stokes lines at $\mu_3 = 0$ (see Fig. 18a) have partly moved into the zero-image region.

By patching the Picard-Lefschetz analysis at $\mu_3 = -1, 0$ and $+1$ together, we obtain a complete description of the unfolding of the swallowtail singularity in the (μ_1, μ_2, μ_3) -space. Note that the Stokes lines obtained in figures 17 and 18 are intersections of Stokes-surfaces, which together with the fold-surface partition the μ -space.

Numerics

Given the Lefschetz thimble, we can numerically compute the normalized intensity map of the lens (see Fig. 19).

The left, central and right panels depict the normalized intensity $I(\mu; \nu)$ for $\mu_3 = -1, 0$ and $+1$. The upper, middle and lower panels depict the different frequencies $\nu = 50, 100$ and 500 .

С.4.3 Эллиптическая пупочная катастрофа D_4^-

мотивация

Эллиптическая пупочная катастрофа, также известная как elliptic umbilic catastrophe нужна для.....

теория

The caustics described above were part of the A -family.

They are of co-rank 1 and can be described by a one-dimensional integral.

This should be contrasted by the D family which is of co-rank 2 and can only be studied in two-dimensional integrals.

The elliptic umbilic D_4^- is a singularity with co-rank 2 and co-dimension $K = 3$.

The unfolding is described in terms of the three unfolding parameters (μ_1, μ_2, μ_3) .

Рассмотрим интерференционную картину, даваемую интегралом

$$\Psi(\mu; \nu) = \frac{\nu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1^3 - 3x_1x_2^2 - \mu_3(x_1^2 + x_2^2) - \mu_2x_2 - \mu_1x_1)} \nu dx_1 dx_2$$

Аналитическое продолжение экспоненты $i\phi(\mathbf{x}; \mu)\nu$ имеет четыре седловые точки \bar{x}_i , которые находятся как корни двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2\mu_3x_1 - \mu_1 &= 0 \\ -6x_1x_2 - 2\mu_3x_2 - \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Depending on μ , either two or four of the saddle points are real-valued.

The complex-valued saddle points always come in conjugate pairs since $\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu})$ is real-valued for real x .

.....

С.4.4 Гиперболическая пупочная катастрофа D_4^-

С.5 теория катастроф для двумерного линзирования в двух словах

теория катастроф в двух словах

что это за теория???? эм...

С.5.1 параметры для описания катастроф

С.5.2 A generic peak

С.5.3 A degenerate peak

С.5.4 The swallowtail caustic

С.5.5 The elliptic umbilic caustic

С.6 дифференциальная геометрия

С.6.1 эллиптические координаты

обзор применений в гравитационном линзировании

Часто приходится к ним переходить.

описание координат и основные свойства

(у Турока лишнее сюда перенесу)

В эллиптических координатах выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| &= a(\cosh \tau + \cos \tau), \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\| &= a(\cosh \tau - \cos \tau).\end{aligned}$$

Якобиан перехода из декартовых в эллиптические координаты равен

$$J(\tau, \sigma) = \frac{a^2}{2}(\cosh 2\tau - \cos 2\sigma).$$

С.7 Программирование для линзирования

(что-то укажу, но не столько же, сколько было! вообще нет смысла коды приводить, это в дополнительной записи есть смысл делать. А вот вмеру подробно описать - да, хорошая идея. вот когда-то потом это и сделаю, пока не до этого.)

Литература

- [1] С., Вайнберг: *Космология*. Либроком.
- [2] Job Feldbrugge, Ue Li Pen и Turok, Neil: *Oscillatory path integrals for radio astronomy*.
- [3] Ф., Захаров А.: *Гравитационные линзы и микролинзы*.
- [4] Dominik, M.: *Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 353(1):69–86, Sep 2004, ISSN 1365-2966. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08046.x>.
- [5] Takahiro T. Nakamura, Shuji Deguchi: *Wave Optics in Gravitational Lensing*.
- [6] Шиллинг, Г: *Складки на ткани пространства-времени: Эйнштейн, гравитационные волны и будущее астрономии*. Альпина Паблишер, 2018.
- [7] Д., Чернин А.: *Космические иллюзии и миражи*. Квант, 1988.
- [8] Courbin, Frederic, Saha, Prasenjit, и Schechter, Paul L: *Quasar lensing*. В *Gravitational Lensing: An Astrophysical Tool*, страницы 1–54. Springer, 2002.
- [9] Kayser, Rainer, Schramm, Thomas, и Nieser, Lars: *Gravitational Lenses*. Gravitational Lenses, 406, 1992.
- [10] Job Feldbrugge, Neil Turok: *Gravitational lensing of binary systems in wave optics*.
- [11] Berry, Michael V и Upstill, Colin: *IV catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns*. В *Progress in optics*, том 18, страницы 257–346. Elsevier, 1980.
- [12] Захаров, Александр Федорович: *Поиски экзопланет с помощью гравитационного микролинзирования*. Успехи физических наук, 181(10):1114–1122, 2011.
- [13] Tomita, Kenji, Premadi, Premana, и Nakamura, Takahiro T.: *Various Approaches to Cosmological Gravitational Lensing in Inhomogeneous Models*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 133:85–113, 1999, ISSN 0375-9687. <http://dx.doi.org/10.1143/PTPS.133.85>.
- [14] Grillo, Gianfranco и Cordes, James: *Wave asymptotics and their application to astrophysical plasma lensing*, 2018.
- [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Теория поля*.
- [16] Behtash, Alireza, Dunne, Gerald V, Schäfer, Thomas, Sulejmanpasic, Tin, и Unsal, Mithat: *Toward Picard-Lefschetz theory of path integrals, complex saddles and resurgence*. arXiv preprint arXiv:1510.03435, 2015.
- [17] Witten, Edward: *A new look at the path integral of quantum mechanics*. arXiv preprint arXiv:1009.6032, 2010.
- [18] Арнольд, В. И., Варченко, А. Н., и Гусейнзаде, С. М.: *Особенности дифференцируемых отображений*. МЦНМО, 2009.
- [19] Арнольд, Владимир Игоревич, Варченко, Александр Николаевич, и Гусейн-Заде, Сабир Меджидович: *Особенности дифференцируемых отображений: Монодромия и асимптотики интегралов*. "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

- [20] Васильев, ВА: *Ветвящиеся интегралы*. М.: МЦНМО, 2000.
- [21] Nicolaescu, Liviu I.: *Notes on the Topology of Complex Singularities*. 2013.
- [22] Jung, Youn Kil, Hwang, Kyu Ha, Ryu, Yoon Hyun, Gould, Andrew, Han, Cheongho, Yee, Jennifer C, Albrow, Michael D, Chung, Sun Ju, Shin, In Gu, Shvartzvald, Yossi, и др.: *Two Microlensing Binaries Composed of Planetary-mass Companions and Very-low-mass Primaries*. The Astronomical Journal, 156(5):208, 2018.
- [23] Herrera-Martín, Antonio, Albrow, M. D., Udalski, A., Gould, A., Ryu, Y. H., и al. et.: *OGLE-2018-BLG-0677Lb: A Super-Earth Near the Galactic Bulge*. The Astronomical Journal, 159(6):256, may 2020. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab893e>.
- [24] Mao, Shude: *Astrophysical applications of gravitational microlensing*. Research in Astronomy and Astrophysics, 12(8):947–972, aug 2012. <https://doi.org/10.1088/1674-4527/12/8/005>.
- [25] Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehnert, Neil Turok: *Lorentzian Quantum Cosmology*.
- [26] Diego, J. M., Hannuksela, O. A., Kelly, P. L., Pagano, G., Broadhurst, T., Kim, K., Li, T. G. F., и Smoot, G. F.: *Observational signatures of microlensing in gravitational waves at LIGO/Virgo frequencies*. Astronomy and Astrophysics, 627:A130, июль 2019, ISSN 1432-0746. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201935490>.
- [27] Yeung, Simon M. C., Cheung, Mark H. Y., Gais, Joseph A. J., Hannuksela, Otto A., и Li, Tjonnie G. F.: *Microlensing of type II gravitational-wave macroimages*, 2021.