

Continuum Mechanics

Yury Holubeu *

June 8, 2025

The note is not intended for distribution. Continuum mechanics is discussed in detail. Links below show contents of solved problems and summary of special topics. Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

Contents

Preface and main motivation	8
I — Typical Continuum Mechanics in a Nutshell —	10
1 Гидродинамика в двух словах	10
1.1 Об основах гидродинамики	10
1.1.1 Основные законы элементарной гидродинамики	10
1.1.2 Законы сохранения, потенциальные течения, идеальная жидкость	11
1.1.3 Одномерные среды, инварианты, опрокидывание, мелкая вода	15
1.1.4 Вихревые структуры в идеальной жидкости.	16
1.1.5 Fluid Statics	16
1.1.6 Compressible Flow	20
1.1.7 Гидростатика, упрощенная (!!?)	23
1.2 Fluid with viscosity: basics	23
1.2.1 Вязкость	23
1.2.2 Уравнения вязкой жидкости, диссипация энергии, подобие	27
1.2.3 Обтекания шаров, цилиндров, boundary layers, Prandtl equation	27
1.3 Турбулентность в двух словах	30
1.3.1 Возбуждение турбулентности в неустойчивой и устойчивой системах.	30
1.3.2 Перемешивание ламинарное и перемешивание турбулентное.	31
1.3.3 Устойчивости движений, разрывы	31
1.3.4 Квазипериодичность, аттракторы, удвоение периодов	32
1.3.5 Турбулентная область, корреляции скоростей, струи, теорема Жуковского	33
1.4 Special well-known and important phenomena	37
1.4.1 Теплопроводность в жидкости	37
1.4.2 Поверхностные явления	37
1.4.3 Движение сквозь жидкость, плавание	37
1.4.4 Ударные волны: basics	37
1.4.5 Одномерное движение сжимаемого газа	39
1.4.6 Пересечение поверхностей разрыва	39
1.5 Dispersive Waves	39
1.5.1 Linear waves	39
1.5.2 Weakly nonlinear waves	39
1.5.3 Nonlinear Schrödinger Equation (NSE)	40
1.5.4 Korteweg - de Vries Equation (KdV)	40
2 Sound and acoustics: Main properties	40
3 Elasticity: Main properties	41
3.0.1 Основные законы элементарной теории упругости	41
3.0.2 Solid Statics	43
3.0.3 Об упругости особых тел по Ландау	52
3.0.4 Основные модели теории упругости	52
4 Mathematics for continuum mechanics: Main formulas	53

*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

II	Основы гидродинамики	54
5	Basic equations and steady flows	54
5.1	1.1 Definitions and basic equations	54
5.1.1	1.1.1 Definitions	54
5.1.2	1.1.2 Equations of motion for an ideal fluid	55
5.1.3	1.1.3 Hydrostatics	58
5.1.4	1.1.4 Isentropic motion	60
5.2	1.2 Conservation laws and potential flows	62
5.2.1	1.2.1 Kinematics	62
5.2.2	1.2.2 Kelvin's theorem	63
5.2.3	1.2.3 Energy and momentum fluxes	64
5.2.4	1.2.4 Irrotational and incompressible flows	65
5.3	1.3 Flow past a body	69
5.3.1	1.3.1 Incompressible potential flow past a body	70
5.3.2	1.3.2 Moving sphere	70
5.3.3	1.3.3 Moving body of an arbitrary shape	71
5.3.4	1.3.4 Quasi-momentum and induced mass	73
5.4	1.4 Viscosity	76
5.4.1	1.4.1 Reversibility paradox	76
5.4.2	1.4.2 Viscous stress tensor	77
5.4.3	1.4.3 Navier-Stokes equation	78
5.4.4	1.4.4 Law of similarity	80
5.5	1.5 Stokes flow and wake	82
5.5.1	1.5.1 Slow motion	82
5.5.2	1.5.2 Boundary layer and separation phenomenon	84
5.5.3	1.5.3 Flow transformations	87
5.5.4	1.5.4 Drag and lift with a wake	87
6	Unsteady flows	90
6.1	2.1 Instabilities	90
6.1.1	2.1.1 Kelvin-Helmholtz instability	90
6.1.2	2.1.2 Energetic estimate of the stability threshold	92
6.1.3	2.1.3 Landau law	93
6.2	2.2 Turbulence	94
6.2.1	2.2.1 Cascade	95
6.2.2	2.2.2 Turbulent river and wake	98
6.3	2.3 Acoustics	100
6.3.1	2.3.1 Sound	100
6.3.2	2.3.2 Riemann wave	102
6.3.3	2.3.3 Burgers equation	104
6.3.4	2.3.4 Acoustic turbulence	106
6.3.5	2.3.5 Mach number	108
7	Dispersive Waves	111
7.1	3.1 Linear waves	111
7.1.1	3.1.1 Surface gravity waves	112
7.1.2	3.1.2 Viscous dissipation	114
7.1.3	3.1.3 Capillary waves	115
7.1.4	3.1.4 Phase and group velocity	116
7.2	3.2 Weakly nonlinear waves	119
7.2.1	3.2.1 Hamiltonian description	119
7.2.2	3.2.2 Hamiltonian normal forms	121
7.2.3	3.2.3 Wave instabilities.	122

7.3	3.3 Nonlinear Schrödinger Equation (NSE)	123
7.3.1	3.3.1 Derivation of NSE	123
7.3.2	3.3.2 Modulational instability	125
7.3.3	3.3.3 Soliton, collapse and turbulence	128
7.4	3.4 Korteweg - de Vries Equation (KdV)	131
7.4.1	3.4.1 Weakly nonlinear waves in shallow water	131
7.4.2	3.4.2 KdV equation and soliton	133
7.4.3	3.4.3 Inverse scattering transform	134
8	Fluid Mechanics other basics	136
8.1	Основы сплошных сред по общей физике	136
8.1.1	Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности	136
8.1.2	Архимедова сила, уравнение Бернулли	138
8.1.3	тензор напряжений?	141
8.1.4	формула Пуазейля	141
8.1.5	турбулентность	144
8.1.6	число Рейнольдса	146
8.2	Fluid mechanics basics by Zhou	146
8.2.1	Fluid Statics	146
8.2.2	Solid Statics	150
8.2.3	Ideal Fluid Flow	158
8.2.4	Compressible Flow	163
8.2.5	Viscosity	167
9	Турбулентность по Ландау	171
10	гидростатика	171
10.1	Поверхностное натяжение. Формула Лапласа.	172
10.2	Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.	172
11	Одномерное движение сжимаемого газа	172
11.0.1	Истечение газа через сопло	172
11.0.2	Вязкое движение сжимаемого газа по трубе	175
11.0.3	Одномерное автомодельное движение	175
11.0.4	Разрывы в начальных условиях	175
11.0.5	Одномерные бегущие волны	175
11.0.6	Образование разрывов в звуковой волне	175
11.0.7	Характеристики	175
11.0.8	Инварианты Римана	175
11.0.9	Произвольное одномерное движение сжимаемого газа	175
11.0.10	Задача о сильном взрыве	175
11.0.11	Сходящаяся сферическая ударная волна	175
11.0.12	Теория “мелкой воды”	175
III	Основы теории упругости	176
12	Основы (?)	176
12.0.1	Тензор деформации	176
12.0.2	Тензор напряжения	179
12.0.3	Термодинамика деформирования	183
12.0.4	Закон Гука	183
12.0.5	Однородные деформации	183
12.0.6	Деформации с изменением температуры	183
12.0.7	Уравнения равновесия изотропных тел	184

12.0.8	Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью	184
12.0.9	Соприкосновение твердых тел	184
12.0.10	Упругие свойства кристаллов	184
12.1	Основные примеры деформаций	184
12.1.1	Деформация прямоугольного параллелепипеда	184
12.1.2	Всесторонне сжатие и растяжение	184
12.1.3	Кручение	184
12.1.4	Простейшие деформации	186
12.2	Равновесие стержней и пластинок	186
12.2.1	Энергия изогнутой пластинки	186
12.2.2	Уравнение равновесия пластинки	186
12.2.3	Продольные деформации пластинок	186
12.2.4	Сильный изгиб пластинок	186
12.2.5	Деформация оболочек	186
12.2.6	Кручение стержней	186
12.2.7	Изгиб стержней	186
12.2.8	Энергия деформированного стержня	186
12.2.9	Уравнение равновесия стержней	186
12.2.10	Слабый изгиб стержней.	186
12.2.11	Устойчивость упругих систем	186
13	Упругие волны	186
13.1	Упругие волны в изотропной среде	187
13.2	Упругие волны в кристаллах	187
13.3	Поверхностные волны	187
13.4	Колебания стержней и пластинок	187
13.5	Ангармонические колебания	187
IV	Problems	188
14	Типичные задачи механики сплошных сред	188
14.1	Simplified and introductory problems	188
14.1.1	Задачи общей физике (???)	188
14.1.2	Задачи о поверхности воды	188
14.1.3	Exercises 1	189
14.1.4	Exercises 2	202
14.1.5	Exercises 3	210
15	Problems about specific phenomena	221
15.0.1	Problems about phenomena in nature	221
15.0.2	Problems about реакцию-диффузию	224
15.0.3	Задачи о странных явлениях (???)	225
16	General Questions and problems for checking understanding	225
16.1	Questions about understanding	225
16.2	Типичные технические задачи для проверки знаний (???)	227
16.3	Questions about interesting phenomena	229
17	Problems about applications	229
17.0.1	О некоторых прикладных задачах	229

18 Задачи Пухова о волнах	229
18.0.1 Задачи Пухова 1	229
18.0.2 Задачи Пухова 2	235
18.0.3 Задачи Пухова 3	241
18.0.4 Задачи Пухова 3	247
18.0.5 Задачи Пухова 4	252
18.0.6 Упражнения Пухова1	260
18.0.7 Упражнения Пухова2	265
 V — Special Topics in Continuum Mechanics in a Nutshell —	269
19 Special Models	269
19.0.1 Ideal liquid: other properties	269
19.0.2 Пограничные слои, обтекаемость, подъемная сила: special properties	269
19.0.3 Волны на свободной поверхности, пузыри, капли	269
19.1 Some non-stationary effects	270
19.1.1 Диффузия	270
19.2 Fluid with viscosity: other properties	270
19.2.1 Точные решения для вязкой жидкости	270
19.2.2 Нелинейное резонансное взаимодействие волн.	270
19.2.3 Гидродинамика в конденсированных средах	271
19.3 Hydrodynamics of non-typical media	271
19.3.1 Реакционно-диффузионная модель, ZFK, KPP–Fisher equations	271
19.3.2 Особа аэродинамика: эфф. Магнуса, бумеранг	273
19.3.3 Особенности струй жидкостей	274
19.3.4 Суспензии, колебания в жидкости	274
19.3.5 Сверхтекучая гидродинамика, возбуждения, конденсаты,	274
19.4 Sound and acoustics: Other Properties	275
 20 Special Applications	276
20.1 Very special applications in physics	276
20.1.1 Горение	276
20.1.2 Ударные волны: other models	276
20.1.3 Cosmological applications	276
20.1.4 гравитационных волнах в средах	277
20.1.5 Об атмосфере Земли и погоде	277
20.1.6 выработке энергии из аэро- и гидродинамики	277
 VI Другие темы	278
21 Другие известные модели	278
21.1 Распространение и устойчивость УРД по Пухову	278
21.1.1 Одномерные автомодельные решения УРД	278
21.1.2 4УРД для 2D- и 3D-бистабильных сред	282
21.1.3 Устойчивость одномерных автомодельных решений УРД	283
21.1.4 Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. Фазовые волны	286
21.2 Зарождение и эволюция УРД по Пухову	288
21.2.1 Вариационный принцип. Градиентная форма УРД. Функционал Ляпунова	288
21.2.2 Протяженные возмущения	291
21.2.3 УРД для моностабильной среды. Критические возмущения и нелинейная стадия развития неустойчивости в моностабильной среде	293
21.2.4 Локализация и структуры	304

21.3	Диффузия	306
21.3.1	Уравнения гидродинамики для жидкой смеси	306
21.3.2	Коэффициенты диффузии и термодиффузии	306
21.3.3	Диффузия взвешенных в жидкости частиц	306
21.4	Поверхностные явления (???)	306
21.4.1	Формула Лапласа	306
21.4.2	Капиллярные волны	306
21.4.3	Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости	306
22	Звук	306
22.0.1	Звуковые волны	306
22.0.2	Энергия и импульс звуковых волн	310
22.0.3	Отражение и преломление звуковых волн	310
22.0.4	Геометрическая акустика	310
22.0.5	Распространение звука в движущейся среде	310
22.0.6	Собственные колебания	310
22.0.7	Сферические волны	310
22.0.8	Цилиндрические волны	310
22.0.9	Другое о звуке (???)	310
23	Ударные волны	311
23.0.1	Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа	311
23.0.2	Стационарный поток сжимаемого газа	311
23.0.3	Поверхности разрыва	311
23.0.4	Ударная адиабата	311
23.0.5	Ударные волны слабой интенсивности	311
23.0.6	Направление изменения величин в ударной волне	311
23.0.7	Эволюционность ударных волн	311
23.0.8	Ударные волны в политропном газе	312
23.0.9	Гофрировочная неустойчивость ударных волн	312
23.0.10	Распространение ударной волны по трубе	313
23.0.11	Косая ударная волна	313
23.0.12	Ширина ударных волн	313
23.0.13	Ударные волны в релаксирующей среде	314
23.0.14	Изотермический скачок	314
23.0.15	Слабые разрывы	314
24	Пересечение поверхностей разрыва	314
24.0.1	Волна разрежения	314
24.0.2	Типы пересечений поверхностей разрыва	314
24.0.3	Пересечение ударных волн с твердой поверхностью	314
24.0.4	Сверхзвуковое обтекание угла	314
24.0.5	Обтекание конического острия	314
25	Другие темы	314
25.1	Модели аэродинамики для приложений	314
25.1.1	Бумеранг	314
25.2	Плоское течение сжимаемого газа	314
25.3	Обтекание конечных тел	314
25.4	Гидродинамика горения	317
25.5	Релятивистская гидродинамика	320
25.6	Гидродинамика сверхтекучей жидкости	320
25.7	О теории упругости	320
25.8	Магнитная гидродинамика	321

25.9 гидродинамика плазмы	321
25.10 неньютоновская жидкость	321
25.11 Ударные волны	321
25.11.1 Основное по Ландау	321
25.11.2 Другое по Ландау	321

VII Appendix 322

A Введение в механику сплошных сред 322

A.1 Еще мотивация	322
A.2 Мышление профессионала механики сплошных сред	322
A.2.1 Способы догадаться до всех главных идей	322
A.2.2 Необходимые и дополнительные темы для МСС	322
A.2.3 Способы изучения предмета	322
A.3 Acknowledgements	322
A.4 Literature	322
A.4.1 Основная	322
A.4.2 Дополнительная	323
A.5 Обзор механики сплошных сред	324
A.5.1 МСС в двух словах	324
A.5.2 наиболее прикладные темы Предмета	325
A.5.3 Итоговые формулы и закономерности	325
A.5.4 обзор теоретических подходов	325
A.5.5 Удивительные факты	326
A.5.6 Результаты Предмет	326
A.5.7 Применения Предмет в других разделах физики	326
A.5.8 Обзор дальнейших развитий Предмет	326
A.6 Описание записи	326
A.6.1 описание глав и разделов	326
A.6.2 обозначения и константы	327
A.7 Головоломки на разные случаи жизни	327
A.8 Короткий исторический обзор	327

B Математика для механики сплошных сред 327

B.0.1 О комплексном анализе	327
---------------------------------------	-----

C Bibliography 328

Preface and main motivation



Overview of the note

(write links to the table of contents)

I used the following [literature](#).

Одни из тем механики сплошных сред с очень большой вероятностью будут нужны в задачах и исследованиях

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Если какое-то явление происходит, которое сложно объяснить, то большая вероятность, что там где-то будет жидкость и без основ гидродинамики никак, поэтому и многие физики ничего не смогут решить, потому что мало кто доходит до гидродинамики.

(распишу с примерами, там в турнирах физиков это встречается, да и вообще задач много, где жидкость или деформации есть.)

Гидродинамика будет не нужна, если Вы не узкий специалист в одной области, не связанной с жидкостями. Однако таким быть все-таки часто скучно, хочется переключаться и познать вообще природу, а также даже в любой узкой области не сложно придумать задачу, где также используется гидродинамика.

В приложениях часто нужно что-то оценить или учесть, используя гидродинамику

(уже писал про это, потом напишу. тоже повод все-таки понять эти законы, очень многие реальные явления как-то связаны с деформациями и сплошными средами.)

Идейные головоломки МСС для мотивации

m-th.1. Как остановить шторм?

(сформулирую задачу)

Hint: Оказывается, это можно сделать, почему это работает - не знаю, вообще, проверить это нужно бы... См. action labs youtube.

Технические головоломки МСС для мотивации

m-te.1. Всего лишь пузырек

Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью η'), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью η

Hint: (типичные задачи - про пузыри, потому что стыдно не знать их. пока об этом всем - в каталоге)

Part I

Typical Continuum Mechanics in a Nutshell

1 Гидродинамика в двух словах

1.1 Об основах гидродинамики

(Часть 1. по ПТФ)

1.1.1 Основные законы элементарной гидродинамики

(тут то, с чем любые задачи общезнакомы по ней решаются! пропишу потом, пока не усвоено.)

Формула Пуазейля

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

Об уравнении мелкой воды (???)

Уравнения мелкой воды выводятся из уравнений сохранения массы и импульса (уравнения Навье-Стокса), которые справедливы для общего случая, в том числе в ситуациях, когда условия мелкой воды не выполняются. Без учёта сил Кориолиса, трения и вязкости уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\eta u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta u^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\eta v)}{\partial t} + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta v^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения могут быть записаны для скоростей. Поскольку скорости не входят в фундаментальные законы сохранения, эти уравнения не описывают явления типа гидравлического удара или гидравлического прыжка.

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - bu \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - bv \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(u(H + \eta)) - \frac{\partial}{\partial y}(v(H + \eta)),\end{aligned}$$

где u - скорость вдоль оси x ; v - скорость вдоль оси y ; H - средняя высота поверхности жидкости; η - отклонение давления в горизонтальной плоскости от среднего значения; g - ускорение свободного падения; f - параметр Кориолиса, равный на Земле $2\Omega \sin \varphi$; Ω - угловая скорость вращения Земли вокруг оси ($\pi/12$ радиан/час); φ - географическая широта; b - коэффициент вязкого сопротивления.

1.1.2 Законы сохранения, потенциальные течения, идеальная жидкость

The Euler equation.

$$d\mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}$$

Continuity equation

$$d\rho Q/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$dQ = dt \frac{dQ}{dt} = \delta x \delta y \delta z dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = Q dt \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Entropy equation

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0$$

Потоки энергии и импульса, законы Бернулли.

Теорема Кельвина – новый тип закона сохранения.

Конформно инвариантные потоки.

Isentropic motion by Falkovich

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla W$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla v^2/2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla (W + v^2/2)$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

$$\frac{\partial}{\partial l} (W + v^2/2) = 0$$
$$W + v^2/2 = E + p/\rho + v^2/2$$

Incompressible fluid:

$$v = \sqrt{2p_0/\rho}$$

For water ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) at ($p_0 = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$) one gets $v = \sqrt{200} \approx 14 \text{ m/s}$.

Adiabatic gas flow. The adiabatic law, $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, gives the enthalpy as follows:

$$W = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}$$

The limiting velocity for the escape into vacuum is

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho}}$$

$(\partial P/\partial \rho)_s = \gamma P/\rho$ is the sound velocity squared, c^2 , so that $v = c\sqrt{2/(\gamma - 1)}$. For an ideal gas with n degrees of freedom, $W = E + p/\rho = nT/2m + T/m$ so that $\gamma = (2 + n)/n$. For bi-atomic gas at not very high temperature, $n = 5$.

Уравнение непрерывности

Уравнение Эйлера

Условие отсутствия конвекции

Уравнение Бернулли

Поток энергии

Поток импульса

Сохранение циркуляции скорости

Потенциальное движение

Несжимаемая жидкость

Ideal Fluid Flow

We begin with the mathematical description of fluid flow.

We describe the fluid's motion with a velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. As mentioned previously, this corresponds not to the motion of individual molecules, but to that of "material particles", i.e. it is the center of mass velocity of a small packet of fluid. The momentum of such a packet is

$$d\mathbf{P} = \rho \mathbf{v} dV.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

incompressible flow $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \mathbf{v}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{D(dV)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v})dV$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}^*$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{f}^*$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = 0.$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

The case of incompressible and inviscid/ideal/perfect flow.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

$$\nabla^2 p = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{g} - \rho_0 \nabla \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}).$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}.$$

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho_0}$$

is constant along streamlines, where Φ is the gravitational potential. To see this, note that

$$\frac{DH}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0$$

where we used the assumption of steady flow, and the Euler equation.

Vorticity of the flow.

Suppose that a steady flow originates from a asymptotically uniform flow at infinity. In this case, it is intuitive that H should be constant between all streamlines, and hence constant everywhere. However, this intuition can fail if streamlines form closed loops.

$$\partial_i H = v_j \partial_i v_j + \partial_i \left(\Phi + \frac{p}{\rho_0} \right) = v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i$$

where we used the Euler equation. Therefore, exiting index notation,

$$\nabla H = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

where ω is the vorticity field. Thus, H is constant if the vorticity vanishes.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla H$$

and taking the curl of both sides gives

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

$$\Gamma(C, t) = \oint_C \mathbf{v}(t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{v} = \nabla \Psi$$

where Ψ is called the velocity potential. Since the divergence of the velocity vanishes,

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

$$\nabla(H + \partial \Psi / \partial t) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2 \psi$$

$$\Psi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

where θ is the angle from $\hat{\mathbf{z}}$. By Bernoulli's theorem, the change in pressure is $\Delta p = \rho_0 v^2/2$, and a straightforward computation gives

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 U^2 \frac{9 \cos^2 \theta - 5}{4}$$

$$\mathbf{F} = \oint_S p d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \rho_0 \oint_S v^2 d\mathbf{S}$$

$$\int_V (\nabla T) dV = - \oint_S T d\mathbf{S}$$

where V is the volume outside of S . Switching to index notation,

$$F_i = -\frac{1}{2} \rho_0 \oint v_j v_j dS_i = \frac{1}{2} \rho_0 \int_V \partial_i (v_j v_j) dV.$$

Now we use the fact that the divergence and curl of \mathbf{v} vanish to write

$$\partial_i (v_j v_j) = 2v_j \partial_i v_j = 2v_j \partial_j v_i = 2\partial_j (v_j v_i).$$

$$F_i = \rho_0 \int_V \partial_j (v_j v_i) dV = -\rho_0 \oint_S v_j v_i dS_j = 0$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

and a scalar u that simply flows along with the velocity field has $Du/dt = 0$. Similarly, we can define a modified convective derivative for general tensors,

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

which vanishes if the tensor is Lie transported along the velocity field. For a vector field,

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{u}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

1.1.3 Одномерные среды, инварианты, опрокидывание, мелкая вода

Характеристики.

Инварианты Римана.

Метод годографа.

Опрокидывание простых волн.

Разрывы в начальных условиях.

Теория “мелкой воды”

Уравнение Бюргерса.

[3].

1.1.4 Вихревые структуры в идеальной жидкости.

см [6].

Вихревые листы, неустойчивость тангенциального разрыва.

Двумерные течения с кусочно-постоянной завихренностью.

Тонкие вихревые нити в пространстве и точечные вихри в плоскости.

Гамильтониан и динамика точечных вихрей, применение ТФКП.

Закон дисперсии для малых возмущений прямой вихревой нити.

Неустойчивость Кроу двух антипараллельных вихревых нитей.

Проблема образования конечно-временных особенностей из гладких начальных данных в решениях уравнения Эйлера.

1.1.5 Fluid Statics

In solids and dense liquids, the distances between atoms are a fraction of a nanometer, while for gases at atmospheric pressure the distance is about ten times this. In continuum mechanics, we deal with much larger distance scales, and neglect the discreteness of atoms entirely.

In this limit, the details of the atoms and their interactions determine, e.g. transport coefficients. We'll just take these quantities as given, rather than trying to calculate them.

A continuum description only works over sufficiently large distance scales. For example, if the atomic separation is ℓ and we work on distance scales of at least L , then the density fluctuations on such scales as $\Delta\rho/\rho \sim 1/\sqrt{N} \sim (L/\ell)^{3/2}$. Therefore, if we want ρ to be defined up to a fractional precision ϵ , we require $L \gtrsim \ell/\epsilon^{2/3}$.

As another example, suppose the typical molecular velocity is v_{mol} . Then the typical fluctuation in the center of mass speed of N molecules is v_{mol}/\sqrt{N} . If we are considering a bulk flow of average velocity v , and we want v to be defined up to fractional precision ϵ , then

$$L \gtrsim \ell \left(\frac{v_{\text{mol}}}{\epsilon v} \right)^{2/3}$$

which is somewhat more stringent.

Another requirement to have v be well-defined, specifically for gases, is that

$$L \gg \lambda$$

where λ is the mean free path. For air, $\lambda \lesssim 100$ nm.

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j$$

$$d\mathbf{F} = -pd\mathbf{S}.$$

$$d\mathbf{F} = -\nabla p dV$$

As an example, in hydrostatic equilibrium, $\nabla p = \rho \mathbf{g}$. Supposing that the fluid has a barotropic equation of state, meaning that $p = p(\rho)$, then we may define the pressure potential

$$w(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

in which case $\Phi^* = \Phi + w(p)$ is constant, where Φ is the gravitational potential.

For a barotropic fluid, we define the bulk modulus

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

which quantifies the incompressibility. If p also depended on temperature, we would have to use a partial derivative. The isothermal bulk modulus K_T corresponds to a derivative at constant T , and the isentropic bulk modulus is a derivative at constant S .

In hydrostatic equilibrium, $\nabla p = -\rho \nabla \Phi$, which means that gravitational equipotentials and isobars must coincide. Taking the curl of both sides yields $(\nabla \rho) \times (\nabla \Phi) = 0$, which tells us that gravitational equipotentials and constant density surfaces also coincide.

Example. The homentropic atmosphere. In the lower part of the atmosphere, called the troposphere, the air is typically well-mixed by adiabatic convection, and thus obeys the polytropic equation of state $p \propto \rho^\gamma$. The pressure potential is

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R.$$

Therefore, we have the constant

$$\Phi^* = gz + c_p T$$

which implies the temperature varies linearly with height. This is a good model for $z \lesssim 10$ km but breaks down for higher z , where we must account for additional effects such as solar heating. The "Standard Atmosphere" model takes $T(z)$ to be piecewise linear, with different gradients in the mesosphere, stratosphere, and troposphere. The model then infers $p(z)$ from hydrostatic equilibrium and the ideal gas law,

$$p(z) = p_0 \exp \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right).$$

Example. Buoyant stability. Consider an object with density ρ_b in a uniform gravitational field \mathbf{g} and fluid of density ρ_f . The moments of gravity and buoyancy are

$$\mathbf{M}_G = \int_V \mathbf{x} \times \rho_b \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{M}_B = \oint_S \mathbf{x} \times (-p d\mathbf{S}).$$

If the body were replaced by fluid, the fluid would be in equilibrium. This implies that \mathbf{M}_B is the opposite of what \mathbf{M}_G would be if there were fluid,

$$\mathbf{M}_B = - \int_V \mathbf{x} \times \rho_f \mathbf{g} dV.$$

We will assume that the body is always in buoyant equilibrium, meaning that the body displaces its own weight in fluid, and thus the buoyant and gravitational forces cancel. Now, for the purposes of torque balance, the gravitational and buoyant forces can be taken as acting at the center of mass (CM) and center of buoyancy (CB) respectively,

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_b dV, \quad \mathbf{x}_B = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_f dV.$$

The torques can only balance if the CM and CB lie on a vertical line. For a fully submerged object, the stable equilibrium is when the CM is below the CB. For objects partially submerged in water, such as sailboats or ducks, it is clear that the CM is usually above the CB, which is the centroid of the part of the object below the waterline. Despite this, the equilibrium remains stable.

To understand why, we consider a longitudinally symmetric ship for simplicity, and consider an infinitesimal rotation $d\theta$ about the x -axis. Let A be the waterline area, i.e. the intersection of the ship with the waterline, at $z = 0$. In order to maintain buoyant equilibrium, the rotation axis must pass through the centroid of A , as this keeps the submerged volume of the ship the same to first order in $d\theta$. This point is called the center of roll, and we take it as the origin. Upon this rotation, the center of gravity shifts horizontally by

$$dy_G = -z_G d\theta.$$

However, the horizontal motion of the center of buoyancy has two components,

$$dy_B = -\left(z_B + \frac{I}{V}\right) d\theta, \quad I = \int_A y^2 dA$$

The first term results from directly rotating the initially submerged part of the ship; the second arises because the shape of the submerged part of the ship changes upon rotation. Therefore, the horizontal motion of the center of buoyancy is the same as if it were actually situated at an imaginary, higher point called the metacenter, with

$$z_M = z_B + \frac{I}{V}.$$

In order for buoyancy to give a restoring torque, we need $|dy_B| > |dy_G|$, which means the ship is stable if the CM is below the metacenter. (The metacenter's height depends on the axis of rotation. Since we want stability against rotations about any axis, the metacenter is defined using the axis for which I is the smallest. Since ships are long and narrow, this is typically the longitudinal axis.)

Note. For general angles, stability is quantified by the "righting arm", which is simply $|y_G(\theta) - y_B(\theta)|$. The above analysis applies only to small angles, where the righting arm is linear in θ . When the righting arm goes to zero, the ship becomes unstable, and flips over.

For smaller pieces of fluid, surface tension is important.

Surface tension arises from the energy cost of having an interface between two materials,

$$dU = \alpha dA.$$

If one divides a surface by a curve, then the differential force between the two parts of the surface is

$$d\mathbf{F} = \alpha d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{n}}$$

where $\hat{\mathbf{n}}$ is the normal vector to the surface.

The quantity α depends on the energy of interaction between neighboring particles in both materials with themselves, and with each other. Since the interface has microscopic thickness, its macroscopic curvature does not affect α . For simple materials, it does not depend on how much the surface has already been stretched, though soap films are a notable exception.

In general, for liquid-gas interfaces we have $\alpha > 0$, because particles in the liquid attract each other (otherwise it would not remain a liquid), but the gas is too sparse to cause much interaction. For liquid-liquid interfaces α can be positive or negative; if it is negative, the liquids rapidly mix. For liquid-solid interfaces α can again be positive or negative, and this determines the propensity of the liquid to wet the surface.

Above, we stated the force acts "between the two parts of the surface", but this is vague. For liquid-gas and liquid-solid interfaces, the force acts between the two parts of the liquid at the surface, since the gases are sparse and the solids are not free to move. (improve)

For a liquid in a gravitational field g with density ρ , surface tension dominates below the capillary length

$$L = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$$

by dimensional analysis. For room temperature water, this is a few millimeters. More generally, for an interface between two fluids, the density in the denominator should be the difference of the two densities, since that determines the changes in gravitational potential energy.

Near the origin, a general surface with $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ can be parametrized as

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 + cxy.$$

In polar coordinates, the radius of curvature in the $\hat{\phi}$ direction is

$$\frac{1}{R(\phi)} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right|_{r=0} = a \cos^2 \phi + b \sin^2 \phi + 2c \sin \phi \cos \phi = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\phi + c \sin 2\phi.$$

The minimum and maximum values of $R(\phi)$ are attained for two orthogonal $\hat{\phi}$, and are called the principal radii of curvature R_1 and R_2 . For example, for $c = 0$ they are simply a and b .

By considering force balance on a small rectangle, one can show that the pressure discontinuity across a surface is

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

The quantity in parentheses is also called twice the mean curvature.

Note. The case of a liquid in air (pure cohesion) is relatively straightforward, but things become more subtle when one has interfaces of air, liquid, and solid. Many introductory textbooks give incorrect derivations of basic results such as Jurin's law and Young's law. For an example of the subtleties swept under the rug, see the paper [Derivation of Jurin's law revisited](#).

1.1.6 Compressible Flow

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

For a small amplitude sound wave, we let $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ and $p = p_0 + \Delta p$. In this case v/c is similarly small, and we can neglect the advective term. At lowest order, we have

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p), \quad \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$$

which combine to give

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = \nabla^2(\Delta p)$$

For a fluid with a barotropic equation of state, $p = p(\rho)$, we have

$$\Delta p = K_0 \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

which yields the wave equation,

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta\rho), \quad c_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}.$$

For the special case of an isentropic ideal gas, $K_0 = \gamma p_0$ and

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}}$$

where μ is the molar mass. The isothermal sound velocity is recovered for $\gamma = 1$.

If we let the density variation be

$$\Delta\rho = \rho_1 \sin(kx - \omega t)$$

then the velocity field is

$$v_x = v_1 \sin(kx - \omega t), \quad v_1 = c_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

This confirms our earlier statement that v/c is the same order as $\Delta\rho/\rho$. Also, note that

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\partial \mathbf{v} / \partial t|} \sim \frac{kv_1^2}{\omega v_1} = \frac{v_1}{c_0}$$

so the advective term does not contribute at lowest order, justifying our neglect of it above. We have also neglected gravity, which is a good approximation when $g \ll \omega c$.

Next, we consider steady compressible flow.

In this case, the Euler equations reduce to

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

We assume a barotropic equation of state, for simplicity. The local Mach number is $M = |\mathbf{v}|/c$.

We can combine the Euler equations to get an equation solely in terms of the velocity. The continuity equation states

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho = -\frac{1}{\rho c^2}(\mathbf{v} \cdot \nabla)p$$

where we used the definition of the speed of sound. Then, using the Euler equation gives

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}}{c^2}.$$

Applying the Cauchy-Schwartz inequality to the numerator gives

$$|\nabla \cdot \mathbf{v}| \leq M^2 |\nabla \mathbf{v}|, \quad |\nabla \mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{ij} (\nabla_i v_j)^2}.$$

This demonstrates that when $M \ll 1$, the divergence $\nabla \cdot \mathbf{v}$ is small, and the flow can be treated as incompressible. In practice, this is a reasonable assumption for $M \lesssim 0.3$.

By an analogous derivation to the incompressible case, the Bernoulli field is

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + w(p)$$

where we include the gravitational potential Φ for completeness, and $w(p) = \int dp/\rho(p)$ is the pressure potential. For an isentropic ideal gas,

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu}$$

where μ is the molar mass.

$$\frac{1}{2}v^2 + c_p T = c_p T_0.$$

For an isentropic ideal gas, this gives the result

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

where M is the Mach number of the flow at the initial point. Assuming the flow is isentropic, $p \propto \rho^\gamma$, which implies

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

For high speeds, the temperature rise is substantial. In practice, it can cause the gas to dissociate into a plasma, changing the molar mass μ and hence the result.

A sonic point is a point where $M = 1$. Applying Bernoulli's theorem between a sonic point and a stagnation point gives

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{\gamma - 1}$$

which can be combined with our previous result to yield the local temperature in terms of the sonic point temperature,

$$\frac{T}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right)^{-1}.$$

Example. Flow through a duct with a slowly varying cross-section $A(x)$. We approximate all properties of the flow to depend only on x , and treat the velocity as entirely along $\hat{\mathbf{x}}$. It is useful to relate quantities to those at a (possibly hypothetical) sonic point. Continuity of the mass flow gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v} = \frac{1}{M} \frac{c_1}{c} \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{M} \left(\frac{T_1}{T} \right)^{1/2 + 1/(\gamma - 1)}.$$

Inserting our previous expression gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right)^{1/2 + 1/(\gamma - 1)}.$$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad \rho_1 v_1^2 + p_1 + \rho_2 v_2^2 + p_2, \quad \frac{1}{2} v_1^2 + c_p T_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + c_p T_2.$$

Using the ideal gas law, the energy conservation condition can be rewritten as

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

These equations are called the Rankine-Hugoniot conditions. It is convenient to write their solutions in terms of the Mach number before the shock, $M = v_1/c_1$ where $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$. Then

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}.$$

The ratio of temperatures is given by the ideal gas law,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

In the limit $M \rightarrow \infty$, these results simplify to

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M^2.$$

These results can also be applied to shock waves in a Laval nozzle. For an oblique shock, as occur elsewhere on the bow shock shown, the results are identical except that the v_i should be interpreted as the component of the velocity normal to the shock; the tangential velocity is unchanged.

Note. The Rankine-Hugoniot conditions treat both sides of the shock symmetrically, but in reality we must have $T_2 > T_1$ by the second law of thermodynamics, as kinetic energy is converted to thermal energy. Note that our previous result for the stagnation point temperature is perfectly correct whether or not a shock wave exists, since it just used Bernoulli's theorem, which is one of the Rankine-Hugoniot conditions. It's only the isentropic assumption $p \propto \rho^\gamma$ that breaks down.

1.1.7 Гидростатика, упрощенная (!!?)

(тут много крутых методов мб укажу потом.)

Hydrostatics by Falkovich

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \rho \times \nabla \phi = 0$$

$$p(z) = p(0) - \rho g z$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p g m}{T} \Rightarrow p(z) = p(0) \exp(-m g z / T)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho g = -\frac{p m g}{T_0 - \alpha z} \\ p(z) &= p(0) (1 - \alpha z / T_0)^{m g / \alpha} \end{aligned}$$

1.2 Fluid with viscosity: basics

1.2.1 Вязкость

Viscosity by Zhou

Finally, we arrive at the full Navier-Stokes equations by including viscosity. We begin with some examples for intuition, always assuming incompressible flow.

Viscosity is a shear stress opposing a velocity gradient. In a Newtonian fluid we assume the two are proportional, so that for a flow $v_x(y)$,

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

where η is called the (dynamic) viscosity. The units of viscosity have various names, $1 \text{ Pas} = 1 \text{ Poiseuille} = 0.1 \text{ poise}$

For example, for an ideal gas we can show by kinetic theory that

$$\eta \sim \frac{\sqrt{k_B T m}}{\sigma} \sim \rho \lambda v$$

where σ is the collision cross section, m is the mass per molecule, and λ is the mean free path. Possibly surprisingly, the viscosity scales as \sqrt{T} , and at constant temperature is independent of the density. In liquids, the viscosity usually falls with temperature.

Often, it is useful to work in terms of the kinematic viscosity

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

since this directly determines the acceleration of the fluid. In an ideal gas, $\nu \propto T^{3/2}/p$.

As a first example, consider a planar incompressible flow, where the velocity is $v_x(y, t)$. In this case there is no advective acceleration, so in the absence of body forces,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

which has the form of a diffusion equation with diffusion constant ν .

As an example, suppose we drive a plate transversely, imposing the boundary condition

$$v_x(0, t) = u_0 \cos(\omega t).$$

Then the steady state solution is

$$v_x(y, t) = u_0 e^{-ky} \cos(ky - \omega t), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

so a shear wave propagates a distance $1/k$ into the fluid.

As another example, suppose we start with a "Gaussian river" of

$$v_x(y, 0) = u_0 e^{-y^2/a^2}.$$

Then the solution at later times is

$$v_x(y, t) = \frac{u_0 a}{\sqrt{a^2 + 4\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{a^2 + 4\nu t}\right)$$

causing the river to spread out over time. Assuming the initial width is small, the momentum diffuses over time over the width $\delta \sim 2\sqrt{\nu t}$. When viscosity is weak, this is the typical width of the boundary layers that form.

As a final example, suppose a plate is instantaneously kicked.

$$v_x(0, t) = u_0 \theta(t).$$

This is known as Stokes' first problem. Since there are no length scales in the problem besides δ , the solution must depend on it alone,

$$v_x(y, t) = u_0 f(y/\sqrt{\nu t}).$$

Plugging in this ansatz gives

$$f''(s) + \frac{1}{2}s f'(s) = 0, \quad f(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty e^{-u^2/4} du.$$

Sometimes, one defines the boundary layer thickness to be the distance where the velocity drops to $u_0/100$, which in this case is $\delta_{99} = 3.64\sqrt{\nu t}$.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Assuming the fluid is homogeneous, so that η is uniform, the resulting force density is

$$\sum_j \nabla_j \sigma_{ij} = -\nabla_i p + \eta \nabla^2 v_i.$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nu \nabla^2 \omega$$

$$\text{Re} \sim \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{u^2/L}{\nu u/L^2} \sim \frac{uL}{\nu}.$$

For $\text{Re} \ll 1$, the flow is "creeping", and dominated by viscosity. Microorganisms live in this world. For an interesting description of it, see Life at Low Reynolds Number.

For $\text{Re} \sim 1$, viscosity is still highly important; flies live in this world. In this regime, the fluid flow is still orderly and layered, which we call laminar.

For $\text{Re} \gg 1$, turbulence sets in, with its accompanying erratic behavior. This regime is relevant for vehicles and human-sized objects in everyday life.

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}$$

where we used the scales ρ_0 , u , and L to define the dimensionless variables by

$$\mathbf{v} = U \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{x} = L \tilde{\mathbf{x}}, \quad p = \rho_0 U^2 \tilde{p}, \quad \nabla = \frac{1}{L} \tilde{\nabla}.$$

In this case, the stress can also depend on $\nabla \cdot \mathbf{v}$, and it is conventional to define

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\dot{W} = \int_V \sum_{ij} \sigma_{ij} \nabla_j v_i dV = \int_V \left(-p \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \sum_{ij} v_{ij}^2 + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right) dV$$

Example:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla (\Delta p) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial (\Delta \rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta\rho) + \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} \nabla^2 \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t}.$$

For a sinusoidal wave $\Delta\rho = \rho_1 e^{-\kappa x} \cos(kx - \omega t)$, we thus have

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2\omega_0 c_0}, \quad \omega_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\zeta + \frac{4}{3}\eta}.$$

Example. Flow past a sphere, as a function of Re , shows many qualitatively different behaviors. For $Re \lesssim 1$, we have a "creeping" flow that is superficially similar to potential flow; like potential flow, it can be solved for analytically. At $Re \sim 10$, a steady circulation forms behind the sphere. At $Re \sim 100$, this circulation periodically detaches from the sphere, forming a "Karman vortex street". (Physically, we can think of Re as describing the rate at which vorticity is created at the surface of the sphere. The vortices separate when this production is too fast to be simply diffused away.) At $Re \sim 10^4$, the flow becomes chaotic, with a turbulent wake formed behind the sphere. At $Re \sim 10^5$, a "drag crisis" occurs where the coefficient of drag suddenly drops and the turbulent flow reattaches to the sphere.

Вязкий тензор напряжений.

Уравнение Навье-Стокса.

Законы подобия, число Рейнольдса и проектирование промышленных установок.

ЛЛ5-20. Течение при малых числах Рейнольдса

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины u^2/l , где u и l имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же $(\eta/\rho)\Delta \mathbf{v} \approx \eta u / (\rho l^2)$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при $R \ll 1$ членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p = 0.$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0$$

Пограничный слой и отрывные течения.

Сопротивление и подъемная сила.

Как кумулятивный снаряд пробивает броню танка.

Метаморфозы течений с ростом числа Рейнольдса.

Движение вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами.

Закон подобия.

Течения при малых числах Рейнольдса.

1.2.2 Уравнения вязкой жидкости, диссипация энергии, подобие

Уравнения движения вязкой жидкости

Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Течение по трубе

Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

Закон подобия

Течение при малых числах Рейнольдса

1.2.3 Обтекания шаров, цилиндров, boundary layers, Prandtl equation

Обтекание шара, формула Стокса.

(пока ЛЛ5 пар 20, потом подумаю, в 3 раза компактнее напишу!)

(тут абзац про основную вообще идею решения задачи!!!)

(мб тут основные итоговые формулы)

представлено в виде ротора некоторого вектора \mathbf{A} :

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \mathbf{A},$$

причем $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ обращается на бесконечности в нуль.

Будем искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot}[\nabla f \cdot \mathbf{u}] = \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \mathbf{u}$$

(в последнем равенстве учтено, что $\mathbf{u} = \text{const}$). Для определения функции f воспользуемся уравнением (20.3). Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \mathbf{u} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \operatorname{rot} f \mathbf{u} = -\Delta \operatorname{rot} f \mathbf{u}.$$

Поэтому (20.3) принимает вид

$$\Delta^2 \operatorname{rot} f \mathbf{u} = \Delta^2 [\nabla f \cdot \mathbf{u}] = [\Delta^2 \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{u}] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2 \operatorname{grad} f = 0.$$

Первое интегрирование дает $\Delta^2 f = \text{const}$.

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c.$$

Постоянная c должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ исчезала на бесконечности. Интегрируя остающееся уравнение, находим

$$f = ar + \frac{b}{r}$$

(аддитивная постоянная в f опущена как несущественная - скорость определяется производными от f). Подстановка в (20.4) дает после простого вычисления

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3}.$$

Постоянные a и b должны быть определены из граничного условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$ (на поверхности шара):

$$\mathbf{u} \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \mathbf{n}(\mathbf{un}) \left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном \mathbf{n} , то коэффициенты при \mathbf{u} и при $\mathbf{n}(\mathbf{un})$ должны обращаться в нуль каждый в отдельности. Отсюда находим $a = 3R/4, b = R^3/4$ и окончательно:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4} \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u}.$$

Компоненты скорости в сферических координатах (с полярной осью в направлении \mathbf{u}):

$$v_r = u \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right],$$

$$v_\theta = -u \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right].$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара.

Давление: (?? тут слова важные)

$$p = \eta \mathbf{u} \operatorname{grad} \Delta f + p_0$$

(p_0 - давление жидкости на бесконечности). Подстановка f приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{un}}{r^2} R.$$

$$F = \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара. Подставив выражения (20.10) в формулы

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

(см. (15.20)), найдем, что на поверхности шара

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R}u \sin \theta,$$

а давление (20.12)

$$p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R} \cos \theta.$$

Поэтому интеграл получаем формулу Стокса:

$$F = \frac{3\eta u}{2R} \int df$$

Обтекание цилиндра, уравнение Осеена.

Ламинарный след (boundary layer)

Описание ламинарного следа

Обозначим через \mathbf{U} постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление \mathbf{U} выберем в качестве оси x с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U} + \mathbf{v}$; на бесконечности \mathbf{v} обращается в нуль.

На больших расстояниях позади тела скорость \mathbf{v} заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x - т.н. в ламинарном следе. В него попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе существенно завихрено. Дело в том, что источником завихренности при обтекании твердого тела вязкой жидкостью является именно его поверхность.

Движение внутри следа.

В уравнении Навье-Стокса стационарного движения

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}$$

вдали от тела используем приближение Осеена - заменяем член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ на $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v}$ (ср. (20.17)). Кроме того, в области внутри следа можно пренебречь в $\Delta\mathbf{v}$ производной по продольной координате x по сравнению с поперечными производными. Таким образом, исходим из уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right).$$

Ищем его решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где \mathbf{v}_1 -решение уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right).$$

Движение вне следа.

вне следа течение жидкости можно считать потенциальным. Интересуясь лишь наименее быстро убывающими на больших расстояниях членами в потенциале Φ , ищем решение уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде суммы двух членов:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos \varphi}{r} f(\theta).$$

Первый член здесь сферически симметричен и связан с силой F_x , а второй - симметричен относительно плоскости xy и связан с силой F_y . Для функции $f(\theta)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{df}{d\theta} \right) - \frac{f}{\sin \theta} = 0.$$

Решение этого уравнения, конечное при $\theta \rightarrow \pi$, есть

$$f = b \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Ламинарный пограничный слой, уравнения Прандтля.

The Prandtl number (Pr) or Prandtl group is a dimensionless number, named after the German physicist Ludwig Prandtl, defined as the ratio of momentum diffusivity to thermal diffusivity. ^[1] The Prandtl number is given as:

$$\operatorname{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{momentum diffusivity}}{\text{thermal diffusivity}} = \frac{\mu/\rho}{k/(c_p\rho)} = \frac{c_p\mu}{k}$$

where: - ν : momentum diffusivity (kinematic viscosity), $\nu = \mu/\rho$, (SI units: m^2/s) - α : thermal diffusivity, $\alpha = k/(\rho c_p)$, (SI units: m^2/s) - μ : dynamic viscosity, (SI units: $\text{Pas} = \text{Ns}/\text{m}^2$) - k : thermal conductivity, (SI units: $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$) - c_p : specific heat, (SI units: $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$) - ρ : density, (SI units: kg/m^3).

Теплопроводность в жидкости.

Свободная конвекция.

Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости.
[3].

1.3 Турбулентность в двух словах

1.3.1 Возбуждение турбулентности в неустойчивой и устойчивой системах.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца.

Энергетический критерий.

Закон Ландау.

(см птф)

Турбулентный каскад.

Турбулентные течения в трубах и реках.

1.3.2 Перемешивание ламинарное и перемешивание турбулентное.

Как быстро инъекция распространяется по организму потоком крови?

1.3.3 Устойчивости движений, разрывы

Устойчивость стационарного движения жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1,$$

где \mathbf{v}_0 и p_0 удовлетворяют

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$$

При больших числах Рейнольдса у этой частоты $\gamma_1 > 0$, причем для R , близких к критическому, $\gamma_1 \ll \omega_1^1$). Функция \mathbf{v}_1 , соответствующая этой частоте, имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = A(t) \mathbf{f}(x, y, z)$$

где \mathbf{f} - некоторая комплексная функция координат, а комплексная амплитуда ²⁾

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega t}.$$

Среди членов же четвертого порядка есть член, пропорциональный $A^2 A^{*2} = |A|^4$, при усреднении не выпадающий. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4,$$

где α - положительная или отрицательная постоянная (постоянная Ландау).

Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный примененному в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (Rayleigh, 1916).

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0.$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

(!?!?!?) Вычисляя μ как $mr^2 \dot{\varphi}$ и опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (27.1) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \dot{\varphi} > 0.$$

Устойчивость движения по трубе

(нужно читать и думать, ЛЛ6.28)

Неустойчивость тангенциальных разрывов

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Поскольку \mathbf{v} направлено по оси x , то второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Если применить к обеим его частям операцию div , то в силу первого уравнения мы получим слева нуль, так что p' должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0.$$

$$p'_1 = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz}.$$

Подставляя это выражение в z -компоненту уравнения (29.1), найдем

$$v'_z = \frac{kp'_1}{i\rho_1(kv - \omega)}.$$

Смещение ζ тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю $e^{i(kx - \omega t)}$, и получаем из (29.3)

$$v'_z = i\zeta(kv - \omega).$$

Вместе с (29.5) это дает

$$p'_1 = -\zeta \frac{\rho_1(kv - \omega)^2}{k}.$$

1.3.4 Квазипериодичность, аттракторы, удвоение периодов**Квазипериодическое движение и синхронизация частот**

$$\frac{1}{m_1} \frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = \Delta + \operatorname{Im} \beta_2 \cdot \left| a_2^{(0)} \right|^2 + \Phi(\varphi_2)$$

(на одном шаге изменения дискретной переменной $\bar{\tau}$ функция φ_2/m_1 меняется незначительно).

В общем случае уравнение (30.8) имеет стационарные решения $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$, определяющиеся обращением в нуль правой части уравнения. Но неизменность фазы φ_2 в моменты времени, кратные $m_1 T_1$, означает, что на торе существует предельный цикл траектория через m_1 оборотов замыкается. Ввиду периодичности функции $\Phi(\varphi_2)$ такие решения появляются парами (в простейшем случае - одна пара): одно решение на возрастающем, а другое - на убывающем участках функции $\Phi(\varphi_2)$. Из этих двух решений устойчиво только последнее, для которого вблизи точки $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ уравнение (30.8) имеет вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = -\text{const} \cdot (\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})$$

Странный аттрактор

(см. механику про это, потом напишу)

Переход к турбулентности путем удвоения периодов

(см. механику про это, потом напишу)

(у Ландау прямо много про это написано)

Переход к турбулентности через перемежаемость

Рассмотрим, наконец, разрушение периодического движения при прохождении мультипликатора через значение $\mu = +1$.

Этот тип бифуркации описывается (в рамках одномерного отображения Пуанкаре) функцией $x_{j+1} = f(x_j; R)$, которая при определенном значении параметра (числа Рейнольдса), $R = R_{кр}$, касается прямой $x_{j+1} = x_j$. Выбрав точку касания в качестве $x_j = 0$, напомним вблизи нее разложение функции отображения в виде ¹⁾

$$x_{j+1} = (R - R_{кр}) + x_j + x_j^2.$$

При $R < R_{кр}$ (рис. 23) существуют две неподвижные точки

$$x_*^{(1),(2)} = \mp (R - R_{кр})^{1/2},$$

из которых одна $(x_*^{(1)})$ отвечает устойчивому, а другая $(x_*^{(2)})$ неустойчивому периодическому движению. При $R = R_{кр}$ муль-

$$dx/dt = (R - R_{кр}) + x^2.$$

Найдем время τ , необходимое для прохождения отрезка между точками x_1 и x_2 , лежащими по обе стороны точки $x = 0$ на расстояниях, больших по сравнению с $(R - R_{кр})^{1/2}$, но еще в области применимости разложения (32.22). Имеем

$$\tau = (R - R_{кр})^{-1/2} \operatorname{arctg} \left[x (R - R_{кр})^{-1/2} \right] \Big|_{x_1}^{x_2},$$

откуда

$$\tau \sim (R - R_{кр})^{-1/2},$$

1.3.5 Турбулентная область, корреляции скоростей, струи, теорема Жуковского

Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерно чрезвычайно нерегулярным, беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока (развитая турбулентность)]

В число Рейнольдса R , определяющее свойства течения жидкости в целом, в качестве характеристических размеров входит длина l . Наряду с таким числом, можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса турбулентных пульсаций различных масштабов. Если λ -масштаб пульсаций, а v_λ - порядок величины их скорости, то $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda / \nu$. Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

Оказывается возможным получить ряд существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений подобия (А.Н. Колмогоров, 1941; А.М. Обухов, 1941).

Определим порядок величины v_λ изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка λ . Оно должно определяться только величиной ε и, разумеется, самим расстоянием ¹⁾ λ . Из этих двух величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости: $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$. Поэтому можно утверждать, что должно быть

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$$

Таким образом, изменение скорости на протяжении малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния (закон Колмогорова-Обухова). Величину v_λ можно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба λ : изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях, и им можно пренебречь.

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости. Эти расстояния λ_0 определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке (величину λ_0 называют внутренним масштабом турбулентности в противоположность внешнему масштабу l). Для этого составляем «локальное число Рейнольдса»:

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}} \sim R \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{4/3},$$

где $R \sim \Delta u \cdot l / \nu$ - число Рейнольдса движения в целом. Порядок величины λ_0 определяется тем, что должно быть $R_{\lambda_0} \sim 1$. Отсюда находим

$$\lambda_0 \sim l / R^{3/4}.$$

К этому же выражению можно прийти, составляя комбинацию размерности длины из величин ε и ν :

$$\lambda_0 \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}.$$

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности быстро падает при увеличении числа Рейнольдса. Для соответствующей скорости имеем

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u / R^{1/4}.$$

Она тоже падает с увеличением R .

(тут еще пара умных соображений)

Корреляционные функции скоростей

(это очень большой параграф 24 в ЛЛ-6)

Основные концепции

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle$$

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k,$$

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{tr} = 0.$$

Выражение (34.2) можно теперь представить в виде

$$B_{ik} = B_{tt}(r) (\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r) n_i n_k.$$

Раскрыв скобки в определении (34.1), имеем

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle.$$

Ввиду однородности, средние значения произведения $v_i v_k$ в точках 1 и 2 одинаковы, а ввиду изотропии среднее значение $\langle v_{1i} v_{2k} \rangle$ не меняется при перестановке точек 1 и 2 (т. е. при изменении знака разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$); таким образом,

$$\langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik}, \quad \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = \langle v_{2i} v_{1k} \rangle$$

Поэтому

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2b_{ik}, \quad b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle.$$

$$b_{ik} = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - ar^2 \delta_{ik} + \frac{a}{2} x_i x_k.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 15a, \quad \left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}} \right\rangle = 0.$$

Поскольку эти равенства справедливы при сколь угодно малых r , можно положить в них $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, после чего они дают

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle = 15a, \quad \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right\rangle = 0.$$

С другой стороны, согласно (16.3) имеем для средней диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \nu \left\{ \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle \right\} = 15a\nu$$

$$B_{tt} = \frac{2\varepsilon}{15\nu} r^2, \quad B_{rr} = \frac{\varepsilon}{15\nu} r^2$$

(А.Н. Колмогоров, 1941). Далее, введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikl} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \rangle,$$

и вспомогательный тензор

$$b_{ik,l} = \langle (v_{1i} v_{1k} v_{2l}) \rangle = - \langle (v_{2i} v_{2k} v_{1l}) \rangle,$$

(далее очень много формул умных, потом подумаю про них)

Интеграл Лойцянского.

(см Ландау, тут много умного)

Спектральное представление корреляционных функций.

(тут очень много тоже формул)

Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение завихренности вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших R) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой завихренность отсутствует, и движение потенциально. Завихренность оказывается, таким образом, распределенной не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

Турбулентная струя

(задача, про которую нужно пару часов подумать)

Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют турбулентным следом. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нем (L. Prandtl, 1926).

Теорема Жуковского

$$\int \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y dy + u_x dx),$$

взятого по контуру, выходящему из точки y_1 , огибающему тело и приходящему в точку y_2 , проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от y_1 до y_2 , превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая буквой Γ циркуляцию скорости по замкнутому контуру C , охватывающему тело (рис. 26):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

получаем для подъемной силы формулу

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz.$$

1.4 Special well-known and important phenomena

1.4.1 Теплопроводность в жидкости

Общее уравнение переноса тепла

Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Теплопроводность в неограниченной среде

Теплопроводность в ограниченной среде

Закон подобия для теплопередачи.

Теплопередача в пограничном слое

Нагревание тела в движущейся жидкости

Свободная конвекция

Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости

1.4.2 Поверхностные явления

Формула Лапласа

Капиллярные волны

Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

1.4.3 Движение сквозь жидкость, плавание

Присоединенная масса – первая перенормировка в физике.

Квазиимпульс и импульс.

Лучший способ плыть.

Парадокс обратимости.

1.4.4 Ударные волны: basics

(?? see Landau)

Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

строеной из конца вектора \mathbf{v} , как из центра, сферы. Для угла раствора 2α этого конуса имеем, как видно из чертежа:

$$\sin \alpha = c/v.$$

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение c/v . На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке O не отразится вовсе.

Определяемый равенством (82.1) угол называют углом Маха. Отношение же v/c , весьма часто встречающееся в газодинамике, называют числом Маха:

$$M = v/c$$

Стационарный поток сжимаемого газа

Поверхности разрыва

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва мы будем ниже обозначать с помощью квадратных скобок; так,

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

и полученное условие напишется в виде

$$[\rho v_x] = 0.$$

Далее, должен быть непрерывным поток энергии. Поток энергии определяется выражением (6.3). Поэтому мы получаем условие

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] = 0.$$

Наконец, должен быть непрерывен поток импульса, т. е. должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по обеим сторонам поверхности разрыва. Поток импульса через единицу площади равен (см. § 7)

$$pn_i + \rho v_i v_k n_k.$$

Вектор нормали \mathbf{n} направлен по оси x . Поэтому непрерывность x -компоненты потока импульса приводит к условию

$$[p + \rho v_x^2] = 0$$

а непрерывность y - и z -компонент дает

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0$$

Ударная адиабата.

Ударные волны слабой интенсивности

Направление изменения величин в ударной волне

Эволюционность ударных волн

1.4.5 Одномерное движение сжимаемого газа

Истечение газа через сопло

Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Одномерное автомодельное движение

Разрывы в начальных условиях

Одномерные бегущие волны

Образование разрывов в звуковой волне

Характеристики

Инварианты Римана

Произвольное одномерное движение сжимаемого газа

Задача о сильном взрыве.

Сходящаяся сферическая ударная волна

Теория «мелкой воды»

1.4.6 Пересечение поверхностей разрыва

Волна разрежения

Типы пересечений поверхностей разрыва

Пересечение ударных волн с твердой поверхностью

Сверхзвуковое обтекание угла

Обтекание конического острия

1.5 Dispersive Waves

(read Falkovich)

3.1

1.5.1 Linear waves

3.1.1 Surface gravity waves

3.1.2 Viscous dissipation

3.1.3 Capillary waves

3.1.4 Phase and group velocity

3.2

1.5.2 Weakly nonlinear waves

3.2.1 Hamiltonian description

3.2.2 Hamiltonian normal forms

3.2.3 Wave instabilities.

3.3

1.5.3 Nonlinear Schrödinger Equation (NSE)

3.3.1 Derivation of NSE

3.3.2 Modulational instability

3.3.3 Soliton, collapse and turbulence

3.4

1.5.4 Korteweg - de Vries Equation (KdV)

3.4.1 Weakly nonlinear waves in shallow water

3.4.2 KdV equation and soliton

3.4.3 Inverse scattering transform

2 Sound and acoustics: Main properties

Формализм описания звука**Гамильтониан звуковых волн.**

(??? is it important???)

Квадратичное приближение и нормальные переменные.**Нелинейные эффекты, вычисление матричных элементов нелинейного взаимодействия волн.****64. Звуковые волны****65. Энергия и импульс звуковых волн**

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\rho'v^2/2$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho' \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

$$d\varepsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

имеем

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w$$

вторая производная:

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho} \right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho_0 \varepsilon_0 + w \rho' + \frac{c^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2}.$$

66. Отражение и преломление звуковых волн

67. Геометрическая акустика

Сферические, цилиндрические, боковые звуковые волны

68. Распространение звука в движущейся среде

69. Собственные колебания

70. Сферические волны

71. Цилиндрические волны

72. Общее решение волнового уравнения

73. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения боковой волны.

(картинки добавлю, пока ЛЛ6 читать нужно!)

(!!! там очень подробное решение этой задачи!)

3 Elasticity: Main properties

3.0.1 Основные законы элементарной теории упругости

(тут то, с чем любые задачи общезада по ней решаются! пропишу потом, пока не усвоено.)

Основные уравнения теории упругости

Тензор деформации

Тензор напряжений

Термодинамика деформирования

Закон Гука

Однородные деформации

Деформации с изменением температуры

Уравнения равновесия изотропных тел

Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Соприкосновение твердых тел

Упругие свойства кристаллов

Типичные модели деформаций

Для параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E} (T_y + T_z) \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E} (T_z + T_x) \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E} (T_x + T_y)\end{aligned}$$

Равновесие стержней и пластинок

Энергия изогнутой пластинки

Уравнение равновесия пластинки

Продольные деформации пластинок

Сильный изгиб пластинок

Деформации оболочек

Кручение стержней

Изгиб стержней

Энергия деформированного стержня

Уравнения равновесия стержней

Слабый изгиб стержней

Устойчивость упругих систем

Упругие волны

Упругие волны в изотропной среде

Упругие волны в кристаллах

Поверхностные волны

Колебания стержней и пластинок

Ангармонические колебания

Дислокации

Упругие деформации при наличии дислокации

Действие поля напряжений на дислокацию

Непрерывное распределение дислокаций

Распределение взаимодействующих дислокаций

3.0.2 Solid Statics

Next, we consider solid statics, which is slightly more mathematically involved.

In response to shear stresses, liquids flow and solids deform, so solids can support them in static equilibrium. A familiar example of a shear stress at the boundary between two solids is static friction, though shear stresses also exist in the interiors of solids.

As a result, we have a general stress tensor, which acts on an infinitesimal surface element as

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}.$$

By considering the forces acting on a small closed volume, we find the total force is

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{f}^* dV, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$$

where \mathbf{f} is the external force density, \mathbf{f}^* is the total force density, and the final term is $\nabla_j \sigma_{ij}$.

The diagonal elements of $\boldsymbol{\sigma}$ are the negatives of the pressures in each direction, while the off-diagonal elements represent shear stresses. Therefore, in general there is no unique way to define "the" pressure, though a decent option is to use the "mechanical pressure",

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

which is a scalar that reduces to the pressure for an isotropic stress tensor. It can be interpreted as the negative of the normal component of the stress averaged over all possible surface orientations, which follows since $\langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij}/3$ for normal vectors $\hat{\mathbf{n}}$.

A solid under tension will begin to plastically deform above the yield stress, and fail entirely when the stress equals the tensile strength. For typical metals, the tensile strength is several hundred MPa, modern composite carbon fibers have tensile strengths of a few GPa, and carbon nanotubes have tensile strengths of about 50GPa.

In mechanical equilibrium, $\mathbf{f}^* = 0$, which is known as Cauchy's equilibrium equation. They are a set of coupled PDEs, which must be supplemented with constitutive relations which give the stress in terms of the other properties of the material.

The total moment acting on a body is

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV + \oint_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}^* dV - \int_V \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \sigma_{jk} dV$$

as is most conveniently shown in index notation. Since \mathbf{f}^* vanishes in equilibrium, this calculation is usually taken to show that the stress tensor is symmetric, $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$.

However, this is actually an oversimplification, because we have ignored the possibility of external moments. For example, consider an electrically polarized material. If the material is placed in a uniform electric field, there is no force density, but there is a moment density.

What happens next depends on whether the solid can support asymmetric stress. If it doesn't, we concluded that it cannot be in equilibrium until the polarization aligns with the external field; if it does, then an internal asymmetric stress appears to cancel the torque. This happens in liquid crystals, as they have long-range orientational order. However, for simplicity we'll take the stress tensor to be symmetric from this point on, as it holds for most materials.

Symmetric stress tensors can be diagonalized, i.e. for every point in a body there exists a principal basis in which the stress tensor is diagonal.

By balancing forces on a surface between two bodies, we have $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ is continuous across surfaces. For example, for a horizontal surface, σ_{xz}, σ_{yz} , and σ_{zz} must be continuous. Note that the mechanical pressure can change discontinuously; the continuity of the pressure in fluid statics (ignoring surface tension) only held because the pressure was isotropic.

Note. There's a minor subtlety involving the definition of the stress tensor. The basic definition relevant for fluid mechanics is the one above, in terms of forces acting on surface elements. However, since force is the rate of change of momentum, you can also define σ_{ij} as the rate of flow of momentum P_i across a unit j -area. For typical fluids, these definitions coincide, but they differ in general, and the latter is more fundamental.

For example, consider a gas of photons in a reflective box. Here the first definition of stress tensor becomes ambiguous: photons don't interact with each other classically, so they don't experience any force at all. We can still define a stress tensor by talking about the force that a physical small, flat object would experience if it were placed inside the photon gas, but that requires changing the setup. The definition is no longer intrinsic to the fluid itself, and worse, it depends on the kind of object placed inside, e.g. the result for a reflective element is twice that for an absorbing element. On the other hand, the second definition still works perfectly well, which is why it is almost universally used in relativistic contexts.

The choice of definition makes a difference in how one develops the theory. For example, consider the statement that the stress tensor is symmetric, for a fluid experiencing no external forces or moments. We proved this above in the case of statics, but for ordinary fluids where the stress tensor is defined the first way, there's a simple proof that holds for fluid dynamics too. The antisymmetric part of the stress tensor contributes a torque to an infinitesimal fluid element of size ΔL scaling as $(\Delta L)^3$. The moment of inertia of the element scales as $(\Delta L)^5$, which implies an unphysical infinite angular acceleration as $\Delta L \rightarrow 0$, implying that the stress tensor must be symmetric.

In the relativistic context, where we use the second definition, we can define the stress(-energy) tensor using Noether's theorem, as discussed in the notes on Quantum Field Theory. It turns out that even for an isolated system, the stress tensor can come out antisymmetric! The physical interpretation of the antisymmetric part is that it transfers orbital angular momentum to spin, which evades the above argument because the amount of spin a volume element can suppose scales as $(\Delta L)^3$. (This subtlety doesn't occur for ordinary fluids, which aren't spin polarized.) However, it's possible to redefine the stress-energy tensor to include the bound momentum carried by the spin, in which case it is symmetric again.

Next, we describe the deformations within solids in terms of strain.

The tricky thing about deformations is that they can't be inferred from the current state of the solid alone; we also need to know how it relates to the original state. We suppose a solid is deformed so that the material particle at \mathbf{X} moves to \mathbf{x} . The displacement field is

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

In the Euler representation, we think of everything as a function of \mathbf{x} , while in the Lagrange representation we think of everything as a function of \mathbf{X} . We will use the Euler representation, so all derivatives will be with respect to \mathbf{x} .

Note that there is no analogue of the active/passive transformation distinction here, because there is no natural way to view a general deformation passively.

When the displacements are large, we need the general machinery of differential geometry, so we will mostly restrict to the case of small displacements, in which case there is no fundamental difference between the Euler and Lagrange representations.

Displacements can also include rigid transformations of the solid, such as translations and rotations, which do not count as deformations. Thus, we are motivated to extract the part of \mathbf{u} that refers to deformations only.

Consider an infinitesimal "needle" that originally pointed from \mathbf{X} to $\mathbf{X} + \mathbf{a}_0$, but now points from \mathbf{x} to $\mathbf{x} + \mathbf{a}$. To compute \mathbf{a} , note that

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Therefore, expanding to first order in \mathbf{a} ,

$$\delta\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{u}).$$

The tensor $(\nabla\mathbf{u})_{ij} = \nabla_i u_j$ contains the so-called displacement gradients.

A displacement field is slowly varying when the displacement gradients are small, which means the fractional changes in lengths are small. We will work almost exclusively in this limit.

Similarly, scalar products between two needles based at the same point change,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \sum_{ij} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) a_i b_j.$$

We can write this in terms of Cauchy's (infinitesimal) strain tensor,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}, \quad u_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = \nabla_{(i} u_{j)}.$$

This can also be written in index-free notation as

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

where the bar is used to avoid notational confusion.

The antisymmetric part of $\nabla\mathbf{u}$ contains infinitesimal rotations, which don't contribute to $\bar{\mathbf{u}}$. Since $\bar{\mathbf{u}}$ is symmetric, it can be diagonalized at each point; the eigenvectors are the principal strain axes.

This result coincides with a more general result from differential geometry. We can think of \mathbf{u} as quantifying the difference of the metrics in the \mathbf{x} and \mathbf{X} coordinates, as we flow from \mathbf{X} to \mathbf{x} under the vector field \mathbf{u} . Therefore, $\bar{\mathbf{u}}$ should be the Lie derivative of the metric with respect to \mathbf{u} , which it indeed is.

The diagonal elements of u_{ij} reflect the fractional change in length along the corresponding axis, while the off-diagonal elements reflect the change in angle between the corresponding initially orthogonal coordinate axes. Specifically, if \mathbf{a} and \mathbf{b} are initially orthogonal, then

$$\delta\phi = -2u_{ab} \equiv -2\hat{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}, \quad \frac{\delta|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = u_{aa}.$$

In addition, note that

$$\delta\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{a} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a}$$

which separates the effects of infinitesimal rotations and deformations.

By straightforwardly applying derivatives, Cauchy's strain tensor satisfies

$$\nabla_i \nabla_j u_{kl} + \nabla_k \nabla_l u_{ij} = \nabla_i \nabla_l u_{kj} + \nabla_k \nabla_j u_{il}$$

Conversely, it can be shown that any symmetric tensor satisfying this is the strain tensor corresponding to some displacement field. This is a symmetric version of the Poincare lemma.

In order to do vector calculus, we need to compute the variations of infinitesimal line elements, surface elements, and volume elements. We have already treated line elements as our first example; note that in the line integral of a vector field $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, the vector field, the line element, and the endpoints all need to be transformed.

To handle volume elements, note that we can build them out of three infinitesimal vectors,

$$dV = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Expanding the infinitesimal changes out in index notation gives

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk} ((\nabla_l u_i) (a_l b_j c_k) + (\nabla_l u_j) (a_i b_l c_k) + (\nabla_l u_k) (a_i b_j a_l)).$$

On the other hand, we also have

$$(\nabla_l u_{[l}) (a_i b_j c_{k]}) = 0$$

since antisymmetrizing over four spatial indices gives zero. Since the ϵ_{ijk} already antisymmetrizes over i, j , and k , this identity relates the three terms above to a fourth, giving the result

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk} (\nabla_l u_l) (a_i b_j c_k) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV$$

which makes intuitive sense. As an application, volumes transform like

$$\delta\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

For a surface element, we note that we can write $d\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ and $dV = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}$. Then using the previous result gives

$$\mathbf{c} \cdot \delta(d\mathbf{S}) = \delta(dV) - \delta\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}) - \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

Since \mathbf{c} is arbitrary, we can conclude that

$$\delta(d\mathbf{S}) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{S} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}.$$

As an example, suppose that an external force does work on the body, causing it to slowly deform. The work done against the internal forces in the body is

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV.$$

For simplicity, we suppose the surface of the body does not move. Then

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \delta \mathbf{u}) dV$$

where we integrated by parts, and $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ji}$.

The first term represents the work done against long-range forces, e.g. it contains the change in gravitational potential energy. The second term represents the work done against internal forces by deforming the body. For a symmetric stress tensor, it can be written as

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \bar{\mathbf{u}} dV.$$

As a simple check on this result, note that for an isotropic stress tensor $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$,

$$\delta W_{\text{deform}} = - \int_V p \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) dV = - \int_V p \delta(dV)$$

as expected. Note. When the deformations are large, it's better to use ideas from differential geometry rather than vector calculus. The positions of the material particles define a coordinate system, whose metric is δ_{ij} when the material is not deformed. By viewing the map $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$ as a diffeomorphism, this metric is pushed forward to

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}.$$

The general definition of the strain tensor is in terms of the change in the metric,

$$g_{ij} = \delta_{ij} - 2u_{ij}.$$

Finally, by substituting $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$, we arrive at the so-called Euler-Almansi stress tensor,

$$u_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

which differs from our infinitesimal expression by a quadratic term. For example, for a uniform scaling $\mathbf{x} = \kappa \mathbf{X}$, we have

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (1 - \kappa^{-1/2}) \delta_{ij}$$

which makes sense for all κ , while our infinitesimal expression only made sense for $\kappa \approx 1$.

Note. The Lagrange representation. In this case, we work in terms of the variable \mathbf{X} . We define the Lagrangian displacement field to satisfy

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X})).$$

In other words, while $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ represents how much the material particle now at \mathbf{x} was displaced, $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ represents how much the material particle that was originally at \mathbf{X} was displaced. Starting with the ambient Euclidean metric, we can pull it back from \mathbf{x} to \mathbf{X} to define the metric

$$G_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

where G_{ij} is the Lagrangian deformation tensor. We define the Lagrange-Green stress tensor by

$$G_{ij} = \delta_{ij} + 2U_{ij}$$

which implies that

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right).$$

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{u_{xx}}$$

Thus, a rod of length L and cross-sectional area A has a spring constant of

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{\sigma_{xx}A}{u_{xx}L} = \frac{EA}{L}.$$

Young's modulus has dimensions of pressure, and typical values for metals are about 100GPa. Since the strain must be small, Hooke's law applies only for stresses much less than E . For instance, the yield stress is roughly a thousand times smaller. Hooke's law breaks down at the proportionality limit, which is usually well below the yield stress. Corrections to linearity are accounted for in "hyperelasticity", which is useful for describing rubber.

Normal materials will also contract in the transverse direction when they are stretched. If a force is applied along the x direction, then both u_{xx} and u_{yy} will be proportional to it, so their ratio is independent of it. We hence define Poisson's ratio as

$$\nu = -\frac{u_{yy}}{u_{xx}}$$

The most general linear relation between stress and strain is

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}u_{kl}$$

where E_{ijkl} is the elasticity tensor. For an isotropic material the most general option is

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

where λ and μ are called the elastic moduli or Lamé coefficients, and μ is called the shear modulus or modulus of rigidity. Explicitly, we have

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda\delta_{ij}u_{kk}$$

so only μ contributes to shear stresses.

These two parameters are determined by E and ν , and vice versa. Specifically, for stretching along the x direction, the only nonzero components of stress and strain are

$$\sigma_{xx} = P, \quad u_{xx} = \frac{P}{E}, \quad u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\nu P}{E}.$$

Comparing this to the definition of the elastic moduli gives the relations

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\mu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

or conversely,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

The Young's modulus and Poisson's ratio are directly measurable, so they are found in tables.

Note that the mechanical pressure is

$$\Delta p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)u_{ii}.$$

On the other hand, $u_{ii} = -\Delta\rho/\rho$, so the bulk modulus is

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Generically, K, E, λ , and μ are all of the same order of magnitude.

We can also solve for the strain in terms of the stress.

$$u_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}.$$

In general, the work needed to deform a body is

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} dV.$$

However, since $\boldsymbol{\sigma}$ depends on $\bar{\mathbf{u}}$, this integral can be path-dependent. It is path-independent if the cross derivatives are equal,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial u_{ij}}$$

which is the tensorial analogue of the condition that the curl of a vector field vanish.

Assuming the stress is linear in the strain, this implies that

$$E_{ijkl} = E_{klij}.$$

Furthermore, the elasticity tensor is symmetric in its first two and second two indices, since the stress and strain tensors are symmetric. Thus, each of these pairs of indices has 6 degrees of freedom, and symmetry under exchanging the two pairs gives a total of 21 degrees of freedom. Of these, 3 are redundant because they just describe the orientation of the material.

The number of degrees of freedom needed to describe a material depends on its degree of symmetry, with cubic crystals requiring 3, and triclinic crystals requiring all 18.

Assuming this symmetry condition is satisfied, we can imagine building up $\bar{\mathbf{u}}$ linearly, giving

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij} = \frac{1}{2}E_{ijkl}u_{ij}u_{kl}.$$

This must be positive definite for the solid to be stable, which leads to positivity conditions on the elasticity tensor. This can also be used to show that solutions to the equilibrium equation $\mathbf{f}^* = 0$ are unique.

For the special case of isotropic materials, we have

$$\varepsilon = \mu u_{ij}u_{ij} + \frac{1}{2}\lambda (u_{ii})^2.$$

It can be shown that for this to be positive definite, we require

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

These impose stability against shearing and compression, respectively. Equivalently,

$$K > 0, \quad E > 0, \quad -1 < \nu < 1/2.$$

Most materials have $\nu > 0$, but exotic "auxetic" materials can have negative ν . Example. Consider a static homogeneous cube of isotropic material of side length L , subject to a uniform shear stress P along the $\hat{\mathbf{y}}$ direction on the faces perpendicular to $\hat{\mathbf{x}}$. As a result of this external stress, force balance ensures that a uniform shear stress $\sigma_{xy} = P$ is set up throughout the entire material. However, torque balance tells us that this situation is actually impossible: the stress tensor is not symmetric, so torque balance can't be satisfied; in reality the cube will begin rotating about the $\hat{\mathbf{z}}$ axis.

One way to prevent this is to put another external uniform shear stress P along the $\hat{\mathbf{x}}$ direction on the faces perpendicular to $\hat{\mathbf{y}}$, in which case $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = P$ throughout the material, and

$$u_{xy} = \frac{P}{2\mu} = \frac{1}{2} (\nabla_x u_y + \nabla_y u_x).$$

There are multiple solutions for the displacement field \mathbf{u} , which is generally not determined uniquely. For example, the cube may shear along the $\hat{\mathbf{x}}$ direction, the $\hat{\mathbf{y}}$ direction, or some combination of both. Which one occurs in practice depends on how the external forces are applied.

3.0.3 Об упругости особых тел по Ландау

Теплопроводность и вязкость твердых тел

Уравнение теплопроводности в твердых телах

Теплопроводность кристаллов

Вязкость твердых тел

Поглощение звука в твердых телах

Очень вязкие жидкости

Механика жидких кристаллов

Статические деформации нематиков

Прямолинейные дисклинации в нематиках

Несингулярное осесимметричное решение уравнений равновесия нематиков

Топологические свойства дисклинации

Уравнения движения нематиков

Диссипативные коэффициенты нематиков

Распространение малых колебаний в нематиках

Механика холестериков

Упругие свойства смектиков

Дислокации в смектиках

Уравнения движения смектиков

Звук в смектиках

3.0.4 Основные модели теории упругости

(более-менее подробно тут их опишу)

Идеально упругие тела

Упругие напряжения

Растяжение и сжатие стержней

Прямоугольный параллелепипед и три взаимно перпендикулярные силы

Деформации прямоугольного параллелепипеда под действием трех взаимно перпендикулярных сил.

Всестороннее и одностороннее растяжение и сжатие

Сдвиг

Кручение

Изгиб

Распространение продольных возмущений в стержнях

Скорость распространения продольных упругих возмущений в стержнях

4 Mathematics for continuum mechanics: Main formulas

(I'll write soon)

Part II

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

5 Basic equations and steady flows

In this Chapter, we define the subject, derive the equations of motion and describe their fundamental symmetries. We start from hydrostatics where all forces are normal. We then try to consider flows this way as well, neglecting friction. That allows us to understand some features of inertia, most important induced mass, but the overall result is a failure to describe a fluid flow past a body. We then are forced to introduce friction and learn how it interacts with inertia producing real flows. We briefly describe an Aristotelean world where friction dominates. In an opposite limit we discover that the world with a little friction is very much different from the world with no friction at all.

5.1 1.1 Definitions and basic equations

Continuous media. Absence of oblique stresses in equilibrium. Pressure and density as thermodynamic quantities. Continuous motion. Continuity equation and Euler's equation. Boundary conditions. Entropy equation. Isentropic flows. Steady flows. Bernoulli equation. Limiting velocity for the efflux into vacuum. Vena contracta.

5.1.1 1.1.1 Definitions

We deal with continuous media where matter may be treated as homogeneous in structure down to the smallest portions. Term fluid embraces both liquids and gases and relates to the fact that even though any fluid may resist deformations, that resistance cannot prevent deformation from happening. The reason is that the resisting force vanishes with the rate of deformation. Whether one treats the matter as a fluid or a solid may depend on the time available for observation. As prophetess Deborah sang, "The mountains flowed before the Lord" (Judges 5:5). The ratio of the relaxation time to the observation time is called the Deborah number ¹. The smaller the number the more fluid the material.

A fluid can be in equilibrium only if all the mutual forces between two adjacent parts are normal to the common surface. That experimental observation is the basis of Hydrostatics. If one applies a force parallel (tangential) to the common surface then the fluid layer on one side of the surface start sliding over the layer on the other side. Such sliding motion will lead to a friction between layers. For example, if you cease to stir tea in a glass it could come to rest only because of such tangential forces i.e. friction. Indeed, if the mutual action between the portions on the same radius was wholly normal i.e. radial, then the conservation of the moment of momentum about the rotation axis would cause the fluid to rotate forever.

Since tangential forces are absent at rest or for a uniform flow, it is natural to consider first the flows where such forces are small and can be neglected. Therefore, a natural first step out of hydrostatics into hydrodynamics is to restrict ourselves with a purely normal forces, assuming velocity gradients small (whether such step makes sense at all and how long such approximation may last is to be seen). Moreover, the intensity of a normal force per unit area does not depend on the direction in a fluid, the statement called the Pascal law (see Exercise 1.1). We thus characterize the internal force (or stress) in a fluid by a single scalar function $p(\mathbf{r}, t)$ called pressure which is the force per unit area. From the viewpoint of the internal state of the matter, pressure is a macroscopic (thermodynamic) variable. To describe completely the

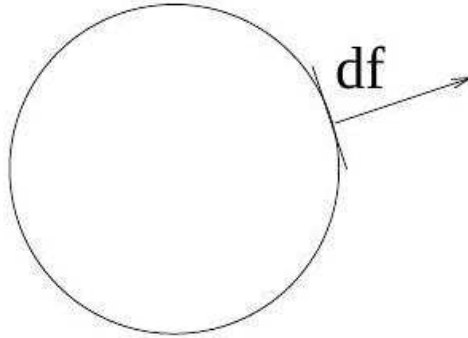
internal state of the fluid, one needs the second thermodynamical quantity, e.g. the density $\rho(\mathbf{r}, t)$, in addition to the pressure.

What analytic properties of the velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ we need to presume? We suppose the velocity to be finite and a continuous function of \mathbf{r} . In addition, we suppose the first spatial derivatives to be everywhere finite. That makes the motion continuous, i.e. trajectories of the fluid particles do not cross. The equation for the distance $\delta\mathbf{r}$ between two close fluid particles is $d\delta\mathbf{r}/dt = \delta\mathbf{v}$ so, mathematically speaking, finiteness of $\nabla\mathbf{v}$ is Lipschitz condition for this equation to have a unique solution [a simple example of non-unique solutions for non-Lipschitz equation is $dx/dt = |x|^{1-\alpha}$ with two solutions, $x(t) = (\alpha t)^{1/\alpha}$ and $x(t) = 0$ starting from zero for $\alpha > 0$]. For a continuous motion, any surface moving with the fluid completely separates matter on the two sides of it. We don't

yet know when exactly the continuity assumption is consistent with the equations of the fluid motion. Whether velocity derivatives may turn into infinity after a finite time is a subject of active research for an incompressible viscous fluid (and a subject of the one-million-dollar Clay prize). We shall see below that a compressible inviscid flow generally develops discontinuities called shocks.

5.1.2 1.1.2 Equations of motion for an ideal fluid

The Euler equation. The force acting on any fluid volume is equal to the pressure integral over the surface: $-\oint p d\mathbf{f}$. The surface area element $d\mathbf{f}$ is a vector directed as outward normal:



Let us transform the surface integral into the volume one: $-\oint p d\mathbf{f} = -\int \nabla p dV$. The force acting on a unit volume is thus $-\nabla p$ and it must be equal to the product of the mass ρ and the acceleration $d\mathbf{v}/dt$. The latter is not the rate of change of the fluid velocity at a fixed point in space but the rate of change of the velocity of a given fluid particle as it moves about in space. One uses the chain rule differentiation to express this (substantial or material) derivative in terms of quantities referring to points fixed in space. During the time dt the fluid particle changes its velocity by $d\mathbf{v}$ which is composed of two parts, temporal and spatial:

$$d\mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = dt \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (1.1)$$

It is the change in the fixed point plus the difference at two points $d\mathbf{r}$ apart where $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ is the distance moved by the fluid particle during dt . Dividing (1.1) by dt we obtain the substantial derivative as local derivative plus convective derivative:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Any function $F(\mathbf{r}(t), t)$ varies for a moving particle in the same way according to the chain rule differentiation:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F$$

Writing now the second law of Newton for a unit mass of a fluid, we come to the equation derived by Euler (Berlin, 1757; Petersburg, 1759):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.2)$$

Before Euler, the acceleration of a fluid had been considered as due to the difference of the pressure exerted by the enclosing walls. Euler introduced the pressure field inside the fluid. We see that even when the flow is steady, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, the acceleration is nonzero as long as $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \neq 0$, that is if the velocity field changes in space along itself. For example, for a steadily rotating fluid shown in Figure 1.1, the vector $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ has a nonzero radial component v^2/r . The radial acceleration times the density must be given by the radial pressure gradient: $dp/dr = \rho v^2/r$.

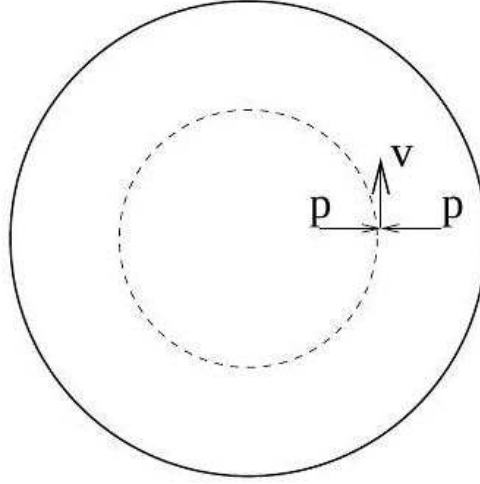


Figure 1.1 Pressure p is normal to circular surfaces and cannot change the moment of momentum of the fluid inside or outside the surface; the radial pressure gradient changes the direction of velocity \mathbf{v} but does not change its modulus.

We can also add an external body force per unit mass (for gravity $\mathbf{f} = \mathbf{g}$) :

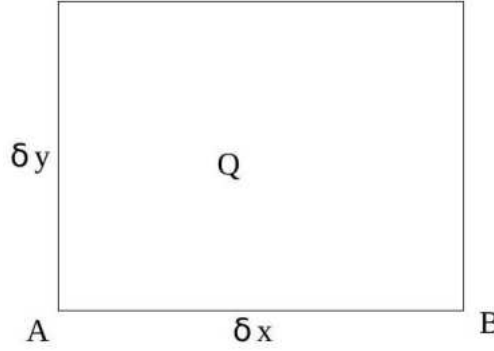
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

The term $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ describes inertia and makes the equation (1.3) nonlinear.

Continuity equation expresses conservation of mass. If Q is the volume of a moving element then $d\rho Q/dt = 0$ that is

$$Q \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

The volume change can be expressed via $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.



The horizontal velocity of the point B relative to the point A is $\delta x \partial v_x / \partial x$. After the time interval dt , the length of the AB edge is $\delta x (1 + dt \partial v_x / \partial x)$. Overall, after dt , one has the volume change

$$dQ = dt \frac{dQ}{dt} = \delta x \delta y \delta z dt \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = Q dt \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Substituting that into (1.4) and canceling (arbitrary) Q we obtain the continuity equation

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.5)$$

The last equation is almost obvious since for any fixed volume of space the decrease of the total mass inside, $-\int (\partial \rho / \partial t) dV$, is equal to the flux $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$.

Entropy equation. We have now four equations (1.3, 1.5) for five quantities p, ρ, v_x, v_y, v_z , so we need one extra equation. In deriving (1.3, 1.5) we have taken no account of energy dissipation neglecting thus internal friction (viscosity) and heat exchange. Fluid without viscosity and thermal conductivity is called ideal. The motion of an ideal fluid is adiabatic that is the entropy of any fluid particle remains constant: $ds/dt = 0$, where s is the entropy per unit mass. We can turn this equation into a continuity equation for the entropy density in space

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

At the boundaries of the fluid, the continuity equation (1.5) is replaced by the boundary conditions:

1. On a fixed boundary, $v_n = 0$

2. On a moving boundary between two immiscible fluids,

$$p_1 = p_2 \text{ and } v_{n1} = v_{n2}.$$

These are particular cases of the general surface condition. Let $F(\mathbf{r}, t) =$

0 be the equation of the bounding surface. Absence of any fluid flow across the surface requires

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) F = 0$$

which means, as we now know, the zero rate of F variation for a fluid particle. For a stationary boundary, $\partial F / \partial t = 0$ and $\mathbf{v} \perp \nabla F \Rightarrow v_n = 0$.

Eulerian and Lagrangian descriptions. We thus encountered two alternative ways of description. The equations (1.3, 1.6) use the coordinate system fixed in space, like field theories describing electromagnetism or gravity. That way of description is called Eulerian in fluid mechanics. Another approach is called Lagrangian, it is a generalization of the approach taken

in particle mechanics. This way one follows fluid particles² and treats their current coordinates, $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$, as functions of time and their initial positions $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, 0)$. The substantial derivative is thus the Lagrangian derivative since it sticks to a given fluid particle, that is keeps \mathbf{R} constant: $d/dt = (\partial/\partial t)_R$. Conservation laws written for a unit-mass quantity \mathcal{A} have a Lagrangian form:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathcal{A} = 0$$

Every Lagrangian conservation law together with mass conservation generates an Eulerian conservation law for a unit-volume quantity $\rho\mathcal{A}$:

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{A})}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathcal{A}\mathbf{v}) = \mathcal{A} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) \right] + \rho \left[\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathcal{A} \right] = 0$$

On the contrary, if the Eulerian conservation law has the form

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{B})}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{F}) = 0$$

and the flux is not equal to the density times velocity, $\mathbf{F} \neq \rho\mathcal{B}\mathbf{v}$, then the respective Lagrangian conservation law does not exist. That means that fluid particles can exchange \mathcal{B} conserving the total space integral we shall see below that the conservation laws of energy and momentum have that form.

5.1.3 1.1.3 Hydrostatics

A necessary and sufficient condition for fluid to be in a mechanical equilibrium follows from (1.3):

$$\nabla p = \rho\mathbf{f} \tag{1.7}$$

Not any distribution of $\rho(\mathbf{r})$ could be in equilibrium since $\rho(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r})$ is not necessarily a gradient. If the force is potential, $\mathbf{f} = -\nabla\phi$, then taking curl of (1.7) we get

$$\nabla\rho \times \nabla\phi = 0$$

That means that the gradients of ρ and ϕ are parallel and their level surfaces coincide in equilibrium. The best-known example is gravity with $\phi = gz$ and $\partial p/\partial z = -\rho g$. For an incompressible fluid, it gives

$$p(z) = p(0) - \rho gz$$

For an ideal gas under a homogeneous temperature, which has $p = \rho T/m$, one gets

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pgm}{T} \Rightarrow p(z) = p(0) \exp(-mgz/T)$$

For air at 0°C , $T/mg \simeq 8$ km. The Earth atmosphere is described by neither linear nor exponential law because of an inhomogeneous temperature. Assuming a linear temperature decay, $T(z) = T_0 - \alpha z$, one gets a

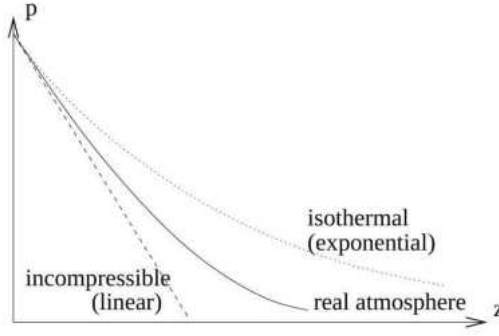


Figure 1.2 Pressure-height dependence for an incompressible fluid (broken line), isothermal gas (dotted line) and the real atmosphere (solid line).

better approximation:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pmg}{T_0 - \alpha z}$$

$$p(z) = p(0) (1 - \alpha z/T_0)^{mg/\alpha}$$

which can be used not far from the surface with $\alpha \simeq 6.5^\circ/\text{km}$.

In a (locally) homogeneous gravity field, the density depends only on vertical coordinate in a mechanical equilibrium. According to $dp/dz = -\rho g$, the pressure also depends only on z . Pressure and density determine temperature, which then must also be independent of the horizontal coordinates. Different temperatures at the same height necessarily produce fluid motion, that is why winds blow in the atmosphere and currents flow in the ocean. Another source of atmospheric flows is thermal convection due to a negative vertical temperature gradient. Let us derive the stability criterium for a fluid with a vertical profile $T(z)$. If a fluid element is shifted up adiabatically from z by dz , it keeps its entropy $s(z)$ but acquires the pressure $p' = p(z+dz)$ so its new density is $\rho(s, p')$. For stability, this density must exceed the density of the displaced air at the height $z+dz$, which has the same pressure but different entropy $s' = s(z+dz)$. The condition for stability of the stratification is as follows:

$$\rho(p', s) > \rho(p', s') \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} < 0$$

Entropy usually increases under expansion, $(\partial \rho / \partial s)_p < 0$, and for stability we must require

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{g}{V} > 0 \quad (1.8)$$

Here we used specific volume $V = 1/\rho$. For an ideal gas the coefficient of the thermal expansion is as follows: $(\partial V / \partial T)_p = V/T$ and we end up with

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p} \quad (1.9)$$

For the Earth atmosphere, $c_p \sim 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{Kelvin}$, and the convection threshold is $10^\circ/\text{km}$, not far from the average gradient $6.5^\circ/\text{km}$, so that the atmosphere is often unstable with respect to thermal convection³. Human body always excites convection in a room-temperature air⁴.

The convection stability argument applied to an incompressible fluid rotating with the angular velocity $\Omega(r)$ gives the Rayleigh's stability criterium, $d(r^2\Omega)^2/dr > 0$, which states that the angular momentum of the fluid $L = r^2|\Omega|$ must increase with the distance r from the rotation axis⁵. Indeed, if a fluid element is shifted from r to r' it keeps its angular momentum $L(r)$, so that the local pressure gradient $dp/dr = \rho r' \Omega^2(r')$ must overcome the centrifugal force $\rho r' (L^2 r^4 / r'^4)$.

5.1.4 1.1.4 Isentropic motion

The simplest motion corresponds to $s = \text{const}$ and allows for a substantial simplification of the Euler equation. Indeed, it would be convenient to represent $\nabla p/\rho$ as a gradient of some function. For this end, we need a function which depends on p, s , so that at $s = \text{const}$ its differential is expressed solely via dp . There exists the thermodynamic potential called enthalpy defined as $W = E + pV$ per unit mass (E is the internal energy of the fluid). For our purposes, it is enough to remember from thermodynamics the single relation $dE = Tds - pdV$ so that $dW = Tds + Vdp$ [one can also show that $W = \partial(E\rho)/\partial\rho$]. Since $s = \text{const}$ for an isentropic motion and $V = \rho^{-1}$ for a unit mass then $dW = dp/\rho$ and without body forces one has

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla W \quad (1.10)$$

Such a gradient form will be used extensively for obtaining conservation laws, integral relations etc. For example, representing

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla v^2/2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

we get

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla (W + v^2/2) \quad (1.11)$$

The first term in the right-hand side is perpendicular to the velocity. To project (1.11) along the velocity and get rid of this term, we define streamlines as the lines whose tangent is everywhere parallel to the instantaneous velocity. The streamlines are then determined by the relations

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Note that for time-dependent flows streamlines are different from particle trajectories: tangents to streamlines give velocities at a given time while tangents to trajectories give velocities at subsequent times. One records streamlines experimentally by seeding fluids with light-scattering particles; each particle produces a short trace on a short-exposure photograph, the length and orientation of the trace indicates the magnitude and direction of the velocity. Streamlines can intersect only at a point of zero velocity called stagnation point.

Let us now consider a steady flow assuming $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ and take the component of (1.11) along the velocity at a point:

$$\frac{\partial}{\partial l} (W + v^2/2) = 0 \quad (1.12)$$

We see that $W + v^2/2 = E + p/\rho + v^2/2$ is constant along any given streamline, but may be different for different streamlines (Bernoulli, 1738). Why W rather than E enters the conservation law is discussed after (1.16) below. In a gravity field, $W + gz + v^2/2 = \text{const}$. Let us consider several applications of this useful relation.

Incompressible fluid. Under a constant temperature and a constant density and without external forces, the energy E is constant too. One can obtain, for instance, the limiting velocity with which such a liquid escapes from a large reservoir into vacuum:

$$v = \sqrt{2p_0/\rho}$$

For water ($\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) at atmospheric pressure ($p_0 = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$) one gets $v = \sqrt{200} \approx 14 \text{ m/s}$.

Adiabatic gas flow. The adiabatic law, $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, gives the enthalpy as follows:

$$W = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}$$

The limiting velocity for the escape into vacuum is

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{(\gamma - 1)\rho}}$$

that is $\sqrt{\gamma/(\gamma - 1)}$ times larger than for an incompressible fluid (because the internal energy of the gas decreases as it flows, thus increasing the kinetic energy). In particular, a meteorite-damaged spaceship loses the air from the cabin faster than the liquid fuel from the tank. We shall see later that $(\partial P/\partial \rho)_s = \gamma P/\rho$ is the sound velocity squared, c^2 , so that $v = c\sqrt{2/(\gamma - 1)}$. For an ideal gas with n degrees of freedom, $W = E + p/\rho = nT/2m + T/m$ so that $\gamma = (2+n)/n$. For bi-atomic gas at not very high temperature, $n = 5$.

Efflux from a small orifice under the action of gravity. Supposing the external pressure to be the same at the horizontal surface and at the orifice, we apply the Bernoulli relation to the streamline which originates at the upper surface with almost zero velocity and exits with the velocity $v = \sqrt{2gh}$ (Torricelli, 1643). The Torricelli formula is not of much use practically to calculate the rate of discharge as the orifice area times $\sqrt{2gh}$ (the fact known to wine merchants long before physicists). Indeed, streamlines converge from all sides towards the orifice so that the jet continues to converge for a while after coming out. Moreover, that converging motion makes the pressure in the interior of the jet somewhat greater than at the surface so that the velocity in the interior is somewhat less than $\sqrt{2gh}$. The experiment shows that contraction ceases and

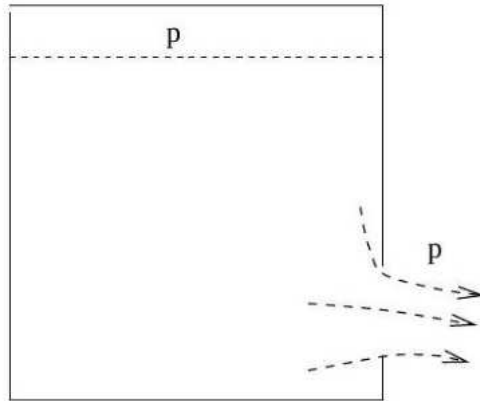


Figure 1.3 Streamlines converge coming out of the orifice.

the jet becomes cylindrical at a short distance beyond the orifice. That point is called "vena contracta" and the ratio of jet area there to the orifice area is called the coefficient of contraction. The estimate for the discharge rate is $\sqrt{2gh}$ times the orifice area times the coefficient of contraction. For a round hole in a thin wall, the coefficient of contraction is experimentally found to be 0.62. The Exercise 1.3 presents a particular case where the coefficient of contraction can be found exactly.

Bernoulli relation is also used in different devices that measure the flow velocity. Probably, the simplest such device is the Pitot tube shown in Figure 1.4. It is open at both ends with the horizontal arm facing upstream. Since the liquid does not move inside the tube than the velocity is zero at the point labelled B . On the one hand, the pressure difference at two points on the same streamline can be expressed via the velocity at A : $P_B - P_A = \rho v^2/2$. On the other

hand, it is expressed via the height h by which liquid rises above the surface in the vertical arm of the tube: $P_B - P_A = \rho gh$. That gives $v^2 = 2gh$.

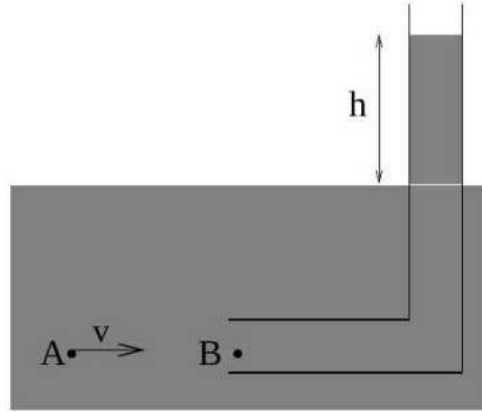


Figure 1.4 Pitot tube that determines the velocity v at the point A by measuring the height h .

5.2 1.2 Conservation laws and potential flows

Kinematics: Strain and Rotation. Kelvin's theorem of conservation of circulation. Energy and momentum fluxes. Irrotational flow as a potential one. Incompressible fluid. Conditions of incompressibility. Potential flows in two dimensions.

5.2.1 1.2.1 Kinematics

The relative motion near a point is determined by the velocity difference between neighbouring points:

$$\delta v_i = r_j \partial v_i / \partial x_j$$

It is convenient to analyze the tensor of the velocity derivatives by decomposing it into symmetric and antisymmetric parts: $\partial v_i / \partial x_j = S_{ij} + A_{ij}$. The symmetric tensor $S_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$ is called strain, it can be always transformed into a diagonal form by an orthogonal transformation (i.e. by the rotation of the axes). The diagonal components are the rates of stretching in different directions. Indeed, the equation for the distance between two points along a principal direction has a form: $\dot{r}_i = \delta v_i = r_i S_{ii}$ (no summation over i). The solution is as follows:

$$r_i(t) = r_i(0) \exp \left[\int_0^t S_{ii}(t') dt' \right]$$

For a permanent strain, the growth/decay is exponential in time. One recognizes that a purely straining motion converts a spherical material element into an ellipsoid with the principal diameters that grow (or decay) in time, the diameters do not rotate. Indeed, consider a circle of the radius R at $t = 0$. The point that starts at $x_0, y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ goes into

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{S_{11}t} x_0 \\
 y(t) &= e^{S_{22}t} y_0 = e^{S_{22}t} \sqrt{R^2 - x_0^2} = e^{S_{22}t} \sqrt{R^2 - x^2(t) e^{-2S_{11}t}} \\
 x^2(t) e^{-2S_{11}t} + y^2(t) e^{-2S_{22}t} &= R^2
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

The equation (1.13) describes how the initial fluid circle turns into the ellipse whose eccentricity increases exponentially with the rate $|S_{11} - S_{22}|$.

The sum of the strain diagonal components is $\text{div } \mathbf{v} = S_{ii}$ which determines the rate of the volume change: $Q^{-1} dQ/dt = -\rho^{-1} d\rho/dt = \text{div } \mathbf{v} = S_{ii}$.

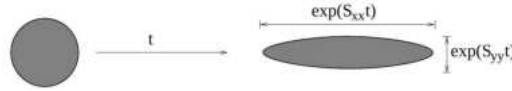


Figure 1.5 Deformation of a fluid element by a permanent strain.

The antisymmetric part $A_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i) / 2$ has only three independent components so it could be represented via some vector ω : $A_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k / 2$. The coefficient $-1/2$ is introduced to simplify the relation between \mathbf{v} and ω :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}$$

The vector ω is called vorticity as it describes the rotation of the fluid element: $\delta \mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}] / 2$. It has a meaning of twice the effective local angular velocity of the fluid. Plane shearing motion like $v_x(y)$ corresponds to strain and vorticity being equal in magnitude.

5.2.2 1.2.2 Kelvin's theorem

That theorem describes the conservation of velocity circulation for isentropic flows. For a rotating cylinder of a fluid, the momentum of momentum is proportional to the velocity circulation around the cylinder circumference. The momentum of momentum and circulation are both conserved when there are only normal forces, as was already mentioned

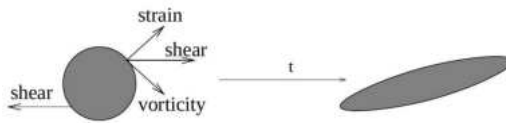


Figure 1.6 Deformation and rotation of a fluid element in a shear flow. Shearing motion is decomposed into a straining motion and rotation.

at the beginning of Sect. 1.1.1. Let us show that this is also true for every "fluid" contour which is made of fluid particles. As fluid moves, both the velocity and the contour shape change:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} (d\mathbf{l}/dt) + \oint (d\mathbf{v}/dt) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

The first term here disappears because it is a contour integral of the complete differential: since $d\mathbf{l}/dt = \delta \mathbf{v}$ then $\oint \mathbf{v} (d\mathbf{l}/dt) = \oint \delta (v^2/2) = 0$. In the second term we substitute the Euler equation for isentropic motion, $d\mathbf{v}/dt = -\nabla W$, and use the Stokes formula which tells that the circulation of a vector around the closed contour is equal to the flux of the curl through any surface bounded by the contour: $\oint \nabla W \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \nabla W d\mathbf{f} = 0$.

Stokes formula also tells us that $\oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \int \omega \cdot d\mathbf{f}$. Therefore, the conservation of the velocity

circulation means the conservation of the vorticity flux. To better appreciate this, consider an alternative derivation. Taking curl of (1.11) we get

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) \quad (1.14)$$

This is the same equation that describes the magnetic field in a perfect conductor: substituting the condition for the absence of the electric field in the frame moving with the velocity \mathbf{v} , $c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} = 0$, into the Maxwell equation $\partial \mathbf{H} / \partial t = -c \nabla \times \mathbf{E}$, one gets $\partial \mathbf{H} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})$. The magnetic flux is conserved in a perfect conductor and so is the vorticity flux in an isentropic flow. One can visualize vector field introducing field lines which give the direction of the field at any point while their density is proportional to the magnitude of the field. Kelvin's theorem means that vortex lines move with material elements in an inviscid fluid exactly like magnetic lines are frozen into a perfect conductor. One way to prove that is to show that ω/ρ (and H/ρ) satisfy the same equation

as the distance \mathbf{r} between two fluid particles: $d\mathbf{r}/dt = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. This is done using $d\rho/dt = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ and applying the general relation

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B \quad (1.15)$$

to $\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - \omega \operatorname{div} \mathbf{v}$. We then obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\omega}{\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega \right] + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho} [(\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega - \omega \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega] + \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho} = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Since \mathbf{r} and ω/ρ move together, then any two close fluid particles chosen on the vorticity line always stay on it. Consequently any fluid particle stays on the same vorticity line so that any fluid contour never crosses vorticity lines and the flux is indeed conserved.

5.2.3 1.2.3 Energy and momentum fluxes

Let us now derive the equation that expresses the conservation law of energy. The energy density (per unit volume) in the flow is $\rho(E + v^2/2)$. For isentropic flows, one can use $\partial \rho E / \partial \rho = W$ and calculate the time derivative

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) = (W + v^2/2) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\operatorname{div} [\rho v (W + v^2/2)]$$

Since the right-hand side is a total derivative then the integral of the energy density over the whole space is conserved. The same Eulerian conservation law in the form of a continuity equation can be obtained in a general (non-isentropic) case as well. It is straightforward to calculate the time derivative of the kinetic energy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} &= -\frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho v - v \cdot \nabla p - \rho v \cdot (v \nabla) v \\ &= -\frac{v^2}{2} \operatorname{div} \rho v - v(\rho \nabla W - \rho T \nabla s) - \rho v \cdot \nabla v^2/2 \end{aligned}$$

For calculating $\partial(\rho E)/\partial t$ we use $dE = Tds - pdV = Tds + p\rho^{-2}d\rho$ so that $d(\rho E) = E d\rho + \rho dE = W d\rho + \rho T ds$ and

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = W \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = -W \operatorname{div} \rho v - \rho T v \cdot \nabla s$$

Adding everything together one gets

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} [\rho v (W + v^2/2)] \quad (1.16)$$

As usual, the rhs is the divergence of the flux, indeed:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\rho E + \frac{\rho v^2}{2} \right) dV = - \oint \rho (W + v^2/2) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Note the remarkable fact that the energy flux is

$$\rho \mathbf{v} (W + v^2/2) = \rho \mathbf{v} (E + v^2/2) + p \mathbf{v}$$

which is not equal to the energy density times \mathbf{v} but contains an extra pressure term which describes the work done by pressure forces on the fluid. In other terms, any unit mass of the fluid carries an amount of energy $W + v^2/2$ rather than $E + v^2/2$. That means, in particular, that for energy there is no (Lagrangian) conservation law for unit mass $d(\cdot)/dt = 0$ that is valid for passively transported quantities like entropy. This is natural because different fluid elements exchange energy by doing work.

Momentum is also exchanged between different parts of fluid so that the conservation law must have the form of a continuity equation written for the momentum density. The momentum of the unit volume is the vector $\rho \mathbf{v}$ whose every component is conserved so it should satisfy the equation of the form

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Let us find the momentum flux Π_{ik} — the flux of the i -th component of the momentum across the surface with the normal along k . Substitute the mass continuity equation $\partial \rho / \partial t = -\partial(\rho v_k) / \partial x_k$ and the Euler equation $\partial v_i / \partial t = -v_k \partial v_i / \partial x_k - \rho^{-1} \partial p / \partial x_i$ into

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_i v_k$$

that is

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad (1.17)$$

Plainly speaking, along \mathbf{v} there is only the flux of parallel momentum $p + \rho v^2$ while perpendicular to \mathbf{v} the momentum component is zero at the given point and the flux is p . For example, if we direct the x -axis along velocity at a given point then $\Pi_{xx} = p + v^2$, $\Pi_{yy} = \Pi_{zz} = p$ and all the off-diagonal components are zero.

We have finished the formulations of the equations and their general properties and will discuss now the simplest case which allows for an analytic study. This involves several assumptions.

5.2.4 1.2.4 Irrotational and incompressible flows

Irrotational flows are defined as having zero vorticity: $\omega = \nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$. In such flows, $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$ round any closed contour, which means, in particular, that there are no closed streamlines for a single-connected domain. Note that the flow has to be isentropic to stay irrotational (i.e. inhomogeneous heating can generate vortices). A zero-curl vector field is potential, $\mathbf{v} = \nabla \phi$, so that the Euler equation (1.11) takes the form

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W \right) = 0$$

After integration, one gets

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W = C(t)$$

and the space independent function $C(t)$ can be included into the potential, $\phi(r, t) \rightarrow \phi(r, t) + \int_t^t C(t') dt'$, without changing velocity. Eventually,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + W = 0 \quad (1.18)$$

For a steady flow, we thus obtained a more strong Bernoulli theorem with $v^2/2 + W$ being the same constant along all the streamlines in distinction from a general case where it may be a different constant along different streamlines.

Absence of vorticity provides for a dramatic simplification which we exploit in this Section and the next one. Unfortunately, irrotational flows are much less frequent than Kelvin's theorem suggests. The main reason is that (even for isentropic flows) the viscous boundary layers near solid boundaries generate vorticity as we shall see in Sect. 1.5. Yet we shall also see there that large regions of the flow can be unaffected by the vorticity generation and effectively described as irrotational. Another class of potential flows is provided by small-amplitude oscillations (like waves or motions due to oscillations of an immersed body). If the amplitude of oscillations a is small comparatively to the velocity scale of change l then $\partial v / \partial t \simeq v^2 / a$ while $(v \nabla) v \simeq v^2 / l$ so that the nonlinear term can be neglected and $\partial v / \partial t = -\nabla W$. Taking curl of this equation we see that ω is conserved but its average is zero in oscillating motion so that $\omega = 0$.

Incompressible fluid can be considered as such if the density can be considered constant. That means that in the continuity equation, $\partial \rho / \partial t + (v \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} v = 0$, the first two terms are much smaller than the third one. Let the velocity v change over the scale l and the time τ . The density variation can be estimated as

$$\delta \rho \simeq (\partial \rho / \partial p)_s \delta p \simeq (\partial \rho / \partial p)_s \rho v^2 \simeq \rho v^2 / c^2 \quad (1.19)$$

where the pressure change was estimated from the Bernoulli relation. Requiring

$$(v \nabla) \rho \simeq v \delta \rho / l \ll \rho \operatorname{div} v \simeq \rho v / l$$

we get the condition $\delta \rho \ll \rho$ which, according to (1.19), is true as long as the velocity is much less than the speed of sound. The second condition, $\partial \rho / \partial t \ll \rho \operatorname{div} v$, is the requirement that the density changes slow enough:

$$\partial \rho / \partial t \simeq \delta \rho / \tau \simeq \delta p / \tau c^2 \simeq \rho v^2 / \tau c^2 \ll \rho v / l \simeq \rho \operatorname{div} v$$

That suggests $\tau \gg (l/c)(v/c)$ - that condition is actually more strict since the comparison of the first two terms in the Euler equation suggests $l \simeq v \tau$ which gives $\tau \gg l/c$. We see that the extra condition of incompressibility is that the typical time of change τ must be much larger than the typical scale of change l divided by the sound velocity c . Indeed, sound equilibrates densities in different points so that all flow changes must be slow to let sound pass.

For an incompressible fluid, the continuity equation is thus reduced to

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.20)$$

For isentropic motion of an incompressible fluid, the internal energy does not change ($dE = Tds + p\rho^{-2}d\rho$) so that one can put everywhere $W = p/\rho$. Since density is no more an independent variable, the equations can be chosen that contain only velocity: one takes (1.14) and (1.20).

In two dimensions, incompressible flow can be characterized by a single scalar function. Since $\partial v_x/\partial x = -\partial v_y/\partial y$ then we can introduce the stream function ψ defined by $v_x = \partial\psi/\partial y$ and $v_y = -\partial\psi/\partial x$. Recall that the streamlines are defined by $v_x dy - v_y dx = 0$ which now correspond to $d\psi = 0$ that is indeed the equation $\psi(x, y) = \text{const}$ determines streamlines. Another important use of the stream function is that the flux through any line is equal to the difference of ψ at the endpoints (and is thus independent of the line form - an evident consequence of incompressibility):

$$\int_1^2 v_n dl = \int_1^2 (v_x dy - v_y dx) = \int d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (1.21)$$

Here v_n is the velocity projection on the normal that is the flux is equal to the modulus of the vector product $\int |\mathbf{v} \times d\mathbf{l}|$, see Figure 1.7. Solid boundary at rest has to coincide with one of the streamlines.

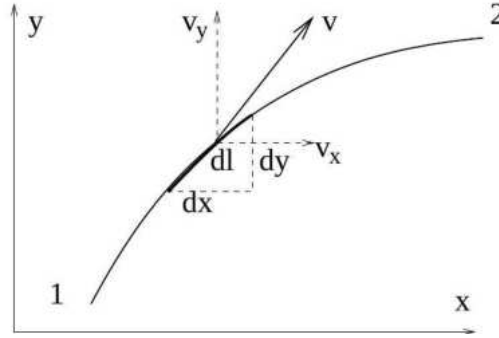
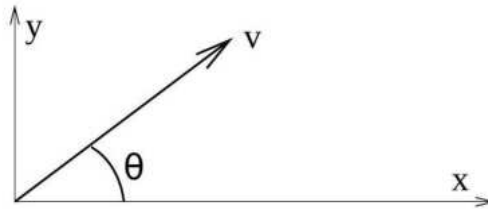


Figure 1.7 The flux through the line element dl is the flux to the right $v_x dy$ minus the flux up $v_y dx$ in agreement with (1.21).

Potential flow of an incompressible fluid is described by a linear equation. By virtue of (1.20) the potential satisfies the Laplace equation ⁶

$$\Delta\phi = 0$$

with the condition $\partial\phi/\partial n = 0$ on a solid boundary at rest.



Particularly beautiful is the description of two-dimensional (2d) potential incompressible flows. Both potential and stream function exist in this case. The equations

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.22)$$

could be recognized as the Cauchy-Riemann conditions for the complex potential $w = \phi + i\psi$ to be an analytic function of the complex argument $z = x + iy$. That

means that the rate of change of w does not depend on the direction in the x, y -plane, so that one can define the complex derivative dw/dz , which exists everywhere. For example, both choices $dz = dx$ and $dz = i dy$ give the same answer by virtue of (1.22):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{i \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x - i v_y = v e^{-i\theta}, \quad \mathbf{v} = v_x + i v_y = \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}.$$

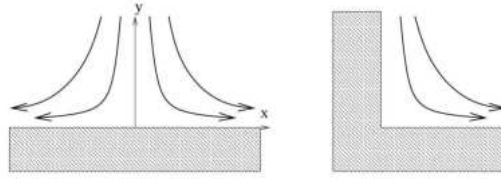
Complex form allows one to describe many flows in a compact form and find flows in a complex geometry by mapping a domain into a standard one. Such transformation must be conformal i.e. done by an analytic function so that the equations (1.22) preserve their form in the new coordinates ⁷.

We thus get our first (infinite) family of flows: any complex function analytic in a domain and having a constant imaginary part on the boundary describes a potential flow of an incompressible fluid in this domain. Uniform flow is just $w = (v_x - i v_y) z$. Few other examples:

1. Potential flow near a stagnation point $\mathbf{v} = 0$ (inside the domain or on a smooth boundary) is expressed via the rate-of-strain tensor S_{ij} : $\phi = S_{ij} x_i x_j / 2$ with $\text{div } \mathbf{v} = S_{ii} = 0$. In the principal axes of the tensor, one has $v_x = kx, v_y = -ky$ which corresponds to

$$\phi = k(x^2 - y^2)/2, \quad \psi = kxy, \quad w = kz^2/2$$

The streamlines are rectangular hyperbolae. This is applied, in particular, on the boundary which has to coincide with one of the principal axes (x or y) or both. The Figure presents the flows near the boundary along x and along x and y (half of the previous one):



- 2) Consider the potential in the form $w = Az^n$ that is $\phi = Ar^n \cos n\theta$ and $\psi = Ar^n \sin n\theta$. Zero-flux boundaries should coincide with the streamlines so two straight lines $\theta = 0$ and $\theta = \pi/n$ could be seen as boundaries. Choosing different n , one can have different interesting particular cases.

Velocity modulus

$$v = \left| \frac{dw}{dz} \right| = n|A|r^{n-1}$$

at $r \rightarrow 0$ either turns to 0 ($n > 1$) or to ∞ ($n < 1$).

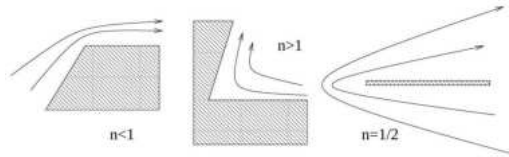


Figure 1.8 Flows described by the complex potential $w = Az^n$.

One can think of those solutions as obtained by a conformal transformation $\zeta = z^n$ which maps z -domain into the full ζ -plane. The potential $w = Az^n = A\zeta$ describes a uniform flow in the ζ -plane. Respective z and ζ points have the same value of the potential so that the transformation maps streamlines into streamlines. The velocity in the transformed domain is as follows: $dw/d\zeta = (dw/dz)(dz/d\zeta)$, that is the velocity modulus is inversely proportional to the stretching factor of the transformation. That has two important consequences: First, the energy of the potential flow is invariant with respect to conformal transformations i.e. the energy inside every closed curve in z -plane is the same as the energy inside the image of the curve in ζ -plane. Second, flow dynamics is not conformal invariant even when it proceeds along

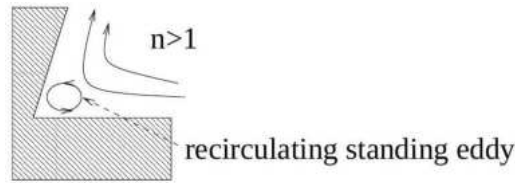
the conformal invariant streamlines (which coincide with particle trajectories for a steady flow). Indeed, when the flow shifts the fluid particle from z to $z + vdt = z + dt(d\bar{w}/d\bar{z})$, the new image,

$$\zeta(z + vdt) = \zeta(z) + dtv \frac{d\zeta}{dz} = \zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \frac{d\zeta}{dz}$$

does not coincide with the new position of the old image,

$$\zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}} = \zeta(z) + dt \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}}$$

Despite the beauty of conformal flows, their applications are limited. Real flow usually separates at discontinuities, it does not turn over the corner for $n < 1$ and does not reach the inside of the corner for $n > 1$:



The phenomenon of separation is due to a combined action of friction and inertia and is discussed in detail in Section 1.5.2. Separation produces vorticity, which makes it impossible to introduce the potential ϕ and use the complex potential w (rotational flows are not conformal invariant).

5.3 1.3 Flow past a body

Here we go from two-dimensional to three-dimensional flows, starting from the most symmetric case of a moving sphere and then consider a moving body of an arbitrary shape. Our aim is to understand and describe what we know from everyday experience: fluids apply forces both when we try to set a body into motion and when we try to maintain a motion with a constant speed. In addition to resistance forces, for nonsymmetric cases we expect to find a force perpendicular to the motion (called lift), which is what keeps birds and planes from falling from the skies. We consider the motion of a body in an ideal fluid and a body set in motion by a moving fluid.

Flow is assumed to be four "i": infinite, irrotational, incompressible and ideal. The algorithm to describe such a flow is to solve the Laplace equation

$$\Delta\phi = 0 \tag{1.23}$$

The boundary condition on the body surface is the requirement that the normal components of the body and fluid velocities coincide, that is at any given moment one has $\partial\phi/\partial n = u_n$, where \mathbf{u} is body velocity. After finding the potential, one calculates $\mathbf{v} = \nabla\phi$ and then finds pressure from the Bernoulli equation:

$$p = -\rho \left(\partial\phi/\partial t + v^2/2 \right) \tag{1.24}$$

It is the distinctive property of an irrotational incompressible flow that the velocity distribution is defined completely by a linear equation. Due to linearity, velocity potentials can be superimposed (but not pressure distributions).

5.3.1 1.3.1 Incompressible potential flow past a body

Before going into calculations, one can formulate several general statements. First, note that the Laplace equation is elliptic which means that the solutions are smooth inside the domains, singularities could exist on boundaries only, in contrast to hyperbolic (say, wave) equations⁸. Second, integrating (1.23) over any volume one gets

$$\int \Delta\phi dV = \int \operatorname{div} \nabla\phi dV = \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{f} = 0$$

that is the flux is zero through any closed surface (as is expected for an incompressible fluid). That means, in particular, that $\mathbf{v} = \nabla\phi$ changes sign on any closed surface so that extrema of ϕ could be on the boundary only. The same can be shown for velocity components (e.g. for $\partial\phi/\partial x$) since they also satisfy the Laplace equation. That means that for any point P inside one can find P' having higher $|v_x|$. If we choose the x direction to coincide at P with $\nabla\phi$ we conclude that for any point inside one can find another point in the immediate neighborhood where $|v|$ is greater. In other terms, v^2 cannot have a maximum inside (but can have a minimum). Similarly for pressure, taking Laplacian of the Bernoulli relation (1.24),

$$\Delta p = -\rho\Delta v^2/2 = -\rho(\nabla v)^2$$

and integrating it over volume, one obtains

$$\oint \nabla p \cdot d\mathbf{f} = -\rho \int (\nabla v)^2 dV < 0$$

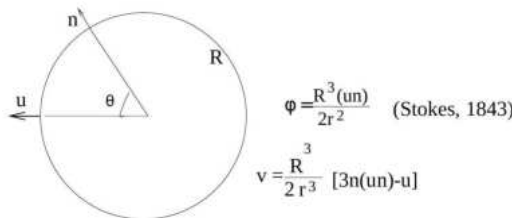
that is a pressure minimum could be only on a boundary (although a maximum can occur at an interior point). For steady flows, $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$ so that the points of $\max v^2$ coincide with those of $\min p$ and all are on a boundary⁹. The knowledge of points of minimal pressure is important for cavitation which is a creation of gas bubbles when the pressure falls below the vapour pressure; when such bubbles then experience higher pressure, they may collapse producing shock waves that do severe damage to moving boundaries like turbine blades and ships' propellers. Likewise, we shall see in Section 2.3.2 that when local fluid velocity exceeds the velocity of sound, shock is created; this is again must happen on the boundary of a potential flow.

5.3.2 1.3.2 Moving sphere

Solutions of the equation $\Delta\phi = 0$ that vanish at infinity are $1/r$ and its derivatives, $\partial^n(1/r)/\partial x^n$. Due to the complete symmetry of the sphere, its motion is characterized by a single vector of its velocity \mathbf{u} . Linearity requires $\phi \propto \mathbf{u}$ so the flow potential could be only made as a scalar product of the vectors \mathbf{u} and the gradient, which is the dipole field:

$$\phi = a \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = -a \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^2}$$

where $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. On the body, $r = R$ and $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u \cos \theta$. Using $\phi = -ua \cos \theta / r^2$ and $v_R = 2auR^{-3} \cos \theta$, this condition gives $a = R^3/2$.



Now one can calculate the pressure

$$p = p_0 - \rho v^2/2 - \rho \partial \phi / \partial t$$

having in mind that our solution moves with the sphere that is $\phi(\mathbf{r} - \mathbf{u}t, \mathbf{u})$ and

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot \nabla \phi$$

which gives

$$p = p_0 + \rho u^2 \frac{9 \cos^2 \theta - 5}{8} + \rho R \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

The force is $\oint p d\mathbf{f}$. For example,

$$F_x = \oint p \cos \theta d\mathbf{f} = \rho R^3 \dot{u} \pi \int \cos^2 \theta d \cos \theta = 2\pi \rho R^3 \dot{u} / 3 \quad (1.25)$$

If the radius depends on time too then $F_x \propto \partial \phi / \partial t \propto \partial (R^3 u) / \partial t$. For a uniformly moving sphere with a constant radius, $\dot{R} = \dot{\mathbf{u}} = 0$, the force is zero: $\oint p d\mathbf{f} = 0$. This flies in the face of our common experience: fluids

do resist attempts to move through them. Maybe we obtained zero force in a steady case due to a symmetrical shape?

5.3.3 1.3.3 Moving body of an arbitrary shape

At large distances from the body, a solution of $\Delta \phi = 0$ is again sought in the form of the first non-vanishing multipole. The first (charge) term $\phi = a/r$ cannot be present because it corresponds to the velocity $\mathbf{v} = -a\mathbf{r}/r^3$ with the radial component $v_R = a/R^2$ providing for a non-vanishing flux $4\pi\rho a$ through a closed sphere of radius R ; existence of a flux contradicts incompressibility. So the first non-vanishing term is again a dipole:

$$\begin{aligned} \phi &= \mathbf{A} \cdot \nabla (1/r) = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) r^{-2} \\ \mathbf{v} &= [3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}] r^{-3} \end{aligned}$$

For the sphere above, $\mathbf{A} = \mathbf{u}R^3/2$, but for nonsymmetric bodies the vectors \mathbf{A} and \mathbf{u} are not collinear, though linearly related $A_i = \alpha_{ik} u_k$, where the tensor α_{ik} (having the dimensionality of volume) depends on the body shape.

What can one say about the force acting on the body if only flow at large distances is known? That's the main beauty of the potential theory that one often can say something about "here" by considering field "there". Let us start by calculating the energy $E = \rho \int v^2 dV / 2$ of the moving fluid outside the body and inside the large sphere of the radius R . We present $v^2 = u^2 + (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} + \mathbf{u})$ and write $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \nabla(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$. Using $\text{div } v = \text{div } u = 0$ one can write

$$\begin{aligned} \int_{r < R} v^2 dV &= u^2 (V - V_0) + \int_{r < R} \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV \\ &= u^2 (V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{f} \\ &= u^2 (V - V_0) + \oint_S (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Substituting

$$\phi = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) R^{-2}, \quad \mathbf{v} = [3\mathbf{n}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A}] R^{-3}$$

and integrating over angles,

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega &= A_i u_k \int n_i n_k d\Omega = A_i u_k \delta_{ik} \int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= (4\pi/3)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

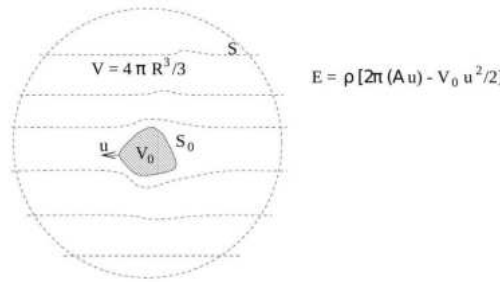
we obtain the energy in the form

$$E = \rho [4\pi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) - V_0 u^2] / 2 = m_{ik} u_i u_k / 2 \quad (1.26)$$

Here we introduced the induced-mass tensor:

$$m_{ik} = 4\pi\rho\alpha_{ik} - \rho V_0 \delta_{ik}$$

For sphere, $m_{ik} = \rho V_0 \delta_{ik} / 2$ that is half the displaced fluid.



We now have to pass from the energy to the force acting on the body which is done by considering the change in the energy of the body (the same as minus the change of the fluid energy dE) being equal to the work done by force \mathbf{F} on the path $\mathbf{u} dt$: $dE = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dt$. The change of the momentum of the body is $d\mathbf{P} = -\mathbf{F} dt$ so that $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$. That relation is true for changes caused by the velocity change by force (not by the change in the body shape) so that the change of the body momentum is $dP_i = m_{ik} du_k$ and the force is

$$F_i = -m_{ik} \dot{u}_k \quad (1.27)$$

i.e. the presence of potential flow means only an additional mass but not resistance. How to generalize (1.27) for the case when both m_{ik} and \mathbf{u} change? Our consideration of the pressure for a sphere suggests that the proper generalization is

$$F_i = -\frac{d}{dt} m_{ik} u_k \quad (1.28)$$

It looks as if $m_{ik} u_k$ is the momentum of the fluid yet it is not (it is quasi-momentum), as explained in the next section ¹⁰.

Equation of motion for the body under the action of an external force f_i ,

$$\frac{d}{dt} M u_i = f_i + F_i = f_i - \frac{d}{dt} m_{ik} u_k$$

could be written in a form that makes the term induced mass clear:

$$\frac{d}{dt} (M \delta_{ik} + m_{ik}) u_k = f_i \quad (1.29)$$

This is one of the simplest examples of renormalization in physics: the body moving through a fluid acquires additional mass. For example, a spherical air bubble in a liquid has the mass which is half of the mass of the displaced liquid; since the buoyancy force is the displaced mass

times g then the bubble acceleration is close to $2g$ when one can neglect other forces and the mass of the air inside.

Body in a flow. Consider now an opposite situation when the fluid moves in an oscillating way while a small body is immersed into the fluid. For example, a long sound wave propagates in a fluid. We do not consider here the external forces that move the fluid, we wish to relate the body velocity \mathbf{u} to the fluid velocity \mathbf{v} , which is supposed to be homogeneous on the scale of the body size. If the body moved with the same velocity, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, then it would be under the action of force that would act on the fluid in its place, $\rho V_0 \dot{\mathbf{v}}$. Relative motion gives the reaction force $dm_{ik}(v_k - u_k)/dt$. The sum of the forces gives the body acceleration

$$\frac{d}{dt}Mu_i = \rho V_0 \dot{v}_i + \frac{d}{dt}m_{ik}(v_k - u_k)$$

Integrating over time with the integration constant zero (since $u = 0$ when $v = 0$) we get the relation between the velocities of the body and of the fluid:

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0\delta_{ik})v_k$$

For a sphere, $\mathbf{u} = \mathbf{v}3\rho/(\rho + 2\rho_0)$, where ρ_0 is the density of the body. For a spherical air bubble in a liquid, $\rho_0 \ll \rho$ and $u \approx 3v$.

5.3.4 1.3.4 Quasi-momentum and induced mass

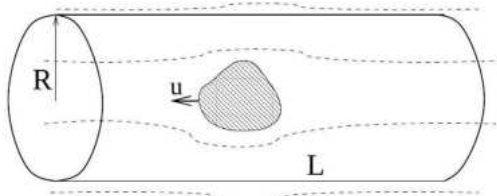
In the previous Section, we obtained the force acting on an accelerating body via the energy of the fluid and the momentum of the body because the momentum of the fluid, $\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{v}dV$, is not well-defined

for a potential flow around the body. For example, the integral of $v_x = D(3\cos^2\theta - 1)r^{-3}$ depends on the form of the volume chosen: it is zero for a spherical volume and nonzero for a cylinder of the length L and the radius \mathcal{R} set around the body:

$$\int_{-1}^1 (3\cos^2\theta - 1) d\cos\theta = 0$$

$$M_x = 4\pi\rho D \int_{-L}^L dz \int_0^{\mathcal{R}} r dr \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{4\pi\rho DL}{(L^2 + \mathcal{R}^2)^{1/2}} \quad (1.30)$$

That dependence means that the momentum stored in the fluid depends on the boundary conditions at infinity. For example, the motion by the sphere in the fluid enclosed by rigid walls must be accompanied by the displacement of an equal amount of fluid in the opposite direction, then the momentum of the fluid must be $-\rho V_0 u = -4\pi\rho R^3 u/3$ rather than $\rho V_0 u/2$. The negative momentum $-3\rho V_0 u/2$ delivered by the walls is absorbed by the whole body of fluid and results in an infinitesimal backflow, while the momentum $\rho V_0 u/2$ delivered by the sphere results in a finite localized flow. From (1.30) we can get a shape-independent answer $4\pi\rho D$ only in the limit $L/\mathcal{R} \rightarrow \infty$. To recover the answer $4\pi\rho D/3$ ($= \rho V_0 u/2 = 2\pi R^3 \rho u/3$ for a sphere) that we expect from (1.28), one needs to subtract the reflux $8\pi\rho D/3 = 4\pi R^3 \rho u/3$ compensating the body motion¹¹.



It is the quasi-momentum of the fluid particles which is independent of the remote boundary conditions and whose time derivative gives the inertial force (1.28) acting on the body. Conservation laws of the momentum and the quasi-momentum follow from different symmetries. The momentum expresses invariance of the Hamiltonian \mathcal{H} with respect to the shift of coordinate system. If the space is filled by a medium (fluid or solid), then the quasi-momentum expresses invariance of the Hamiltonian with respect to a space shift, keeping the medium fixed. That invariance follows from the identity of different elements of the medium. In a crystal, such shifts are allowed only by the lattice spacing. In a continuous medium, shifts are arbitrary. In this case, the system Hamiltonian must be independent of the coordinates:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = 0 \quad (1.31)$$

where the vectors $\pi(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t)$ are canonical momentum and coordinate respectively. We need to define the quasi-momentum \mathbf{K} whose conservation is due to invariance of the Hamiltonian: $\partial K_i / \partial t = \partial \mathcal{H} / \partial x_i = 0$. Recall that the time derivative of any function of canonical variables is given by the Poisson bracket of this function with the Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial t} &= \{K_i, \mathcal{H}\} = \frac{\partial K_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} - \frac{\partial K_i}{\partial \pi_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

That gives the partial differential equations on the quasi-momentum,

$$\frac{\partial K_i}{\partial \pi_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial K_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i}$$

whose solution is as follows:

$$K_i = - \int d\mathbf{x} \pi_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (1.32)$$

For isentropic (generally compressible) flow of an ideal fluid, the hamiltonian description can be done in Lagrangian coordinates, which describe the current position of a fluid element (particle) \mathbf{r} as a function of time and its initial position \mathbf{R} . The canonical coordinate is the displacement $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$, which is the continuum limit of the variable that describes lattice vibrations in the solid state physics. The canonical momentum is $\pi(\mathbf{R}, t) = \rho_0(\mathbf{R})\mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ where the velocity is $\mathbf{v} = (\partial \mathbf{r} / \partial t)_{\mathbf{R}} \equiv \dot{\mathbf{r}}$. Here ρ_0 is the density in the reference (initial) state, which can always be chosen uniform. The Hamiltonian is as follows:

$$\mathcal{H} = \int \rho_0 [W(\mathbf{q}) + v^2/2] d\mathbf{R} \quad (1.33)$$

where $W = E + p/\rho$ is the enthalpy. Canonical equations of motion, $\dot{q}_i = \partial \mathcal{H} / \partial \pi_i$ and $\dot{\pi}_i = -\partial \mathcal{H} / \partial q_i$, give respectively $\dot{r}_i = v_i$ and $\dot{v}_i = -\partial W / \partial r_i = -\rho^{-1} \partial p / \partial r_i$. The velocity \mathbf{v} now is an independent variable and not a function of the coordinates \mathbf{r} . All the time derivatives are for fixed \mathbf{R} i.e. they are substantial derivatives. The quasi-momentum (1.32) is as follows:

$$K_i = -\rho_0 \int v_j \frac{\partial q_j}{\partial R_i} d\mathbf{R} = \rho_0 \int v_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial r_j}{\partial R_i} \right) d\mathbf{R} \quad (1.34)$$

In plain words, only those particles contribute quasi-momentum whose motion is disturbed by the body so that for them $\partial r_j / \partial R_i \neq \delta_{ij}$. The integral (1.34) converges for spatially localized flows since $\partial r_j / \partial R_i \rightarrow \delta_{ij}$ when $R \rightarrow \infty$. Unlike (1.30), the quasi-momentum (1.34) is independent of the form of a distant surface. Using $\rho_0 d\mathbf{R} = \rho d\mathbf{r}$ one can also present

$$K_i = \rho_0 \int v_j \left(\delta_{ij} - \frac{\partial r_j}{\partial R_i} \right) d\mathbf{R} = \int \rho v_i d\mathbf{r} - \rho_0 \int v_j \frac{\partial r_j}{\partial R_i} d\mathbf{R} \quad (1.35)$$

i.e. indeed the quasi-momentum is the momentum minus what can be interpreted as a reflux.

The conservation can now be established substituting the equation of motion $\rho \dot{\mathbf{v}} = -\partial p / \partial \mathbf{r}$ into

$$\begin{aligned} \dot{K}_i &= -\rho_0 \int \left(\dot{v}_j \frac{\partial q_j}{\partial R_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial R_i} \right) d\mathbf{R} \\ &= -\rho_0 \int \left[\dot{v}_j \left(\frac{\partial r_j}{\partial R_i} - \delta_{ij} \right) + v_j \frac{\partial v_j}{\partial R_i} \right] d\mathbf{R} \\ &= - \int \frac{\partial p}{\partial r_i} d\mathbf{r} + \int \frac{\partial}{\partial R_i} \left(W - \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{R} \\ &= - \int \frac{\partial p}{\partial r_i} d\mathbf{r} = \oint p df_i \end{aligned} \quad (1.36)$$

In (1.36), the integral over the reference space \mathbf{R} of the total derivative in the second term is identically zero while the integral over \mathbf{r} in the first term excludes the volume of the body, so that the boundary term remains which is minus the force acting on the body. Therefore, the sum of the quasi-momentum of the fluid and the momentum of the body is conserved in an ideal fluid. That means, in particular, a surprising effect: when a moving body shrinks it accelerates. Indeed, when the induced mass and the quasi-momentum of the fluid decrease then the body momentum must increase.

This quasi-momentum is defined for any flow. For a potential flow, the quasi-momentum can be obtained much easier than doing the volume integration (1.34), one can just integrate the potential over the body surface: $\mathbf{K} = \int \rho \phi d\mathbf{f}$. Indeed, consider very short and strong pulse of pressure needed to bring the body from rest into motion, formally $p \propto \delta(t)$. During the pulse, the body doesn't move so its position and surface are well-defined. In the Bernoulli relation (1.18) one can then neglect v^2 term:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{v^2}{2} - \frac{p}{\rho} \approx -\frac{p}{\rho}$$

Integrating the relation $\rho \phi = -\int p(t) dt$ over the body surface we get minus the change of the body momentum i.e. the quasi-momentum of the fluid. For example, integrating $\phi = R^3 u \cos \theta / 2r^2$ over the sphere we get

$$K_x = \int \rho \phi \cos \theta d\mathbf{f} = 2\pi \rho R^3 u \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d \cos \theta = 2\pi \rho R^3 u / 3$$

as expected. The difference between momentum and quasi-momentum can be related to the momentum flux across the infinite surface due to pressure which decreases as r^{-2} for a potential flow.

The quasi-momentum of the fluid is related to the body velocity via the induced mass, $K_i = m_{ik} u_k$, so that one can use (1.34) to evaluate the induced mass. For this, one needs to solve the Lagrangian equation of motion $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, then one can show that the induced mass can be associated with the displacement of the fluid after the body pass. Fluid particles displaced by the body do not return to their previous positions after the body pass but are shifted to the direction of the fluid motion as shown in Figure 1.9. The permanently displaced mass enclosed between the broken lines is in fact the induced mass itself (Darwin, 1953).

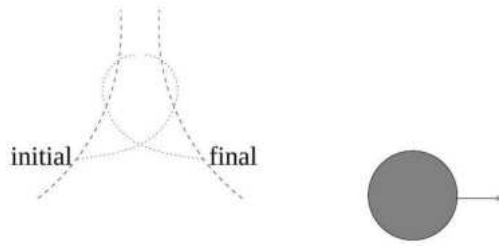


Figure 1.9 Displacement of the fluid by the passing body. The dotted line is the trajectory of the fluid particle. Two broken lines (chosen to be symmetrical) show the initial and final positions of the particles before and after the passage of the body.

Notice the loop made by every fluid particle; for a sphere, the horizontal component of the fluid velocity changes sign when $3\cos^2\theta = 1$ i.e. at the angle equal 30 degrees. Note also the striking difference between the particle trajectories and instantaneous streamlines (see also Exercise 1.6)¹².

Let us summarize: neglecting tangential forces (i.e. internal friction) we were able to describe the inertial reaction of the fluid to the body acceleration (quantified by the induced mass). For a motion with a constant speed, we failed to find any force, including the force perpendicular to \mathbf{u} called lift. If that was true, flying would be impossible. Physical intuition also suggests that the resistance force opposite to \mathbf{u} called drag must be given by the amount of momentum transferred to the fluid in front of the body per unit time:

$$F = CR^2\rho u^2 \quad (1.37)$$

where C is some order-unity dimensionless constant (called drag coefficient) depending on the body shape¹³. This is the correct estimate for the resistance force in the limit of vanishing internal friction (called viscosity). Unfortunately, I don't know any other way to show its validity but to introduce viscosity first and then consider the limit when it vanishes. That limit is quite non-trivial: even an arbitrary small friction makes an infinite region of the flow (called wake) very much different from the potential flow described above. Introducing viscosity and describing wake will take the next two Sections.

5.4 1.4 Viscosity

In this section we try to find our way out of paradoxes of ideal flows towards a real world. This will require considering internal friction that is viscosity.

5.4.1 1.4.1 Reversibility paradox

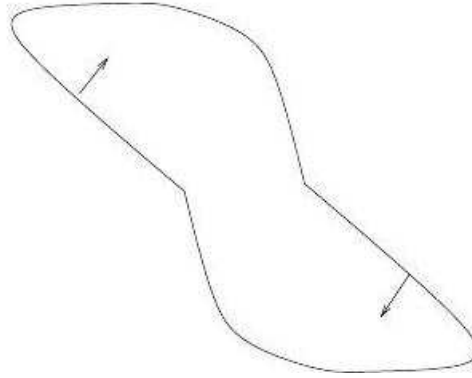
Let us discuss the absence of resistance in a more general way. We have made five assumptions on the flow: incompressible, irrotational, inviscid (ideal), infinite, steady. The last can be always approached with any precision by waiting enough time (after body passes a few its sizes is usually enough). An irrotational flow of an incompressible fluid is completely determined by the instantaneous body position and velocity. When the body moves with a constant velocity, the flow pattern moves along without changing its form, neither quasi-momentum nor kinetic energy of the fluid change so there are no forces acting between the body and the fluid. Let us also show that an account of compressibility does not give the drag resistance for a steady flow. That follows from reversibility of the continuity and Euler equations: the reverse of the flow [defined as $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, -t)$] is also a solution with the velocity at infinity \mathbf{u} instead of $-\mathbf{u}$ but with the same pressure and density fields. For the steady flow, defined by the boundary

problem

$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0$, $v_n = 0$ (on the body surface), $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{u}$ at infinity

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const}$$

the reverse flow $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = -\mathbf{v}(\mathbf{r})$ has the same pressure field so it must give the same drag force on the body. Since the drag is supposed to change sign when you reverse the direction of motion then the drag is zero in an ideal irrotational flow. For the particular case of a body with a central symmetry, reversibility gives D'Alembert paradox: the pressure on the symmetrical surface elements is the same and the resulting force is a pure couple ¹⁴.



If fluid is finite that is has a surface, a finite drag arises due to surface waves. If surface is far away from the body, that drag is negligible.

Exhausting all the other possibilities, we conclude that without friction we cannot describe drag and lift acting on a body moving through the fluid.

5.4.2 1.4.2 Viscous stress tensor

We define the stress tensor σ_{ij} as having ij entry equal to the i component of the force acting on a unit area perpendicular to j direction. The diagonal components present normal stress, they are equal to each other due to the Pascal law, we called this quantity pressure. Internal friction in a fluid must lead to the appearance of the non-diagonal components of the stress tensor: $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ (here the stress is applied to the fluid element under consideration so that the pressure is negative). That changes the momentum flux, $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma'_{ik} + \rho v_i v_k$, as well as the Euler equation: $\partial \rho v_i / \partial t = -\partial \Pi_{ik} / \partial x_k$.

To avoid infinite rotational accelerations, the stress tensor must be symmetric: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Indeed, consider the moment of force (with respect

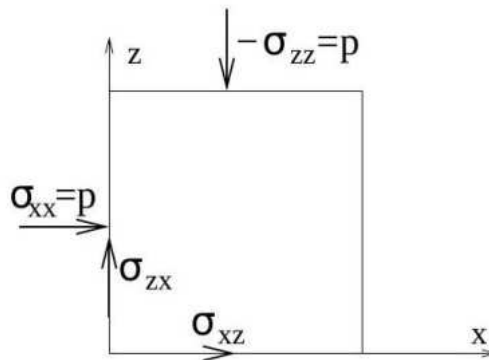
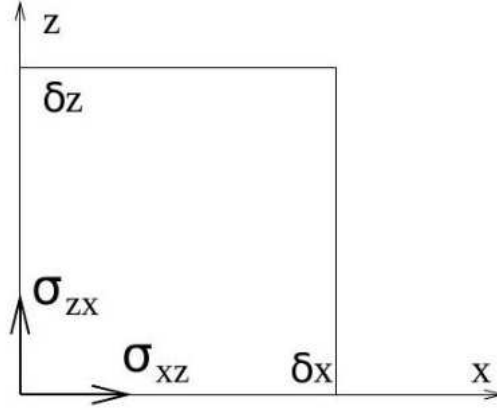


Figure 1.10 Diagonal and non-diagonal components of the stress tensor. to the axis at the upper right corner) acting on an infinitesimal element with the sizes $\delta x, \delta y, \delta z$:



If the stress tensor was not symmetric, then the moment of force $(\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \delta x \delta y \delta z$ is nonzero. That moment then must be equal to the time derivative of the moment of momentum which is the moment of inertia $\rho \delta x \delta y \delta z [(\delta x)^2 + (\delta z)^2]$ times the angular velocity Ω :

$$(\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) \delta x \delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta z [(\delta x)^2 + (\delta z)^2] \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

We see that to avoid $\partial \Omega / \partial t \rightarrow \infty$ as $(\delta x)^2 + (\delta z)^2 \rightarrow 0$ we must assume that $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$.

To connect the frictional part of the stress tensor σ' and the velocity $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, note that $\sigma' = 0$ for a uniform flow, so σ' must depend on the velocity spatial derivatives. Supposing these derivatives to be small (comparatively to the velocity changes on a molecular level) one could assume that the tensor σ' is linearly proportional to the tensor of velocity derivatives (Newton, 1687). Fluids with that property are called newtonian. Non-newtonian fluids are those of elaborate molecular structure (e.g. with long molecular chains like polymers), where the relation may be nonlinear already for moderate strains, and rubber-like liquids, where the stress depends on history. For newtonian fluids, to relate linearly two second-rank tensors, σ'_{ij} and $\partial v_i / \partial x_j$, one generally needs a tensor of the fourth rank. Yet another simplification comes from the fact that vorticity (that is the antisymmetric part of $\partial v_i / \partial x_j$) gives no contribution since it corresponds to a solid-body rotation where no sliding of fluid layers occurs. We thus need to connect two symmetric tensors, the stress σ'_{ij} and the rate of strain $S_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$. In the isotropic medium, the principal axes of σ'_{ij} have to coincide with those of S_{ij} so that just two constants, η and μ , are left out of the scary fourth-rank tensor:

$$\sigma'_{ij} = \eta (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) + \mu \delta_{ij} \partial v_l / \partial x_l \quad (1.38)$$

Dimensionally $[\eta] = [\mu] = \text{g/cm} \cdot \text{sec}$. To establish the sign of η , consider a simple shear flow shown in the Figure and recall that the stress is applied to the fluid. The stress component $\sigma_{xz} = \eta dv_x / dz$ is the x -component of the force by which an upper layer of the fluid acts on the lower layer so that it must be positive which requires $\eta > 0$.

$$\left| \begin{array}{c} z \\ \longrightarrow \quad v(z) \\ \longrightarrow \quad \sigma_{xz} = \eta dv/dz \\ x \end{array} \right|$$

5.4.3 1.4.3 Navier-Stokes equation

Now we substitute σ' into the Euler equation

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[p \delta_{ik} - \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \mu \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] \quad (1.39)$$

The viscosity is determined by the thermodynamic state of the system that is by p, ρ . When p, ρ depend on coordinates so must $\eta(p, \rho)$ and $\mu(p, \rho)$. However, we consistently assume that the variations of p, ρ are small and put η, μ constant. In this way we get the famous Navier-Stokes equation (Navier, 1822; Stokes, 1845):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.40)$$

Apart from the case of rarefied gases we cannot derive this equation consistently from kinetics. That means only that we generally cannot quantitatively relate η and μ to the properties of the material. One can estimate the viscosity of the fluid saying that the flux of molecules with the thermal velocity v_T through the plane (perpendicular to the velocity gradient) is nv_T , they come from a layer comparable to the mean free path l , have velocity difference $l \nabla u$, which causes momentum flux $m n v_T l \nabla u \simeq \eta \nabla u$, where m is the molecule mass. Therefore, $\eta \simeq m n v_T l = \rho v_T l$. We also define kinematic viscosity $\nu = \eta / \rho$ which is estimated as $\nu \simeq v_T l$. The thermal velocity is determined by the temperature while the mean free path by the strength of interaction between molecules: the stronger the interaction the shorter is l and the smaller is the viscosity. In other words, it is more difficult to transfer momentum in a system with stronger interaction. For example, air has $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{sec}$ so it is 15 times more viscous than water which has $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}$. The Navier-Stokes equation is valid for liquids as well as for gases as long as the typical scale of the flow is much larger than the mean free path.

The Navier-Stokes equation has higher-order spatial derivatives (second) than the Euler equation so that we need more boundary conditions. Since we accounted (in the first non-vanishing approximation) for the forces between fluid layers, we also have to account for the forces of molecular attraction between a viscous fluid and a solid body surface. Such force makes the layer of adjacent fluid to stick to the surface: $\mathbf{v} = 0$ on the surface (not only $v_n = 0$ as for the Euler equation)¹⁵. The solutions of the Euler equation do not generally satisfy that no-slip boundary condition. That means that even a very small viscosity must play a role near a solid surface.

Viscosity adds an extra term to the momentum flux, but (1.39, 1.40) still have the form of a continuity equation which conserves total momentum. However, viscous friction between fluid layers necessarily leads to some energy dissipation. Consider, for instance, a viscous incompressible fluid with $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ and calculate the time derivative of the energy at a point:

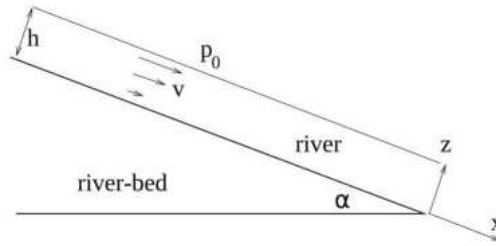
$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\mathbf{v} \cdot \sigma') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.41)$$

The presence of viscosity results in the momentum flux σ' which is accompanied by the energy transfer, $\mathbf{v} \cdot \sigma'$, and the energy dissipation described by the last term. Because of this last term, this equation does not have the form of a continuity equation and the total energy integral is not conserved. Indeed, after the integration over the whole volume,

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = - \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV \\
&= - \eta \int \omega^2 dV < 0
\end{aligned} \tag{1.42}$$

The last equality here follows from $\omega^2 = (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k)^2 = (\partial_j v_k)^2 - \partial_k (v_j \partial_j v_k)$, which is true by virtue of $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ and $\partial_i v_i = 0$.

The Navier-Stokes equation is a nonlinear partial differential equation of the second order. Not many steady solutions are known. Particularly easy is to find solutions in the geometry where $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$ and the equation is effectively linear. In particular, symmetry may prescribe that the velocity does not change along itself. One example is the flow along an inclined plane as a model for a river.



Everything depends only on z . The stationary Navier-Stokes equation takes a form

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = 0$$

with z and x projections respectively

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} + \rho g \cos \alpha &= 0 \\
\eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin \alpha &= 0
\end{aligned}$$

The boundary condition on the bottom is $v(0) = 0$. On the surface, the boundary condition is that the stress should be normal and balance the pressure: $\sigma_{xz}(h) = \eta dv(h)/dz = 0$ and $\sigma_{zz}(h) = -p(h) = -p_0$. The solution is simple:

$$p(z) = p_0 + \rho g(h - z) \cos \alpha, \quad v(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} z(2h - z) \tag{1.43}$$

Let us see how it corresponds to reality. Take water with the kinematic viscosity $\nu = \eta/\rho = 10^{-2}$ cm²/sec. For a rain puddle with the thickness $h = 1$ mm on a slope $\alpha \sim 10^{-2}$ we get a reasonable estimate $v \sim 5$ cm/sec. For slow plain rivers (like Nile or Volga) with $h \simeq 10$ m and $\alpha \simeq 0.3$ km/3000 km $\simeq 10^{-4}$ one gets $v(h) \simeq 100$ km/sec which is evidently impossible (the resolution of that dramatic discrepancy is that real rivers are turbulent as discussed in Sect. 2.2.2 below). What distinguishes puddle and river, why they are not similar? To answer this question, we need to characterize flows by a dimensionless parameter.

5.4.4 1.4.4 Law of similarity

One can obtain some important conclusions about flows from a dimensional analysis. Consider a steady flow past a body described by the equation

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \nu\Delta\mathbf{v}$$

and by the boundary conditions $\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{u}$ and $\mathbf{v} = 0$ on the surface of the body of the size L . For a given body shape, both \mathbf{v} and p/ρ are functions of coordinates \mathbf{r} and three variables, \mathbf{u}, ν, L . Out of the latter, one can form only one dimensionless quantity, called the Reynolds number

$$Re = uL/\nu \quad (1.44)$$

This is the most important parameter in this book since it determines the ratio of the nonlinear (inertial) term $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ to the viscous friction term $\nu\Delta\mathbf{v}$. Since the kinematic viscosity is the thermal velocity times the mean free path then the Reynolds number is

$$Re = uL/v_T l$$

We see that within the hydrodynamic limit ($L \gg l$), Re can be both large and small depending on the ratio $u/v_T \simeq u/c$.

Dimensionless velocity must be a function of dimensionless variables: $\mathbf{v} = u\mathbf{f}(\mathbf{r}/L, Re)$ - it is a unit-free relation. Flows that correspond to the same Re can be obtained from one another by simply changing the units of v and r , such flows are called similar (Reynolds, 1883). In the same way, $p/\rho = u^2\varphi(\mathbf{r}/L, Re)$. For a quantity independent of coordinates, only some function of Re is unknown - the drag or lift force, for instance, must be $F = \rho u^2 L^2 f(Re)$. This law of similarity is exploited in modelling: to measure, say, a drag on the ship one designs, one can build a smaller model yet pull it faster through the fluid (or use a less viscous fluid).

Reynolds number, as a ratio of inertia to friction, makes sense for all types of flows as long as u is some characteristic velocity and L is a scale of the velocity change. For the inclined plane flow (1.43), the nonlinear term (and the Reynolds number) is identically zero since $\mathbf{v} \perp \nabla\mathbf{v}$. How much one needs to perturb this alignment to make $Re \simeq 1$? Denoting $\pi/2 - \beta$ the angle between \mathbf{v} and $\nabla\mathbf{v}$ we get $Re(\beta) = v(h)h\beta/\nu \simeq g\alpha\beta h^3/\nu^2$. For a puddle, $Re(\beta) \simeq 50\beta$ while for a river $Re(\beta) \simeq 10^{12}\beta$. It is then clear that the (so-called laminar) solution (1.43) may make sense for a puddle, but for a river it must be distorted by even tiny violations of this symmetry (say, due to a non-flat bottom).

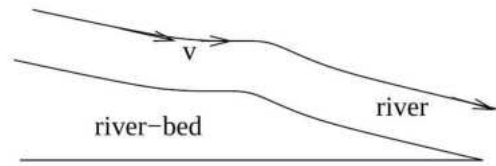


Figure 1.11 Non-flat bottom makes the velocity changing along itself, which leads to a nonzero inertial term $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ in the Navier-Stokes equation.

Gravity brings another dimensionless parameter, the Froude number $Fr = u^2/Lg$; the flows are similar for the same Re and Fr . Such parameters (whose change brings qualitative changes in the regime even for fixed geometry and boundary conditions) are called control parameters

16.

The law of similarity is a particular case of the so-called π -theorem:

Assume that among all m variables $\{b_1, \dots, b_m\}$ we have only $k \leq m$ dimensionally independent quantities - that means that the dimensionalities $[b_{k+1}], \dots, [b_m]$ could be expressed via $[b_1], \dots, [b_k]$ like $[b_{k+j}] = \prod_{l=1}^{l=k} [b_l]^{\beta_{jl}}$. Then all dimensionless quantities can be expressed in terms of $m - k$ dimensionless variables $\pi_1 = b_{k+1} / \prod_{l=1}^{l=k} b_l^{\beta_{1l}}, \dots, \pi_{m-k} = b_m / \prod_{l=1}^{l=k} b_l^{\beta_{m-k,l}}$.

5.5 1.5 Stokes flow and wake

We now return to the flow past a body armed by the knowledge of internal friction. Unfortunately, the Navier-Stokes equation is a nonlinear partial differential equation which we cannot solve in a closed analytical form even for a flow around a sphere. We therefore shall proceed the way physicists often do: solve a limiting case of very small Reynolds numbers and then try to move towards high-Re flow. Remind that we failed spectacularly in Section 1.3 trying to describe high-Re flow as an ideal fluid. This time we shall realize, with the help of qualitative arguments and experimental data, that when viscosity is getting very small its effect stays finite. On the way we shall learn new notions of a boundary layer and a separation phenomenon. The reward will be the resolution of paradoxes and the formulas for the drag and the lift.

5.5.1 1.5.1 Slow motion

Consider such a slow motion of a body through the fluid that the Reynolds number, $Re = uR/\nu$, is small. That means that we can neglect inertia. Indeed, if we stop pushing the body, friction stops it after a time of order R^2/ν , so that inertia moves it by the distance of order $uR^2/\nu = R \cdot Re$, which is much less than the body size R . Formally, neglecting inertia means omitting the nonlinear term $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ in the Navier-Stokes equation. That makes our problem linear so that the fluid velocity is proportional to the body velocity: $v \propto u$. The viscous stress (1.38) and the pressure are also linear in u and so must be the drag force:

$$F = \int \sigma d\mathbf{f} \simeq \int d\mathbf{f} \eta u / R \simeq 4\pi R^2 \eta u / R = 4\pi \eta u R$$

That crude estimate coincides with the true answer given below by (1.49) up to the dimensionless factor $3/2$. Linear proportionality between the force and the velocity makes the low-Reynolds flows an Aristotelean world.

Now, if you wish to know what force would move a body with $Re \simeq 1$ (or $1/6\pi$ for a sphere), you find amazingly that such force, $F \sim \eta^2/\rho$, does not depend on the body size (that is the same for a bacteria and a ship). For water, $\eta^2/\rho \simeq 10^{-4}$ dyn.

Swimming means changing shape in a periodic way to move. Motion on micro and nano scales in fluids usually correspond to very low Reynolds numbers when

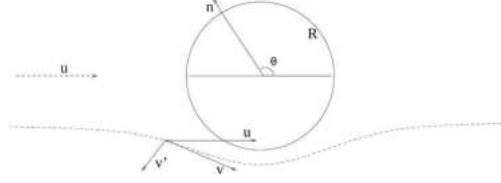
$$\partial v / \partial t \simeq (v \nabla) v \simeq u^2 / L \ll \nu \Delta v \simeq \nu u / L^2$$

Such swimming is very different from pushing water backwards as we do at finite Re. First, there is no inertia so that momentum diffuses instantly through the fluid. Therefore, it does not matter how fast or slow we change the shape. What matters is the shape change itself i.e. low-Re swimming is purely geometrical. Second, linearity means that simply retracing the changes back (by inverting the forces i.e. the pressure gradients) we just retrace the motion. One thus needs to change a shape periodically but in a time-irreversible way that is to have a cycle in a configuration space. Microorganisms do that by sending progressive waves along their surfaces. Every point of a surface may move time-reversibly (even by straight lines), time direction is encoded in the phase shift between different points. For example, spermatozoid swims by sending helical waves down its tail¹⁷. See Exercise 1.10 for another example.

Creeping flow. Consider the steady Navier-Stokes equation without a nonlinear term:

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p \tag{1.45}$$

Let us find the flow around a sphere. In the reference frame of the sphere, the flow at infinity is assumed to have the velocity \mathbf{u} . Denote $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$.



We wish to repeat the trick we made in considering the potential flow by reducing a vector problem to a scalar one. We do it now by exploiting linearity of the problem. The continuity equation, $\text{div} \mathbf{v} = 0$, means that the velocity field can be presented in the form $\mathbf{v}' = \text{curl} \mathbf{A}$ (note that the flow is not assumed potential). The axial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ has to be linear in \mathbf{u} . The only way to make an axial vector from \mathbf{r} and \mathbf{u} is $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ so that it has to be $\mathbf{A} = f'(r) \mathbf{n} \times \mathbf{u}$. We just reduced our problem from finding a vector field $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ to finding a scalar function of a single variable, $f(r)$. The vector $f'(r) \mathbf{n}$ can be represented as $\nabla f(r)$ so $\mathbf{v}' = \text{curl} \mathbf{A} = \text{curl}[\nabla f \times \mathbf{u}]$. Since $u = \text{const}$, one can take ∇ out: $\mathbf{v}' = \text{curl} \text{curl}(f \mathbf{u})$. If we now apply curl to the equation $\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p$ we get the equation to solve

$$\Delta \text{curl} \mathbf{v} = 0$$

Express now \mathbf{v} via f :

$$\text{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \times \nabla f \times \mathbf{u} = (\text{grad} \text{div} - \Delta) \nabla f \times \mathbf{u} = -\Delta \nabla f \times \mathbf{u}$$

So our final equation to solve is

$$\Delta^2 \nabla f \times \mathbf{u} = 0$$

Since $\nabla f \parallel \mathbf{n}$ so $\Delta^2 \nabla f$ cannot always be parallel to \mathbf{u} and we get

$$\Delta^2 \nabla f = 0 \quad (1.46)$$

Integrating it once and remembering that the velocity derivatives vanish at infinity we obtain $\Delta^2 f = 0$. In spherical coordinates $\Delta = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r$ so that $\Delta f = 2a/r$ - here again one constant of integration has to be zero because velocity \mathbf{v}' itself vanishes at infinity. Eventually,

$$f = ar + b/r$$

Taking curl of $\mathbf{A} = f'(r) \mathbf{n} \times \mathbf{u} = (a - br^{-2}) \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ we get

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3} \quad (1.47)$$

The last term is the potential part. Boundary condition $\mathbf{v}(R) = 0$ gives \mathbf{u} -component $1 - a/R - b/R^3 = 0$ and \mathbf{n} -component $-a/R + 3b/R^3 = 0$ so that $a = 3R/4$ and $b = R^3/4$. In spherical components

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{aligned} \quad (1.48)$$

The pressure can be found from $\eta \Delta \mathbf{v} = \nabla p$, but it is easier to note that $\Delta p = 0$. We need the solution of this equation with a dipole source since equal positive and negative pressure changes are generated on the surface of the sphere:

$$p = p_0 + \frac{c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^2}$$

where $c = -3\eta R/2$ from $p - p_0 = \eta \mathbf{u} \nabla \Delta f$. Fluid flows down the pressure gradient. The vorticity is a dipole field too:

$$\Delta \text{curl } \mathbf{v} = \Delta \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c' \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{n}]}{r^2}$$

with $c' = -3R/2$ from $\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} = -\eta \text{curl } \omega$.

Stokes formula for the drag. The force acting on a unit surface is the momentum flux through it. On a solid surface $\mathbf{v} = 0$ and $F_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$. In our case, the only nonzero component is along \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} F_x &= \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df \\ &= (3\eta u/2R) \int df = 6\pi R \eta u \end{aligned} \quad (1.49)$$

Here, we substituted $\sigma'_{rr} = 2\eta \partial v_r / \partial r = 0$ at $r = R$ and

$$\begin{aligned} p(R) &= -\frac{3\eta u}{2R} \cos \theta \\ \sigma'_{r\theta}(R) &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{3\eta u}{2R} \sin \theta \end{aligned}$$

The viscous force is tangential while the pressure force is normal to the surface. The vertical components of the forces cancel each other at every point since the sphere pushes fluid strictly forward so the force is purely horizontal. The viscous and pressure contributions sum into the horizontal force $3\eta \mathbf{u}/2R$, which is independent of θ , i.e. the same for all points on the sphere. The viscous force and the pressure contribute equally into the total force (1.49). That formula is called Stokes law, it works well until $Re \simeq 0.5$.

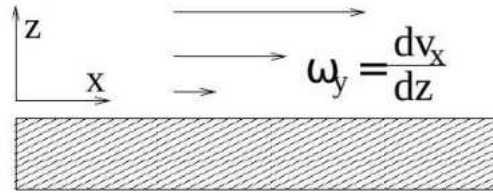
5.5.2 1.5.2 Boundary layer and separation phenomenon

It is clear that the law of decay $v \propto 1/r$ from (1.47) cannot be realized at arbitrary large distances. Indeed, our assumption of small Reynolds number requires

$$v \nabla v \simeq u^2 R / r^2 \ll \nu \Delta v \simeq \nu u R^2 / r^3$$

so that (1.47) is valid for $r \ll \nu/u$. One can call ν/u the width of the viscous boundary layer. The Stokes flow is realized inside the boundary layer under the assumption that the size of the body is much less than the width of the layer. So what is the flow outside the viscous boundary

layer, that is for $r > \nu/u$? Is it potential? The answer is "yes" only for very small Re . For finite Re , there is an infinite region (called wake) behind the body where it is impossible to neglect viscosity whatever the distance from the body. The reason for that is that viscosity produces vorticity in the boundary layer:



At small Re , the process that dominates the flow is vorticity diffusion away from the body. The Stokes approximation, $\omega \propto [\mathbf{u} \times \mathbf{n}]/r^2$, corresponds to symmetrical diffusion of vorticity in all directions. In particular, the flow has a left-right (fore-and-aft) symmetry. For finite Re , it is intuitively clear that the flow upstream and downstream from the body must be different since body leaves vorticity behind it. There should exist some downstream region reached by fluid particles which move along streamlines passing close to the body. The flow in this region (wake) is essentially rotational. On the other hand, streamlines that do not pass through the boundary layer correspond to almost potential motion.

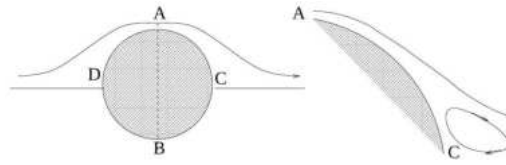
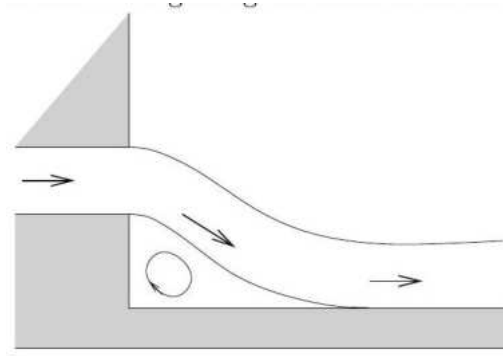


Figure 1.12 Symmetric streamlines for an ideal flow (left) and appearance of separation and a recirculating vortex in a viscous fluid (right).

Let us describe qualitatively how the wake arises. The phenomenon called separation is responsible for wake creation (Prandtl, 1905). Consider, for instance, a flow around a cylinder shown in Figure 1.12. The ideal fluid flow is symmetrical with respect to the plane AB . The point D is a stagnation point. On the upstream half DA , the fluid particles accelerate and the pressure decreases according to the Bernoulli theorem. On the downstream part AC , the reverse happens, that is every particle

moves against the pressure gradient. Small viscosity changes pressure only slightly across the boundary layer. Indeed, if the viscosity is small, the boundary layer is thin and can be considered as locally flat. In the boundary layer $\mathbf{v} \approx v_x$ and the pressure gradient, $\nabla p = -\rho(v\nabla)v - \eta\Delta v$, has only x component that is $\partial p/\partial z \approx 0$. In other words, the pressure inside the boundary layer is almost equal to that in the main stream, that is the pressure of the ideal fluid flow. But the velocities of the fluid particles that reach the points A and B are lower in a viscous fluid than in an ideal fluid because of viscous friction in the boundary layer. Then those particles have insufficient energy to overcome the pressure gradient downstream. The particle motion in the boundary layer is stopped by the pressure gradient before the point C is reached. The pressure gradient then becomes the force that accelerates the particles from the point C upwards producing separation¹⁸ and a recirculating vortex. A similar mechanism is responsible for recirculating eddies in the corners¹⁹ shown at the end of Sect. 1.2.4.

Reversing the flow pattern of separation one obtains attachment: jets tend to attach to walls and merge with each other. Consider first a jet in an infinite fluid and denote the velocity along the jet u . The momentum flux through any section is the same: $\int u^2 df = \text{const}$. On the other hand, the energy flux, $\int u^3 df$, decreases along the jet due to viscous friction. That means that the mass flux of the fluid, $\int u df$, must grow — a phenomenon known as entrainment²⁰. When the jet has a wall (or another jet) on one side, it draws less fluid into itself from this side and so inclines until it is getting attached as shown in the Figure:



wall-attaching jet

In particular, jet merging explains a cumulative effect of arm-piercing shells which contain a conical void covered by a metal and surrounded by explosives. Explosion turns metal into a fluid which moves towards the axis where it creates a cumulative jet with a high momentum density (Lavrent'ev 1947, Taylor 1948), see Figure 1.13 and Exercise 1.14. Similarly, if one creates a void in a liquid by, say, a raindrop or other falling object then the vertical momentum of the liquid that rushes to fill the void creates a jet seen in Figure 1.14.

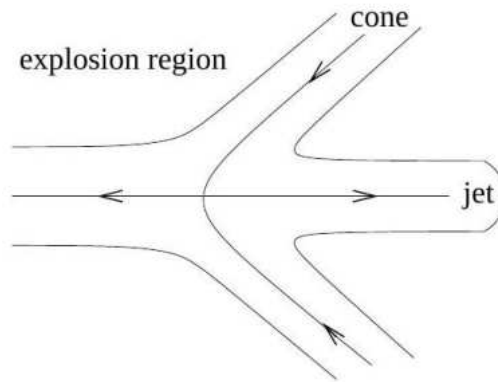


Figure 1.13 Scheme of the flow of a cumulative jet in the reference frame moving with the cone.



Figure 1.14 Jet shooting out after the droplet fall. Upper image beginning of the jet formation, lower image - jet formed.

5.5.3 1.5.3 Flow transformations

Let us now use the case of the flow past a cylinder to describe briefly how the flow pattern changes as the Reynolds number goes from small to large. The flow is most symmetric for $Re \ll 1$ when it is steady and has an exact up-down symmetry and approximate (order Re) left-right symmetry. Separation and occurrence of eddies is a change of the flow topology, it occurs around $Re \simeq 5$. The first loss of exact symmetries happens around $Re \simeq 40$ when the flow is getting periodic in time. This happens because the recirculating eddies don't have enough time to spread, they are getting detached from the body and carried away by the flow as the new eddies are generated. Periodic flow with shedding eddies has up-down and continuous time shift symmetries broken and replaced by a combined symmetry of up-down reflection and time shift for half a period. Shedding of eddies explains many surprising symmetry-breaking phenomena like, for instance, an air bubble rising through water (or champagne) in a zigzag or a spiral rather than a straight path²¹. For the flow past a body, it results in a double train of vortices called Kármán vortex street²² behind the body as shown in Figure 1.15.



Figure 1.15 Kármán vortex street behind a cylinder at $Re = 105$.

As the Reynolds number increases further, the vortices are getting unstable and produce an irregular turbulent motion downstream as seen in Figure 1.16²³. That turbulence is three-dimensional i.e. the translational invariance along the cylinder is broken as well. The higher Re the closer to the body turbulence starts. At $Re \simeq 10^5$, the turbulence reaches the body which brings so-called drag crisis: since a turbulent boundary layer is separated later than a laminar one, then the wake area gets smaller and the drag is lower²⁴.

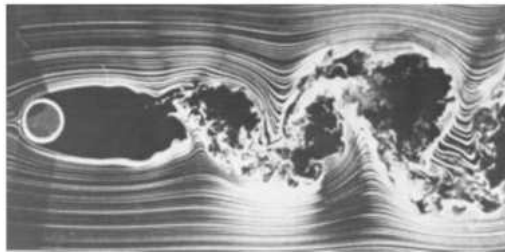


Figure 1.16 Flow past a cylinder at $Re = 10^4$.

5.5.4 1.5.4 Drag and lift with a wake

We can now describe the way Nature resolves reversibility and D'Alembert paradoxes. Like in Sect.1.3, we again consider the steady flow far from the body and relate it to the force acting on the body. The new experimental wisdom we now have is the existence of the wake. The flow is irrotational outside the boundary layer and the wake. First, we consider a laminar wake i.e. assume $v \ll u$ and $\partial v / \partial t = 0$; we shall show that the wake is always laminar far enough from

the body. For a steady flow, it is convenient to relate the force to the momentum flux through a closed surface. For a dipole potential flow $v \propto r^{-3}$ from Section 1.3, that flux was zero for a distant surface. Now wake gives a finite contribution. The total momentum flux transported by the fluid through any closed surface is equal to the rate of momentum change which is equal to the force acting on the body:

$$F_i = \oint \Pi_{ik} df_k = \oint [(p_0 + p') \delta_{ik} + \rho (u_i + v_i)(u_k + v_k)] df_k \quad (1.50)$$

Mass conservation means that $\rho \oint v_k df_k = 0$. Far from the body $v \ll u$ and

$$F_i = \left(\iint_{X_0} - \iint_X \right) (p' \delta_{ix} + \rho u v_i) dy dz \quad (1.51)$$

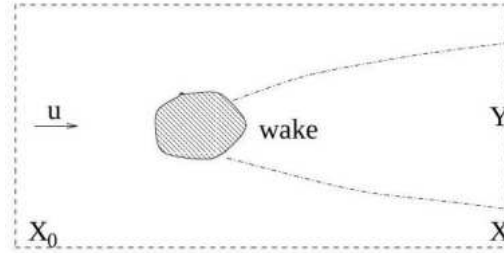


Figure 1.17 Scheme of the wake.

Drag with a wake. Consider the x -component of the force (1.51):

$$F_x = \left(\iint_{X_0} - \iint_X \right) (p' + \rho u v_x) dy dz$$

Outside the wake we have potential flow where the Bernoulli relation, $p + \rho |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2/2 = p_0 + \rho u^2/2$, gives $p' \approx -\rho u v_x$ so that the integral outside the wake vanishes. Inside the wake, the pressure is about the same (since it does not change across the almost straight streamlines like we argued in Section 1.5.2) but v_x is shown below to be much larger than outside so that

$$F_x = -\rho u \iint_{wake} v_x dy dz \quad (1.52)$$

Force is positive (directed to the right) since v_x is negative. Note that the integral in (1.52) is equal to the deficit of fluid flux Q through the wake area (i.e. the difference between the flux with and without the body). That deficit is x -independent which has dramatic consequences for the potential flow outside the wake, because it has to compensate for the deficit. That means that the integral $\int \mathbf{v} d\mathbf{f}$ outside the wake is also r -independent which requires $v \propto r^{-2}$. That corresponds to the potential flow with the source equal to the flow deficit: $\phi = Q/r$. We have thrown away this source flow in Sect. 1.3 but now we see that it exceeds the dipole flow $\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla(1/r)$ (which we had without the wake) and dominates sufficiently far from the body.

The wake breaks the fore-and-aft symmetry and thus resolves the paradoxes providing for a nonzero drag in the limit of vanishing viscosity. It is important that the wake has an infinite length, otherwise the body and the finite wake could be treated as a single entity and we are back to paradoxes. The behavior of the drag coefficient $C(Re) = F/\rho u^2 R^2$ is shown in Fig. 1.18. Notice the drag crisis which gives the lowest C . To understand why $C \rightarrow \text{const}$ as $Re \rightarrow \infty$ and prove (1.37), one ought to

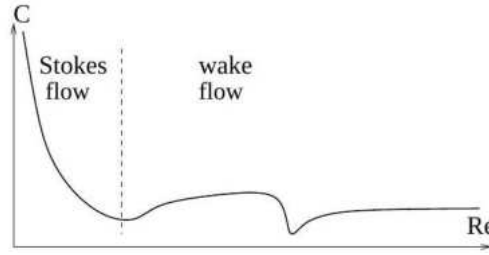


Figure 1.18 Sketch of the drag dependence on the Reynolds number.

pass a long way developing the theory of turbulence briefly described in the next Chapter.

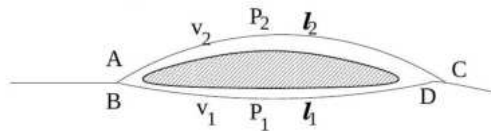
The lift is the force component of (1.51) perpendicular to \mathbf{u} :

$$F_y = \rho u \left(\int_{X_0} - \int_X \right) v_y dy dz \quad (1.53)$$

It is also determined by the wake - without the wake the flow is potential with $v_y = \partial\phi/\partial y$ and $v_z = \partial\phi/\partial z$ so that $\int v_y dy dz = \int v_z dy dz = 0$ since the potential is zero at infinities. We have seen in (1.28) that purely potential flow produces no lift. Without the friction-caused separation, birds and planes would not be able to fly. Let us discuss the lift of the wings which can be considered as slender bodies long in z -direction. The lift force per unit length of the wing can be related to the velocity circulation around the wing. Indeed, adding and subtracting (vanishing) integrals of v_x over two $y = \pm \text{const}$ lines we turn (1.53) into

$$F_y = \rho u \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.54)$$

Circulation over the contour is equal to the vorticity flux through the contour, which is again due to wake. One can often hear a simple explanation of the lift of the wing as being the result of $v_2 > v_1 \Rightarrow P_2 < P_1$. This is basically true and does not contradict the above argument.



The point is that the circulation over the closed contour ACDB is nonzero: $v_2 l_2 > v_1 l_1$. That would be wrong, however, to argue that $v_2 > v_1$ because $l_2 > l_1$ - neighboring fluid elements A, B do not meet again at

the trailing edge; C is shifted relative to D. Nonzero circulation around the body in translational motion requires wake. For a slender wing, the wake is very thin like a cut and a nonzero circulation means a jump of the potential ϕ across the wake²⁵. Note that for having lift one needs to break up-down symmetry. Momentum conservation suggests that one can also relate the lift to the downward deflection of the flow by the body.

One can have a nonzero circulation without a wake simply by rotation. When there is a nonzero circulation, then there is a deflecting (Magnus) force acting on a rotating moving sphere. That force is well known to all ball players from soccer to tennis. The air travels faster relative to the center of the ball where the ball surface is moving in the same direction as the air. This reduces the pressure, while on the other side of the ball the pressure increases. The result is the lift force, perpendicular to the motion (As J J Thomson put it, "the ball follows its nose"). One can roughly estimate the magnitude of the Magnus force by the

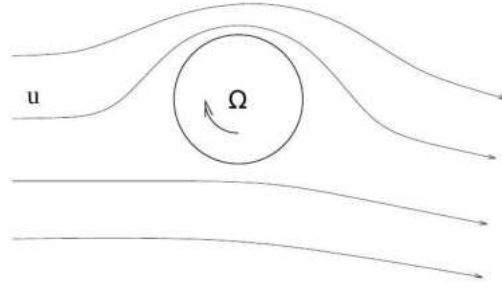


Figure 1.19 Streamlines around a rotating body.

pressure difference between the two sides ²⁶, which is proportional to the translation velocity u times the rotation frequency Ω :

$$\Delta p \simeq \rho [(u + \Omega R)^2 - (u - \Omega R)^2] / 2 = 2\rho u \Omega R \quad (1.55)$$

Magnus force is exploited by winged seeds who travel away from the parent tree superimposing rotation on their descent ²⁷, it also acts on quantum vortices moving in superfluids or superconductors. See Exercise 1.11 .

Moral: wake existence teaches us that small viscosity changes the flow not only in the boundary layer but also in the whole space, both inside and outside the wake. Physically, this is because vorticity is produced in the boundary layer and is transported outside ²⁸. Formally, viscosity is a singular perturbation that introduces the highest spatial derivative and changes the boundary conditions. On the other hand, even for a very large viscosity, inertia dominates sufficiently far from the body ²⁹.

6 Unsteady flows

Fluid flows can be kept steady only for very low Reynolds numbers and for velocities much less than sound velocity. Otherwise, either flow undergoes instabilities and is getting turbulent or sound and shock waves are excited. Both sets of phenomena are described in this Chapter.

A formal reason for instabilities is nonlinearity of the equations of fluid mechanics. For incompressible flows, the only nonlinearity is due to fluid inertia. We shall see below how a perturbation of a steady flow can grow due to inertia, thus causing an instability. For large Reynolds numbers, development of instabilities leads to a strongly fluctuating state of turbulence.

An account of compressibility, on the other hand, leads to another type of unsteady phenomena: sound waves. When density perturbation is small, velocity perturbation is much less than the speed of sound and the waves can be treated within the framework of linear acoustics. We first consider linear acoustics and discuss what phenomena appear as long as one accounts for a finiteness of the speed of sound. We then consider nonlinear acoustic phenomena, creation of shocks and acoustic turbulence.

6.1 2.1 Instabilities

At large Re most of the steady solutions of the Navier-Stokes equation are unstable and generate an unsteady flow called turbulence.

6.1.1 2.1.1 Kelvin-Helmholtz instability

Apart from a uniform flow in the whole space, the simplest steady flow of an ideal fluid is a uniform flow in a semi-infinite domain with the velocity parallel to the boundary. Physically,

it corresponds to one fluid layer sliding along another. Mathematically, it is a tangential velocity discontinuity, which is a formal steady solution of the Euler equation. It is a crude approximation to the description of wakes and shear flows. This simple solution is unstable with respect to arguably the simplest instability described by Helmholtz (1868) and Kelvin (1871). The dynamics of the Kelvin-Helmholtz instability is easy to see from Figure 2.1 where + and - denote respectively increase and decrease in velocity and pressure brought by surface modulation. Velocity over the convex

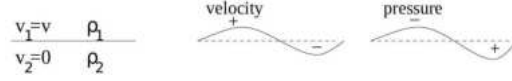


Figure 2.1 Tangential velocity discontinuity (left) and the physics of Kelvin-Helmholtz instability (right).

part is higher and the pressure is lower than over the concave part. Such pressure distribution further increases the modulation of the surface.

The perturbations \mathbf{v}' and p' satisfy the following system of equations

$$\text{div } \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}$$

Applying divergence operator to the second equation we get $\Delta p' = 0$. That means that the elementary perturbations have the following form

$$\begin{aligned} p'_1 &= \exp[i(kx - \Omega t) - kz] \\ v'_{1z} &= -ikp'_1/\rho_1(kv - \Omega) \end{aligned}$$

Indeed, the solutions of the Laplace equation which are periodic in one direction must be exponential in another direction.

To relate the upper side (indexed 1) to the lower side (indexed 2) we introduce $\zeta(x, t)$, the elevation of the surface, its time derivative is z -component of the velocity:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v'_z \quad (2.1)$$

that is $v'_z = i\zeta(kv - \Omega)$ and $p'_1 = -\zeta\rho_1(kv - \Omega)^2/k$. On the other side, we express in a similar way $p'_2 = \zeta\rho_2\Omega^2/k$. The pressure is continuous across the surface:

$$\rho_1(kv - \Omega)^2 = -\rho_2\Omega^2 \Rightarrow \Omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.2)$$

Positive $\text{Im } \Omega$ means an exponential growth of perturbations i.e. instability¹. The largest growth rate corresponds to the largest admissible wavenumber. In reality the layer, where velocity increases from zero to v , has some finite thickness δ and our approach is valid only for $k\delta \ll 1$. It is not difficult to show that in the opposite limit, $k\delta \gg 1$ when the flow can be locally considered as a linear profile, it is stable (see Rayleigh criterium below). Therefore, the maximal growth rate corresponds to $k\delta \simeq 1$, i.e. the wavelength of the most unstable perturbation is comparable to the layer thickness.

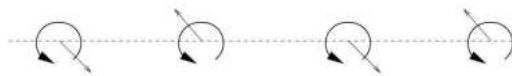


Figure 2.2 Array of vortex lines is unstable with respect to the displacements shown by straight arrows.

A complementary insight into the physics of the Kelvin-Helmholtz instability can be obtained from considering vorticity. In the unperturbed flow, vorticity $\partial v_x/\partial z$ is concentrated in the transitional layer which is thus called vortex layer (or vortex sheet when $\delta \rightarrow 0$). One can

consider a discrete version of the vortex layer as a chain of identical vortices shown in Figure 2.2. Due to symmetry, such infinite array of vortex lines is stationary since the velocities imparted to any given vortex by all others cancel. Small displacements shown by straight arrows in Figure 2.2 lead to an instability with the vortex chain breaking into pairs of vortices circling round one another. That circling motion makes an initially sinusoidal perturbation to grow into spiral rolls during the nonlinear stage of the evolution as shown in Figure 2.3 taken from the experiment. Kelvin-Helmholtz instability in the atmosphere is often made visible by corrugated cloud patterns as seen in Figure 2.4, similar patterns are seen on sand dunes. It is also believed to be partially responsible for clear air turbulence (that is atmospheric turbulence unrelated to moist convection). Numerous manifestations of this instability are found in astrophysics, from the interface between the solar wind and the Earth magnetosphere to the boundaries of galactic jets.



Figure 2.3 Spiral vortices generated by the Kelvin-Helmholtz instability.

Vortex view of the Kelvin-Helmholtz instability suggests that a unidirectional flow depending on a single transverse coordinate, like $v_x(z)$, can only be unstable if it has vorticity maximum on some surface. Such vorticity maximum is an inflection point of the velocity since $d\omega/dx = d^2v_x/dz^2$. That explains why flows without inflection points are linearly stable (Rayleigh, 1880). Examples of such flows are plane linear profile, flows in a pipe or between two planes driven by the pressure gradients, flow between two planes moving with different velocities etc ².

Our consideration of the Kelvin-Helmholtz instability was completely inviscid which presumes that the effective Reynolds number was large: $Re = v\delta/\nu \gg 1$. In the opposite limit when the friction is very strong, the velocity profile is not stationary but rather evolves according to the equation $\partial v_x(z, t)/\partial t = \nu \partial^2 v_x(z, t)/\partial z^2$ which describes the thickness growing as $\delta \propto \sqrt{\nu t}$. Such diffusing vortex layer is stable because the friction damps all the perturbations. It is thus clear that there must exist a threshold Reynolds number above which instability is possible. We now consider this threshold from a general energetic perspective.

6.1.2 2.1.2 Energetic estimate of the stability threshold

Energy balance between the unperturbed steady flow $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ and the superimposed perturbation $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ helps one to understand the role of viscosity in imposing an instability threshold. Consider the flow $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ which is a steady solution of the the Navier-Stokes equation $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0/\rho + \nu \Delta \mathbf{v}_0$. The perturbed flow $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ satisfies the equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \\ = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$



Figure 2.4 Lower cloud shows the pattern of breaking waves generated by the Kelvin-Helmholtz instability.

Making a scalar product of (2.3) with \mathbf{v}_1 and using incompressibility one gets:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial v_1^2}{\partial t} = & -v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_1^2}{2} (v_{0k} + v_{1k}) + p_1 v_{1k} - \frac{v_{1i}}{Re} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right] \end{aligned}$$

The last term disappears after the integration over the volume:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{v_1^2}{2} d\mathbf{r} = T - \frac{D}{Re} \quad (2.4) \\ T = - \int v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} d\mathbf{r}, \quad D = \int \left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right)^2 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

The term T is due to inertial forces and the term D is due to viscous friction. We see that for stability (i.e. for decay of the energy of the perturbation) one needs friction dominating over inertia:

$$Re < Re_E = \min_{v_1} \frac{D}{T} \quad (2.5)$$

The minimum is taken over different perturbation flows. Since both T and D are quadratic in the perturbation velocity then their ratio depends on the orientation and spatial dependence of $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ but not on its magnitude. For nonzero energy input T one must have $\partial v_0 / \partial r \neq 0$ (uniform flow is stable) and the perturbation velocity oriented in such a way as to have both the component v_{1i} along the mean flow and the component v_{1k} along the gradient of the mean flow. One may have positive T if the perturbation velocity is oriented relative to the mean flow gradient as, for instance, in the geometry shown in Fig. 2.5. While the

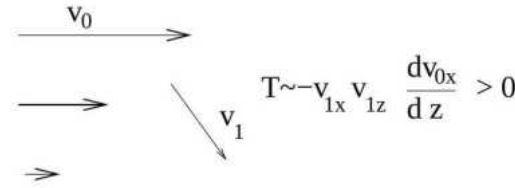


Figure 2.5 Orientation of the perturbation velocity \mathbf{v}_1 with respect to the steady shear \mathbf{v}_0 that provides for an energy flux from the shear to the perturbation.

flow is always stable for $Re < Re_E$, it is not necessary unstable when one can find a perturbation that breaks (2.5); for instability to develop, the perturbation must also evolve in such a way as to keep $T > D$. As a consequence, the critical Reynolds numbers are usually somewhat higher than those given by the energetic estimate.

6.1.3 2.1.3 Landau law

When the control parameter passes a critical value the system undergoes an instability and goes into a new state. Generally, one cannot say much about this new state except for the case when it is not very much different from the old one. That may happen when the control parameter is not far from critical. Consider $Re > Re_{cr}$ but $Re - Re_{cr} \ll Re_{cr}$. Just above the instability threshold, there is usually only one unstable mode. Let us linearize the equation

(2.3) with respect to the perturbation $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ i.e. omit the term $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$. The resulting linear differential equation with time-independent coefficients has the solution in the form $\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \exp(\gamma_1 t - i\omega_1 t)$. The exponential growth has to be restricted by the terms nonlinear in \mathbf{v}_1 . The solution of a weakly nonlinear equation can be sought in the form $\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{r})A(t)$. The equation for the amplitude $A(t)$ has to have generally the following form: $d|A|^2/dt = 2\gamma_1|A|^2 + \text{third order terms} + \dots$. The fourth-order terms are obtained by expanding further $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ and accounting for $\mathbf{v}_2 \propto \mathbf{v}_1^2$ in the equation on \mathbf{v}_1 . The growth rate turns into zero at $Re = Re_{cr}$ and generally $\gamma_1 \propto Re - Re_{cr}$ while the frequency is usually finite at $Re \rightarrow Re_{cr}$. We can thus average the amplitude equation over the time larger than $2\pi/\omega_1$ but smaller than $1/\gamma_1$. Since the time of averaging contains many periods, then among the terms of the third and fourth order only $|A|^4$ gives nonzero contribution:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4 \quad (2.6)$$

Since the time of averaging is much less than the time of the modulus change, then one can remove the overbar in the left-hand side of (2.6) and solve it as a usual ordinary differential equation. This equation has the solution

$$|A|^{-2} = \alpha/2\gamma_1 + \text{const} \cdot \exp(-2\gamma_1 t) \rightarrow \alpha/2\gamma_1$$

The saturated value changes with the control parameter according to the so-called Landau law:

$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\gamma}{\alpha} \propto Re - Re_{cr}$$

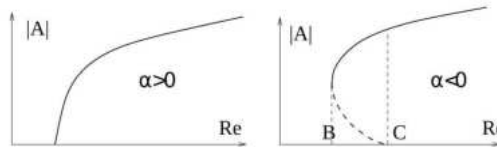
If $\alpha < 0$ then one needs $-\beta|A|^6$ term in (2.6) to stabilize the instability

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4 - \beta|A|^6 \quad (2.7)$$

The saturated value is now

$$|A|_{\max}^2 = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma_1}{\beta}}$$

Stability with respect to the variation of $|A|^2$ within the framework of (2.7) is determined by the factor $2\gamma_1 - 2\alpha|A|_{\max}^2 - 3\beta|A|_{\max}^4$. Between B and C, the steady flow is metastable. Broken curve is unstable.



The above description is based on the assumption that at $Re - Re_{cr} \ll Re_{cr}$ the only important dependence is $\gamma_1(Re)$ very much like in the Landau's theory of phase transitions (which also treats loss of stability). The amplitude A , which is non-zero on one side of the transition, is an analog of the order parameter. Cases of positive and negative α correspond to the phase transitions of the second and first order respectively.

6.2 2.2 Turbulence

As Reynolds number increases beyond the threshold of the first instability, it eventually reaches a value where the new periodic flow is getting unstable in its own turn with respect

to another type of perturbation, usually with smaller scale and consequently higher frequency. Every new instability brings about an extra degree of freedom, characterized by the amplitude and the phase of the new periodic motion. The phases are determined by (usually uncontrolled) initial perturbations. At very large Re , a sequence of instabilities produces turbulence as a superposition of motions of different scales. The resulting flow is irregular both spatially and temporally so we need to describe it statistically.



Figure 2.6 Instabilities in three almost identical convective jets lead to completely different flow patterns. Notice also appearance of progressively smaller scales as the instabilities develop.

Flows that undergo instabilities are usually getting temporally chaotic already at moderate Re because motion in the phase space of more than three interacting degrees of freedom may tend to sets (called attractors) more complicated than points (steady states) or cycles (periodic motions). Namely, there exist attractors, called strange or chaotic, that consist of saddle-point trajectories. Such trajectories have stable directions by which the system approaches attractor and unstable directions lying within the attractor. Because all trajectories are unstable on the attractor, any two initially close trajectories separate exponentially with the mean rate called the Lyapunov exponent. To intuitively appreciate how the mean stretching rate can be positive in a random flow, note that around a saddle-point more vectors undergo stretching than contraction (Exercise 2.1). Exponential separation of trajectories means instability and unpredictability of the flow patterns. The resulting fluid flow that corresponds to a strange attractor is regular in space and random in time, it is called dynamical chaos³. One can estimate the Lyapunov exponent for the Earth atmosphere by dividing the typical wind velocity 20 m/sec by the global scale 10000 km. The inverse Lyapunov exponent gives the time one can reasonably hope to predict weather, which is $10^7 \text{ m}/(20 \text{ m/sec}) = 5 \cdot 10^5 \text{ sec}$, i.e. about a week.

When the laminar flow is linearly stable at large Re (like uni-directional flows without inflection points), its basin of attraction shrinks when Re grows so that small fluctuations are able to excite turbulence which then sustains itself. In this case, between the laminar flow and turbulence there is no state with simple spatial or temporal structures.

6.2.1 2.2.1 Cascade

Here we discuss turbulence at very large Re . It is a flow random in space and in time. Such flows require statistical description that is an ability to predict mean (expectation) values of different quantities. Despite five centuries of an effort (since Leonardo Da Vinci) a complete description is still lacking but some important elements are established. The most revealing insight into the nature of turbulence presents a cascade picture, which we present in this section. It is a useful phenomenology both from a fundamental viewpoint of understanding a state with many degrees of freedom deviated from equilibrium and from a practical viewpoint of explaining the empirical fact that the drag force is finite in the inviscid limit. The finiteness of the drag coefficient, $C(Re) = F/\rho u^2 L^2 \rightarrow \text{const}$ at $Re \rightarrow \infty$ (see Figure 1.18), means that the rate of the kinetic energy input per unit mass, $\epsilon = Fu/\rho L^3 = Cu^3/2L$, stays finite when $\nu \rightarrow 0$. Where all this energy goes if consider not an infinite wake but a bounded flows, say, generated by a permanently acting fan in a room? Experiments (and everyday experience) tells us that

a fan generates some air flow whose magnitude stabilizes after a while which means that the input is balanced by the viscous dissipation. That means that the energy dissipation rate $\epsilon = \nu \int \omega^2 dV/V$ stays finite when $\nu \rightarrow 0$ (if the fluid temperature is kept constant).

Historically, understanding of turbulence started from an empirical law established by Richardson (observing seeds and balloons released in the wind): the mean squared distance between two particles in turbulence increases in a super-diffusive way: $\langle R^2(t) \rangle \propto t^3$. Here the average is over different pairs of particles. The parameter that can relate $\langle R^2(t) \rangle$ and t^3 must have dimensionality $\text{cm}^2 \text{s}^{-3}$ which is that of the dissipation rate ϵ : $\langle R^2(t) \rangle \simeq \epsilon t^3$. Richardson law can be interpreted as the increase of the typical velocity difference $\delta v(R)$ with the distance R : since there are vortices of different scales in a turbulent flow, the velocity difference at a given distance is due to vortices with comparable scales and smaller; as the distance increases, more (and larger) vortices contribute the relative velocity, which makes separation faster than diffusive (when the velocity is independent of the distance). Richardson law suggests the law of the relative velocity increase with the distance in turbulence. Indeed, $R(t) \simeq \epsilon^{1/2} t^{3/2}$ is a solution of the equation $dR/dt \simeq (\epsilon R)^{1/3}$; since $dR/dt = \delta v(R)$ then

$$\delta v(R) \simeq (\epsilon R)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\delta v)^3}{R} \simeq \epsilon \quad (2.8)$$

The last relation brings the idea of the energy cascade over scales, which goes from the scale L with $\delta v(L) \simeq u$ down to the viscous scale l defined by $\delta v(l)l \simeq \nu$. The energy flux through the given scale R can be estimated as the energy $(\delta v)^2$ divided by the time $R/\delta v$. For the so-called inertial interval of scales, $L \gg R \gg l$, there is neither force nor dissipation so that the energy flux $\epsilon(R) = \langle \delta v^3(R) \rangle / R$ may be expected to be R -independent, as suggested by (2.8). When $\nu \rightarrow 0$, the viscous scale l decreases, that is cascade is getting longer, but the amount of the flux and the dissipation rate stay the same. In other words, finiteness of ϵ in the limit of vanishing viscosity can be interpreted as locality of the energy transfer in R -space (or equivalently, in Fourier space). By using an analogy, one may say that turbulence is supposed to work as a pipe with a flux through its cross-section independent of the length of the pipe⁴. Note that the velocity difference (2.8) is expected to increase with the distance slower than linearly, i.e. the velocity in turbulence is non-Lipschitz on average, see Sect. 1.1, so that fluid trajectories are not well-defined in the inviscid limit⁵.

The cascade picture is a nice phenomenology but can one support it with any derivation? That support has been obtained by Kolmogorov in 1941 who derived the exact relation that quantifies the flux constancy. Let us derive the equation for the correlation function of the velocity at different points for an idealized turbulence whose statistics is presumed isotropic and homogeneous in space. We assume no external forces so that the turbulence must decay with time. Let us find the time derivative of the correlation function of the components of the velocity difference



Figure 2.7 Cascade.

between the points 1 and 2,

$$\langle (v_{1i} - v_{2i})(v_{1k} - v_{2k}) \rangle = \frac{2 \langle v^2 \rangle}{3} \delta_{ik} - 2 \langle v_{2i} v_{1k} \rangle$$

The time derivative of the kinetic energy is minus the dissipation rate: $\epsilon = -d \langle v^2 \rangle / 2dt$. To get the time derivative of the two-point velocity correlation function, take the Navier-Stokes equation at some point \mathbf{r}_1 , multiply it by the velocity \mathbf{v}_2 at another point \mathbf{r}_2 and average it over

time intervals ⁶ larger than $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| / |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ and smaller than L/u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{1i} v_{2k} \rangle &= -\frac{\partial}{\partial x_{1l}} \langle v_{1l} v_{1i} v_{2k} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}} \langle v_{1i} v_{2k} v_{2l} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \langle p_1 v_{2k} \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \langle p_2 v_{1i} \rangle + \nu (\Delta_1 + \Delta_2) \langle v_{1i} v_{2k} \rangle \end{aligned}$$

Statistical isotropy means that the vector $\langle p_1 \mathbf{v}_2 \rangle$ has nowhere to look but to $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, the only divergence-less such vector, \mathbf{r}/r^3 , does not satisfy the finiteness at $r = 0$ so that $\langle p_1 \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Due to the space homogeneity, all the correlation functions depend only on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_l} (\langle v_{1l} v_{1i} v_{2k} \rangle + \langle v_{2i} v_{1k} v_{1l} \rangle) + 2\nu \Delta \langle v_{1i} v_{2k} \rangle \quad (2.9)$$

We have used here $\langle v_{1i} v_{2k} v_{2l} \rangle = -\langle v_{2i} v_{1k} v_{1l} \rangle$ since under $1 \leftrightarrow 2$ both \mathbf{r} and a third-rank tensor change sign (the tensor turns into zero when $1 \rightarrow 2$). By straightforward yet lengthy derivation ⁷ one can rewrite (2.9) for the moments of the longitudinal velocity difference called structure functions,

$$S_n(r, t) = \langle [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)]^n / r^n \rangle$$

It gives the so-called Kármán-Howarth relation

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{1}{3r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 S_3) - \frac{4\epsilon}{3} + \frac{2\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) \quad (2.10)$$

The average quantity S_2 changes only together with a large-scale motion so

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} \simeq \frac{S_2 u}{L} \ll \frac{S_3}{r}$$

at $r \ll L$. On the other hand, we consider $r \gg l$, or more formally we consider finite r and take the limit $\nu \rightarrow 0$ so that the last term disappears. We assume now that ϵ has a finite limit at $\nu \rightarrow 0$ and obtain Kolmogorov's 4/5-law:

$$S_3(r) = -4\epsilon r/5 \quad (2.11)$$

That remarkable relation tells that turbulence is irreversible since S_3 does not change sign when $t \rightarrow -t$ and $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$. If one screens a movie of turbulence backwards, we can tell that something is indeed wrong! That is what is called "anomaly" in modern field-theoretical language: a symmetry of the inviscid equation (here, time-reversal invariance) is broken by the viscous term even though the latter might have been expected to become negligible in the limit $\nu \rightarrow 0$.

Here the good news end. There is no analytic theory to give us other structure functions. One may assume following Kolmogorov (1941) that ϵ is the only quantity determining the statistics in the inertial interval, then on dimensional grounds $S_n \simeq (\epsilon r)^{n/3}$. Experiment give the power laws, $S_n(r) \propto r^n$ but with the exponents ζ_n deviating from $n/3$ for $n \neq 3$. Moments of the velocity difference can be obtained from the probability density function (PDF) which describes the probability to measure the velocity difference $\delta v = u$ at the distance r : $S_n(r) = \int u^n \mathcal{P}(u, r) du$. Deviations of ζ_n from $n/3$ means that the PDF $\mathcal{P}(\delta v, r)$ is not scale invariant i.e. cannot be presented as $(\delta v)^{-1}$ times the dimensionless function of the single variable $\delta v/(\epsilon r)^{1/3}$. Apparently, there is more to turbulence than just cascade, and ϵ is not all one must know to predict the statistics of the velocity. We do not really understand the breakdown of scale invariance for three-dimensional turbulence yet we understand it for a simpler one-dimensional case of Burgers turbulence described in Sect. 2.3.4 below⁸. Both symmetries, one broken by pumping (scale invariance) and another by friction (time reversibility) are not restored even when $r/L \rightarrow 0$ and $l/r \rightarrow 0$.

To appreciate difficulties in turbulence theory, one can cast turbulence problem into that of quantum field theory. Consider the Navier-Stokes equation driven by a random force \mathbf{f} with the Gaussian probability distribution $P(\mathbf{f})$ defined by the variance $\langle f_i(0, 0) f_j(\mathbf{r}, t) \rangle = D_{ij}(\mathbf{r}, t)$. Then the probability of any flow $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ is given by the Feynman path integral over velocities satisfying the Navier-Stokes equation with different force histories:

$$\begin{aligned} & \int D\mathbf{v} D\mathbf{f} \delta(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla P/\rho - \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{f}) P(\mathbf{f}) \\ &= \int D\mathbf{v} D\mathbf{p} \exp[-D_{ij} p_i p_j + i p_i (\partial_t v_i + v_k \nabla_k v_i + \nabla_i P/\rho - \nu \Delta v_i)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Here we presented the delta-function as an integral over an extra field \mathbf{p} and explicitly made Gaussian integration over the force. One can thus see that turbulence is equivalent to the field theory of two interacting fields (\mathbf{v} and \mathbf{p}) with large Re corresponding to a strong coupling limit (for incompressible turbulence the pressure is recovered from $\text{div}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Delta P$). For fans of field theory, add that the convective derivative $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ can be identified as a covariant derivative in the framework of a gauge theory, here the velocity of the reference frame fixes the gauge.

6.2.2 2.2.2 Turbulent river and wake

With the new knowledge of turbulence as a multi-scale flow, let us now return to the large-Reynolds flows down an inclined plane and past the body.

River. Now that we know that turbulence makes the drag at large Re much larger than the viscous drag, we can understand why the behavior

of real rivers is so distinct from a laminar solution from Sect. 1.4.3. At small Re , the gravity force (per unit mass) $g\alpha$ was balanced by the viscous drag $\nu v/h^2$. At large Re , the drag is v^2/h which balances $g\alpha$ so that

$$v \simeq \sqrt{\alpha g h} \quad (2.13)$$

Indeed, as long as viscosity does not enter, this is the only combination with the velocity dimensionality that one can get from h and the effective gravity αg . For slow plain rivers (the inclination angle $\alpha \simeq 10^{-4}$ and the depth $h \simeq 10$ m), the new estimate (2.13) gives reasonable $v \simeq 10$ cm/s. Another way to describe the drag is to say that molecular viscosity ν is replaced by turbulent viscosity $\nu_T \simeq \nu h \simeq \nu Re$ and the drag is still given by viscous formula $\nu v/h^2$ but with $\nu \rightarrow \nu_T$. Intuitively, one imagines turbulent eddies transferring momentum between fluid layers.

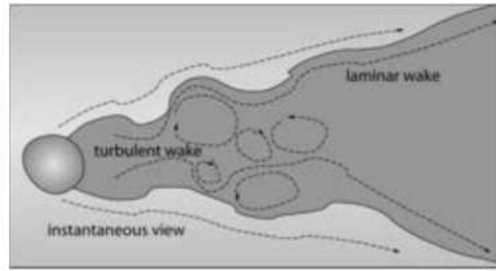


Figure 2.8 Sketch of the wake behind a body.

Wake. Let us now describe the entire wake behind a body at $Re = uL/\nu \gg 1$. Since Re is large then Kelvin's theorem holds outside the boundary layer - every streamline keeps its vorticity. Streamlines are thus divided into those of zero and nonzero vorticity. A separated region of rotational flow (wake) can exist only if streamlines don't go out of it (yet they may come in so the wake grows as one goes away from the body). Instability of the Kelvin-Helmholtz type make the boundary of the wake wavy. Oscillations then must be also present in the velocity field in the immediate outside vicinity of the wake. Still, only large-scale harmonics of turbulence are present in the outside region, because the flow is potential ($\Delta\phi = 0$) so when it changes periodically along the wake

it decays exponentially with the distance from the wake boundary. The smaller the scale the faster it decays away from the wake. Therefore, all the small-scale motions and all the dissipation are inside the turbulent wake. The boundary of the turbulent wake fluctuates in time. On the snapshot sketch in Figure 2.8 the wake is dark, broken lines with arrows are streamlines, see Figure 1.16 for a real wake photo.

Let us describe the time-averaged position of the wake boundary $Y(x)$. The average angle between the streamlines and x -direction is $v(x)/u$ where $v(x)$ is the rms turbulent velocity, which can be obtained from the condition that the momentum flux through the wake must be x independent since it is equal to the drag force $F \simeq \rho u v Y^2$ like in (1.52). Then

$$\frac{dY}{dx} = \frac{v(x)}{u} \simeq \frac{F}{\rho u^2 Y^2}$$

so that

$$Y(x) \simeq \left(\frac{Fx}{\rho u^2} \right)^{1/3}, \quad v(x) \simeq \left(\frac{Fu}{\rho x^2} \right)^{1/3}$$

One can substitute here $F \simeq \rho u^2 L^2$ and get

$$Y(x) \simeq L^{2/3} x^{1/3}, \quad v(x) \simeq u(L/x)^{2/3}$$

Note that Y is independent on u for a turbulent wake. Current Reynolds number, $Re(x) = v(x)Y(x)/\nu \simeq (L/x)^{1/3}uL/\nu = (L/x)^{1/3}Re$, decreases with x and a turbulent wake turns into a laminar one at $x > LRe^3 = L(uL/\nu)^3$ — the transition distance apparently depends on u . Inside the laminar wake, under the assumption $v \ll u$ we can neglect $\rho^{-1}\partial p/\partial x \simeq v^2/x$ in the steady Navier-Stokes equation which then turns into the (parabolic) diffusion equation with x playing the role of time:

$$u \frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_x \quad (2.14)$$

At $x \gg \nu/u$, the solution of this equation acquires the universal form

$$v_x(x, y, z) = -\frac{F_x}{4\pi\eta x} \exp \left[-\frac{u(z^2 + y^2)}{4\nu x} \right]$$

where we have used (1.52) in deriving the coefficient. A prudent thing to ask now is why we accounted for the viscosity in (2.14) but not in the stress tensor (1.50). The answer is that $\sigma_{xx} \propto \partial v_x/\partial x \propto 1/x^2$ decays fast while $\int dy \sigma_{yx} = \int dy \partial v_x/\partial y$ vanishes identically.

We see that the laminar wake width is $Y \simeq \sqrt{\nu x/u}$ that is the wake is parabolic. The Reynolds number further decreases in the wake by the law $v_x Y/\nu \propto x^{-1/2}$. Recall that in the Stokes flow $v \propto 1/r$ only for $r < \nu/u$, while in the wake $v_x \propto 1/x$ ad infinitum. Comparing laminar and turbulent estimates, we see that for $x \ll LRe^3$, the turbulent estimate gives a larger width: $Y \simeq L^{2/3}x^{1/3} \gg (\nu x/u)^{1/2}$. On the other hand, in a turbulent wake the width grows and the velocity perturbation decreases with the distance slower than in a laminar wake.

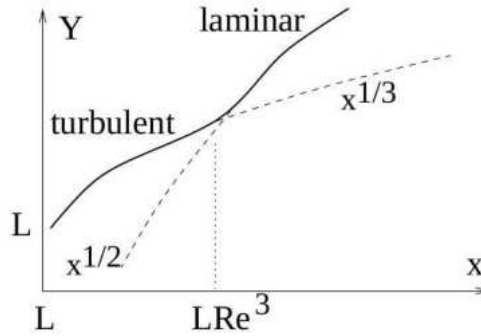


Figure 2.9 Wake width Y versus distance from the body x .

6.3 2.3 Acoustics

6.3.1 2.3.1 Sound

Small perturbations of density in an ideal fluid propagate as sound waves that are described by the continuity and Euler equations linearized with respect to the perturbations $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0 \quad (2.15)$$

To close the system we need to relate the variations of the pressure and density i.e. specify the equation of state. If we denote the derivative of the pressure with respect to the density as c^2 then $p' = c^2 \rho'$. Small oscillations are potential so we introduce $\mathbf{v} = \nabla \phi$ and get from (2.15)

$$\phi_{tt} - c^2 \Delta \phi = 0 \quad (2.16)$$

We see that indeed c is the velocity of sound. What is left to establish is what kind of the derivative $\partial p/\partial \rho$ one uses, isothermal or adiabatic. For a gas, isothermal derivative gives $c^2 = P/\rho$ while the adiabatic law

$P \propto \rho^\gamma$ gives:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.17)$$

One uses an adiabatic equation of state when one can neglect the heat exchange between compressed (warmer) and expanded (colder) regions. That means that the thermal diffusivity (estimated as thermal velocity times the mean free path) must be less than the sound velocity times the wavelength. Since the sound velocity is of the order of the thermal velocity, it requires the wavelength to be longer than the mean free path, which is always so. Newton already knew that $c^2 = \partial p/\partial \rho$. Experimental data from Boyle showed $p \propto \rho$ (i.e. they were isothermal) which suggested for air $c^2 = p/\rho \simeq 290$ m/s, well off the observed value 340 m/s at 20 C. Only hundred years later Laplace got the true (adiabatic) value with $\gamma = 7/5$.

All velocity components, pressure and density perturbations also satisfy the wave equation (2.16). A particular solution of this equation is a monochromatic plane wave, $\phi(\mathbf{r}, t) = \cos(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. The relation between the frequency ω and the wavevector \mathbf{k} is called dispersion relation; for acoustic waves it is linear: $\omega = ck$. In one dimension, the general solution of the wave equation is particularly simple:

$$\phi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

where f_1, f_2 are given by two initial conditions, for instance, $\phi(x, 0)$ and $\phi_t(x, 0)$. Note that only $v_x = \partial \phi/\partial x$ is nonzero so that sound waves in fluids are longitudinal. Any localized 1d initial perturbation (of density, pressure or velocity along x) thus breaks into two plane wave packets moving in opposite directions without changing their shape. In every such packet, $\partial/\partial t = \pm c \partial/\partial x$ so that the second equation (2.15) gives $v = p'/\rho c = c\rho'/\rho$. The wave amplitude is small when $\rho' \ll \rho$ which requires $v \ll c$. The (fast) pressure variation in a sound wave, $p' \simeq \rho v c$, is much larger than the (slow) variation $\rho v^2/2$ one estimates from the Bernoulli theorem.

Luckily, one can also find the general solution in the spherically symmetric case since the equation

$$\phi_{tt} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2.18)$$

turns into $h_{tt} = c^2 \partial^2 h/\partial r^2$ by the substitution $\phi = h/r$. Therefore, the general solution of (2.18) is

$$\phi(r, t) = r^{-1} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]$$

The energy density of sound waves can be obtained by expanding $\rho E + \rho v^2/2$ up to the second-order terms in perturbations. We neglect the zero-order term $\rho_0 E_0$ because it is constant and the first-order term $\rho' \partial(\rho E)/\partial \rho = w_0 \rho'$ because it is related to the mass change in a given unit volume and disappears after the integration over the whole volume. We are left with the quadratic terms:

$$E_w = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}$$

The energy flux with the same accuracy is

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} (w + v^2/2) \approx \rho \mathbf{v} w = w' \rho_0 \mathbf{v} + w_0 \rho' \mathbf{v}$$

Again we disregard $w_0 \rho' \mathbf{v}$ which corresponds to $w_0 \rho'$ in the energy and disappears after the integration over the whole volume. The enthalpy variation is $w' = p'(\partial w / \partial p)_s = p' / \rho \approx p' / \rho_0$ and we obtain

$$\mathbf{q} = p' \mathbf{v}$$

The energy and the flux are related by $\partial E_w / \partial t + \text{div } p' \mathbf{v} = 0$. In a plane wave, $E_w = \rho_0 v^2$ and $q = c E_w$. The energy flux is also called acoustic intensity. To amplify weak sounds and damp strong ones, our ear senses loudness as the logarithm of the intensity for a given frequency. This is why the acoustic intensity is traditionally measured not in watts per square meter but in the units of the intensity logarithm called decibels: $q(\text{ dB}) = 120 + 10 \log_{10} q(\text{ W/m}^2)$.

The momentum density is

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \rho' \mathbf{v} = \rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{q} / c^2$$

Acoustic perturbation that exists in a finite volume not restricted by walls has a nonzero total momentum $\int \mathbf{q} dV / c^2$, which corresponds to the mass transfer. Comment briefly on the momentum of a phonon in solids, which is defined as a sinusoidal perturbation of atom displacements. Monochromatic wave in these (Lagrangian) coordinates has zero momentum⁹. A perturbation, which is sinusoidal in Eulerian coordinates, has a nonzero momentum at second order (where Eulerian and Lagrangian differ). Indeed, let us consider the Eulerian velocity field as a monochromatic wave with a given frequency and a wavenumber:

$v(x, t) = v_0 \sin(kx - \omega t)$. The Lagrangian coordinate $X(t)$ of a fluid particle satisfies the following equation:

$$\dot{X} = v(X, t) = u \sin(kX - \omega t) \quad (2.19)$$

This is a nonlinear equation, which can be solved by iterations, $X(t) = X_0 + X_1(t) + X_2(t)$ assuming $v \ll \omega/k$. The assumption that the fluid velocity is much smaller than the wave phase velocity is equivalent to the assumption that the fluid particle displacement during the wave period is much smaller than the wavelength. Such iterative solution gives oscillations at first order and a mean drift at second order:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{u}{\omega} \cos(kX_0 - \omega t) \\ X_2(t) &= \frac{ku^2 t}{2\omega} + \frac{ku^2}{2\omega^2} \sin 2(kX_0 - \omega t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

We see that at first order in wave amplitude the perturbation propagates while at second order the fluid itself flows.

6.3.2 2.3.2 Riemann wave

As we have seen, an infinitesimally small one-dimensional acoustic perturbation splits into two simple waves which then propagate without changing their forms. Let us show that such purely adiabatic waves of a permanent shape are impossible for finite amplitudes (Earnshaw paradox): In the reference frame moving with the speed c one would have a steady motion with the continuity equation $\rho v = \text{const} = C$ and the Euler equation $v dv = dp / \rho$ giving $dp/d\rho = (C/\rho)^2$ i.e. $d^2 p / d\rho^2 < 0$ which contradicts the second law of thermodynamics. It

is thus clear that a simple plane wave must change under the action of a small factor of nonlinearity.

Consider 1d adiabatic motion of a compressible fluid with $p = p_0 (\rho/\rho_0)^\gamma$. Let us look for a simple wave where one can express any two of v, p, ρ via the remaining one. This is a generalization for a nonlinear case of what we did for a linear wave. Say, we assume everything to be determined by v that is $p(v)$ and $\rho(v)$. Euler and continuity equations take the form:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} c^2(v) \frac{d\rho}{dv} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{d\rho}{dv} \frac{dv}{dt} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}$$

Here $c^2(v) \equiv dp/d\rho$. Excluding $d\rho/dv$ one gets

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \pm c(v) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.21)$$

Two signs correspond to waves propagating in the opposite directions. In a linear approximation we had $u_t + cu_x = 0$ where $c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$. Now, we find

$$\begin{aligned} c(v) &= \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0 + \delta \rho}} \\ &= c \left(1 + \frac{\delta p}{2p_0} - \frac{\delta \rho}{2\rho_0} \right) = c + v \frac{\gamma - 1}{2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

since $\delta\rho/\rho_0 = v/c$. The local sound velocity increases with the amplitude since $\gamma > 1$, that is the positive effect of the pressure increase overcomes the negative effect of the density increase.

Taking a plus sign in (2.21) we get the equation for the simple wave propagating rightwards ¹⁰

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c + v \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

This equation describes the simple fact that the higher the amplitude of the perturbation the faster it propagates, both because of higher velocity and of higher pressure gradient (J S Russel in 1885 remarked that "the sound of a cannon travels faster than the command to fire it"). That means that the fluid particle with faster velocity propagates faster and will catch up slower moving particles. Indeed, if we have the initial distribution $v(x, 0) = f(x)$ then the solution of (2.23) is given by an implicit relation

$$v(x, t) = f \left[x - \left(c + v \frac{\gamma + 1}{2} \right) t \right] \quad (2.24)$$

which can be useful for particular f but is not of much help in a general case. Explicit solution can be written in terms of characteristics (the lines in $x - t$ plane that correspond to constant v):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = c + v \frac{\gamma + 1}{2} \Rightarrow x = x_0 + ct + \frac{\gamma + 1}{2} v(x_0) t \quad (2.25)$$

where $x_0 = f^{-1}(v)$. The solution (2.25) is called simple or Riemann wave. In the variables $\xi = x - ct$ and $u = v(\gamma + 1)/2$ the equation takes the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{du}{dt} = 0$$

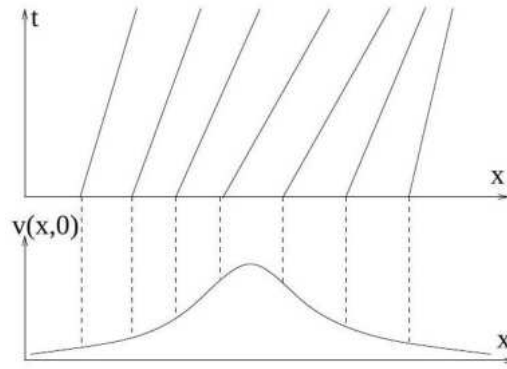


Figure 2.10 Characteristics (upper panel) and the initial velocity distribution (lower panel). which describes freely moving particles. Indeed, we see that the characteristics are straight lines with the slopes given by the initial distribution $v(x,0)$, that is every fluid particle propagates with a constant velocity. It is seen that the parts where initially $\partial v(x,0)/\partial x$ were positive will decrease their slope while the negative slopes in $\partial v(x,0)/\partial x$ are getting steeper.

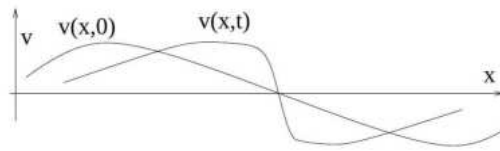


Figure 2.11 Evolution of the velocity distribution towards wavebreaking.

The characteristics are actually Lagrangian coordinates: $x(x_0, t)$. The characteristics cross in $x - t$ plane (and particles hit each other) when $(\partial x / \partial x_0)_t$ turns into zero that is

$$1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dv}{dx_0} t = 0$$

which first happens with particles that corresponds to $dv/dx_0 = f'(x_0)$ maximal negative that is $f''(x_0) = 0$. When characteristics cross, we have different velocities at the same point in space which corresponds to a shock.

General remark: Notice the qualitative difference between the properties of the solutions of the hyperbolic equation $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ and the elliptic equations, say, Laplace equation. As was mentioned in Section 1.3.1, elliptic equations have solutions and its derivatives regular everywhere inside the domain of existence. On the contrary, hyperbolic equations propagate perturbations along the characteristics and characteristics can cross (when c depends on u or x, t) leading to singularities.

6.3.3 2.3.3 Burgers equation

Nonlinearity makes the propagation velocity depending on the amplitude, which leads to crossing of characteristics and thus to wave breaking: any acoustic perturbation tends to create a singularity (shock) in a finite time. Account of higher spatial derivatives is necessary near a shock. In this lecture, we account for the next derivative, (the second one) which corresponds to viscosity:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (2.26)$$

This is the Burgers equation, the first representative of the small family of universal nonlinear equations (two other equally famous members, Korteweg-de-Vries and Nonlinear Schrödinger Equations are considered in the next Chapter where we account, in particular, for the third

derivative in acoustic-like perturbations). Burgers equation is a minimal model of fluid mechanics: a single scalar field $u(x, t)$ changes in one dimension under the action of inertia and friction. This equation describes wide classes of systems with hydrodynamic-type non-linearity, $(u\nabla)u$, and viscous dissipation. It can be written in a potential form $u = \nabla\phi$ then $\phi_t = -(\nabla\phi)^2/2 + \nu\Delta\phi$; in such a form it can be considered in 1 and 2 dimensions where it describes in particular the surface growth under uniform deposition and diffusion¹¹: the deposition contribution into the time derivative of the surface height $\phi(r)$ is proportional to the flux per unit area, which is inversely proportional to the area: $[1 + (\nabla\phi)^2]^{-1/2} \approx 1 - (\nabla\phi)^2/2$, as shown in Figure 2.12.

Burgers equation can be linearized by the Hopf substitution $u = -2\nu\varphi_\xi/\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi}}{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = \varphi C'(t)$$

which by the change $\varphi \rightarrow \varphi \exp C$ (not changing u) is brought to the linear diffusion equation:

$$\varphi_t - \nu\varphi_{\xi\xi} = 0$$

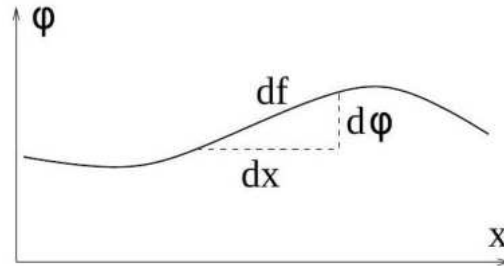


Figure 2.12 If the x -axis is along the direction of the local surface change then the local area element is $df = \sqrt{(dx)^2 + (d\phi)^2} = dx\sqrt{1 + (\nabla\phi)^2}$.

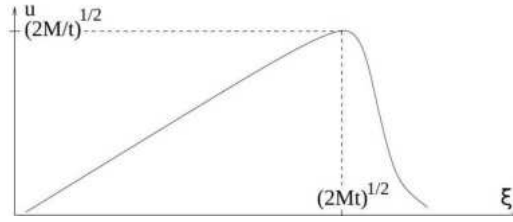
The initial value problem for the diffusion equation is solved as follows:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi', 0) \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t}\right] d\xi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi')^2}{4\pi\nu t} - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\xi'} u(\xi'', 0) d\xi''\right] d\xi' \end{aligned} \quad (2.27)$$

Despite the fact that the Burgers equation describes a dissipative system, it conserves momentum (as any viscous equation does), $M = \int u(x)dx$. If the momentum is finite, then any perturbation evolves into a universal form depending only on M and not on the form of $u(\xi, 0)$. At $t \rightarrow \infty$, (2.27) gives $\varphi(\xi, t) \rightarrow \pi^{-1/2} F[\xi(4\nu t)^{-1/2}]$ where

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\eta^2 - \frac{1}{2\nu} \int_0^{(y-\eta)\sqrt{4\nu t}} u(\eta', 0) d\eta'\right] d\eta \\ &\approx e^{-M/4\nu} \int_{-\infty}^y e^{-\eta^2} d\eta + e^{M/4\nu} \int_y^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \end{aligned} \quad (2.28)$$

Solutions with positive and negative M are related by the transform $u \rightarrow -u$ and $\xi \rightarrow -\xi$.



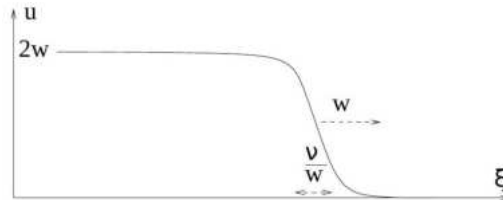
Note that M/ν is the Reynolds number and it does not change while the perturbation spreads. This is a consequence of momentum conservation in one dimension. In a free viscous decay of a d -dimensional flow, usually velocity decays as $t^{-d/2}$ while the scale grows as $t^{1/2}$ so that the Reynolds number evolves as $t^{(1-d)/2}$. For example, we have seen that the Reynolds number decreases in a wake behind the body.

When $M/\nu \gg 1$ the solution looks particularly simple, as it acquires a sawtooth form. In the interval $0 < y < M/2\nu$ (i.e. $0 < \xi < \sqrt{2Mt}$) the first integral in (2.28) is negligible and $F \sim \exp(-y^2)$ so that $u(\xi, t) = \xi/t$. For both $\xi < 0$ and $\xi > \sqrt{2Mt}$ we have $F \sim \text{const} + \exp(-y^2)$ so that u is exponentially small there.

An example of the solution with an infinite momentum is a steady propagating shock. Let us look for a traveling wave solution $u(\xi - wt)$. Integrating the Burgers equation once and assuming $u \rightarrow 0$ at least at one of the infinities, we get $-uw + u^2/2 = \nu u_\xi$. Integrating again:

$$u(\xi, t) = \frac{2w}{1 + C \exp[w(\xi - wt)/\nu]} \quad (2.29)$$

We see that this is a shock having the width ν/w and propagating with the velocity which is half the velocity difference on its sides. A simple explanation is that the shock front is the place where a moving fluid particle hits a standing fluid particle, they stick together and continue with half velocity due to momentum conservation. The form of the shock front is steady since nonlinearity is balanced by viscosity.



Burgers equation is Galilean invariant, that is if $u(\xi, t)$ denotes a solution so does $u(\xi - wt) + w$ for an arbitrary w . In particular, one can transform (2.29) into a standing shock, $u(\xi, t) = w \tanh(w\xi/2\nu)$.

6.3.4 2.3.4 Acoustic turbulence

The shock wave (2.29) dissipates energy with the rate $\nu \int u_x^2 dx$ independent of viscosity, see (2.30) below. In compressible flows, shock creation is a way to dissipate finite energy in the inviscid limit (in incompressible flows, that was achieved by turbulent cascade). The solution (2.29) shows how it works: velocity derivative goes to infinity as the viscosity goes to zero. In the inviscid limit, the shock is a velocity discontinuity.

Consider now acoustic turbulence produced by a pumping correlated on much larger scales, for example, pumping a pipe from one end by frequencies Ω much less than cw/ν , so that the Reynolds number is large. Upon propagation along the pipe, such turbulence evolves into a set of shocks at random positions with the mean distance between shocks $L \simeq c/\Omega$ far exceeding the shock width ν/w which is a dissipative scale. For every shock (2.29),

$$\begin{aligned}
S_3(x) &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} [u(x+x') - u(x')]^3 dx' \approx -8w^3x/L \\
\epsilon &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \nu u_x^2 dx \approx 2w^3/3L
\end{aligned} \tag{2.30}$$

which gives:

$$S_3 = -12\epsilon x \tag{2.31}$$

This formula is a direct analog of the flux law (2.11). As well as in Sect. 2.2.1, that would be wrong to assume $S_n \simeq (\epsilon x)^{n/3}$, since shocks give much larger contribution for $n > 1$: $S_n \simeq w^n x/L$, here x/L is the probability to find a shock in the interval x .

Generally, $S_n(x) \sim C_n|x|^n + C'_n|x|$ where the first term comes from the smooth parts of the velocity (the right x -interval in Figure 2.13) while the second comes from $O(x)$ probability to have a shock in the interval x .

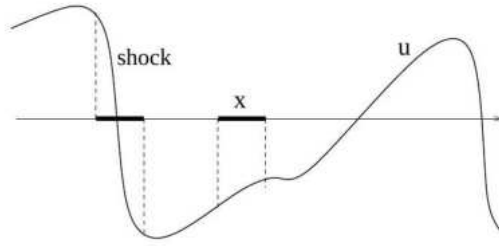


Figure 2.13 Typical velocity profile in Burgers turbulence.

The scaling exponents, $\xi_n = d \ln S_n / d \ln x$, thus behave as follows: $\xi_n = n$ for $0 \leq n \leq 1$ and $\xi_n = 1$ for $n > 1$. Like for incompressible (vortex) turbulence in Sect. 2.2.1, that means that the probability distribution of

the velocity difference $P(\delta u, x)$ is not scale-invariant in the inertial interval, that is the function of the re-scaled velocity difference $\delta u/x^a$ cannot be made scale-independent for any a . Simple bi-modal nature of Burgers turbulence (shocks and smooth parts) means that the PDF is actually determined by two (non-universal) functions, each depending on a single argument: $P(\delta u, x) = \delta u^{-1} f_1(\delta u/x) + x f_2(\delta u/u_{rms})$. Breakdown of scale invariance means that the low-order moments decrease faster than the high-order ones as one goes to smaller scales. That means that the level of fluctuations increases with the resolution: the smaller the scale the more probable are large fluctuations. When the scaling exponents ξ_n do not lie on a straight line, this is called an anomalous scaling since it is related again to the symmetry (scale invariance) of the PDF broken by pumping and not restored even when $x/L \rightarrow 0$.

Alternatively, one can derive the equation on the structure functions similar to (2.10):

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{\partial S_3}{3\partial x} - 4\epsilon + \nu \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \tag{2.32}$$

Here $\epsilon = \nu \langle u_x^2 \rangle$. Equation (2.32) describes both a free decay (then ϵ depends on t) and the case of a permanently acting pumping which generates turbulence statistically steady for scales less than the pumping length. In the first case, $\partial S_2 / \partial t \simeq S_2 u / L \ll \epsilon \simeq u^3 / L$ (where L is a typical distance between shocks) while in the second case $\partial S_2 / \partial t = 0$. In both cases, $S_3 = -12\epsilon x + 3\nu \partial S_2 / \partial x$. Consider now limit $\nu \rightarrow 0$ at fixed x (and t for decaying turbulence).

Shock dissipation provides for a finite limit of ϵ at $\nu \rightarrow 0$ which gives (2.31). Again, a flux constancy fixes $S_3(x)$ which is universal that is determined solely by ϵ and depends neither on the initial statistics for decay nor on the pumping for steady turbulence. Higher moments can be related to the additional integrals of motion, $E_n = \int u^{2n} dx/2$, which are all conserved by the inviscid Burgers equation. Any shock dissipates the finite amount ϵ_n of E_n in the limit $\nu \rightarrow 0$ so that one can express S_{2n+1} via these dissipation rates for integer n : $S_{2n+1} \propto \epsilon_n x$ (see the exercise 2.5). That means that the statistics of velocity differences in the inertial interval depends on the infinitely many pumping-related parameters, the fluxes of all dynamical integrals of motion.

For incompressible (vortex) turbulence described in Sect. 2.2.1, we have neither understanding of structures nor classification of the conservation laws responsible for an anomalous scaling.

6.3.5 2.3.5 Mach number

Compressibility leads to finiteness of the propagation speed of perturbations. Here we consider the motions (of the fluid or bodies) with the velocity exceeding the sound velocity. The propagation of perturbations in more than 1 dimension is peculiar for supersonic velocities. Indeed, consider fluid moving uniformly with the velocity \mathbf{v} . If there is a small disturbance at some place O, it will propagate with respect to the fluid with the sound velocity c . All possible velocities of propagation in the rest frame are given by $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ for all possible directions of the unit vector \mathbf{n} . That means that in a subsonic case ($v < c$) the perturbation

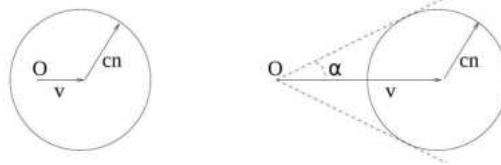


Figure 2.14 Perturbation generated at O in a fluid that moves with a subsonic (left) and supersonic (right) speed v . No perturbation can reach the outside of the Mach cone shown by broken lines.

propagates in all directions around the source O and eventually spreads to the whole fluid. This is seen from Figure 2.14 where the left circle contains O inside. However, in a supersonic case, vectors $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ all lie within a 2α -cone with $\sin \alpha = c/v$ called the Mach angle. Outside the Mach cone shown in Figure 2.14 by broken lines, the fluid stays undisturbed. Dimensionless ratio $v/c = \mathcal{M}$ is called the Mach number, which is a control parameter like Reynolds number, flows are similar for the same Re and \mathcal{M} .

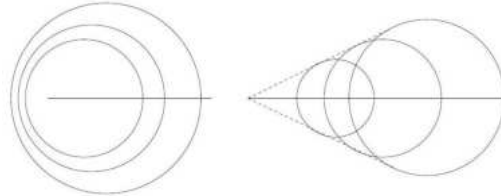


Figure 2.15 Circles are constant-phase surfaces of an acoustic perturbation generated in a fluid that moves to the right with a subsonic (left) and supersonic (right) speed. Alternatively, that may be seen as sound generated by a source moving to the left.

If sound is generated in a moving fluid (by, say, periodic pulsations), the circles in Figure 2.15 correspond to the lines of a constant phase. The figure shows that the wavelength (the distance between the constant phase surfaces) is smaller to the left of the source. For the case of a moving source this means that the wavelength is shorter in front of the source and longer behind it. For the case of a moving fluid that means the

wavelength is shorter upwind. The frequencies registered by the observer are however different in these two cases:

- i) When the emitter and receiver are at rest while the fluid moves, then the frequencies emitted and received are the same; the wavelength upwind is smaller by the factor $1 - v/c$ because the propagation speed $c - v$ is smaller in a moving fluid.
- ii) When the source moves towards the receiver while the fluid is still, then the propagation speed is c and the smaller wavelength corresponds to the frequency received being larger by the factor $1/(1 - v/c)$. This frequency change due to a relative motion of source and receiver is called Döppler effect. This effect is used to determine experimentally the fluid velocity by scattering sound or light on particles carried by the flow ¹².

When receiver moves relative to the fluid, it registers the frequency which is different from the frequency ck measured in the fluid frame. Let us find the relation between the frequency and the wavenumber of the sound propagating in a moving fluid and registered in the rest frame. The monochromatic wave is $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - ckt)$ in a reference frame moving with the fluid. The coordinates in moving and rest frames are related as $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ so in the rest frame we have $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)$, which means that the frequency measured in the rest frame is as follows:

$$\omega_k = ck + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.33)$$

This change of the frequency, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$, is called Döppler shift. When sound propagates upwind, one has $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) < 0$, so that a standing person hears a lower tone than those gone with the wind. Another way to put it is that the wave period is larger since more time is needed for a wavelength to pass our ear as the wind sweeps it.

Consider now a wave source that oscillates with the frequency ω_0 and moves with the velocity \mathbf{u} . The wave in a still air has the frequency $\omega = ck$. To relate ω and ω_0 , pass to the reference frame moving with the source where $\omega_k = \omega_0$ and the fluid moves with $-\mathbf{u}$ so that (2.33) gives $\omega_0 = ck - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \omega[1 - (u/c) \cos \theta]$, where θ is the angle between \mathbf{u} and \mathbf{k} .

Let us now look at (2.33) for $v > c$. We see that the frequency of sound in the rest frame turns into zero on the Mach cone (also

called the characteristic surface). Condition $\omega_k = 0$ defines the cone surface $ck = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ or in any plane the relation between the components: $v^2 k_x^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2)$. The propagation of perturbation in x-y plane is determined by the constant-phase condition $k_x dx + k_y dy = 0$ and $dy/dx = -k_x/k_y = \pm c/\sqrt{v^2 - c^2}$ which again correspond to the broken straight lines in Figure 2.15 with the same Mach angle $\alpha = \arcsin(c/v) = \arctan(c/\sqrt{v^2 - c^2})$. We thus see that there is a stationary perturbation along the Mach surface, acoustic waves inside it and undisturbed fluid outside.

Let us discuss now a flow past a body in a compressible fluid. For a slender body like a wing, flow perturbation can be considered small like we did in Sect. 1.5.4, only now including density: $u + \mathbf{v}, \rho_0 + \rho', P_0 + P'$. For small perturbations, $P' = c^2 \rho'$. Linearization of the steady Euler and continuity equations gives ¹³

$$\rho_0 u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla P' = -c^2 \nabla \rho', \quad u \frac{\partial \rho'}{\partial x} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2.34)$$

Taking curl of the Euler equation, we get $\partial \omega / \partial x = 0$ i.e. x -independent vorticity. Since vorticity is zero far upstream it is zero everywhere (in a linear approximation ¹⁴). We thus have a potential flow, $\mathbf{v} = \nabla \phi$, which satisfies

$$(1 - \mathcal{M}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.35)$$

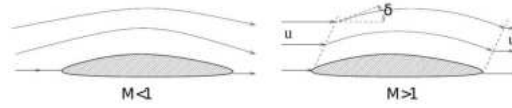


Figure 2.16 Subsonic (left) and supersonic (right) flow around a slender wing.

Here the Mach number, $\mathcal{M} = u/c$, determines whether the equation is elliptic (when $\mathcal{M} < 1$ and the streamlines are smooth) or hyperbolic (when $\mathcal{M} > 1$ and the streamlines are curved only between the Mach planes extending from the ends of the wing and straight outside).

In the elliptic case, the change of variables $x \rightarrow x(1 - \mathcal{M}^2)^{-1/2}$ turns (2.35) into Laplace equation, $\text{div } \mathbf{v} = \Delta\phi = 0$, which we had for an incompressible case. To put it simply, at subsonic speeds, compressibility of the fluid is equivalent to a longer body. Since the lift is proportional

to the velocity circulation i.e. to the wing length then we conclude that compressibility increases the lift by $(1 - \mathcal{M}^2)^{-1/2}$.

In the hyperbolic case, the solution is

$$\phi = F(x - By), \quad B = (\mathcal{M}^2 - 1)^{-1/2}$$

The boundary condition on the body having the shape $y = f(x)$ is $v_y = \partial\phi/\partial y = uf'(x)$, which gives $F = -Uf/B$. That means that the streamlines repeat the body shape and turn straight behind the rear Mach surface (in the linear approximation). We see that passing through the Mach surface the velocity and density have a jump proportional to $f'(0)$. That means that Mach surfaces (like planes or cones described here) are actually shocks. One can relate the flow properties before and after the shock by the conservation laws of mass, energy and momentum called in this case Rankine-Hugoniot relations. That means that if w is the velocity component normal to the front then the fluxes ρw , $\rho w(W + w^2/2) = \rho w [\gamma P/(\gamma - 1)\rho + w^2/2]$ and $P + \rho w^2$ must be continuous through the shock. That gives three three relations that can be solved for the pressure, velocity and density after the shock (Exercise 2.4). In particular, for a slender body when the streamlines deflect by a small angle $\delta = f'(0)$ after passing through the shock, we get the pressure change due to the velocity decrease:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &\propto \frac{u^2 - (u + v_x)^2 - v_y^2}{c^2} = \mathcal{M}^2 \left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}} \right)^2 - \delta^2 \right] \\ &\approx \frac{2\delta\mathcal{M}^2}{\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

The compressibility contribution to the drag is proportional to the pressure drop and thus the drag jumps when \mathcal{M} crosses unity due to appearance of shock and the loss of acoustic energy radiated away between the Mach planes. Drag and lift singularity at $\mathcal{M} \rightarrow 1$ is sometimes referred to as "sound barrier". Apparently, our assumption on small perturbations does not work at $\mathcal{M} \rightarrow 1$. For comparison, recall that the wake contribution into the drag is proportional to ρu^2 , while the shock contribution is proportional to $P\mathcal{M}^2/\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1} \simeq \rho u^2/\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}$.

We see that in a linear approximation, the steady-state flow perturbation does not decay with distance. Account of nonlinearity leads to the conclusion that the shock amplitude decreases away from the body. We have learnt in Sect. 2.3.2 that the propagation speed depends on the amplitude and so must the angle α , which means that the Mach surfaces are straight only where the amplitude is small, which is usually far away from the body. Weak shocks are described by (2.28) with ξ being coordinate perpendicular to the Mach surface. Generally, Burgers equation can be used only for $\mathcal{M} - 1 \ll 1$. Indeed, according to (2.28,2.29), the front width is

$$\frac{\nu}{u - c} = \frac{\nu}{c(\mathcal{M} - 1)} \simeq \frac{lv_T}{c(\mathcal{M} - 1)}$$

which exceeds the mean free path l only for $\mathcal{M} - 1 \ll 1$ since the molecular thermal velocity v_T and the sound velocity c are comparable (see also Sect. 1.4.4). To be consistent in the framework of continuous media, strong shocks must be considered as discontinuities.

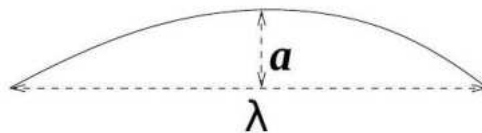
7 Dispersive Waves

In this Chapter, we consider systems that support small-amplitude waves whose speed depends on wavelength. This is in distinction from acoustic waves (or light in the vacuum) that all move with the same speed so that a small-amplitude one-dimensional perturbation propagates without changing its shape. When the speeds of different Fourier harmonics are different then the shape of a perturbation generally changes as it propagates. In particular, initially localized perturbation spreads. That is dispersion of wave speed leads to packet dispersion in space. This is why such waves are called dispersive. Since different harmonics move with different speeds, then they separate with time and can be found subsequently in different places. As a result, for quite arbitrary excitation mechanisms one often finds perturbation locally sinusoidal, the property well known to everybody who observed waves on water surface. Surface waves is the main subject of analysis in this section but the ideas and results apply equally well to numerous other dispersive waves that exist in bulk fluids, plasma and solids (where dispersion usually results from some anisotropy or inhomogeneity of the medium). We shall try to keep our description universal when we turn to consideration of nonlinear dispersive waves having finite amplitudes. We shall consider weak nonlinearity assuming amplitudes to be small and weak dispersion which is possible in two distinct cases: i) when the dispersion relation is close to acoustic and ii) when waves are excited in a narrow spectral interval. These two cases correspond respectively to the Korteweg - de Vries Equation and the Nonlinear Schrödinger Equation, which are as universal for dispersive waves as the Burgers equation for non-dispersive waves. In particular, the results of this Chapter are as applicable to nonlinear optics and quantum physics, as to fluid mechanics.

7.1 3.1 Linear waves

To have waves, one either needs inhomogeneity of fluid properties or compressibility. Here we consider an incompressible fluid with an extreme form of inhomogeneity - open surface. In this Section, we shall consider surface waves as an example of dispersive wave systems, account for gravity and surface tension as restoring forces and for viscous friction. We then introduce general notions of phase and group velocities, which are generally different for dispersive waves. We discuss physical phenomena that appear because of that difference.

Linear waves can be presented as superposition of plane waves $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Therefore, linear waves of every type are completely characterized by their so called dispersion relation between wave frequency ω and wavelength λ . Before doing formal derivations for surface waves, we show a simple way to estimate $\omega(\lambda)$ by using either the Newton's second law or the virial theorem which states that for small oscillations mean kinetic energy is equal to the mean potential energy.



Consider vertical oscillations of a fluid with the elevation amplitude a and the frequency ω . The fluid velocity can be estimated as ωa and the acceleration as $\omega^2 a$. When the fluid depth is much larger than the wavelength then we may assume that the fluid layer of the order λ is involved into motions. Newton's second law for a unit area then requires that the mass $\rho\lambda$ times the acceleration $\omega^2 a$ must be equal to the gravity force $\rho\lambda g$:

$$\rho\omega^2 a\lambda \simeq \rho a g \Rightarrow \omega^2 \simeq g\lambda^{-1} \quad (3.1)$$

The same result one obtains using the virial theorem. The kinetic energy per unit area of the surface can be estimated as the mass in motion $\rho\lambda$ times the velocity squared $\omega^2 a^2$. The gravitational potential energy per unit area can be estimated as the elevated mass ρa times g times the elevation a .

Curved surface has extra potential energy which is the product of the coefficient of surface tension α and the surface curvature $(a/\lambda)^2$. Taking potential energy as a sum of gravitational and capillary contributions we obtain the dispersion relation for gravitational-capillary waves on a deep water:

$$\omega^2 \simeq g\lambda^{-1} + \alpha\lambda^{-3}\rho^{-1} \quad (3.2)$$

When the depth h is much smaller than λ then fluid mostly moves horizontally with the vertical velocity suppressed by the geometric factor h/λ . That makes the kinetic energy $\rho\omega^2 a^2 \lambda^2 h^{-1}$ while the potential energy does not change. The virial theorem then gives the dispersion relation for waves on a shallow water:

$$\omega^2 \simeq gh\lambda^{-2} + \alpha h\lambda^{-4}\rho^{-1} \quad (3.3)$$

7.1.1 3.1.1 Surface gravity waves

Let us now formally describe fluid motion in a surface wave. As we argued in Sect. 1.2.4, small-amplitude oscillations are irrotational flows. Then, one can introduce the velocity potential which satisfies the Laplace equation $\Delta\phi = 0$ while the pressure is

$$p = -\rho(\partial\phi/\partial t + gz + v^2/2) \approx -\rho(\partial\phi/\partial t + gz)$$

neglecting quadratic terms because the amplitude is small. As in considering Kelvin-Helmholtz instability in Section. 2.1, we describe the surface form by the elevation $\zeta(x, t)$. We can include the atmospheric pressure on the surface into $\phi \rightarrow \phi + p_0 t/\rho$ which does not change the velocity field. We then have on the surface

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

The first equation here is the linearized kinematic boundary condition (2.1) which states that the vertical velocity on the surface is equal to the time derivative of the surface height. The second one is the linearized dynamic boundary condition on the pressure being constant on the surface, it can be also obtained writing the equation for the acceleration due to gravity: $dv/dt = -g\partial\zeta/\partial x$. To solve (3.4) together with $\Delta\phi = 0$, one needs the boundary condition at the bottom: $\partial\phi/\partial z = 0$ at $z = -h$. The solution of the Laplace equation periodic in one direction must be exponential in another direction:

$$\phi(x, z, t) = a \cos(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)] \quad (3.5)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.6)$$

The respective velocities are

$$v_x = -ak \sin(kx - \omega t) \cosh[k(z + h)] \quad (3.7)$$

$$v_z = ak \cos(kx - \omega t) \sinh[k(z + h)] \quad (3.8)$$

The condition of weak nonlinearity is $\partial v / \partial t \gg v \partial v / \partial x$ which requires $\omega \gg ak^2 = kv$ or $g \gg kv^2$.

The trajectories of fluid particles can be obtained by integrating the equation $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ assuming small oscillations near some $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0)$ like it was done in solving (2.19). Fluid displacement during the period can be estimated as velocity ka times $2\pi/\omega$, this is supposed to be much smaller than the wavelength $2\pi/k$. At first order in the small parameter ak^2/ω , we find

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{ak}{\omega} \cos(kx_0 - \omega t) \cosh[k(z_0 + h)] \\ z &= z_0 - \frac{ak}{\omega} \sin(kx_0 - \omega t) \sinh[k(z_0 + h)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

The trajectories are ellipses described by

$$\left(\frac{x - x_0}{\cosh[k(z_0 + h)]} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\sinh[k(z_0 + h)]} \right)^2 = \left(\frac{ak}{\omega} \right)^2$$

We see that as one goes down away from the surface, the amplitude of the oscillations decreases and the ellipses get more elongated as one approaches the bottom.

At second order, one obtains the mean (Stokes) drift with the velocity $a^2 k^3 / 2\omega$ in x -direction exactly like in (2.20).

One can distinguish two limits, depending on the ratio of water depth to the wavelength. For gravity waves on a deep water ($kh \gg 1$), fluid particles move in perfect circles whose radius exponentially decays with the depth with the rate equal to the horizontal wavenumber. This is again the property of the Laplace equation mentioned in Section 2.2.2: if solution oscillated in one direction, it decays exponentially in the other direction. That supports our assumption that for a deep fluid the layer comparable to wavelength is involved into motion, fact known to divers. The frequency, $\omega = \sqrt{gk}$, which is like formula for the period of the pendulum $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{L/g}$. Indeed, a standing surface wave is like a pendulum made of water as seen in the bottom Figure 3.1. On a shallow water ($kh \ll 1$), the oscillations are almost one-dimensional: $v_z/v_x \propto kh$. The dispersion relation is sound-like: $\omega = \sqrt{gh}k$ (that formula is all one needs to answer the question in Exercise 3.1).

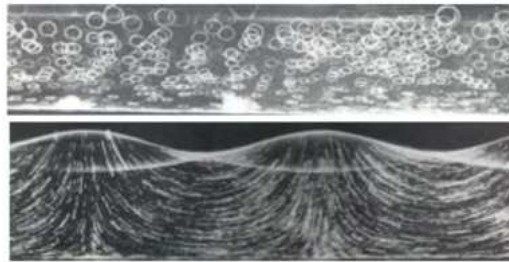


Figure 3.1 White particles suspended in the water are photographed during one period. Top figure shows a wave propagating to the right, some open loops indicate a Stokes drift to the right near the surface and compensating re-flux to the left near the bottom. Bottom figure shows a standing wave, where the particle trajectories are streamlines. In both cases, the wave amplitude is 4% and the depth is 22% of the wavelength.

7.1.2 3.1.2 Viscous dissipation

The moment we account for viscosity, our solution (3.5) does not satisfy the boundary condition on the free surface,

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma'_{ij}n_j - pn_i = 0$$

(see Section 1.4.3), because both the tangential stress $\sigma_{xz} = -2\eta\phi_{xz}$ and the oscillating part of the normal stress $\sigma'_{zz} = -2\eta\phi_{zz}$ are nonzero. Note also that (3.7) gives v_x nonzero on the bottom. A true viscous solution has to be rotational but when viscosity is small, vorticity appears only in narrow boundary layers near the surface and the bottom. A standard derivation¹ of the rate of a weak decay is to calculate the viscous stresses from the solution (3.5):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} \right)^2 dV \\ &= -2\eta \int (\phi_{zz}^2 + \phi_{xx}^2 + 2\phi_{xz}^2) dV = -8\eta \int \phi_{xz}^2 dV \end{aligned}$$

This means neglecting the narrow viscous boundary layers near the surface and the bottom (assuming that there is not much motion there i.e. $kh \gg 1$). Assuming the decay to be weak (that requires $\nu k^2 \ll \omega$ which also guarantees that the boundary layer is smaller than the wavelength) we consider the energy averaged over the period (which is twice the averaged kinetic energy for small oscillations by the virial theorem):

$$\bar{E} = \int_0^{2\pi/\omega} E dt \omega / 2\pi = \rho \int \overline{v^2} dV = 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2} dV$$

The dissipation averaged over the period is related to the average energy:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dE}{dt} dt \omega / 2\pi = -8\eta k^4 \int \overline{\phi^2} dV = -4\nu k^2 \bar{E} \quad (3.10)$$

Still, something seems strange in this derivation. Notice that our solution (3.5) satisfies the Navier-Stokes equation (but not the boundary conditions) since the viscous term is zero for the potential flow: $\Delta \mathbf{v} = 0$. How then it can give nonzero viscous dissipation? The point is that the viscous stress σ'_{ik} is nonzero but its divergence, which contribute $\rho \partial v_i / \partial t = \dots + \partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$, is zero. In other words, the net viscous force on any fluid element is zero, but viscous forces around an element are nonzero as it deforms. These forces bring the energy dissipation $\sigma'_{ik} \partial v_i / \partial x_k$ which has a nonzero mean so that viscosity causes waves to decay. To appreciate how the bulk integration can present the boundary layer distortion, consider a function $U(x)$ on $x \in [0, 1]$ which is almost linear but curves in a narrow vicinity near $x = 1$ to have $U'(1) = 0$, as shown in Fig. 3.2. Then the integral $\int_0^1 U U'' dx = -\int_0^1 (U')^2 dx$ is nonzero, and the main contribution is from the bulk.

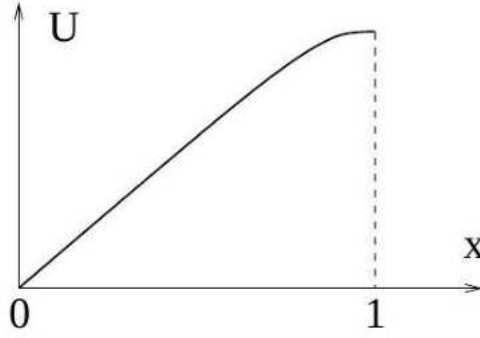


Figure 3.2 Function whose U'' is small everywhere except a small vicinity of $x = 1$ yet $\int_0^1 U U'' dx = -\int_0^1 (U')^2 dx$ is due to the bulk.

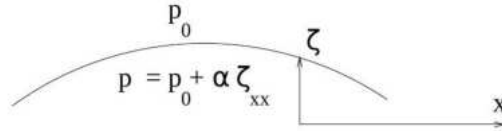
However, the first derivation of the viscous dissipation (3.10) was done by Stokes in quite an ingenious way, that did not involve any boundary layers. Since the potential solution satisfies the Navier-Stokes equation, he suggested to imagine how one may also satisfy the boundary conditions (so that no boundary layers appear). First, we need an extensible bottom to move with $v_x(-h) = -k \sin(kx - \omega t)$. Since $\sigma'_{xz}(-h) = 0$ then such bottom movements do no work. In addition, we must apply extra forces to the fluid surface to compensate for $\sigma_{zz}(0)$ and $\sigma_{xz}(0)$. Such forces do work (per unit area per unit time) $v_x \sigma_{xz} + v_z \sigma_{zz} = 2\eta(\phi_x \phi_{xz} + \phi_z \phi_{zz})$. After averaging over the period of the monochromatic wave, it turns into $4\eta k^2 \overline{\phi \phi_z}$, which is $8\nu k^2$ times the average kinetic energy per unit surface area, $\rho \overline{\phi \phi_z} / 2$ - to obtain this, one writes

$$\rho \int (\nabla \phi)^2 dV = \rho \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \int \phi \phi_z dS$$

Since we have introduced forces that make our solution steady (it satisfies equations and boundary conditions) then the work of those forces exactly equals the rate of the bulk viscous dissipation which is thus $4\nu k^2$ times the total energy ².

7.1.3 3.1.3 Capillary waves

Surface tension makes for extra pressure difference proportional to the curvature of the surface:



This changes the second equation of (3.4),

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

and adds an extra term to the dispersion relation

$$\omega^2 = (gk + \alpha k^3 / \rho) \tanh kh \quad (3.12)$$

That two restoring factors enter additively into ω^2 is due to the virial theorem as explained at the beginning of Section 3.1.

We see that there is the wavenumber $k_* = \sqrt{\rho g / \alpha}$ which separates gravity-dominated long waves from short waves dominated by surface tension. In general, both gravity and surface

tension provide a restoring force for the surface perturbations. For water, $\alpha \simeq 70 \text{erg/cm}^2$ and $\lambda_* = 2\pi/k_* \simeq 1.6 \text{ cm}$. Now we can answer why water spills out of an overturned glass. The question seems bizarre only to a non-physicist, since physicists usually know that atmospheric pressure at normal conditions is of order of $P_0 \simeq 10^5$ Newton per square meter which is enough to hold up to $P_0/\rho g \simeq 10$ meters of water column³. That is if fluid surface remained plane then the atmospheric pressure would keep the water from spilling. The relation (3.12) tells us that with a negative gravity, the plane surface is unstable:

$$\omega^2 \propto -gk + \alpha k^3 < 0 \quad \text{for} \quad k < k_*$$

On the contrary, water can be kept in an upside-down capillary with the diameter smaller than λ_* since the unstable modes cannot fit in (see Exercise 3.9 for the consideration of a more general case).

7.1.4 3.1.4 Phase and group velocity

Let us discuss now general properties of one-dimensional propagation of linear dispersive waves. To describe the propagation, we use the Fourier representation since every harmonics $\exp(ikx - i\omega_k t)$ propagates in a simple way completely determined by the frequency-wavenumber relation ω_k . It is convenient to consider the perturbation in the Gaussian form,

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0 \exp(ik_0 x - x^2/l^2)$$

for which the distribution in k -space is Gaussian as well:

$$\zeta(k, 0) = \int dx \zeta_0 \exp \left[i(k_0 - k)x - \frac{x^2}{l^2} \right] = \zeta_0 l \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{l^2}{4} (k_0 - k)^2 \right]$$

That distribution has the width $1/l$. Consider first quasi-monochromatic wave with $k_0 l \gg 1$ so that we can expand

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \omega' + (k - k_0)^2 \omega''/2 \quad (3.13)$$

and substitute it into

$$\zeta(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \zeta(k, 0) \exp [ikx - i\omega_k t] \quad (3.14)$$

$$\approx \frac{\zeta_0 l}{2} e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \exp \left[-\frac{(x - \omega' t)^2}{(l^2 + 2it\omega'')} \right] \left[l^2/4 + it\omega''/2 \right]^{-1/2} \quad (3.15)$$

We see that the perturbation $\zeta(x, t) = \exp(ik_0 x - i\omega_0 t) \Psi(x, t)$ is a monochromatic wave with a complex envelope having the modulus

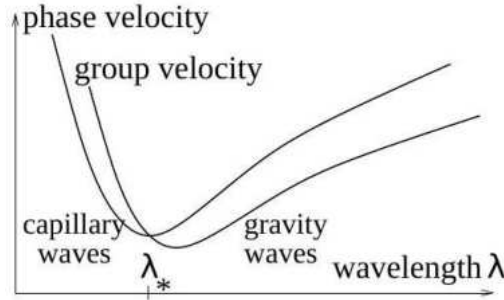
$$|\Psi(x, t)| \approx \zeta_0 \frac{l}{L(t)} \exp \left[-(x - \omega' t)^2 / L^2(t) \right]$$

$$L^2(t) = l^2 + (2t\omega'')^2 l^{-2}$$

The phase propagates with the phase velocity ω_0/k_0 while the envelope (and the energy determined by $|\Psi|^2$) propagate with the group velocity ω' . For sound waves, $\omega_k = ck$, the group and the phase velocities are equal and are the same for all wavenumbers, the wave packet does not spread since $\omega'' = 0$. On the contrary, when $\omega'' \neq 0$, the waves are called dispersive since different harmonics move with different velocities and disperse in space; the wave packet

spreads with time and its amplitude decreases since $L(t)$ grows. For $\omega_k \propto k^\alpha$, $\omega' = \alpha\omega_k/k$. In particular, the group velocity for gravity waves on deep water is twice less than the phase velocity so that individual crests can be seen appearing out of nowhere at the back of the packet and disappearing at the front. For capillary waves on deep water, the group velocity is 1.5 times more so that crests appear at the front.

If one considers a localized perturbation in space, which corresponds to a wide distribution in k -space, then in the integral (3.14) for given x, t the main contribution is given by the wavenumber determined by the stationary phase condition $\omega'(k) = x/t$ i.e. waves of wavenumber k are found at positions moving forward with the group velocity $\omega'(k)$ see Exercise 3.3.



Obstacle to the stream or wave source moving with respect to water can generate a steady wave pattern if the projection of the source relative velocity V on the direction of wave propagation is equal to the phase velocity $c(k)$. For example, if the source creates an elevation of the water surface then it must stay on the wave crest, which moves with the phase velocity. The condition $V \cos \theta = c$ for generation of stationary wave pattern is a direct analog of the Landau criterium for generating excitations in superfluid and the resonance condition for Vavilov-Cherenkov radiation by particles moving faster than light in a medium. For gravity-capillary surface waves on a deep water, the requirement for the Vavilov-Cherenkov resonance means that V must exceed the minimal phase velocity, which is

$$c(k_*) = \frac{\omega(k_*)}{k_*} = \left(\frac{4\alpha g}{\rho} \right)^{1/4} \simeq 23 \text{ cm/s}$$

Consider first a source which is long in the direction perpendicular to the motion, say a tree fallen across the stream. Then a one-dimensional pattern of surface waves is generated with two wavenumbers that correspond to $c(k) = V$. These two wavenumbers correspond to the same phase velocity but different group velocities. The waves transfer energy from the source with the group velocity. Since the longer (gravity) wave has its group velocity lower, $\omega' < V$, then it is found behind the source (downstream), while the shorter (capillary) wave can be found upstream⁴. Of course, capillary waves can only be generated by a really thin object (much smaller than λ_*), like a fishing line or a small tree branch.

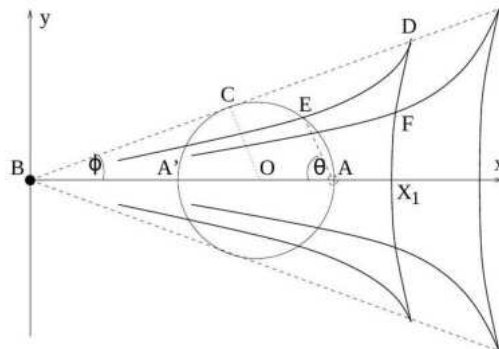


Figure 3.3 Pattern of waves generated by a ship that moves along x -axis to the left. Circle is the locus of points reached by waves generated at A when the ship arrives at B . Broken lines show the Kelvin wedge. Bold lines are wave crests.

Ships generate an interesting pattern of gravity waves that can be understood as follows. The wave generated at the angle θ to the ship motion has its wavelength determined by the condition $V \cos \theta = c(k)$, necessary for ship's bow to stay on the wave crest. That condition means that different wavelengths are generated at different angles in the interval $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Similar to our consideration in Sect. 2.3.5, let us find the locus of points reached by the waves generated at A during the time it takes for the ship to reach B , see Figure 3.3. The waves propagate away from the source with the group velocity $\omega' = c(k)/2$. The fastest is the wave generated in the direction of the ship propagation ($\theta = 0$) which moves with the group velocity equal to half the ship speed and reaches A' such that $AA' = AB/2$. The wave generated at the angle θ reaches E such that $AE = AA' \cos \theta$ which means that AEA' is a right angle. We conclude that the waves generated at different angles reach the circle with the diameter AA' . Since $OB = 3OC$, all the waves generated before the ship reached B are within the Kelvin wedge with the angle $\varphi = \arcsin(1/3) \approx 19.5^\circ$, compare with the Mach cone shown in Fig. 2.14. Note the remarkable fact that the angle of the Kelvin wedge is completely universal i.e. independent of the ship speed.



Figure 3.4 Wave pattern of a ship consists of the breaking wave from the bow with its turbulent wake (distinguished by a short trace of white foam) and the Kelvin pattern.

Let us describe now the form of the wave crests, which are neither straight nor parallel since they are produced by the waves emitted at different moments at different angles. The wave propagating at the angle θ makes a crest at the angle $\pi/2 - \theta$. Consider point E on a crest with the coordinates

$$x = AB (2 - \cos^2 \theta) / 2, \quad y = (AB/2) \sin \theta \cos \theta$$

The crest slope must satisfy the equation $dy/dx = \cot \theta$, which gives $dAB/d\theta = -AB \tan \theta$. Solution of this equation, $AB = X_1 \cos \theta$, describes how the source point A is related to the angle θ of the wave that creates the given crest. Different integration constants X_1 correspond to different crests. Crest shape is given parametrically by

$$x = X_1 \cos \theta (2 - \cos^2 \theta) / 2, \quad y = (X_1/4) \cos \theta \sin 2\theta \quad (3.16)$$

and it is shown in Figure 3.3 by the bold solid lines, see also Figure 3.4. As expected, longer (faster) waves propagate at smaller angles. Note that for every point inside the Kelvin wedge one can find two different source points. That means that two constant-phase lines cross at every point like crossing of crests seen at the point F. There are no waves outside the Kelvin wedge whose boundary is thus a caustic⁵, where every crest has a cusp like at the point D in Fig. 3.3, determined by the condition that both $x(\theta)$ and $y(\theta)$ have maxima. Differentiating (3.16) and solving $dx/d\theta = dy/d\theta = 0$ we obtain the propagation angle $\cos^2 \theta_0 = 2/3$, which

is actually the angle CAB since it corresponds to the wave that reached the wedge. We can express the angle COA alternatively as $\pi/2 + \phi$ and $\pi - 2\theta_0$ and relate: $\theta_0 = \pi/4 - \phi/2 \approx 35^\circ$.

7.2 3.2 Weakly nonlinear waves

7.2.1 3.2.1 Hamiltonian description

The law of linear wave propagation is completely characterized by the dispersion relation ω_k . It does not matter what physical quantity oscillates in the wave (fluid velocity, density, electromagnetic field, surface elevation etc), waves with the same dispersion relation propagate in the same way. Can we achieve the same level of universality in describing nonlinear waves? As we shall see in this and the next sections, some universality classes can be distinguished but the level of universality naturally decreases as nonlinearity increases.

What else, apart from ω_k , must we know to describe weakly nonlinear waves? Since every wave is determined by two dynamic variables, amplitude and phase, then it is natural to employ the Hamiltonian formalism for waves in conservative medium. Indeed, the Hamiltonian formalism is the most general way to describe systems that satisfy the least action principle, as most closed physical systems do. The main advantage of the Hamiltonian formalism (comparing, say, to its particular case, the Lagrangian formalism) is an ability to use canonical transformations. Those transformations involve both coordinates and momenta and thus are more general than coordinate transformations one uses within the

Lagrangian formalism, which employs coordinates and their time derivatives (do not confuse Lagrangian formalism in mechanics and Lagrangian description in fluid mechanics). Canonical transformations is a powerful tool that allows one to reduce the variety of problems into a few universal problems. So let us try to understand what is a general form of the Hamiltonian of a weakly nonlinear wave system.

As we have seen in Section 1.3.4, Hamiltonian mechanics of continuous systems lives in an even-dimensional space of coordinates $q(\mathbf{r}, t)$ and $\pi(\mathbf{r}, t)$ that satisfy the equations

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi(\mathbf{r}, t)}, \quad \frac{\partial \pi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q(\mathbf{r}, t)}$$

Here the Hamiltonian $\mathcal{H}\{q(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}, t)\}$ is a functional (simply speaking, function presents a number for every number, while functional presents a number for every function; for example, definite integral is a functional). Variational derivative $\delta/\delta f(r)$ is a generalization of the partial derivative $\partial/\partial f(r_n)$ from discrete to continuous set of variables. The variational derivative of a linear functional of the form $I\{f\} = \int \phi(r') f(r') dr'$ is calculated by

$$\frac{\delta I}{\delta f(r)} = \int \phi(r') \frac{\delta f(r')}{\delta f(r)} dr' = \int \phi(r') \delta(r - r') dr' = \phi(r)$$

For this, one mentally substitute $\delta/\delta f(r)$ by $\partial/\partial f(r_n)$ and integration by summation. For example, the Euler and continuity equations for potential flows (in particular, acoustic waves) can be written in a Hamiltonian form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \rho} \\ \mathcal{H} &= \int \rho \left[\frac{|\nabla \phi|^2}{2} + E(\rho) \right] d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{3.17}$$

We shall use the canonical variables even more symmetrical than π, q , analogous to what is called creation-annihilation operators in quantum theory. In our case, they are just functions,

not operators. Assuming p and q to be of the same dimensionality (which can be always achieved multiplying them by factors) we introduce

$$a = (q + i\pi)/\sqrt{2}, \quad a^* = (q - i\pi)/\sqrt{2}$$

Instead of two real equations for p, q we now have one complex equation

$$i \frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a^*(\mathbf{r}, t)} \quad (3.18)$$

The equation for a^* is complex conjugated.

In the linear approximation, waves with different wavevectors do not interact. Normal canonical coordinates in the infinite space are the complex Fourier amplitudes a_k which satisfy the equation

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k$$

Comparing this to (3.18) we conclude that the Hamiltonian of a linear wave system is quadratic in the amplitudes:

$$\mathcal{H}_2 = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k} \quad (3.19)$$

It is the energy density per unit volume. Terms of higher orders describe wave interaction due to nonlinearity, the lowest terms are cubic:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = \int & [(V_{123} a_1^* a_2 a_3 + \text{c.c.}) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \\ & + (U_{123} a_1^* a_2^* a_3^* + \text{c.c.}) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Here c.c. means the complex conjugated terms and we use shorthand notations $a_1 = a(\mathbf{k}_1)$ etc. Delta functions express momentum conservation and appear because of space homogeneity. Indeed, (3.19) and (3.20) are respectively the Fourier representation of the integrals like

$$\int \Omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

and

$$\int V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) a(\mathbf{r}_1) a(\mathbf{r}_2) a(\mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3$$

The Hamiltonian is real and its coefficients have obvious symmetries $U_{123} = U_{132} = U_{213}$ and $V_{123} = V_{132}$. We presume that every next term in the Hamiltonian expansion is smaller than the previous one, in particular, $\mathcal{H}_2 \gg \mathcal{H}_3$, which requires

$$\omega_k \gg V |a_k| k^d, U |a_k| k^d \quad (3.21)$$

where d is space dimensionality (2 for surface waves and 3 for sound, for instance).

In a perverse way of people who learn quantum mechanics before fluid mechanics, we may use analogy between a, a^* and the quantum creation-annihilation operators a, a^+ and suggest that the V -term must describe the confluence $2 + 3 \rightarrow 1$ and the reverse process of decay $1 \rightarrow 2 + 3$. Similarly, the U -term must describe the creation of three waves from vacuum and the opposite process of annihilation. We shall use quantum analogies quite often in this Chapter since the quantum physics is to a large extent a wave physics.

To support this quantummechanical interpretation and make explicit the physical meaning of different terms in the Hamiltonian, we write a general equation of motion for weakly nonlinear waves:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} = & -3i \int U_{k12} a_1^* a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ & -i \int V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ & -2i \int V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - (\gamma_k + i\omega_k) a_k \end{aligned} \quad (3.22)$$

where we also included the linear damping γ_k (as one always does when resonances are possible). Delta-functions in the integrals suggest that each respective term describes the interaction between three different waves. To see it explicitly, consider a particular initial condition with two waves, having respectively wavenumbers $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, frequencies ω_1, ω_2 and finite amplitudes A_1, A_2 . Then the last nonlinear term in (3.22), $-2ie^{i(\omega_2 - \omega_1)t} V_{1k2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})$, provides the wave $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ with the periodic forcing having frequency $\omega_1 - \omega_2$, and similarly other terms. The forced solution of (3.22) is then as follows:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, t) = & -3ie^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{U_{k12} A_1^* A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k})}{\gamma_k + i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_k)} \\ & -ie^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{V_{k12} A_1 A_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\gamma_k + i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_k)} \\ & -2ie^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \frac{V_{1k2}^* A_1 A_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\gamma_k + i(\omega_k + \omega_2 - \omega_1)} \end{aligned}$$

Here and below, $\omega_{1,2} = \omega(\mathbf{k}_{1,2})$. Because of (3.21) the amplitudes of the secondary waves are small except for the cases of resonances that is when the driving frequency coincides with the eigenfrequency of the wave with the respective k . The amplitude $a(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ is not small if $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = 0$ - this usually happens in the nonequilibrium medium where negative-frequency waves are possible. Negative energy means that excitation of the wave decreases the energy of the medium. That may be the case, for instance, when there are currents in the medium and the wave moves against the current. In such cases, already \mathcal{H}_2 can be different from (3.19) - see Exercise 3.4. Two other resonances require $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$ and $\omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)$ - the dispersion relations that allow for that are called dispersion relations of decay type. For example, the power dispersion relation $\omega_k \propto k^\alpha$ is of decay type if $\alpha \geq 1$ and of non-decay type (that is does not allow for the three-wave resonance) if $\alpha < 1$, see Exercise 3.5.

7.2.2 3.2.2 Hamiltonian normal forms

Intuitively, it is clear that non-resonant processes are unimportant for weak nonlinearity. Technically, one can use the canonical transformations to eliminate the non-resonant terms from the Hamiltonian. Because the terms that we want to eliminate are small, the transformation should be close to identical. Consider some continuous distribution of a_k . If one wants to get rid of the U -term in \mathcal{H}_3 one makes the following transformation

$$b_k = a_k - 3 \int \frac{U_{k12} a_1^* a_2^*}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_k} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (3.23)$$

It is possible when the denominator does not turn into zero in the integration domain, which is the case for most media. The Hamiltonian $\mathcal{H}\{b, b^*\} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ does not contain the U -term. The elimination of the V -terms is made by a similar transformation

$$b_k = a_k + \int \left[\frac{V_{k12} a_1 a_2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{1k2}^* a_1 a_2^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega_1 - \omega_2 - \omega_k} + \frac{V_{2k1}^* a_1^* a_2 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})}{\omega_2 - \omega_1 - \omega_k} \right] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (3.24)$$

possible only for non-decay dispersion relation. One can check that both transformations (3.23, 3.24) are canonical that is $i\dot{b}_k = \delta\mathcal{H}\{b, b^*\}/\delta b_k^*$. The procedure described here was invented for excluding non-resonant terms in celestial mechanics and later generalized for continuous systems ⁶.

We may thus conclude that (3.20) is the proper Hamiltonian of interaction only when all three-wave processes are resonant. When there are no negative-energy waves but the dispersion relation is of decay type (like for capillary waves on a deep water), the proper interaction Hamiltonian contains only V -term. When the dispersion relation is of non-decay type (like for gravity waves on a deep water), all the cubic terms can be excluded and the interaction Hamiltonian must be of

the fourth order in wave amplitudes. Moreover, if the dispersion relation does not allow $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$ then it does not allow $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)$ as well. That means that when decays of the type $1 \rightarrow 2 + 3$ are non-resonant, the four-wave decays like $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$ are non-resonant too. So the proper Hamiltonian in this case describes four-wave scattering $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ which is always resonant:

$$\mathcal{H}_4 = \int T_{1234} a_1 a_2 a_3^* a_4^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \quad (3.25)$$

7.2.3 3.2.3 Wave instabilities.

Wave motion can be unstable as well as steady flow. Let us show that if the dispersion relation is of decay type, then a monochromatic wave of sufficiently high amplitude is subject to a decay instability. Consider the medium that contains a finite-amplitude wave $A \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)]$ and two small-amplitude waves (initial perturbations) with a_1, a_2 such that $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. We leave only resonant terms in (3.22):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + (\gamma_1 + i\omega_1) a_1 + 2iV_{k12} A a_2^* \exp(-i\omega_k t) &= 0 \\ \dot{a}_2^* + (\gamma_2 - i\omega_2) a_2^* + 2iV_{k12}^* A^* a_1 \exp(i\omega_k t) &= 0 \end{aligned}$$

The solution can be sought of in the form

$$a_1(t) \propto \exp(\Gamma t - i\Omega_1 t), \quad a_2^*(t) \propto \exp(\Gamma t + i\Omega_2 t)$$

The resonance condition is $\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_k$. The amplitudes of the waves will be determined by the mismatches between their frequencies and the dispersion relation, $\Omega_1 - \omega_1$ and $\Omega_2 - \omega_2$. The sum of the mismatches is $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k$. We have to choose such Ω -s that give maximal real Γ . We expect it to be when 1 and 2 are symmetrical, so that $\Omega_1 - \omega_1 = \Omega_2 - \omega_2 = \Delta\omega/2$. We consider for simplicity $\gamma_1 = \gamma_2$, then

$$\Gamma = -\gamma \pm \sqrt{4|V_{k12}A|^2 - (\Delta\omega)^2/4} \quad (3.26)$$

If the dispersion relation is of non-decay type, then $\Delta\omega \simeq \omega_k \gg |VA|$ and there is no instability. On the contrary, for decay dispersion relations, the resonance is possible $\Delta\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_k = 0$ so that the growth rate of instability, $\Gamma = 2|V_{k12}A| - \gamma$, is positive when the amplitude is larger than the threshold: $A > \gamma/2|V_{k12}|$, i.e. when the nonlinearity overcomes dissipation. The instability first starts for those a_1, a_2 that are in resonance (i.e. $\Delta\omega = 0$) and have minimal $(\gamma_1 + \gamma_2)/|V_{k12}|$. In the particular case $k = 0, \omega_0 \neq 0$, decay instability is called parametric instability

since it corresponds to a periodic change in some system parameter. For example, Faraday discovered that a vertical vibration of the container with a fluid leads to the parametric excitation of a standing surface wave ($k_1 = -k_2$) with half the vibration frequency (the parameter being changed periodically is the gravity acceleration). In a simple case of an oscillator it is called a parametric resonance, known to any kid on a swing who stretches and folds his legs with twice the frequency of the swing.

As with any instability, the usual question is what stops the exponential growth and the usual answer is that further nonlinearity does that. When the amplitude is not far from the threshold, those nonlinear effects can be described in the mean-field approximation as the renormalization of the linear parameters ω_k, γ_k and of the pumping $V_{k12}A$. The renormalization should be such as to put the wave system back to threshold that is to turn the renormalized Γ into zero. The frequency renormalization $\tilde{\omega}_k = \omega_k + \int T_{kk'kk'} |a_{k'}|^2 d\mathbf{k}'$ (see the next Section) appears due to the four-wave processes and can take waves out of resonance if the set of wavevectors is discrete due to a finite box size (it is a mechanism of instability restriction for finite-dimensional systems like oscillator swing frequency decreases with amplitude, for instance). If however the box is large enough then frequency spectrum is close to continuous and there are waves to be in resonance for any nonlinearity. In this case, the saturation of instability is due to renormalization of the damping and pumping. The renormalization (increase) of γ_k appears because of the waves of the third generation that take energy from a_1, a_2 . The pumping renormalization appears because of the four-wave interaction, for example, (3.25) adds $-ia_2^* \int T_{1234} a_3 a_4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$ to \dot{a}_1 .

7.3 3.3 Nonlinear Schrödinger Equation (NSE)

This section is devoted to a nonlinear spectrally narrow wave packet. Consideration of a linear propagation of such packet in Sect. 3.1.4 taught us the notions of phase and group velocities. In this section, the account of nonlinearity brings equally fundamental notions of the Bogolyubov spectrum of condensate fluctuations, modulational instability, solitons, self-focusing, collapse and wave turbulence.

7.3.1 3.3.1 Derivation of NSE

Consider a quasi-monochromatic wave packet in an isotropic nonlinear medium. Quasi-monochromatic means spectrally narrow that is the wave amplitudes are nonzero in a narrow region Δk of \mathbf{k} -space around some \mathbf{k}_0 . In this case the processes changing the number of waves (like $1 \rightarrow 2 + 3$ and $1 \rightarrow 2 + 3 + 4$) are non-resonant because the frequencies of all waves are close. Therefore, all the nonlinear terms can be eliminated from the interaction Hamiltonian except \mathcal{H}_4 and the equation of motion has the form

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int T_{k123} a_1^* a_2 a_3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (3.27)$$

Consider now $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$ with $q \ll k_0$ and expand similar to (3.13)

$$\omega(k) = \omega_0 + (\mathbf{q}\mathbf{v}) + \frac{1}{2}q_i q_j \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right)_0$$

where $\mathbf{v} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ at $k = k_0$. In an isotropic medium ω depends only on modulus k and

$$\begin{aligned} q_i q_j \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} &= q_i q_j \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{k_j}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} = q_i q_j \left[\frac{k_i k_j \omega''}{k^2} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{v}{k} \right] \\ &= q_{\parallel}^2 \omega'' + \frac{q_{\perp}^2 v}{k} \end{aligned}$$

Let us introduce the temporal envelope $a_k(t) = \exp(-i\omega_0 t) \psi(\mathbf{q}, t)$ into (3.27) :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{q}\mathbf{v}) - \frac{q_{\parallel}^2 \omega''}{2} - \frac{q_{\perp}^2 v}{2k} \right] \psi_q = T \int \psi_1^* \psi_2 \psi_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3$$

We assumed the nonlinear term to be small, $T|a_k|^2 (\Delta k)^{2d} \ll \omega_k$, and took it at $k = k_0$. This result is usually represented in the r -space for $\psi(\mathbf{r}) = \int \psi_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d\mathbf{q}$. The nonlinear term is local in r -space:

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \\ &\times \exp[i(\mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1) - i(\mathbf{q}_2 \mathbf{r}_2) - i(\mathbf{q}_3 \mathbf{r}_3) + i(\mathbf{q}\mathbf{r})] \\ &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi^*(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}) = |\psi|^2 \psi \end{aligned}$$

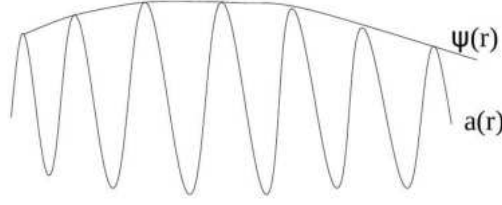
and the equation takes the form

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i\omega''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{iv}{2k} \Delta_{\perp} \psi = -iT|\psi|^2 \psi$$

Here the term $v\partial_z$ is responsible for propagation with the group velocity, $\omega''\partial_{zz}$ for dispersion and $(v/k)\Delta_{\perp}$ for diffraction. One may ask why in the expansion of $\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ we kept the terms both linear and quadratic in small q . This is because the linear term (that gives $\partial\psi/\partial z$ in the last equation) can be eliminated by the transition to the moving reference frame $z \rightarrow z - vt$. We also renormalize the transversal coordinate by the factor $\sqrt{k_0 \omega''/v}$ and obtain the celebrated Nonlinear Schrödinger Equation

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\omega''}{2} \Delta \psi - T|\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.28)$$

Sometimes (particularly for $T < 0$) it is called Gross-Pitaevsky equation who derived it to describe a quantum condensate. This equation is meaningful at different dimensionalities. It may describe the evolution of three-dimensional packet like in Bose-Einstein condensation of cold atoms. When \mathbf{r} is two-dimensional, it may correspond either to the evolution of the packet in 2d medium (say, for surface waves) or to steady propagation in 3d described by $iv\psi_z + (v/2k)\Delta_{\perp}\psi = T|\psi|^2\psi$, which turns into (3.28) upon re-labelling $z \rightarrow vt$. In a steady case one neglects ψ_{zz} since this term is much less than ψ_z . In a non-steady case, this is not necessary so since ∂_t and $v\partial_z$ might be about to annihilate each other and one is interested in the next terms. And, finishing with dimensionalities, one-dimensional NSE corresponds to a stationary two-dimensional case.



Different media provide for different signs of the coefficients. Apart from hydrodynamic applications, NSE also describes nonlinear optics. Indeed, Maxwell equation for waves takes the form $[\omega^2 - (c^2/n) \Delta] E = 0$. Refraction index depends on the wave intensity: $n = 1 + 2\alpha|E|^2$. There are different reasons for that dependence (and so different signs of α may be realized in different materials), for example: electrostriction, heating and Kerr effect (orientation of non-isotropic molecules by the wave field). We consider waves moving mainly in one direction and pass into the reference frame moving with the velocity c i.e. change $\omega \rightarrow \omega - ck$. Expanding

$$ck/\sqrt{n} \approx ck_z (1 - \alpha|E|^2) + ck_\perp^2/2k$$

substituting it into

$$(\omega - ck - ck/\sqrt{n})(\omega - ck + ck/\sqrt{n})E = 0$$

retaining only the first non-vanishing terms in diffraction and nonlinearity we obtain NSE after the inverse Fourier transform. In particular, one-dimensional NSE describes light in optical fibers.

7.3.2 3.3.2 Modulational instability

The simplest effect of the four-wave scattering is the frequency renormalization. Indeed, NSE has a stationary solution as a plane wave with a renormalized frequency $\psi_0(t) = A_0 \exp(-iT A_0^2 t)$ (in quantum physics, this state, coherent across the whole system, corresponds to Bose-Einstein condensate). Let us describe small perturbations of the condensate. We write the perturbed solution as $\psi = A e^{i\varphi}$ and assume the perturbation one-dimensional (along the direction which we denote ξ). Then,

$$\psi_\xi = (A_\xi + iA\varphi_\xi) e^{i\varphi}, \quad \psi_{\xi\xi} = (A_{\xi\xi} + 2iA_\xi\varphi_\xi + iA\varphi_{\xi\xi} - A\varphi_\xi^2) e^{i\varphi}$$

Introduce the current wavenumber $K = \varphi_\xi$. The real and imaginary parts of the linearized NSE take the form

$$\tilde{A}_t + \frac{\omega''}{2} A_0 K_\xi = 0, \quad K_t = -2T A_0 \tilde{A}_\xi + \frac{\omega''}{2A_0} \tilde{A}_{\xi\xi\xi}$$

We look for the solution in the form where both the amplitude and the phase of the perturbation are modulated:

$$\tilde{A} = A - A_0 \propto \exp(ik\xi - i\Omega t), \quad K \propto \exp(ik\xi - i\Omega t)$$

The dispersion relation for the perturbations then takes the form:

$$\Omega^2 = T\omega'' A_0^2 k^2 + \omega''^2 k^4/4 \quad (3.29)$$

When $T\omega'' > 0$, it is called Bogolyubov formula for the spectrum of condensate perturbations. We have an instability when $T\omega'' < 0$ (Lighthill criterium). We first explain this criterium using the language of classical

waves and at the end of the Section we give an alternative explanation in terms of quantum (quasi)-particles. Classically, define the frequency as minus the time derivative of the phase: $\varphi_t = -\omega$. For a nonlinear wave, the frequency is generally dependent on both the amplitude and the wave number. Factors ω'' and T are the second derivatives of the frequency with respect to the amplitude and the wave number respectively. Intuitively, one can explain the modulational instability in the following way: Consider, for instance, $\omega'' > 0$ and $T < 0$. If the amplitude acquires a local minimum as a result of perturbation then the frequency has a maximum there because $T < 0$. The time derivative of the current wavenumber is as follows: $K_t = \varphi_{\xi t} = -\omega_{\xi}$. The local maximum in ω means that K_t changes sign that is K will grow to the right of the omega maximum and decrease to the left of it. The group velocity ω' grows with K since $\omega'' > 0$. Then the group velocity grows to the right and decreases to the left so the parts separate (as arrows show) and the perturbation deepens as shown in the Figure 3.5.

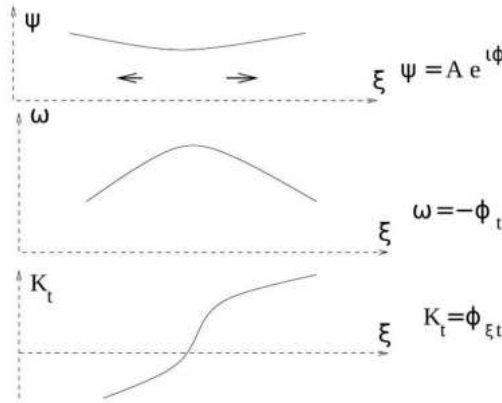


Figure 3.5 Space dependencies of the wave amplitude, frequency and the time derivative of the wavenumber, which demonstrate the mechanism of the modulational instability for $\omega'' > 0$ and $T < 0$.

The result of this instability you all can see on the beach where waves coming to the shore are modulated. Indeed, for long water waves $\omega_k \propto \sqrt{k}$ so that $\omega'' < 0$. As opposite to pendulum and somewhat counterintuitive, the frequency grows with the amplitude and $T > 0$; it is related to the change of wave shape from sinusoidal to that forming a sharpened crest which reaches 120° for sufficiently high amplitudes.

Long water wave is thus unstable with respect to longitudinal modulations (Benjamin-Feir instability, 1967). The growth rate is maximal for $k = A_0 \sqrt{-2T/\omega''}$ which depends on the amplitude. Still, folklore keeps it that approximately every ninth wave is the largest.

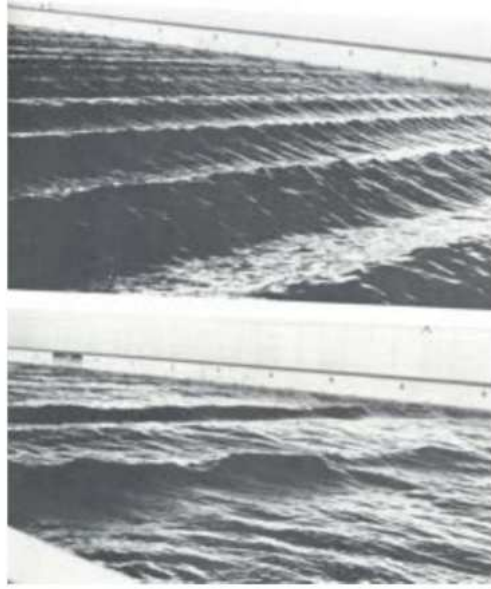


Figure 3.6 Disintegration of the periodic wave due to modulational instability as demonstrated experimentally by Benjamin and Feir (1967). The upper photograph shows a regular wave pattern close to a wavemaker. The lower photograph is made some 60 meters (28 wavelengths) away, where the wave amplitude is comparable, but spatial periodicity is lost. The instability was triggered by imposing on the periodic motion of the wavemaker a slight modulation at the unstable side-band frequency; the same disintegration occurs naturally over longer distances.

For transverse propagation of perturbations, one has to replace ω'' by v/k which is generally positive so the criterium of instability is $T < 0$ or $\partial\omega/\partial|a|^2 < 0$, which also means that for instability the wave velocity has to decrease with the amplitude. That can be easily visualized: if the wave is transversely modulated then the parts of the front where amplitude is larger will move slower and further increase the amplitude because of focusing from neighboring parts, as shown in Figure 3.7

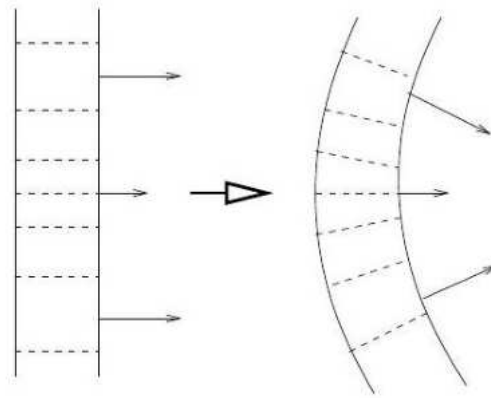


Figure 3.7 Transverse instability for the velocity decreasing with the amplitude.

Let us now give a quantum explanation for the modulational instability. Remind that NSE (3.28) is a Hamiltonian system ($i\psi_t = \delta H/\delta\psi^*$) with

$$H = \frac{1}{2} \int (\omega'' |\nabla\psi|^2 + T |\psi|^4) d\mathbf{r} \quad (3.30)$$

The Lighthill criterium means that the modulational instability happens when the Hamiltonian is not sign-definite. The overall sign of the Hamiltonian is unimportant as one can always change $H \rightarrow -H, t \rightarrow -t$, it is important whether the Hamiltonian can have different signs for

different configuration of $\psi(\mathbf{r})$. Consider $\omega'' > 0$. Using the quantum language one can interpret the first term in the Hamiltonian as the kinetic energy of (quasi)-particles and the second term as their potential energy. For $T < 0$, the interaction is attractive, which leads to the instability: For the condensate, the kinetic energy (or pressure) is balanced by the interaction; local perturbation with more particles (higher $|\psi|^2$) will make interaction stronger which leads to the contraction of perturbation and further growth of $|\psi|^2$.

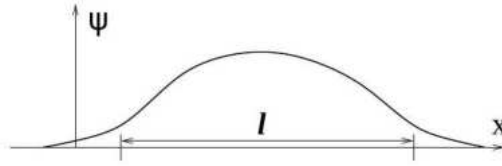
7.3.3 3.3.3 Soliton, collapse and turbulence

The outcome of the modulational instability depends on space dimensionality. Breakdown of a homogeneous state may lead all the way to small-scale fragmentation or creation of singularities. Alternatively, stable finite-size objects may appear as an outcome of instability. As it often happens, the analysis of conservation laws helps to understand the destination of a complicated process. Since the equation NSE (3.28) describes wave propagation and four-wave scattering, apart from the Hamiltonian (3.30), it conserves also the wave action $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$ which one may call the number of waves. The conservation follows from the continuity equation

$$2i\partial_t |\psi|^2 = \omega'' \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \equiv -2 \operatorname{div} \mathbf{J} \quad (3.31)$$

Note also conservation of the momentum or total current, $\int \mathbf{J} d\mathbf{r}$, which does not play any role in this Section but is important for Exercise 3.7.

Consider a wave packet characterized by the generally time-dependent size l and the constant value of N .



Since one can estimate the typical value of the envelope in the packet as $|\psi|^2 \simeq N/l^d$, then $H \simeq \omega'' N l^{-2} + T N^2 l^{-d}$ —remind that the second term is negative here. We consider the conservative system so the total energy is conserved yet we expect the radiation from the wave packet to bring it to the minimum of energy. In the process of weak radiation, wave action is conserved since it is an adiabatic invariant. This is particularly clear for a quantum system like a cloud of cold atoms where N is their number. Whether this minimum corresponds to $l \rightarrow 0$ (which is called self-focusing or collapse) is determined by the balance between $|\nabla \psi|^2$ and $|\psi|^4$. The Hamiltonian H as a function of l in three different dimensionalities is shown in the Figure 3.8.

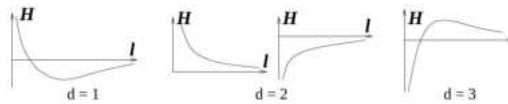


Figure 3.8 The Hamiltonian H as a function of the packet size l under the fixed N .

i) $d = 1$. At small l repulsion dominates with $H \simeq \omega'' N l^{-2}$ while attraction dominates at large l with $H \simeq -T N^2 l^{-1}$. It is thus clear that a stationary solution must exist with $l \sim \omega''/TN$ which minimizes the energy. Physically, the pressure of the waves balances attraction force. Such a stationary solution is called soliton, short for solitary wave. It is a traveling-wave solution of (3.28) with the amplitude function just moving, $A(x, t) = A(x - ut)$, and the phase having both a space-dependent traveling part and a uniform nonlinear part linearly growing with time: $\varphi(x, t) = f(x - ut) - T A_0^2 t$. Here A_0 and u are soliton parameters. We substitute travel solution into (3.28) and separate real and

imaginary parts:

$$A'' = \frac{2T}{\omega''} (A^3 - A_0^2 A) + A f' \left(f' - \frac{2u}{\omega''} \right), \quad \omega'' \left(A' f' + \frac{A f''}{2} \right) = u A'.$$

For the simple case of the standing wave ($u = 0$) the second equation gives $f = \text{const}$ which can be put zero. The first equation can be considered as a Newton equation $A'' = -dU/dA$ for the particle with the coordinate A in the potential $U(A) = -(T/2\omega'')(A^4 - 2A^2 A_0^2)$ and the space coordinate x playing particle's time. The soliton is a separatrix that is a solution which requires for particle an infinite time to reach zero, or in original terms where $A \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \pm\infty$. The upper part of Figure 3.9 presumes $T/\omega'' < 0$ that is the case of modulational instability. Mention in passing that the separatrix exists also for $T/\omega'' > 0$ but in this case the running wave is a kink that is a transition between two different values of the stable condensate (the lower part of the Figure). Kink is seen as a dip in intensity $|\psi|^2$.

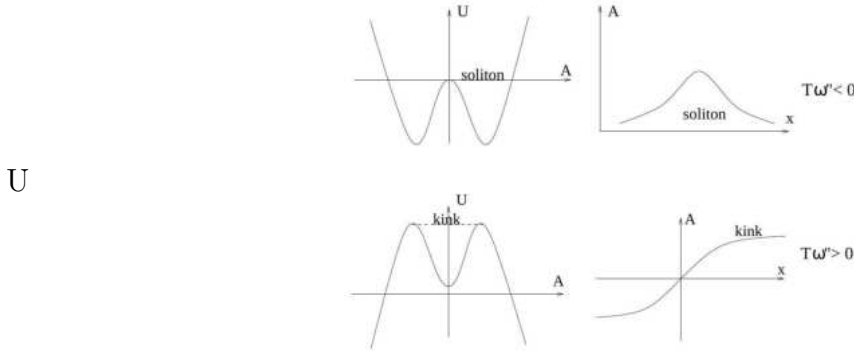


Figure 3.9 Energy as a function of the amplitude of a running wave and the profile of the wave. Upper part corresponds to the case of an unstable condensate where a steady solution is a soliton, lower part to a stable condensate where it is a kink.

Considering a general case of a traveling soliton (at $T\omega'' < 0$), one can multiply the second equation by A and then integrate: $\omega'' A^2 f' = u (A^2 - A_0^2)$ where by choosing the constant of integration we defined A_0 as A at the point where $f' = 0$. We can now substitute f' into the first equation and get the closed equation for A . The soliton solution has the form:

$$\psi(x, t) = \sqrt{2} A_0 \cosh^{-1} \left[\left(\frac{-2T}{\omega''} \right)^{1/2} A_0 (x - ut) \right] e^{i(2x - ut)u/2\omega'' - iT A_0^2 t}$$

Note that the Galilean transformation for the solutions of the NSE looks as follows: $\psi(x, t) \rightarrow \psi(x - ut, t) \exp[iu(2x - ut)/2\omega'']$. In the original variable $a(\mathbf{r})$, our envelope solitons look as shown in Figure 3.10.

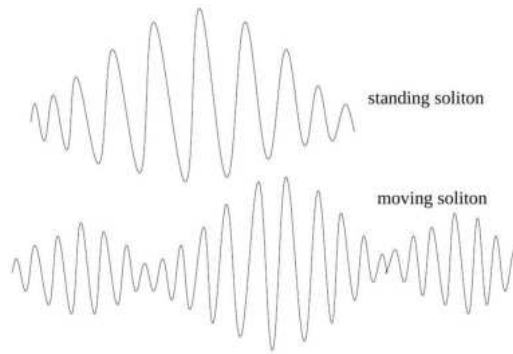


Figure 3.10 Standing and traveling solitons of the envelope of an almost monochromatic wave.

ii) $d = 2, 3$. When the condensate is stable, there exist stable solitons analogous to kinks which are localized minima in the condensate intensity. In optics they can be seen as grey and dark

filaments in a laser beam propagating through a nonlinear medium. The wave (condensate) amplitude turns into zero in a dark filament which means that it is a vortex i.e. a singularity of the wave phase, see Exercise 3.6.

When the condensate is unstable, there are no stable stationary solutions for $d = 2, 3$. From the dependence $H(l)$ shown in Figure 3.8 we expect that the character of evolution is completely determined by the sign of the Hamiltonian at $d = 2$: the wave packets with positive Hamiltonian spread because the wave dispersion (kinetic energy or pressure, in other words) dominates while the wave packets with negative

Hamiltonian shrink and collapse. Let us stress that the way of arguing based on the dependence $H(l)$ is non-rigorous and suggestive at best. A rigorous proof of the fact that the Hamiltonian sign determines whether the wave packet spreads or collapses in 2 d is called Talanov's theorem which is the expression for the second time derivative of the packet size squared, $l^2(t) = \int |\psi|^2 r^2 d\mathbf{r}$. To obtain that expression, differentiate over time using (3.31) then integrate by parts then differentiate again:

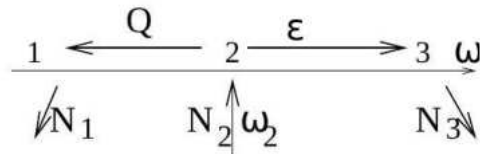
$$\begin{aligned} \frac{d^2 l^2}{dt^2} &= \frac{i\omega''}{2} \partial_t \int r^2 \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) d\mathbf{r} \\ &= i\omega'' \partial_t \int r_\alpha (\psi^* \nabla_\alpha \psi - \psi \nabla_\alpha \psi^*) d\mathbf{r} = 2\omega''^2 \int |\nabla \psi|^2 d\mathbf{r} \\ &\quad + d\omega'' T \int |\psi|^4 d\mathbf{r} = 4H + 2(d-2)\omega'' T \int |\psi|^4 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Consider an unstable case with $T\omega'' < 0$. We see that indeed for $d \geq 2$ one has an inequality $\partial_{tt} l^2 \leq 4\omega'' H$ so that

$$l^2(t) \leq 2\omega'' H t^2 + C_1 t + C_2$$

and for $\omega'' H < 0$ the packet shrinks to singularity in a finite time (this is the singularity in the framework of NSE which is itself valid only for the scales much larger than the wavelength of the carrier wave $2\pi/k_0$). This, in particular, describes self-focusing of light in nonlinear media. For $d = 2$ and $\omega'' H > 0$, on the contrary, one has dispersive expansion and decay.

Turbulence with two cascades. As mentioned, any equation (3.27) that describes only four-wave scattering necessarily conserves two integrals of motion, the energy H and the number of waves (or wave action) N . For waves of small amplitude, the energy is approximately quadratic in wave amplitudes, $H \approx \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k}$, as well as $N = \int |a_k|^2 d\mathbf{k}$. The existence of two quadratic positive integrals of motion in a closed system means that if such system is subject to external pumping and dissipation, it may develop turbulence that consists of two cascades.



Indeed, imagine that the source at some ω_2 pumps N_2 waves per unit time. It is then clear that for a steady state one needs two dissipation regions in ω -space (at some ω_1 and ω_3) to absorb inputs of both N and E . Conservation laws allow one to determine the numbers of waves, N_1 and N_3 , absorbed per unit time respectively in the regions of lower and high frequencies. Schematically, solving $N_1 + N_3 = N_2$ and $\omega_1 N_1 + \omega_3 N_3 = \omega_2 N_2$ we get

$$N_1 = N_2 \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1}, \quad N_3 = N_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \quad (3.33)$$

We see that for a sufficiently large left interval (when $\omega_1 \ll \omega_2 < \omega_3$) most of the energy is absorbed by the right sink: $\omega_2 N_2 \approx \omega_3 N_3$. Similarly at $\omega_1 < \omega_2 \ll \omega_3$ most of the wave action is absorbed at small ω : $N_2 \approx N_1$. When $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_3$ we have two cascades with the fluxes of energy ϵ and wave action Q . The Q -cascade towards large scales is called inverse cascade (Kraichnan 1967, Zakharov 1967), it corresponds (somewhat counter-intuitively) to a kind of self-organization i.e. creation of larger and slower modes out of small-scale fast fluctuations ⁷. The limit $\omega_1 \rightarrow 0$ is well-defined, in this case the role of the left sink can be actually played by a condensate which absorbs an inverse cascade. Note in passing that consideration of thermal equilibrium in a finitesize system with two integrals of motion leads to the notion of negative temperature ⁸.

An important hydrodynamic system with two quadratic integrals of motion is two-dimensional ideal fluid. In two dimensions, the velocity \mathbf{u} is perpendicular to the vorticity $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ so that the vorticity of any fluid element is conserved by virtue of the Kelvin theorem. That means that the space integral of any function of vorticity is conserved, including $\int \omega^2 d\mathbf{r}$ called enstrophy. We can write the densities of the two quadratic integrals of motion, energy and enstrophy, in terms of velocity spectral density: $E = \int |\mathbf{v}_\mathbf{k}|^2 d\mathbf{k}$ and $\Omega = \int |\mathbf{k} \times \mathbf{v}_\mathbf{k}|^2 d\mathbf{k}$. Assume now that we excite turbulence with a force having a wavenumber k_2 while dissipation regions are at k_1, k_3 . Applying the consideration similar to (3.33) we obtain

$$E_1 = E_2 \frac{k_3^2 - k_2^2}{k_3^2 - k_1^2}, \quad E_3 = E_2 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2} \quad (3.34)$$

We see that for $k_1 \ll k_2 \ll k_3$, most of the energy is absorbed by the left sink, $E_1 \approx E_2$, and most of the enstrophy is absorbed by the right one, $\Omega_2 = k_2^2 E_2 \approx \Omega_3 = k_3^2 E_3$. We conclude that conservation of both energy and enstrophy in two-dimensional flows requires two cascades: that of the enstrophy towards small scales and that of the energy towards large scales (opposite to the direction of the energy cascade in three dimensions). Large-scale motions of the ocean and planetary atmospheres can be considered approximately two-dimensional; creation and persistence of large-scale flow patterns in these systems is likely related to inverse cascades ⁹.

7.4 3.4 Korteveg - de Vries Equation (KdV)

Shallow-water waves and KdV equation. Soliton. Evolution of arbitrary initial distribution in the framework of KdV equation. Elastic scattering of solitons.

7.4.1 3.4.1 Weakly nonlinear waves in shallow water

Linear gravity-capillary waves have $\omega_k^2 = (gk + \alpha k^3/\rho) \tanh kh$, see (3.12). That is for sufficiently long waves (when the wavelength is larger than both h and $\sqrt{\alpha/\rho g}$) their dispersion relation is close to linear:

$$\omega_k = \sqrt{gh}k - \beta k^3, \quad \beta = \frac{\sqrt{gh}}{2} \left(\frac{h^2}{3} - \frac{\alpha}{\rho g} \right) \quad (3.35)$$

Therefore, one can expect a quasi-simple plane wave propagating in one direction like that described in Sections 2.3.2 and 2.3.3. Let us derive the equation satisfied by such a wave. From the dispersion relation, we get the linear part of the equation: $u_t + \sqrt{gh}u_x = -\beta u_{xxx}$ or in the reference frame moving with the velocity \sqrt{gh} one has $u_t = -\beta u_{xxx}$. To derive the nonlinear part of the equation in the long-wave limit, it is enough to consider the first non-vanishing

derivative (i.e. first). The motion is close to one-dimensional so that $u = v_x \gg v_y$. The z -component of the Euler equation gives $\partial p / \partial z = -\rho g$ and $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$ which we substitute into the x -component

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

In the continuity equation, $h + \zeta$ now plays the role of density:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h + \zeta)u = 0$$

We differentiate it with respect to time, substitute the Euler equation and neglect the cubic term:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \partial_x(h + \zeta)(uu_x + g\zeta_x) + \partial_x u \partial_x(h + \zeta)u \\ &\approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(gh\zeta + \frac{g}{2}\zeta^2 + hu^2 \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Apparently, the right-hand-side of this equation contains terms of different orders. The first term describes the linear propagation with the velocity \sqrt{gh} while the rest describe small nonlinear effect. Such equations are usually treated by the method which is called multiple time (or multiple scale) expansion. We actually applied this method in deriving Burgers and Nonlinear Schrödinger equations. We assume that u and ζ depend on two arguments, namely $u(x - \sqrt{gh}t, t)$, $\zeta(x - \sqrt{gh}t, t)$ and the dependence of the second argument is slow, that is derivative with respect to it is small. In what follows, we write the equation for u . Then at the main order $\partial_t u = -\sqrt{gh}u_x = -g\zeta_x$ that is $\zeta = u\sqrt{h/g}$ which is a direct analog of $\delta\rho/\rho = u/c$ for acoustics. From now on, u_t denotes the derivative with respect to the slow time (or simply speaking, in the reference frame moving with the velocity \sqrt{gh}). We obtain now from (3.36) :

$$\left(\partial_t - \sqrt{gh} \partial_x \right) \left(\partial_t + \sqrt{gh} \partial_x \right) u \approx -2\sqrt{gh}u_{xt} = (3/2)\sqrt{gh}(u^2)_{xx}$$

that is nonlinear contribution into u_t is $-3uu_x/2$ - comparing this with the general acoustic expression (2.23), which is $-(\gamma+1)uu_x/2$, we see that shallow-water waves correspond to $\gamma = 2$. This is also clear from the fact that the local "sound" velocity is $\sqrt{g(h + \zeta)} \approx \sqrt{gh} + u/2 = c + (\gamma - 1)u/2$, see (2.22). In nineteenth century, J. S. Russel used this formula to estimate the atmosphere height observing propagation of weather changes that is of pressure waves. Analogy between shallow-water waves and sound means that there exist shallow-water shocks called bores¹⁰ and hydraulic jumps. The Froude number u^2/gh plays the role of the (squared) Mach number in this case.

Hydraulic jumps can be readily observed in the kitchen sink when water from the tap spreads radially with the speed exceeding the linear "sound" velocity \sqrt{gh} : fluid layer thickness suddenly increases, which corresponds to a shock, see Figure 3.11 and Exercise 3.8. That shock is sent back by the sink sides that stop the flow; the jump position is where the shock speed is equal to the flow velocity¹¹. For a weak shock, the shock speed is the speed of "sound" so that the flow is "supersonic"

inside and "subsonic" outside. Long surface waves cannot propagate into the interior region which thus can be called a white hole (as opposite to a black hole in general relativity) with the hydraulic jump playing the role of a horizon. In Figure 3.11 one sees circular capillary ripples propagating inside; they are to be distinguished from the jump itself which is non-circular.



Figure 3.11 Hydraulic jump in a kitchen sink.

7.4.2 3.4.2 KdV equation and soliton

Now we are ready to combine both the linear term from the dispersion relation and the nonlinear term just derived. Making a change $u \rightarrow 2u/3$ we turn the coefficient at the nonlinear term into unity. The equation

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (3.37)$$

has been derived by Korteweg and de Vries equation in 1895 and is called KdV. Together with the nonlinear Schrödinger and Burgers equations, it is a member of an exclusive family of universal nonlinear models. It is one-dimensional as Burgers and has the same degree of universality. Indeed, most of the systems (namely those with a continuous symmetry spontaneously broken) allow for what is called Goldstone mode that is having $\omega \rightarrow 0$ when $k \rightarrow 0$. Most of such systems have an acoustic branch of excitations - this can be simply argued that in conservative time-reversible center-symmetrical systems one has to have $\omega^2(k^2)$ and the expansion of this function in the small- k limit generally starts from the first term that is $\omega^2 \propto k^2$. The next term is k^4 that is for long waves moving in one direction one has $\omega_k = ck [1 + C(kl_0)^2]$ where C is dimensionless coefficient of order unity and l_0 is some typical internal scale in the system. For gravity water waves, l_0 is the water depth; for capillary waves, it is $\sqrt{\alpha/\rho g}$. We see from (3.35) that, depending on which scale is larger, β can be either positive or negative, which corresponds to the waves with finite k moving respectively slower or faster than "sound" velocity \sqrt{gh} . Adding surface tension to the restoring force, one increases the frequency. On the other hand, finite depth-to-wavelength ratio means that fluid particles move in ellipses (rather than in straight lines) which decreases the frequency. Quadratic nonlinearity $\partial_x u^2$ (which stands both in Burgers and KdV and means simply the renormalization of the speed of sound) is also pretty general, indeed, it has to be zero for a uniform velocity so it contains a derivative. An incomplete list of the excitations described by KdV contains acoustic perturbations in plasma (then l is either the Debye radius of charge screening or Larmor cyclotron radius in the magnetized plasma), phonons in solids (then l is the distance between atoms) and phonons in helium (in this case, amazingly, the sign of β depends on pressure).

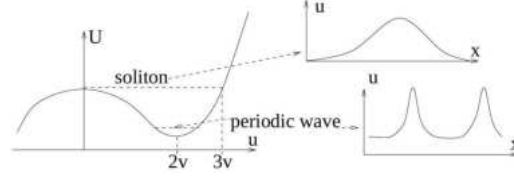
KdV has a symmetry $\beta \rightarrow -\beta, u \rightarrow -u$ and $x \rightarrow -x$ which makes it enough to consider only positive β . Let us first look for the traveling waves, that is substitute $u(x - vt)$ into (3.37):

$$\beta u_{xxx} = vu_x - uu_x$$

This equation has a symmetry $u \rightarrow u + w, v \rightarrow v + w$ so that integrating it once we can put the integration constant zero choosing an appropriate constant w (this is the trivial renormalization of sound velocity due to uniformly moving fluid). We thus get the equation

$$\beta u_{xx} = -\frac{\partial U}{\partial u}, \quad U(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{vu^2}{2}$$

A general solution of this ordinary differential equations can be written in elliptic functions. We don't need it though to understand the general properties of the solutions and to pick up the special one (i.e. soliton). Just like in Sect. 3.3.3, we can treat this equation as a Newton equation for a particle in a potential. We consider positive v since it is a matter of choosing proper reference frame. We are interested in the solution with finite $|u(x)|$; unrestricted growth would violate the assumption on weak nonlinearity. Such finite solutions have u in the interval $(0, 3v)$.



We see that linear periodic waves exist near the bottom at $u \approx 2v$. Their amplitude is small in the reference frame moving with $-2v$ - in that reference frame they have negative velocity as it must be for positive β . Indeed, the sign of β is minus the sign of the dispersive correction $-3\beta k^2$ to the group velocity $d\omega_k/dk$. Soliton, on the contrary, moves with positive velocity in the reference frame where there is no perturbation at infinity (it is precisely the reference frame used in the above picture). In physical terms, solitons are supersonic if the periodic waves are subsonic and vice versa (the physical reason for this is that soliton should not be able to radiate linear waves by Cherenkov radiation).

As usual, the soliton solution is a separatrix:

$$u(x, t) = 3v \cosh^{-2} \left[\sqrt{\frac{v}{4\beta}} (x - vt) \right] \quad (3.38)$$

The higher the amplitude, the faster it moves (for $\beta > 0$) and the more narrow is. Similarly to the argument at the end of (3.3.2), one can realize that 1 d KdV soliton is unstable with respect to the perpendicular perturbations if its speed decreases with the amplitude that is for $\beta < 0$ when linear waves are supersonic and soliton is subsonic.

Without friction or dispersion, nonlinearity breaks acoustic perturbation. We see that wave dispersion stabilizes the wave similar to the way the viscous friction stabilizes shock front, but the waveform is, of course, different. The ratio of nonlinearity to dispersion, $\sigma = uu_x/\beta u_{xxx} \sim ul^2/\beta$, is an intrinsic nonlinearity parameter within KdV (in addition to the original "external" nonlinearity parameter, Mach number u/c , assumed to be always small). For soliton, $\sigma \simeq 1$ that is nonlinearity balances dispersion as that was the case with the NSE soliton from Sect. 3.3.3. That also shows that soliton is a non-perturbative object, one cannot derive it starting from a linear traveling waves and treating nonlinearity perturbatively. For Burgers equation, both finite- M and traveling wave solutions depended smoothly on the respective intrinsic parameter Re and existed for any Re . What can one say about the evolution of a perturbation with $\sigma \gg 1$ within KdV? Can we assert that any perturbation with $\sigma \ll 1$ corresponds to linear waves?

7.4.3 3.4.3 Inverse scattering transform

It is truly remarkable that the evolution of arbitrary initial perturbation can be studied analytically within KdV. It is done in somewhat unexpected way by considering a linear stationary Schrödinger equation with the function $-u(x, t)/6\beta$ as a potential depending on time as a parameter:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{u(x, t)}{6\beta} \right] \Psi = E\Psi \quad (3.39)$$

Positive $u(x)$ could create bound states that is a discrete spectrum. As has been noticed by Gardner, Green, Kruskal and Miura in 1967, the spectrum E does not depend on time if $u(x, t)$ evolves according to KdV equation. In other words, KdV describes the iso-spectral transformation of the quantum potential. To show that, express u via Ψ

$$u = -6\beta \left(E + \frac{\Psi_{xx}}{\Psi} \right) \quad (3.40)$$

Notice similarity to the Hopf substitution one uses for Burgers, $v = -2\nu\phi_\xi/\phi$, one more derivative in (3.40) because there is one more derivative in KdV - despite the seemingly naive and heuristic way of such thinking, it is precisely the way Miura came to suggest (3.40). Now, substitute (3.40) into KdV and derive

$$\Psi^2 \frac{dE}{dt} = 6\beta \partial_x [(\Psi \partial_x - \Psi_x)(\Psi_t + \Psi_{xxx} - \Psi_x(u + E)/2)] \quad (3.41)$$

Integrating it over x we get $dE/dt = 0$ since $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx$ is finite for bound state. The eigenfunctions evolve according to the equation that can be obtained twice integrating (3.41) and setting integration constant zero because of the normalization:

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} - \Psi_x \frac{u + E}{2} = 0 \quad (3.42)$$

From the viewpoint of (3.39), soliton is the well with exactly one level, $E = v/8\beta$, which could be checked directly. For distant solitons, one can define energy levels independently. For different solitons, velocities are different and they generally will have collisions. Since the spectrum is conserved, after all the collisions we have to have the same solitons. Since the velocity is proportional to the amplitude the final state of the perturbation with $\sigma \gg 1$ must look like a linearly ordered sequence of solitons: The quasi-linear waves that correspond to a continuous spectrum are

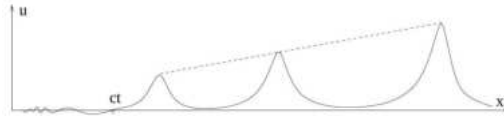


Figure 3.12 Asymptotic form of a localized perturbation. left behind and eventually spread. One can prove that and analyze the evolution of an arbitrary initial perturbation by the method of Inverse Scattering Transform (IST):

$$\begin{aligned} u(x, 0) \rightarrow \Psi(x, 0) &= \sum a_n \Psi_n(x, 0) + \int a_k \Psi_k(x, 0) dk \\ \rightarrow \Psi(x, t) &= \sum a_n \Psi_n(x, t) + \int a_k \Psi_k(x, 0) e^{-i\omega_k t} dk \rightarrow u(x, t) \end{aligned}$$

The first step is to find the eigenfunctions and eigenvalues in the potential $u(x, 0)$. The second (trivial) step is to evolve the discrete eigenfunctions according to (3.42) and continuous according to frequencies. The third (nontrivial) step is to solve an inverse scattering problem that is to restore potential $u(x, t)$ from it's known spectrum and the set of (new) eigenfunctions¹².

Considering weakly nonlinear initial data ($\sigma \ll 1$), one can treat the potential energy as perturbation in (3.39) and use the results from the quantum mechanics of shallow wells. Remind that the bound state exists in 1 d if the integral of the potential is negative, that is in our

case when the momentum $\int u(x)dx > 0$ is positive i.e. the perturbation is supersonic. The subsonic small perturbation (with a negative momentum) do not produce solitons, it produces subsonic quasi-linear waves. On the other hand, however small is the nonlinearity σ of the initial perturbation with positive momentum, the soliton (an object with $\sigma \sim 1$) will necessarily appear in the course of evolution. The amplitude of the soliton is proportional to the energy of the bound state which is known to be proportional to $(\int u dx)^2$ in the shallow well.

The same IST method was applied to the 1d Nonlinear Schrodinger

Equation by Zakharov and Shabat in 1971. Now, the eigenvalues E of the system

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi_1 + \psi\psi_2 &= E\psi_1 \\ -i\partial_t\psi_2 - \psi^*\psi_1 &= E\psi_2 \end{aligned}$$

are conserved when ψ evolves according to 1d NSE. Similarly to KdV, one can show that within NSE arbitrary localized perturbation evolves into a set of solitons and diffusing quasi-linear wave packet.

The reason why universal dynamic equations in one space dimension happen to be integrable may be related to their universality. Indeed, in many different classes of systems, weakly-nonlinear long-wave perturbations are described by Burgers or KdV and quasi-monochromatic perturbations by NSE. Those classes may happen to contain degenerate integrable cases, then integrability exists for the limiting equations as well. These systems are actually two-dimensional (space plus time) and their integrability can be related to a unique role of the conformal group (which is infinite in 2d). From potential flows described in Section 1.2.4 to nonlinear waves described in this Chapter, it seems that the complex analysis and the idea of analyticity is behind most of the solvable cases in fluid mechanics, as well as in other fields of physics.

8 Fluid Mechanics other basics

8.1 Основы сплошных сред по общей физике

(потом поставлю в начало этой части)

8.1.1 Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности

В отличие от твердых тел жидкости и газы с точки зрения механики являются веществами текучими. Но если в твердых телах пластичность неотделима от диссипации, то в случае текучей среды диссипацией при рассмотрении многих важных процессов и явлений можно пренебречь. Такой подход называется приближением идеальной жидкости (заметим, что во многих случаях приближение идеальной жидкости описывает и динамику течения газа). Далее, очень многие практически важные задачи допускают представление о несжимаемой жидкости. Это понятие вошло в обиход и нередко используется в технических приложениях, но надо отдавать себе отчет в том, что сжимаемость жидкости, если понимать ее в контексте гл. 8.1,

заметно превышает таковую у твердого тела. Но как твердое тело — вполне реальное и подверженное деформациям — можно во многих динамических задачах с хорошей точностью считать абсолютно твердым, так и жидкость в задаче о ее течении нередко с достаточной точностью представима как несжимаемая. Обычно такое представление оправдано, если перепады скоростей в жидкости гораздо меньше скорости звука, и в этом смысле даже воздух при атмосферном давлении может рассматриваться как несжимаемая жидкость, если скорость его течения меньше 300 м/с. Хотя, казалось бы,

течение жидкости и движение тела конечных размеров весьма различны, общий «камертон» в системе основных понятий все же существует. Если мы выделим объем жидкости столь малый, что можно пренебречь его размерами и формой, и этот объем не перемешивается на характерном масштабе задачи (или за характерное время задачи) с другим веществом, то такой жидкий элемент можно рассматривать как материальную точку. Это позволяет определить скорость и ускорение элемента и вывести на этой основе уравнения течения (или, в частности, равновесия) жидкости. Траектория такого жидкого элемента называется линией тока (рис. 8.6 а).

Совокупность линий тока, близлежащих в пределах, заданных характерным временем и масштабом задачи, называется трубкой тока. Предполагается, что трубка тока охватывается некоторым односвязным контуром ($C \rightarrow C'$ на рис. 8.6 б). Корректность понятий жидкого элемента и линии тока обусловлена лишь малостью элементарного объема. Понятие трубки тока подразумевает, что на интересующем нас пространственном масштабе линии тока достаточно мало расходятся и, в частности, не образуют вихрей.

при таком рассмотрении локальные характеристики - плотность вещества ρ и скорость \mathbf{v} - принято относить не к движущемуся жидкому элементу, а к потоку в целом и рассматривать как функции точки $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

Если протекание вещества не сопровождается никакими реакциями, то масса вещества в потоке сохраняется. Рассмотрим некоторую трубку тока (рис. 8.7 а). Пусть течение стационарно.

Выделим объем, ограниченный стенками трубки тока и двумя ее сечениями, нормальными к скорости жидкости. Сохранение массы в выделенном объеме выражается равенством массы жидкости, втекающей в сечение 1 и вытекающей из сечения 2 за время dt : $\rho_1 S_1 \mathbf{v}_1 dt = \rho_2 S_2 \mathbf{v}_2 dt$.

Здесь $\rho_{1,2}$, $S_{1,2}$ и $\mathbf{v}_{1,2}$ - плотность жидкости, площадь нормального сечения трубки тока и скорость жидкости в точках 1 и 2. Тем самым закон сохранения массы принимает вид уравнения неразрывности струи

$$\rho S_{\perp} v = \text{const}$$

или для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$S_{\perp} v = \text{const}.$$

Если поток нестационарен, уравнения (8.13, 8.14) должны быть модифицированы. Представим себе одномерную трубку тока (рис. 8.7 б). Закон сохранения массы вещества означает, что масса жидкости, втекающая в некоторый объем, $\rho v(x) dt S$, равна массе жидкости, накапливающейся в этом объеме, $\dot{\rho} dt S dx$, плюс массе вытекающей жидкости $\rho v(x + dx) dt S$. Имея в виду, что все характерные параметры зависят, вообще говоря, от двух переменных x и t , введем понятие частной производной

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \equiv \left. \frac{df}{dt} \right|_{x=\text{const}}, \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{t=\text{const}}$$

Закон сохранения массы принимает вид

$$\rho v(x) S = \dot{\rho} S dx + \rho v(x + dx) dt S \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v(x))}{\partial x}$$

Традиционная форма записи этого закона называется уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

В случае неоднородного течения обобщение уравнения (8.15) достигается посредством введения оператора дивергенции. По определению, для любой векторной функции $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(x, y, z)$ дивергенция \mathbf{j} есть

$$\operatorname{div} \mathbf{j} \equiv \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

В общем случае трехмерного течения уравнение (8.15) принимает Вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Если же справедливо приближение несжимаемой жидкости, то изменением плотности как в пространстве, так и во времени можно пренебречь:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Уравнения (8.16), (8.17) выглядят, конечно, сложнее, чем, соответственно, (8.13), (8.14), но обладают и заметным преимуществом - они локальны, т. е. не привязаны ни к какой трубке тока, и их решение, в принципе, просто некоторая функция точки в пространстве \mathbf{r} и времени t .

8.1.2 Архимедова сила, уравнение Бернулли

В отличие от твердого тела, жидкость - среда бесструктурная, ее микроскопическое устройство не содержит такой «несущей конструкции», как кристаллическая решетка. Соответственно вопрос об ориентации поверхности, к которой приложено напряжение, здесь не возникает - все ориентации равноправны. Кроме того, в жидкости несравненно меньшую роль играют касательные напряжения. Если в твердом теле они ответственны за сдвиговые деформации и вполне проявляют себя в статике, то в жидкости касательные напряжения возникают исключительно в динамической задаче и лишь при учете диссипативного эффекта - вязкости.

Опыт показывает, что в гидростатике - науке о равновесии жидких тел - а равно и в консервативной (бездиссипативной) гидродинамике существует всего один вид напряжения - давление, обладающее свойством изотропности. Это и составляет содержание закона Паскаля (по имени французского ученого Блеза Паскаля (1623 – 1662)) : давление жидкости и газа передается одинаково во всех направлениях. Иными словами, давление скалярная функция:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{r})$$

Одно из важнейших следствий изотропии давления было известно задолго до Паскаля - это закон Архимеда (по имени

древнегреческого ученого Архимеда (ок. 287–212 до н. э.)): тело, погруженное в жидкость, выталкивается с силой, равной весу вытесненной жидкости. Рассмотрим тело, плавающее в сосуде с жидкостью (рис. 8.8 а), и отдельно — сосуд, заполненный той же жидкостью до того же уровня, но без погруженного в него тела (рис. 8.8 б). Если жидкость, заполняющая полость на рис. 8.8 б, пребывает в равновесии, то значит силы, действующие на полость, как раз и удерживают ее собственный вес. Ввиду скалярности давления (8.18) и отсутствия касательных напряжений, неважно, чем заполнена полость, так что и на тело будут действовать так же распределенные силы, имеющие ту же равнодействующую. Хотя приведенные выше рассуждения и дают нам аргументы в пользу закона Архимеда, они не могут считаться доказательством.

В дополнение к ним хотелось бы дать современную трактовку архимедовой силы, пригодную для решения динамических задач. Мы сделаем это, опираясь на закон Паскаля. Пусть давление в жидкости или газе зависит от координаты:

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$ (рис. 8.9). Выделим мысленно в жидкости некоторый параллелепипед со сторонами dx, dy, dz , ориентированными по координатным осям. Тогда в направлении оси x на него будет действовать сила $\mathcal{P}(x) \cdot dydz$, а навстречу ей $-\mathcal{P}(x+dx) \cdot dydz$, суммарная же сила будет равна их разности, которая, в силу малости dx , может быть линеаризована:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dydz - \mathcal{P}(x+dx) \cdot dydz \approx -\frac{d\mathcal{P}}{dx} \cdot dx dydz$$

Удобно ввести понятие объемной плотности силы:

$$f_x \equiv \frac{dF_x}{dV} = -\frac{d\mathcal{P}}{dx}$$

Это и есть сила Архимеда. В случае зависимости давления от трех координат, вместо обычной производной в (8.19), следует использовать операцию градиента - см. (5.25).

Представим себе, например, несжимаемую жидкость в поле тяжести. При $\rho(x) = \text{const}$ объемная плотность силы тяжести есть просто ρg . Пусть ось x направлена вглубь жидкости. Запишем условие равновесия любого малого элемента объема dV :

$$\rho g \cdot dV - \frac{d\mathcal{P}}{dx} \cdot dV = 0$$

Сокращая dV и интегрируя, получаем хрестоматийный результат:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \rho g x$$

где \mathcal{P}_0 - давление на поверхности жидкости. Из (8.20) можно

получить решение упомянутых выше статических задач. Рассмотрим в качестве примера два открытых сосуда, соединенных посредством сифона (рис. 8.10). Давление жидкости в точке A , с точностью до отношения ширины трубки к высоте ее над уровнем жидкости в сосудах h , равно

$$\mathcal{P}_0 + \rho g x_A = \mathcal{P}_0 - \rho g h$$

безотносительно к точке свободной поверхности, от которой мы отсчитываем x_a . тем самым подтверждается, что в сосудах, соединенных так, как показано на рис. 8.10, жидкость в равновесии оказывается на одном уровне, а при нарушении этого условия должно возникнуть течение, перекачивающее жидкость в сосуд с более низким уровнем через трубку. на этом и основан принцип сифона.

рассмотрим эффекты, обусловленные работой давления. прежде всего представим себе жидкость или газ, занимающие в состоянии равновесия некий цилиндр с площадью основания s

(рис. 8.11 а). Давление в пределах данного цилиндрического объема будем считать постоянным и равным \mathcal{P} . Пусть одно из оснований смещается на малое расстояние dx , однако при этом количество текучего вещества внутри цилиндра сохраняется, т. е. жидкость (газ) не течет через движущуюся границу. Сила давления вещества, заполняющего цилиндр, на границу равна $\mathcal{P} \cdot S$, соответственно, работа, совершаемая веществом при расширении, есть

$$\delta A = \mathcal{P} \cdot S \cdot dx = \mathcal{P} dV$$

где dV - изменение объема жидкости или газа. Если в процессе расширения как-то изменится и давление, $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} + d\mathcal{P}$, то это даст поправку в (8.21) всего лишь второго

порядка. Пусть теперь слегка меняет объем жидкое или газообразное тело произвольной формы - на рис. 8.11 б начальное и конечное состояние показаны соответственно сплошной и штриховой линиями. В силу закона Паскаля, давление на любой участок границы действует в направлении нормали. Поэтому на любой малой площадочке, принадлежащей границе, мы можем построить цилиндр с образующей, параллельной направлению нормали ξ (рис. 8.11 б). Дальнейшие рассуждения аналогичны выводу (8.21); вклад всех цилиндров можно просуммировать (с учетом знака!) и получить тот же ответ:

$$\delta A = \mathcal{P} dV$$

где под dV подразумевается полное изменение объема жидкого элемента.

Рассмотрим стационарное течение жидкости или газа без диссипации. Выделим некоторую трубку тока (рис. 8.12). Пусть

s_1 и s_2 - два произвольных сечения, нормальных к потоку, ρ_1, v_1 и ρ_2, v_2 - соответственно, плотность и скорость в сечениях s_1 и s_2 . За время dt через сечение s_1 протекает объем $s_1 v_1 dt$, при этом втекающий

газ совершает работу $\mathcal{P}_1 S_1 v_1 dt$. За то же время из сечения S_2 вытекает объем $S_2 v_2 dt$, совершая при этом работу $\mathcal{P}_2 S_2 v_2 dt$ над всем вытекающим газом. При стационарном течении массы $\rho_2 S_2 v_2 dt$ и $\rho_1 S_1 v_1 dt$, очевидно, равны. Введем плотность энергий текучей среды:

$$\frac{dE}{dV} = \rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2}$$

где ε включает отнесенную к единице массы внутреннюю энергию плюс энергию во внешних полях, т. е. всю энергию, кроме кинетической, плотность которой равна $\rho v^2/2$. Поскольку мы положили диссипативные эффекты несущественными, используем закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} S_2 v_2 dt \left(\rho_2 \varepsilon_2 + \rho_2 \frac{v_2^2}{2} \right) - S_1 v_1 dt \left(\rho_1 \varepsilon_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} \right) = \\ = \mathcal{P}_1 S_1 v_1 dt - \mathcal{P}_2 S_2 v_2 dt. \end{aligned}$$

Разделим это уравнение почленно на величину dm протекающей через сечение за время dt массы. Удобно первый член левой части и второй член правой части (8.22) разделить на $dm = \rho_2 S_2 v_2 dt$, а второй член левой части и первый член правой части (8.22) разделить на $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt$. В результате получаем уравнение Бернулли (по имени математика и физика Д. Бернулли (1700 – 1782))

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2} + \varepsilon_2 + \frac{v_2^2}{2},$$

или, что то же,

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho} + \varepsilon + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Важный частный случай уравнения Бернулли - течение в поле силы тяжести при неизменной массовой плотности внутренней энергии (для идеального газа это обусловлено постоянством температуры). Тогда $dE/dV = \rho gh + \rho v^2/2$, где h - высота по отношению к некоторому заранее определенному нулевому уровню. Как следствие, получаем

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Если к тому же, жидкость несжимаема, то (8.24) можно использовать в виде

$$\mathcal{P} + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Именно эту форму записи чаще всего связывают с именем Бернулли; подчеркнем, однако, что уравнение (8.23) гораздо более универсально.

Уравнение (8.25) позволяет легко получить формулу Торричелли для скорости вытекания несжимаемой жидкости из сосуда

через малое отверстие (она, правда, была выведена за сто лет до уравнения Бернулли). Постановка задачи ясна из рис. 8.13. Пусть высота уровня воды в сосуде равна h_1 , а высота, на которой расположено отверстие, $-h_2$, так что $h_1 - h_2 = h$.

Отверстие должно быть достаточно малым, чтобы выполнялось условие $\dot{h} \ll v$. Из уравнения непрерывности (8.14) легко усмотреть, что для этого необходимо, чтобы сечение отверстия было много меньше сечения сосуда. Таким образом обеспечивается с необходимой точностью, во-первых, стационарность течения и тем самым применимость уравнения Бернулли. Во-вторых, при медленном вытекании мы можем избежать вихревых течений, что позволяет рассматривать наше течение как одну-единственную трубку тока (обозначена пунктиром на рис. 8.13). Это очень важный аспект данной задачи; напомним, что уравнения (8.23) – (8.25) задают инвариант только в пределах трубки тока, который не всегда можно распространить на поток как целое.

Итак, $\rho(h_1) = \rho(h_2)$; на уровне $h_1 v \approx 0$, а на уровне h_2 , как следует из (8.24),

$$v = \sqrt{2gh}$$

т. е. скорость вытекания несжимаемой жидкости из малого отверстия совпадает со скоростью тела, свободно падающего с высоты h . Это и есть формула Торричелли (по имени итальянского физика Э. Торричелли (1608 – 1647)).

Отметим в заключение, что величина $\rho v^2/2$ иногда называется динамическим давлением, а формула (8.25) трактуется как инвариантность суммы статического и динамического давлений. В стационарном потоке несжимаемой жидкости давление \mathcal{P} должно быть меньше там, где больше скорость. Так объясняют принцип работы пульверизатора, эффект «присасывания» кораблей при близком прохождении параллельными курсами и т. д.

8.1.3 тензор напряжений?

(что вообще рассматриваем?)

ходят слухи, что нужно ввести

Определение 8.1. *тензор напряжений t*

мун говорит, что начало в уравнении:

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

и в самом деле, оно похоже на уравнение навье-стокса. в самом деле!

8.1.4 формула Пуазейля

(пока общезвестно только)

До сих пор мы ничего не говорили о касательных напряжениях в жидкости или газе, ограничиваясь только изотропным давлением в рамках закона Паскаля. Оказывается, однако, что закон Паскаля является исчерпывающим лишь в гидростатике, а в случае неоднородных в пространстве течений вступает в игру диссипативный эффект - вязкость, вследствие которого как раз и возникают касательные напряжения.

Пусть в некоторой области потока жидкости два бесконечно близких ее слоя, движущихся в направлении оси x , соприка-

саются друг с другом на горизонтальной поверхности с площадью S (рис. 8.14). Опыт показывает, что возникающая на этой площадке сила трения F между слоями тем больше, чем больше площадь S и чем быстрее изменяется в этом месте скорость есть, в направлении оси y . Быстрота изменения скорости v как

функции y характеризуется производной dv/dy . Окончательно, полученный из опыта результат можно записать в виде

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

Здесь F - сила, действующая со стороны вышележащего слоя на нижележащий, η - коэффициент пропорцио-

нальности, получивший название коэффициента вязкости жидкости (сокращенно его называют просто вязкостью жидкости). Размерность его вытекает из формулы (8.27): $[\eta] = [m]/[l][t]$ единицу измерения принято выражать как 1 Па - с. Направление силы F (вправо или влево на рис. 8.14) зависит от того, быстрее или медленнее движется вышележащий слой относительно нижележащего. З (8.27) следует выражение для касательных напряжений:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

Коэффициент вязкости η имеет разные значения для различных жидкостей, и для определенной жидкости зависит от внешних условий, в первую очередь, от температуры. По своей природе силы трения в жидкости являются силами межмолекулярного взаимодействия, то есть электромагнитными силами, Как и силы трения между твердыми телами.

Перейдем к рассмотрению задачи о вычислении расхода несжимаемой жидкости, текущей в горизонтальной круглой прямолинейной трубе с постоянной площадью поперечного сечения

при заданном перепаде давлений. Расходом называется масса жидкости, протекающая в единицу времени через сечение трубы. Эта задача имеет чрезвычайно большое практическое значение: инженерный расчет нефтепроводов и даже обычного водопровода безусловно требует ее решения. Будем полагать, что нам заданы длина трубы l , ее радиус R .

давления на концах трубы \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 ($\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2$), а также плотность жидкости ρ и ее вязкость η (рис. 8.15).

Наличие сил трения приводит к тому, что на разных расстояниях от центра трубы жидкость течет с разной скоростью. В частности, непосредственно у стенки жидкость должна быть неподвижна, иначе из (8.28) следовали бы бесконечные касательные напряжения

Для вычисления массы жидкости, протекающей каждую секунду через все поперечное сечение трубы, мы разобьем это поперечное сечение на бесконечно малые кольцевые площадки с внутренним радиусом r и внешним $r+dr$ и вычислим сначала расход жидкости через каждое из этих бесконечно малых сечений, в которых скорость жидкости можно считать одинаковой. Просуммировав потом по всем бесконечно малым сечениям, мы определим полный расход жидкости.

Масса жидкости dm , протекающая каждую секунду через бесконечно малое поперечное сечение $2\pi r dr$ со скоростью $v(r)$, равна

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi r dr \rho v(r)$$

Полный расход жидкости Q мы получим, проинтегрировав выражение (8.29) по r от 0 до R

$$Q \equiv \frac{dm}{dt} = 2\pi\rho \int_0^R rv(r)dr$$

Где мы вынесли за знак интегрирования постоянную величину $2\pi\rho$. Чтобы вычислить интеграл в (8.30), необходимо знать зависимость скорости жидкости от радиуса, то есть конкретный Вид функции $v(r)$. Для определения $v(r)$ мы воспользуемся уже известными нам законами механики. Рассмотрим в некоторый момент времени цилиндрический объем жидкости некоторого произвольного радиуса r и длины l (рис. 8.15). Заполняющую этот объем жидкость можно рассматривать как совокупность бесконечно малых жидких частиц, образующих систему взаимодействующих материальных точек. При стационарном течении жидкости в трубе все эти материальные точки движутся с независимыми от времени скоростями. Следовательно, центр масс всей этой системы также движется с постоянной скоростью. Уравнение для движения центра масс системы материальных точек имеет вид (см. гл. 6)

$$M \frac{d\mathbf{V}_{цм}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{вн}$$

где M - полная масса системы, $\mathbf{V}_{цм}$ - скорость центра масс, $\sum \mathbf{F}_{вн}$ - сумма внешних сил, приложенных в выбранный момент времени к рассматриваемой системе.

Так как в нашем случае $\mathbf{V}_{цм} = \text{const}$, то из (8.31) получаем

$$\sum \mathbf{F}_{вн} = 0$$

Внешние силы - это силы давления $F_{\text{давл}}$, действующие на основания выбранного цилиндрического объема, и силы трения $F_{\text{тр}}$, действующие на боковую поверхность цилиндра со стороны окружающей жидкости - см. (8.27):

$$F_{\text{давл}} = \pi r^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2), \quad F_{\text{тр}} = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

Как мы показали, сумма этих сил равна нулю, то есть

$$2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} + \pi r^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = 0$$

Это соотношение после простых преобразований можно записать в виде

$$dv = -\frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{2\eta l} r dr$$

Интегрируя обе части написанного выше равенства, получим

$$v = -\frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{4\eta l} r^2 + \text{const.}$$

Постоянная интегрирования определится из условия, что при $r = R$ скорость v должна обращаться в нуль. Это дает

$$v = \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Как мы видим, скорость жидкости максимальна на оси трубы и при удалении от оси меняется по параболическому закону (см. рис. 8.15)

Подставив (8.32) в (8.30), находим искомый расход жидкости

$$Q = \pi \rho \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

Или

$$Q = \pi \rho \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{8\eta l} R^4$$

Отличительной чертой соотношения (8.33) является сильная зависимость расхода жидкости от радиуса трубы: расход пропорционален четвертой степени радиуса.

(Сам Пуазейль эту формулу не выводил, а исследовал проблему только экспериментально, изучая движение жидкости в капиллярах). На формуле Пуазейля основан один из экспериментальных методов определения коэффициентов вязкости жидкостей.

8.1.5 турбулентность

Формула Пуазейля применима только для ламинарных течений жидкости. Ламинарным называется такое течение, когда жидкие частицы движутся вдоль устойчивых траекторий. При достаточно больших скоростях ламинарное течение становится неустойчивым, хаотичным и переходит в так называемое турбулентное течение. При этом основные уравнения гидродинамики остаются в силе, но большинство результатов настоящей главы должно быть подвергнуто ревизии. Характер турбулентных движений может быть весьма различным в зависимости от внешних условий. Из повседневного опыта нам более всего знакомо явление гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости — представление о таком режиме дает турбулентная струя, вытекающая из крана. Реализуется данное состояние жидкости в случае перепада скоростей течения, много меньшего скорости звука. Для него характерно образование множественных вихрей (М. В. Ломоносов подразделял течения жидкости на «покойные» и «коловратные»). На рис. 8.16 а схематически изображено образование вихрей при обтекании несжимаемой жидкостью шара, а на рис. 8.16 б — при течении в прямой трубе.

Следует особо обратить внимание на то, что во всех оценках, относящихся к турбулентному состоянию, фигурирует не скорость течения как таковая, а именно перепад скоростей $|\Delta \mathbf{v}|$. Действительно, если некоторое течение происходит с постоянной всюду скоростью \mathbf{v} , мы можем, переходя в движущуюся систему отсчета, сделать эту скорость как угодно малой или большой, так что подлинная «индивидуальность» течения может быть отражена лишь величиной $|\Delta \mathbf{v}|$.

Хотя детальное рассмотрение физики турбулентных состояний далеко выходит за рамки нашего курса, мы все же можем кое-что сказать о переходе от ламинарного («ПоКойного») к турбулентному («коловратному») течению. Принципиальным моментом здесь будет использование методов подобия и размерности.

Дело в том, что размерность физическиХ величин — не НО и метод получения новых результатов в физике вообще и в механике, в частности, Хотя Возможности его ограничены и предсказательная сила не абсолютна (чему последующее рассмотрение будет хорошим примером).

Попробуем проанализировать физические предпосылки перехода к турбулентному течению, представленному на рис. 8.16. Пока и поскольку течение остается ламинарным, у него сохраняется характерный пространственный масштаб a (радиус Шара на рис. 8.16 а либо диаметр трубы на рис. 8.16 б). Турбулизация течения

приводит к измельчению масштаба, а значит, и к росту пространственных производных от скорости, чему, как можно усмотреть из формул (8.27), (8.28), противодействуют эффекты, обусловленные вязкостью. Таким образом, чем больше вязкости жидкости, тем более затруднен переход в турбулентное состояние. Еще более очевидным представляется следующее утверждение: чем больше перепад скоростей, тем легче переход из ламинарного режима в турбулентный - скажем, в предельном случае пространственно-однородного течения турбулентности просто не может быть, поскольку оно эквивалентно состоянию покоя.

Как уже указывалось выше, размерность вязкости составляет

$$[\eta] = \frac{[m]}{[l][t]}$$

Составим безразмерную комбинацию

$$\text{Re} = \frac{m}{l t \eta}$$

Подставляя в это выражение значения характерных параметров:

$$m = \rho a^3, \quad l = a, \quad t = \frac{a}{v},$$

получим величину

$$\text{Re} = \frac{\rho v a}{\eta}$$

которую принято называть числом Рейнольдса (по имени английского физика О. Рейнольдса (1842 – 1912)). Число Рейнольдса можно переписать в виде

$$\text{Re} = \frac{\rho v^2 l^3}{\eta v l^2}$$

откуда следует, что оно характеризует отношение кинетической энергии движущейся жидкости $T \sim \rho v^2 l^3 / 2$ к потере этой энергии, равной работе сил вязкости на характерной длине l , $A \approx \eta v l^2$. Помимо вязкости η , жидкость характеризуется еще и плотностью ρ , а течение как таковое - пространственным

масштабом l и характерным перепадом скоростей v . (Применительно к ситуации рис. 8.16 это просто скорость по порядку величины, так как вблизи неподвижных стенок скорость ДОЛЖНА обращаться в нуль). Изложенные выше рассуждения позволяют заключить, что чем больше величина Re , тем благоприятнее ситуация для турбулентного течения, и напротив, для течений с малыми числами Рейнольдса должен, по-видимому, реализоваться ламинарный режим.

Данные эксперимента находятся с этими соображениями в полном согласии. Оказывается, действительно существует критическое число Рейнольдса, при превышении которого происходит переход из ламинарного режима в турбулентный. Но сама величина $\text{Re}_{\text{кр}}$, как показывает опыт, не универсальна - она зависит от геометрии системы. Например, в случае течения по трубе (рис. 8.16 б) $\text{Re}_{\text{кр}} \sim 2 \cdot 10^3$, тогда как при вращении цилиндра в газе переход в турбулентный режим происходит при $\text{Re}_{\text{кр}} \sim 50$. В этом и состоит некоторая слабость чисто размерностной оценки.

Но у нее есть и очень сильная сторона. Сами по себе величины ρ, v, a, η могут меняться в очень широком диапазоне; скажем труба может быть капилляром, а может быть аэродинамической трубой диаметром в десятки метров - ответ, тем не менее, будет универсальным и опираться он будет всего лишь на одну безразмерную комбинацию - число Рейнольдса. Такие зависимости называются в физике законами подобия, а переход

на их основании от одних экспериментальных ситуаций К другим принято именовать скэйлингом. Таким образом, если Для некоторого физического явления известен закон подобия, мы можем ставить эксперименты в малом масштабе, так чтобы они были более дешевыми или, например, более безопасными, а затем проводить скэйлинг для получения ответа в интересующем нас масштабе. Поэтому методы подобия и размерности занимают достаточно почетное место в арсенале современной физики

8.1.6 число Рейнольдса

и когда его еще можно ввести, если не в обычной механике?

8.2 Fluid mechanics basics by Zhou

8.2.1 Fluid Statics

In solids and dense liquids, the distances between atoms are a fraction of a nanometer, while for gases at atmospheric pressure the distance is about ten times this. In continuum mechanics, we deal with much larger distance scales, and neglect the discreteness of atoms entirely.

In this limit, the details of the atoms and their interactions determine, e.g. transport coefficients. We'll just take these quantities as given, rather than trying to calculate them.

A continuum description only works over sufficiently large distance scales. For example, if the atomic separation is ℓ and we work on distance scales of at least L , then the density fluctuations on such scales as $\Delta\rho/\rho \sim 1/\sqrt{N} \sim (L/\ell)^{3/2}$. Therefore, if we want ρ to be defined up to a fractional precision ϵ , we require $L \gtrsim \ell/\epsilon^{2/3}$.

As another example, suppose the typical molecular velocity is v_{mol} . Then the typical fluctuation in the center of mass speed of N molecules is v_{mol}/\sqrt{N} . If we are considering a bulk flow of average velocity v , and we want v to be defined up to fractional precision ϵ , then

$$L \gtrsim \ell \left(\frac{v_{\text{mol}}}{\epsilon v} \right)^{2/3}$$

which is somewhat more stringent.

Another requirement to have v be well-defined, specifically for gases, is that

$$L \gg \lambda$$

where λ is the mean free path. For air, $\lambda \lesssim 100$ nm.

More generally, we demand that our continuous matter always be in local thermal equilibrium. For example, if the equation of state $P = P(\rho, T)$ holds in global thermal equilibrium, then we will assume $p(\mathbf{x}) = p(\rho(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}))$.

In general, we require $L \gg \ell$ to apply continuum mechanics. Interfaces between different types of continuous matter have length scale ℓ , so they will be treated as discontinuities.

Below, we will refer to "material particles", meaning packets of material containing a fixed set of atoms. These packets are much smaller than the dimensions of our setup, so they may be treated as infinitesimal, but larger than L , so they may be treated as continuous matter.

We begin with basic fluid statics.

The forces inside continuous matter are parametrized by the stress tensor σ_{ij} , which means that the force $d\mathbf{F}$ on an infinitesimal surface element $d\mathbf{S}$ is

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j$$

where summation notation is used. Below, we will predominantly use index-free notation, so that the above equation would be written as $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$.

In a static fluid, there are no shear stresses, so σ_{ij} is diagonal. Furthermore, σ_{ij} must be diagonal in all reference frames, which is only possible if it is proportional to the identity. Therefore, for static fluids we simply have isotropic pressure,

$$d\mathbf{F} = -pd\mathbf{S}.$$

In particular, the total pressure force on a material particle is

$$d\mathbf{F} = -\nabla p dV$$

As an example, in hydrostatic equilibrium, $\nabla p = \rho \mathbf{g}$. Supposing that the fluid has a barotropic equation of state, meaning that $p = p(\rho)$, then we may define the pressure potential

$$w(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

in which case $\Phi^* = \Phi + w(p)$ is constant, where Φ is the gravitational potential.

For a barotropic fluid, we define the bulk modulus

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

which quantifies the incompressibility. If p also depended on temperature, we would have to use a partial derivative. The isothermal bulk modulus K_T corresponds to a derivative at constant T , and the isentropic bulk modulus is a derivative at constant S .

In hydrostatic equilibrium, $\nabla p = -\rho \nabla \Phi$, which means that gravitational equipotentials and isobars must coincide. Taking the curl of both sides yields $(\nabla \rho) \times (\nabla \Phi) = 0$, which tells us that gravitational equipotentials and constant density surfaces also coincide.

Example. The homentropic atmosphere. In the lower part of the atmosphere, called the troposphere, the air is typically well-mixed by adiabatic convection, and thus obeys the polytropic equation of state $p \propto \rho^\gamma$. The pressure potential is

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R.$$

Therefore, we have the constant

$$\Phi^* = gz + c_p T$$

which implies the temperature varies linearly with height. This is a good model for $z \lesssim 10$ km but breaks down for higher z , where we must account for additional effects such as solar heating. The "Standard Atmosphere" model takes $T(z)$ to be piecewise linear, with different gradients

in the mesosphere, stratosphere, and troposphere. The model then infers $p(z)$ from hydrostatic equilibrium and the ideal gas law,

$$p(z) = p_0 \exp \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right).$$

Example. Buoyant stability. Consider an object with density ρ_b in a uniform gravitational field \mathbf{g} and fluid of density ρ_f . The moments of gravity and buoyancy are

$$\mathbf{M}_G = \int_V \mathbf{x} \times \rho_b \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{M}_B = \oint_S \mathbf{x} \times (-pd\mathbf{S}).$$

If the body were replaced by fluid, the fluid would be in equilibrium. This implies that \mathbf{M}_B is the opposite of what \mathbf{M}_G would be if there were fluid,

$$\mathbf{M}_B = - \int_V \mathbf{x} \times \rho_f \mathbf{g} dV.$$

We will assume that the body is always in buoyant equilibrium, meaning that the body displaces its own weight in fluid, and thus the buoyant and gravitational forces cancel. Now, for the purposes of torque balance, the gravitational and buoyant forces can be taken as acting at the center of mass (CM) and center of buoyancy (CB) respectively,

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_b dV, \quad \mathbf{x}_B = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_f dV.$$

The torques can only balance if the CM and CB lie on a vertical line. For a fully submerged object, the stable equilibrium is when the CM is below the CB. For objects partially submerged in water, such as sailboats or ducks, it is clear that the CM is usually above the CB, which is the centroid of the part of the object below the waterline. Despite this, the equilibrium remains stable.

To understand why, we consider a longitudinally symmetric ship for simplicity, and consider an infinitesimal rotation $d\theta$ about the x -axis. Let A be the waterline area, i.e. the intersection of the ship with the waterline, at $z = 0$. In order to maintain buoyant equilibrium, the rotation axis must pass through the centroid of A , as this keeps the submerged volume of the ship the same to first order in $d\theta$. This point is called the center of roll, and we take it as the origin. Upon this rotation, the center of gravity shifts horizontally by

$$dy_G = -z_G d\theta.$$

However, the horizontal motion of the center of buoyancy has two components,

$$dy_B = - \left(z_B + \frac{I}{V} \right) d\theta, \quad I = \int_A y^2 dA$$

The first term results from directly rotating the initially submerged part of the ship; the second arises because the shape of the submerged part of the ship changes upon rotation. Therefore, the horizontal motion of the center of buoyancy is the same as if it were actually situated at an imaginary, higher point called the metacenter, with

$$z_M = z_B + \frac{I}{V}.$$

In order for buoyancy to give a restoring torque, we need $|dy_B| > |dy_G|$, which means the ship is stable if the CM is below the metacenter. (The metacenter's height depends on the axis of rotation. Since we want stability against rotations about any axis, the metacenter is defined using the axis for which I is the smallest. Since ships are long and narrow, this is typically the longitudinal axis.)

Note. For general angles, stability is quantified by the "righting arm", which is simply $|y_G(\theta) - y_B(\theta)|$. The above analysis applies only to small angles, where the righting arm is linear in θ . When the righting arm goes to zero, the ship becomes unstable, and flips over.

For smaller pieces of fluid, surface tension is important.

Surface tension arises from the energy cost of having an interface between two materials,

$$dU = \alpha dA.$$

If one divides a surface by a curve, then the differential force between the two parts of the surface is

$$d\mathbf{F} = \alpha ds \times \hat{\mathbf{n}}$$

where $\hat{\mathbf{n}}$ is the normal vector to the surface.

The quantity α depends on the energy of interaction between neighboring particles in both materials with themselves, and with each other. Since the interface has microscopic thickness, its macroscopic curvature does not affect α . For simple materials, it does not depend on how much the surface has already been stretched, though soap films are a notable exception.

In general, for liquid-gas interfaces we have $\alpha > 0$, because particles in the liquid attract each other (otherwise it would not remain a liquid), but the gas is too sparse to cause much interaction. For liquid-liquid interfaces α can be positive or negative; if it is negative, the liquids rapidly mix. For liquid-solid interfaces α can again be positive or negative, and this determines the propensity of the liquid to wet the surface.

Above, we stated the force acts "between the two parts of the surface", but this is vague. For liquid-gas and liquid-solid interfaces, the force acts between the two parts of the liquid at the surface, since the gases are sparse and the solids are not free to move. (improve)

For a liquid in a gravitational field g with density ρ , surface tension dominates below the capillary length

$$L = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$$

by dimensional analysis. For room temperature water, this is a few millimeters. More generally, for an interface between two fluids, the density in the denominator should be the difference of the two densities, since that determines the changes in gravitational potential energy.

Near the origin, a general surface with $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ can be parametrized as

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 + cxy.$$

In polar coordinates, the radius of curvature in the $\hat{\phi}$ direction is

$$\frac{1}{R(\phi)} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right|_{r=0} = a \cos^2 \phi + b \sin^2 \phi + 2c \sin \phi \cos \phi = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\phi + c \sin 2\phi.$$

The minimum and maximum values of $R(\phi)$ are attained for two orthogonal $\hat{\phi}$, and are called the principal radii of curvature R_1 and R_2 . For example, for $c = 0$ they are simply a and b .

By considering force balance on a small rectangle, one can show that the pressure discontinuity across a surface is

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

The quantity in parentheses is also called twice the mean curvature.

Note. The case of a liquid in air (pure cohesion) is relatively straightforward, but things become more subtle when one has interfaces of air, liquid, and solid. Many introductory textbooks give incorrect derivations of basic results such as Jurin's law and Young's law. For an example of the subtleties swept under the rug, see the paper Derivation of Jurin's law revisited.

8.2.2 Solid Statics

Next, we consider solid statics, which is slightly more mathematically involved.

In response to shear stresses, liquids flow and solids deform, so solids can support them in static equilibrium. A familiar example of a shear stress at the boundary between two solids is static friction, though shear stresses also exist in the interiors of solids.

As a result, we have a general stress tensor, which acts on an infinitesimal surface element as

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}.$$

By considering the forces acting on a small closed volume, we find the total force is

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{f}^* dV, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$$

where \mathbf{f} is the external force density, \mathbf{f}^* is the total force density, and the final term is $\nabla_j \sigma_{ij}$.

The diagonal elements of $\boldsymbol{\sigma}$ are the negatives of the pressures in each direction, while the off-diagonal elements represent shear stresses. Therefore, in general there is no unique way to define "the" pressure, though a decent option is to use the "mechanical pressure",

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

which is a scalar that reduces to the pressure for an isotropic stress tensor. It can be interpreted as the negative of the normal component of the stress averaged over all possible surface orientations, which follows since $\langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij}/3$ for normal vectors $\hat{\mathbf{n}}$.

A solid under tension will begin to plastically deform above the yield stress, and fail entirely when the stress equals the tensile strength. For typical metals, the tensile strength is several hundred MPa, modern composite carbon fibers have tensile strengths of a few GPa, and carbon nanotubes have tensile strengths of about 50GPa.

In mechanical equilibrium, $\mathbf{f}^* = 0$, which is known as Cauchy's equilibrium equation. They are a set of coupled PDEs, which must be supplemented with constitutive relations which give the stress in terms of the other properties of the material.

The total moment acting on a body is

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV + \oint_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}^* dV - \int_V \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \sigma_{jk} dV$$

as is most conveniently shown in index notation. Since \mathbf{f}^* vanishes in equilibrium, this calculation is usually taken to show that the stress tensor is symmetric, $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$.

However, this is actually an oversimplification, because we have ignored the possibility of external moments. For example, consider an electrically polarized material. If the material is placed in a uniform electric field, there is no force density, but there is a moment density.

What happens next depends on whether the solid can support asymmetric stress. If it doesn't, we concluded that it cannot be in equilibrium until the polarization aligns with the external field; if it does, then an internal asymmetric stress appears to cancel the torque. This happens in liquid crystals, as they have long-range orientational order. However, for simplicity we'll take the stress tensor to be symmetric from this point on, as it holds for most materials.

Symmetric stress tensors can be diagonalized, i.e. for every point in a body there exists a principal basis in which the stress tensor is diagonal.

By balancing forces on a surface between two bodies, we have $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ is continuous across surfaces. For example, for a horizontal surface, σ_{xz} , σ_{yz} , and σ_{zz} must be continuous. Note that the mechanical pressure can change discontinuously; the continuity of the pressure in fluid statics (ignoring surface tension) only held because the pressure was isotropic.

Note. There's a minor subtlety involving the definition of the stress tensor. The basic definition relevant for fluid mechanics is the one above, in terms of forces acting on surface elements. However, since force is the rate of change of momentum, you can also define σ_{ij} as the rate of flow of momentum P_i across a unit j -area. For typical fluids, these definitions coincide, but they differ in general, and the latter is more fundamental.

For example, consider a gas of photons in a reflective box. Here the first definition of stress tensor becomes ambiguous: photons don't interact with each other classically, so they don't experience any force at all. We can still define a stress tensor by talking about the force that a physical small, flat object would experience if it were placed inside the photon gas, but that requires changing the setup. The definition is no longer intrinsic to the fluid itself, and worse, it depends on the kind of object placed inside, e.g. the result for a reflective element is twice that for an absorbing element. On the other hand, the second definition still works perfectly well, which is why it is almost universally used in relativistic contexts.

The choice of definition makes a difference in how one develops the theory. For example, consider the statement that the stress tensor is symmetric, for a fluid experiencing no external forces or moments. We proved this above in the case of statics, but for ordinary fluids where the stress tensor is defined the first way, there's a simple proof that holds for fluid dynamics too. The antisymmetric part of the stress tensor contributes a torque to an infinitesimal fluid element of size ΔL scaling as $(\Delta L)^3$. The moment of inertia of the element scales as $(\Delta L)^5$, which implies an unphysical infinite angular acceleration as $\Delta L \rightarrow 0$, implying that the stress tensor must be symmetric.

In the relativistic context, where we use the second definition, we can define the stress(-energy) tensor using Noether's theorem, as discussed in the notes on Quantum Field Theory. It turns out that even for an isolated system, the stress tensor can come out antisymmetric! The physical interpretation of the antisymmetric part is that it transfers orbital angular momentum

to spin, which evades the above argument because the amount of spin a volume element can suppose scales as $(\Delta L)^3$. (This subtlety doesn't occur for ordinary fluids, which aren't spin polarized.) However, it's possible to redefine the stress-energy tensor to include the bound momentum carried by the spin, in which case it is symmetric again.

Next, we describe the deformations within solids in terms of strain.

The tricky thing about deformations is that they can't be inferred from the current state of the solid alone; we also need to know how it relates to the original state. We suppose a solid is deformed so that the material particle at \mathbf{X} moves to \mathbf{x} . The displacement field is

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

In the Euler representation, we think of everything as a function of \mathbf{x} , while in the Lagrange representation we think of everything as a function of \mathbf{X} . We will use the Euler representation, so all derivatives will be with respect to \mathbf{x} .

Note that there is no analogue of the active/passive transformation distinction here, because there is no natural way to view a general deformation passively.

When the displacements are large, we need the general machinery of differential geometry, so we will mostly restrict to the case of small displacements, in which case there is no fundamental difference between the Euler and Lagrange representations.

Displacements can also include rigid transformations of the solid, such as translations and rotations, which do not count as deformations. Thus, we are motivated to extract the part of \mathbf{u} that refers to deformations only.

Consider an infinitesimal "needle" that originally pointed from \mathbf{X} to $\mathbf{X} + \mathbf{a}_0$, but now points from \mathbf{x} to $\mathbf{x} + \mathbf{a}$. To compute \mathbf{a} , note that

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Therefore, expanding to first order in \mathbf{a} ,

$$\delta\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{u}).$$

The tensor $(\nabla\mathbf{u})_{ij} = \nabla_i u_j$ contains the so-called displacement gradients.

A displacement field is slowly varying when the displacement gradients are small, which means the fractional changes in lengths are small. We will work almost exclusively in this limit.

Similarly, scalar products between two needles based at the same point change,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \sum_{ij} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) a_i b_j.$$

We can write this in terms of Cauchy's (infinitesimal) strain tensor,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}, \quad u_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = \nabla_{(i} u_{j)}.$$

This can also be written in index-free notation as

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

where the bar is used to avoid notational confusion.

The antisymmetric part of $\nabla \mathbf{u}$ contains infinitesimal rotations, which don't contribute to $\bar{\mathbf{u}}$. Since $\bar{\mathbf{u}}$ is symmetric, it can be diagonalized at each point; the eigenvectors are the principal strain axes.

This result coincides with a more general result from differential geometry. We can think of \mathbf{u} as quantifying the difference of the metrics in the \mathbf{x} and \mathbf{X} coordinates, as we flow from \mathbf{X} to \mathbf{x} under the vector field \mathbf{u} . Therefore, $\bar{\mathbf{u}}$ should be the Lie derivative of the metric with respect to \mathbf{u} , which it indeed is.

The diagonal elements of u_{ij} reflect the fractional change in length along the corresponding axis, while the off-diagonal elements reflect the change in angle between the corresponding initially orthogonal coordinate axes. Specifically, if \mathbf{a} and \mathbf{b} are initially orthogonal, then

$$\delta\phi = -2u_{ab} \equiv -2\hat{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}, \quad \frac{\delta|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = u_{aa}.$$

In addition, note that

$$\delta\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{a} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a}$$

which separates the effects of infinitesimal rotations and deformations.

By straightforwardly applying derivatives, Cauchy's strain tensor satisfies

$$\nabla_i \nabla_j u_{kl} + \nabla_k \nabla_l u_{ij} = \nabla_i \nabla_l u_{kj} + \nabla_k \nabla_j u_{il}$$

Conversely, it can be shown that any symmetric tensor satisfying this is the strain tensor corresponding to some displacement field. This is a symmetric version of the Poincare lemma.

In order to do vector calculus, we need to compute the variations of infinitesimal line elements, surface elements, and volume elements. We have already treated line elements as our first example; note that in the line integral of a vector field $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, the vector field, the line element, and the endpoints all need to be transformed.

To handle volume elements, note that we can build them out of three infinitesimal vectors,

$$dV = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Expanding the infinitesimal changes out in index notation gives

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk} ((\nabla_l u_i) (a_l b_j c_k) + (\nabla_l u_j) (a_i b_l c_k) + (\nabla_l u_k) (a_i b_j a_l)).$$

On the other hand, we also have

$$(\nabla_l u_{[l}) (a_i b_j c_{k]}) = 0$$

since antisymmetrizing over four spatial indices gives zero. Since the ϵ_{ijk} already antisymmetrizes over i, j , and k , this identity relates the three terms above to a fourth, giving the result

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk} (\nabla_l u_l) (a_i b_j c_k) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV$$

which makes intuitive sense. As an application, volumes transform like

$$\delta\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

For a surface element, we note that we can write $d\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ and $dV = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}$. Then using the previous result gives

$$\mathbf{c} \cdot \delta(d\mathbf{S}) = \delta(dV) - \delta\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}) - \mathbf{c} \cdot \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

Since \mathbf{c} is arbitrary, we can conclude that

$$\delta(d\mathbf{S}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})d\mathbf{S} - (\nabla\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}.$$

As an example, suppose that an external force does work on the body, causing it to slowly deform. The work done against the internal forces in the body is

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV.$$

For simplicity, we suppose the surface of the body does not move. Then

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\nabla\delta\mathbf{u}) dV$$

where we integrated by parts, and $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ji}$.

The first term represents the work done against long-range forces, e.g. it contains the change in gravitational potential energy. The second term represents the work done against internal forces by deforming the body. For a symmetric stress tensor, it can be written as

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\bar{\mathbf{u}} dV.$$

As a simple check on this result, note that for an isotropic stress tensor $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$,

$$\delta W_{\text{deform}} = - \int_V p \nabla \cdot (\delta\mathbf{u}) dV = - \int_V p \delta(dV)$$

as expected. Note. When the deformations are large, it's better to use ideas from differential geometry rather than vector calculus. The positions of the material particles define a coordinate system, whose metric is δ_{ij} when the material is not deformed. By viewing the map $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$ as a diffeomorphism, this metric is pushed forward to

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}.$$

The general definition of the strain tensor is in terms of the change in the metric,

$$g_{ij} = \delta_{ij} - 2u_{ij}.$$

Finally, by substituting $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$, we arrive at the so-called Euler-Almansi stress tensor,

$$u_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

which differs from our infinitesimal expression by a quadratic term. For example, for a uniform scaling $\mathbf{x} = \kappa \mathbf{X}$, we have

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (1 - \kappa^{-1/2}) \delta_{ij}$$

which makes sense for all κ , while our infinitesimal expression only made sense for $\kappa \approx 1$.

Note. The Lagrange representation. In this case, we work in terms of the variable \mathbf{X} . We define the Lagrangian displacement field to satisfy

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X})).$$

In other words, while $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ represents how much the material particle now at \mathbf{x} was displaced, $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ represents how much the material particle that was originally at \mathbf{X} was displaced. Starting with the ambient Euclidean metric, we can pull it back from \mathbf{x} to \mathbf{X} to define the metric

$$G_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

where G_{ij} is the Lagrangian deformation tensor. We define the Lagrange-Green stress tensor by

$$G_{ij} = \delta_{ij} + 2U_{ij}$$

which implies that

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right).$$

For infinitesimal deformations, this coincides with our other stress tensors. Note. Numeric computations can be done by discretizing either the Euler or Lagrange representation. As mentioned above, for small displacements the two are essentially equivalent. More generally, the Lagrange representation tends to be a bit easier to think about, so traditional 1D hydrodynamic codes are almost all Lagrangian. For more than one dimension, turbulence tends to "tangle up" the Lagrange representation's computation grid, making the Euler representation a better choice, as the Eulerian grid is fixed in space. On the other hand, that also means that matter can leave the computational domain.

Finally, we relate stress and strain with Hooke's law.

For sufficiently small deformations, many materials have a linear relationship between stress and strain. For an isotropic material, we define the Young's modulus by

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{u_{xx}}$$

Thus, a rod of length L and cross-sectional area A has a spring constant of

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{\sigma_{xx} A}{u_{xx} L} = \frac{EA}{L}.$$

Young's modulus has dimensions of pressure, and typical values for metals are about 100GPa. Since the strain must be small, Hooke's law applies only for stresses much less than E . For instance, the yield stress is roughly a thousand times smaller. Hooke's law breaks down at the proportionality limit, which is usually well below the yield stress. Corrections to linearity are accounted for in "hyperelasticity", which is useful for describing rubber.

Normal materials will also contract in the transverse direction when they are stretched. If a force is applied along the x direction, then both u_{xx} and u_{yy} will be proportional to it, so their ratio is independent of it. We hence define Poisson's ratio as

$$\nu = -\frac{u_{yy}}{u_{xx}}$$

The most general linear relation between stress and strain is

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{kl}$$

where E_{ijkl} is the elasticity tensor. For an isotropic material the most general option is

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il})$$

where λ and μ are called the elastic moduli or Lamé coefficients, and μ is called the shear modulus or modulus of rigidity. Explicitly, we have

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \delta_{ij} u_{kk}$$

so only μ contributes to shear stresses.

These two parameters are determined by E and ν , and vice versa. Specifically, for stretching along the x direction, the only nonzero components of stress and strain are

$$\sigma_{xx} = P, \quad u_{xx} = \frac{P}{E}, \quad u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\nu P}{E}.$$

Comparing this to the definition of the elastic moduli gives the relations

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

or conversely,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

The Young's modulus and Poisson's ratio are directly measurable, so they are found in tables.

Note that the mechanical pressure is

$$\Delta p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) u_{ii}.$$

On the other hand, $u_{ii} = -\Delta\rho/\rho$, so the bulk modulus is

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Generically, K , E , λ , and μ are all of the same order of magnitude.

We can also solve for the strain in terms of the stress.

$$u_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}.$$

In general, the work needed to deform a body is

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} dV.$$

However, since $\boldsymbol{\sigma}$ depends on $\bar{\mathbf{u}}$, this integral can be path-dependent. It is path-independent if the cross derivatives are equal,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial u_{ij}}$$

which is the tensorial analogue of the condition that the curl of a vector field vanish.

Assuming the stress is linear in the strain, this implies that

$$E_{ijkl} = E_{klij}.$$

Furthermore, the elasticity tensor is symmetric in its first two and second two indices, since the stress and strain tensors are symmetric. Thus, each of these pairs of indices has 6 degrees of freedom, and symmetry under exchanging the two pairs gives a total of 21 degrees of freedom. Of these, 3 are redundant because they just describe the orientation of the material.

The number of degrees of freedom needed to describe a material depends on its degree of symmetry, with cubic crystals requiring 3, and triclinic crystals requiring all 18.

Assuming this symmetry condition is satisfied, we can imagine building up $\bar{\mathbf{u}}$ linearly, giving

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2} E_{ijkl} u_{ij} u_{kl}.$$

This must be positive definite for the solid to be stable, which leads to positivity conditions on the elasticity tensor. This can also be used to show that solutions to the equilibrium equation $\mathbf{f}^* = 0$ are unique.

For the special case of isotropic materials, we have

$$\varepsilon = \mu u_{ij} u_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (u_{ii})^2.$$

It can be shown that for this to be positive definite, we require

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

These impose stability against shearing and compression, respectively. Equivalently,

$$K > 0, \quad E > 0, \quad -1 < \nu < 1/2.$$

Most materials have $\nu > 0$, but exotic "auxetic" materials can have negative ν . Example. Consider a static homogeneous cube of isotropic material of side length L , subject to a uniform shear stress P along the $\hat{\mathbf{y}}$ direction on the faces perpendicular to $\hat{\mathbf{x}}$. As a result of this external stress, force balance ensures that a uniform shear stress $\sigma_{xy} = P$ is set up throughout the entire material. However, torque balance tells us that this situation is actually impossible: the stress tensor is not symmetric, so torque balance can't be satisfied; in reality the cube will begin rotating about the $\hat{\mathbf{z}}$ axis.

One way to prevent this is to put another external uniform shear stress P along the $\hat{\mathbf{x}}$ direction on the faces perpendicular to $\hat{\mathbf{y}}$, in which case $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = P$ throughout the material, and

$$u_{xy} = \frac{P}{2\mu} = \frac{1}{2} (\nabla_x u_y + \nabla_y u_x).$$

There are multiple solutions for the displacement field \mathbf{u} , which is generally not determined uniquely. For example, the cube may shear along the $\hat{\mathbf{x}}$ direction, the $\hat{\mathbf{y}}$ direction, or some combination of both. Which one occurs in practice depends on how the external forces are applied.

8.2.3 Ideal Fluid Flow

We begin with the mathematical description of fluid flow.

We describe the fluid's motion with a velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. As mentioned previously, this corresponds not to the motion of individual molecules, but to that of "material particles", i.e. it is the center of mass velocity of a small packet of fluid. The momentum of such a packet is

$$d\mathbf{P} = \rho \mathbf{v} dV.$$

The motion can be visualized using streamlines, which are the field lines of $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ at a fixed time t . If the flow is not steady, this will differ from the trajectories of the material particles themselves. For example, the shape of the smoke that has come out of a chimney at time t is generally not a streamline, but rather is a "streakline", meaning a set of trajectories evaluated at time t released from the chimney at different initial times t_0 .

Conservation of mass implies the continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

For incompressible flow, this reduces to $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

The rate of change of a property of the fluid experienced by a material particle is quantified by the material/comoving time derivative,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

The first term accounts for the local rate of change, while the "advective" term corresponds to the effect of following the motion of the fluid. For example, for the time-independent vector field \mathbf{x} , the rate of change of \mathbf{x} for a material particle is just the velocity,

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \mathbf{v}$$

The continuity equation can be equivalently written as

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

which is intuitively clear. Also, note that in a small time interval, all points of the fluid are displaced by $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} \delta t$. Therefore, using our earlier result for volume transformation under strain, the volume of the material particle changes as

$$\frac{D(dV)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV$$

where here the convective derivative is only formal. Combining these results gives $D(dM)/Dt = 0$, the obvious fact that the mass of a material particle does not change as it moves.

By applying Newton's second law to a material particle, we have Cauchy's equation,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}^*$$

where \mathbf{f}^* is the effective force density. The field $D\mathbf{v}/dt$ is called the material acceleration; note that it can be nonzero even for a steady flow.

This result can also be written as a continuity equation for momentum,

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \mathbf{f}^*$$

The quantity $\rho\mathbf{v}$ is called the current density of mass, or the momentum density, or the mass flux, or the mass flux density.

To solve this equation, we generally need constitutive relations which give \mathbf{f}^* in terms of the material parameters. If \mathbf{f}^* only depends on \mathbf{x} and the density, then our equations for $D\rho/Dt$ and $D\mathbf{v}/Dt$ close by themselves.

The formalism above also applies to solids, but now \mathbf{f}^* depends on the displacement field

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

which we must keep track of. The easiest way to do this is to note that $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ simply means the location the material particle at \mathbf{x} originally came from. This is time-independent, so

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = 0.$$

Plugging in the definitions gives

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

which must be solved along with the other three equations.

Next, we consider the case of incompressible and inviscid/ideal/perfect flow.

Taking the only forces to be gravity and pressure, $\mathbf{f}^* = \rho\mathbf{g} - \nabla p$, we have the Euler equations

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

The first Euler equation is also called the Euler equation.

The Euler equations determine the time evolution of \mathbf{v} . They also fix the pressure; taking the divergence of the Euler equation gives

$$\nabla^2 p = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{g} - \rho_0 \nabla \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}).$$

Thus, the pressure everywhere at some instant is determined by the velocity at that instant.

This seems puzzling, because distant changes in the velocity affects the pressure instantaneously, seemingly in a nonlocal way. This is because changes in the pressure propagate at the speed of sound, and for an incompressible fluid the speed of sound is infinite. This is a decent approximation for many real-world situations involving water and air, where the speed of sound is much higher than the flow speed.

At interfaces between two fluids, we additionally need the boundary conditions that p and $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ are continuous, where \mathbf{n} is the normal vector. For a solid boundary, this means the normal component of velocity must vanish.

As we'll see below, the degree to which viscosity can be neglected is quantified by the Reynolds number, which is high for many real-world applications. However, even a small amount of viscosity can have qualitative effects. For instance, at solid boundaries there is always a boundary layer where the tangential velocity of the fluid approaches zero.

In steady flow, the Euler equation reduces to

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}.$$

As we'll see later, when a compressible fluid performs steady flow, it behaves as if it incompressible, as long as the flow speed is much lower than the speed of sound. Intuitively, this is a local increase in pressure will tend to drive fluid out of the way rather than compressing it. This makes incompressibility often a reasonable assumption even when applied to air.

Bernoulli's theorem states that for steady flow, the Bernoulli field

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho_0}$$

is constant along streamlines, where Φ is the gravitational potential. To see this, note that

$$\frac{DH}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{\rho_0}\mathbf{v} \cdot \nabla p = 0$$

where we used the assumption of steady flow, and the Euler equation.

The first two terms in the Bernoulli field make up the total mechanical energy per unit mass, and the change in pressure quantifies the work done on particles as they flow, so Bernoulli's theorem can be thought of as a statement of conservation of energy.

In hydrodynamics, the quantity $\rho_0 v^2/2$ is also called the "dynamic pressure", since it is converted to pressure when a flow is stopped. For a constant gravitational field g_0 , the quantity H/g_0 is also called the "total head", since it quantifies how high the fluid can be raised.

Note. In steady flow through a constriction, there is an asymmetry between the inlet and outlet: the water converges in the inlet to the constriction, then leaves through the outlet in a narrow jet. (One can also see a boundary layer in the constriction.)

However, this asymmetry is not encoded in the Euler equations for steady flow, which are symmetric under time reversal. Time reversal symmetry is broken by viscosity (as a result of the usual thermodynamic arrow of time), but if we don't account for it, we must impose boundary conditions to get the appropriate physical solution, just as we do for, e.g. the advanced and retarded solutions in electromagnetism.

Next, we study the vorticity of the flow.

Suppose that a steady flow originates from a asymptotically uniform flow at infinity. In this case, it is intuitive that H should be constant between all streamlines, and hence constant everywhere. However, this intuition can fail if streamlines form closed loops.

To make this intuition precise, note that

$$\partial_i H = v_j \partial_i v_j + \partial_i \left(\Phi + \frac{p}{\rho_0} \right) = v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i$$

where we used the Euler equation. Therefore, exiting index notation,

$$\nabla H = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

where $\boldsymbol{\omega}$ is the vorticity field. Thus, H is constant if the vorticity vanishes.

Visually, the field lines of $\boldsymbol{\omega}$ are called vortex lines. Since the vorticity field is a curl, $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, so vortex lines generically close. One can think of the fluid as locally circulating around such lines. Since ∇H is perpendicular to both \mathbf{v} and $\boldsymbol{\omega}$, H is constant on the surfaces made from vortex lines and streamlines, also called Lamb surfaces.

Accounting for the time-dependent term in the Euler equation, we have

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla H$$

and taking the curl of both sides gives

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

Therefore, if an ideal fluid initially has no vorticity, then it never can gain any.

This can be physically unintuitive. For example, if one moves a ball through initially still water, vortices will form in its wake. They are created by the "shedding" of boundary layers at the surface of the ball, which exist due to viscosity.

By Stokes' theorem, the circulation of the fluid along a curve C is

$$\Gamma(C, t) = \oint_C \mathbf{v}(t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$$

where we used Stokes' theorem.

In the absence of vorticity, the curl of the velocity vanishes, so we may write it as

$$\mathbf{v} = \nabla \Psi$$

where Ψ is called the velocity potential. Since the divergence of the velocity vanishes,

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

This case of "potential flow" is simple because it reduces the problem to linear differential equations, and much is known about Laplace's equation. If the flow is two-dimensional, complex analysis techniques can also be used.

This approach is useful whether flow is steady or not. If the flow is not steady, we can solve for the pressure, and then use that to determine the time evolution from the Euler equation,

$$\nabla(H + \partial \Psi / \partial t) = 0$$

This determines $\Psi(\mathbf{x}, t)$ up to an arbitrary function of time, which is irrelevant, so we can take

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -H$$

Since the divergence of the velocity vanishes, we can also take it to be the curl of some other function. In practice, this is useful in two-dimensional flows, where the curl effectively maps scalar fields to vector fields. In this case we can define the stream function $\psi(x, y)$, where

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

in which case the divergence vanishes by the equality of mixed partial derivatives. In addition,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

which implies that the stream function is constant along streamlines. The vorticity is

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial v_x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2 \psi$$

so for irrotational flow one can find ψ by solving Laplace's equation. Example. Potential flow past a sphere. Consider an asymptotically uniform flow with velocity $U\hat{\mathbf{z}}$ which encounters a sphere of radius r at the origin. Using standard techniques for solving Laplace's equation, the solution is

$$\Psi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

where θ is the angle from $\hat{\mathbf{z}}$. By Bernoulli's theorem, the change in pressure is $\Delta p = \rho_0 v^2/2$, and a straightforward computation gives

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 U^2 \frac{9 \cos^2 \theta - 5}{4}$$

on the surface of the sphere. The net force on the sphere vanishes; there is no drag force.

Note. D'Alembert's paradox is the fact that the drag force generally vanishes in steady potential flow. We saw this above, and we can prove it in general. Note that the drag force on the body is

$$\mathbf{F} = \oint_S p d\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \rho_0 \oint_S v^2 d\mathbf{S}$$

where we used Bernoulli's theorem, and S is the surface of the body. Here, the uniform pressure contribution $p_0 \oint d\mathbf{S}$ vanishes, and we have neglected the gravitational potential term, since it just yields the buoyant force. To evaluate this integral, we use the divergence theorem in the form

$$\int_V (\nabla T) dV = - \oint_S T d\mathbf{S}$$

where V is the volume outside of S . Switching to index notation,

$$F_i = -\frac{1}{2} \rho_0 \oint v_j v_j dS_i = \frac{1}{2} \rho_0 \int_V \partial_i (v_j v_j) dV.$$

Now we use the fact that the divergence and curl of \mathbf{v} vanish to write

$$\partial_i (v_j v_j) = 2v_j \partial_i v_j = 2v_j \partial_j v_i = 2\partial_j (v_j v_i).$$

Then using the divergence theorem again in reverse gives

$$F_i = \rho_0 \int_V \partial_j (v_j v_i) dV = -\rho_0 \oint_S v_j v_i dS_j = 0$$

since $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ vanishes everywhere on the surface. One might worry that we pick up a term in the divergence theorem from the boundary at infinity, but in general the velocity field falls off at least as fast as $1/r^3$, so it does not contribute.

The paradox is that for an object with cross-sectional area A moving with velocity v through stationary fluid, the drag force does not actually vanish in the limit of zero viscosity, but rather approaches a constant of order $\rho_0 A v^2$. There are a few ways of thinking about why this effect is missing in the potential flow solution. In terms of forces, a boundary layer will be formed for any nonzero viscosity, and this produces a trailing wake behind the body in which the pressure is lower than in front, causing a drag force. In terms of conserved quantities, drag occurs because the object gives momentum to the initially stationary fluid to get it out of the way. In the potential flow solution, this does not happen because the fluid is already moving with the object appropriately, but the total momentum of the fluid is infinite, making such a situation unphysical.

Note. The convective derivative coincides with the Lie derivative for scalars,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

and a scalar u that simply flows along with the velocity field has $Du/dt = 0$. Similarly, we can define a modified convective derivative for general tensors,

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

which vanishes if the tensor is Lie transported along the velocity field. For a vector field,

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{u}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Starting from the equation of motion for the vorticity and using the product rule for the curl, we can show that $\tilde{D}\omega/\tilde{D}t = 0$, which means concretely that vortex lines are carried by the flow. Intuitively, this is because vorticity is a local measure of angular momentum, and the angular momentum of a parcel of fluid can't change in the absence of viscosity. Furthermore, we know that vortex lines cannot intersect each other, and form closed loops, as can be seen in the motion of smoke rings.

Remarkably, in the late 19th century these results were taken as a basis for a "vortex theory of everything". In this theory, which was popular among the greatest physicists of the United Kingdom, the different kinds of atoms are topologically distinct knots formed by vortex lines in the ether, which is taken to be an ideal fluid. Though the theory didn't succeed in explaining much about chemistry, it has an important historical legacy. For example, in the theoretical physics department at Cambridge, more people work on fluid dynamics than high energy physics or relativity.

8.2.4 Compressible Flow

Now we consider the compressible flow of ideal fluids. In this case, the speed of sound becomes finite, so we must begin with a treatment of sound waves.

Neglecting gravity, the Euler equations are now

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

For a small amplitude sound wave, we let $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ and $p = p_0 + \Delta p$. In this case v/c is similarly small, and we can neglect the advective term. At lowest order, we have

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p), \quad \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$$

which combine to give

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = \nabla^2(\Delta p)$$

For a fluid with a barotropic equation of state, $p = p(\rho)$, we have

$$\Delta p = K_0 \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

which yields the wave equation,

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta\rho), \quad c_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}.$$

For the special case of an isentropic ideal gas, $K_0 = \gamma p_0$ and

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}}$$

where μ is the molar mass. The isothermal sound velocity is recovered for $\gamma = 1$.

If we let the density variation be

$$\Delta\rho = \rho_1 \sin(kx - \omega t)$$

then the velocity field is

$$v_x = v_1 \sin(kx - \omega t), \quad v_1 = c_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

This confirms our earlier statement that v/c is the same order as $\Delta\rho/\rho$. Also, note that

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\partial\mathbf{v}/\partial t|} \sim \frac{kv_1^2}{\omega v_1} = \frac{v_1}{c_0}$$

so the advective term does not contribute at lowest order, justifying our neglect of it above. We have also neglected gravity, which is a good approximation when $g \ll \omega c$.

Next, we consider steady compressible flow.

In this case, the Euler equations reduce to

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0.$$

We assume a barotropic equation of state, for simplicity. The local Mach number is $M = |\mathbf{v}|/c$.

We can combine the Euler equations to get an equation solely in terms of the velocity. The continuity equation states

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho = -\frac{1}{\rho c^2}(\mathbf{v} \cdot \nabla)p$$

where we used the definition of the speed of sound. Then, using the Euler equation gives

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{c^2}.$$

Applying the Cauchy-Schwartz inequality to the numerator gives

$$|\nabla \cdot \mathbf{v}| \leq M^2 |\nabla \mathbf{v}|, \quad |\nabla \mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{ij} (\nabla_i v_j)^2}.$$

This demonstrates that when $M \ll 1$, the divergence $\nabla \cdot \mathbf{v}$ is small, and the flow can be treated as incompressible. In practice, this is a reasonable assumption for $M \lesssim 0.3$.

By an analogous derivation to the incompressible case, the Bernoulli field is

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + w(p)$$

where we include the gravitational potential Φ for completeness, and $w(p) = \int dp/\rho(p)$ is the pressure potential. For an isentropic ideal gas,

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu}$$

where μ is the molar mass.

In general, an object moving through an ideal fluid has a stagnation point in front of it, where the fluid is at rest with respect to the object. There is also at least one behind it, but in practice the flow is not steady behind the object because of vortex formation and turbulence, making Bernoulli's theorem inapplicable.

Bernoulli's theorem lets us compute the temperature at the forward stagnation point,

$$\frac{1}{2}v^2 + c_p T = c_p T_0.$$

For an isentropic ideal gas, this gives the result

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

where M is the Mach number of the flow at the initial point. Assuming the flow is isentropic, $p \propto \rho^\gamma$, which implies

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

For high speeds, the temperature rise is substantial. In practice, it can cause the gas to dissociate into a plasma, changing the molar mass μ and hence the result.

A sonic point is a point where $M = 1$. Applying Bernoulli's theorem between a sonic point and a stagnation point gives

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{\gamma - 1}$$

which can be combined with our previous result to yield the local temperature in terms of the sonic point temperature,

$$\frac{T}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1) \right)^{-1}.$$

Example. Flow through a duct with a slowly varying cross-section $A(x)$. We approximate all properties of the flow to depend only on x , and treat the velocity as entirely along $\hat{\mathbf{x}}$. It is useful to relate quantities to those at a (possibly hypothetical) sonic point. Continuity of the mass flow gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v} = \frac{1}{M} \frac{c_1}{c} \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{M} \left(\frac{T_1}{T} \right)^{1/2+1/(\gamma-1)}.$$

Inserting our previous expression gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1) \right)^{1/2+1/(\gamma-1)}.$$

Curiously, the right-hand side is not monotonic, but rather has a local minimum at $M = 1$. This means that if a sonic point exists, it must appear at the narrowest part of the duct. For subsonic flow, a decreasing duct area implies increasing flow velocity and decreasing temperature, pressure, and density, but for supersonic flow the reverse is true.

Away from the throat, there are two possible values of M for each value of A , and the one that is actually realized depends on the boundary conditions. Consider a "Laval nozzle", i.e. a symmetric duct containing a narrow throat. If there is no pressure difference, the fluid simply doesn't move at all. As the pressure difference is increased, the fluid flow grows faster, with M taking a local maximum at the throat, but remaining subsonic everywhere. At a certain critical pressure, $M = 1$ is achieved at the throat; at this point, the fluid will continue to speed up past the throat, exiting with $M > 1$. This unintuitive behavior is used to maximize thrust in jets and rockets.

The flow through the nozzle is determined by the input velocity and pressure, and this in turn determines the output pressure. For subsonic flow, this output pressure must equal atmosphere pressure, constraining the input data. However, when the flow is supersonic, information cannot propagate backwards against the flow, so this constraint is not effective. What happens in practice is that if the output pressure and atmospheric pressure don't match, a discontinuity called a shock wave forms at the output. In this regime, we say the flow is "choked". Changing the pressure at the output doesn't change the flow rate at all; it can only change the location of the shock wave.

We also note that a nozzle can be used in reverse, giving a "diffuser". If a flow enters a Laval nozzle already supersonic, then it flows down as the nozzle contracts. If the contraction is sufficient, $M = 1$ is achieved at the throat, and the fluid exits with $M < 1$. This requires the output pressure to be higher than the input pressure. As for the nozzle, shock waves may form, depending on the boundary conditions.

Example. A blunt object moving at supersonic speeds produces a "bow shock" in front of it, as shown. (For an object with a sharp tip, we would instead get a conical shock wave attached to the object, called a Mach cone.)

Across this shock, the properties of the fluid change discontinuously. For simplicity, we focus on a "normal" shock, where the shock wave is perpendicular to the fluid velocity; this applies at the forward tip of the bow shock shown. In the steady state and in the frame of the object, we can apply conservation of mass, momentum, and energy across the shock, to give

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad \rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2, \quad \frac{1}{2} v_1^2 + c_p T_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + c_p T_2.$$

Using the ideal gas law, the energy conservation condition can be rewritten as

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

These equations are called the Rankine-Hugoniot conditions. It is convenient to write their solutions in terms of the Mach number before the shock, $M = v_1/c_1$ where $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$. Then

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}.$$

The ratio of temperatures is given by the ideal gas law,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2}.$$

In the limit $M \rightarrow \infty$, these results simplify to

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M^2.$$

These results can also be applied to shock waves in a Laval nozzle. For an oblique shock, as occur elsewhere on the bow shock shown, the results are identical except that the v_i should be interpreted as the component of the velocity normal to the shock; the tangential velocity is unchanged.

Note. The Rankine-Hugoniot conditions treat both sides of the shock symmetrically, but in reality we must have $T_2 > T_1$ by the second law of thermodynamics, as kinetic energy is converted to thermal energy. Note that our previous result for the stagnation point temperature is perfectly correct whether or not a shock wave exists, since it just used Bernoulli's theorem, which is one of the Rankine-Hugoniot conditions. It's only the isentropic assumption $p \propto \rho^\gamma$ that breaks down.

8.2.5 Viscosity

Finally, we arrive at the full Navier-Stokes equations by including viscosity. We begin with some examples for intuition, always assuming incompressible flow.

Viscosity is a shear stress opposing a velocity gradient. In a Newtonian fluid we assume the two are proportional, so that for a flow $v_x(y)$,

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

where η is called the (dynamic) viscosity. The units of viscosity have various names, $1\text{Pas} = 1\text{Poiseuille} = 0.1\text{poise}$

For example, for an ideal gas we can show by kinetic theory that

$$\eta \sim \frac{\sqrt{k_B T m}}{\sigma} \sim \rho \lambda v$$

where σ is the collision cross section, m is the mass per molecule, and λ is the mean free path. Possibly surprisingly, the viscosity scales as \sqrt{T} , and at constant temperature is independent of the density. In liquids, the viscosity usually falls with temperature.

Often, it is useful to work in terms of the kinematic viscosity

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

since this directly determines the acceleration of the fluid. In an ideal gas, $\nu \propto T^{3/2}/p$.

As a first example, consider a planar incompressible flow, where the velocity is $v_x(y, t)$. In this case there is no advective acceleration, so in the absence of body forces,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

which has the form of a diffusion equation with diffusion constant ν .

As an example, suppose we drive a plate transversely, imposing the boundary condition

$$v_x(0, t) = u_0 \cos(\omega t).$$

Then the steady state solution is

$$v_x(y, t) = u_0 e^{-ky} \cos(ky - \omega t), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

so a shear wave propagates a distance $1/k$ into the fluid.

As another example, suppose we start with a "Gaussian river" of

$$v_x(y, 0) = u_0 e^{-y^2/a^2}.$$

Then the solution at later times is

$$v_x(y, t) = \frac{u_0 a}{\sqrt{a^2 + 4\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{a^2 + 4\nu t}\right)$$

causing the river to spread out over time. Assuming the initial width is small, the momentum diffuses over time over the width $\delta \sim 2\sqrt{\nu t}$. When viscosity is weak, this is the typical width of the boundary layers that form.

As a final example, suppose a plate is instantaneously kicked.

$$v_x(0, t) = u_0 \theta(t).$$

This is known as Stokes' first problem. Since there are no length scales in the problem besides δ , the solution must depend on it alone,

$$v_x(y, t) = u_0 f(y/\sqrt{\nu t}).$$

Plugging in this ansatz gives

$$f''(s) + \frac{1}{2}s f'(s) = 0, \quad f(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty e^{-u^2/4} du.$$

Sometimes, one defines the boundary layer thickness to be the distance where the velocity drops to $u_0/100$, which in this case is $\delta_{99} = 3.64\sqrt{\nu t}$.

Note that viscosity within the fluid merely transports vorticity through it, which is in accordance with the conservation of angular momentum. The vorticity in this example arises purely from the external torque applied from the plate when it is kicked. Also, in all examples, the changes in velocity propagate instantaneously, which is again a consequence of assuming incompressibility.

Next, we write down the Navier-Stokes equations for incompressible flow.

We assume the fluid is isotropic and incompressible and the stress tensor is symmetric. Then the most general possible stress tensor for a Newtonian fluid, where the shear stresses depend only on the gradient of velocity, is

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Assuming the fluid is homogeneous, so that η is uniform, the resulting force density is

$$\sum_j \nabla_j \sigma_{ij} = -\nabla_i p + \eta \nabla^2 v_i.$$

The stress tensor can't contain terms directly dependent on the velocity by Galilean invariance.

By comparison, for an elastic solid we assumed the shear stress was proportional to the strain; for a Newtonian fluid we instead assume it is proportional to the time derivative of strain, also called the strain rate. There are also fluids where the shear stress has a more complicated dependence on the velocity gradients, such as ketchup, jelly, and putty, and viscoelastic materials that are both elastic and viscous.

Inserting the above force density into Cauchy's equation of motion gives

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

which are the Navier-Stokes equations for incompressible isotropic homogeneous Newtonian fluids. The complex dynamics of such fluids result from the interplay of inertia, represented by the advective term $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, and viscosity, represented by $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$.

These equations must be supplemented with appropriate boundary conditions. At the interface between two fluids, or a fluid and a solid, the normal component of velocity must clearly be continuous. More subtly, the tangential component of velocity must be continuous; it is initially is not, a boundary layer quickly forms to make it so. As argued earlier, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ is also continuous.

These facts can be combined to show that the pressure is continuous at a solid wall, which was not true for solids. Suppose this wall is at $z = 0$. At the origin, $\nabla_x \mathbf{v} = \nabla_y \mathbf{v} = 0$ since the velocity vanishes at the wall. By incompressibility, $\nabla_z v_z = 0$ at the wall as well, so the shear stress vanishes at the wall, and thus $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -p\hat{\mathbf{n}}$ is continuous, so p is.

Taking the curl of this equation gives

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

which confirms that viscosity makes vorticity diffuse, as we saw in examples above.

Suppose the velocity has a typical value u over an object with typical size L . Then we can quantify the ratio of the advective and viscous terms by the Reynolds number,

$$\text{Re} \sim \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{u^2/L}{\nu u/L^2} \sim \frac{uL}{\nu}.$$

There are several different qualitative regimes depending on the value of Re .

For $\text{Re} \ll 1$, the flow is "creeping", and dominated by viscosity. Microorganisms live in this world. For an interesting description of it, see *Life at Low Reynolds Number*.

For $\text{Re} \sim 1$, viscosity is still highly important; flies live in this world. In this regime, the fluid flow is still orderly and layered, which we call laminar.

For $\text{Re} \gg 1$, turbulence sets in, with its accompanying erratic behavior. This regime is relevant for vehicles and human-sized objects in everyday life.

Another way to highlight the importance of the Reynolds number is to nondimensionalize the Navier-Stokes equations. For steady flow with no external forces, it simplifies to

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}}\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}$$

where we used the scales ρ_0 , u , and L to define the dimensionless variables by

$$\mathbf{v} = U\tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{x} = L\tilde{\mathbf{x}}, \quad p = \rho_0 U^2 \tilde{p}, \quad \nabla = \frac{1}{L}\tilde{\nabla}.$$

This means the aerodynamic properties of an aircraft can be simulated with a model in a wind tunnel if ρ_0 and u are scaled to keep the Reynolds number the same. For supersonic aircraft, compressibility is important, and we would also have to keep the Mach number the same.

Finally, we consider some of the complications of compressible flow.

In this case, the stress can also depend on $\nabla \cdot \mathbf{v}$, and it is conventional to define

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

where ζ is called the bulk viscosity or expansion viscosity, in contrast to η which is called the shear viscosity. The point of this definition is that it makes the middle term traceless, so η does not affect the mechanical pressure.

The resulting equations of motion are

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

where we again assumed a uniform η and ζ . These equations close for a barotropic fluid. In the case where $p = p(\rho, T)$, we would also need a differential heat equation to describe the evolution of T . The viscosities η and ζ could also depend on T .

In this compressible case, velocity and $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ remain continuous at interfaces, but the pressure is no longer necessarily continuous. In addition, shock fronts may form. While our inclusion of viscosity allows us to describe shock fronts as continuous in principle, in practice they are often so thin that the continuum approximation breaks down. Thus, we must treat them as true discontinuities, and apply conservation laws across them.

Borrowing from our earlier results for solids, the rate of work against internal stresses is

$$\dot{W} = \int_V \sum_{ij} \sigma_{ij} \nabla_j v_i dV = \int_V \left(-p \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \sum_{ij} v_{ij}^2 + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right) dV$$

As expected, the viscous terms are always positive, since they dissipate energy. Example. The viscous attenuation of sound. As in our earlier treatment of sound, we can linearize the equation of motion in the small parameters $\Delta p = c_0^2 \Delta \rho$. The result is

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(\Delta p) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Combining these equations yields the damped wave equation

$$\frac{\partial^2(\Delta \rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta \rho) + \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} \nabla^2 \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t}.$$

For a sinusoidal wave $\Delta \rho = \rho_1 e^{-\kappa x} \cos(kx - \omega t)$, we thus have

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2\omega_0 c_0}, \quad \omega_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\zeta + \frac{4}{3}\eta}.$$

In particular, higher frequency sound waves propagate a shorter distance before decaying. In practice, there is also attenuation from heat conduction.

Example. Flow past a sphere, as a function of Re , shows many qualitatively different behaviors. For $\text{Re} \lesssim 1$, we have a "creeping" flow that is superficially similar to potential flow; like potential flow, it can be solved for analytically. At $\text{Re} \sim 10$, a steady circulation forms behind the sphere. At $\text{Re} \sim 100$, this circulation periodically detaches from the sphere, forming a "Karman vortex street". (Physically, we can think of Re as describing the rate at which vorticity is created at the surface of the sphere. The vortices separate when this production is too fast to be simply diffused away.) At $\text{Re} \sim 10^4$, the flow becomes chaotic, with a turbulent wake formed behind the sphere. At $\text{Re} \sim 10^5$, a "drag crisis" occurs where the coefficient of drag suddenly drops and the turbulent flow reattaches to the sphere.

9 Турбулентность по Ландау

Устойчивость стационарного движения жидкости 137 § 27. Устойчивость вращательного движения жидкости 143 § 28. Устойчивость движения по трубе 147 § 29. Неустойчивость тангенциальных разрывов 152 § 30. Квазипериодическое движение и синхронизация частот 155 § 31. Странный аттрактор 162 § 32. Переход к турбулентности путем удвоения периодов 169 § 33. Развита турбулентность 184 § 34. Корреляционные функции скоростей 193 § 35. Турбулентная область и явление отрыва 207 § 36. Турбулентная струя 210 § 37. Турбулентный след 216 § 38. Теорема Жуковского

10 гидростатика

(по идее этого раздела полностью должно на неё хватить.)

10.1 Поверхностное натяжение. Формула Лапласа.

я просто не могу уложить это в термодинамику. ну, да, не гидродинамика. но блин, это уж никак не термодинамика.

я все забыл.

особенно хрен я свяжу это с кривизнами поверхностей, хотя начать с этого хотелось бы.

10.2 Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.

11 Одномерное движение сжимаемого газа

11.0.1 Истечение газа через сопло

Рассмотрим стационарное вытекание газа из большого сосуда через трубку переменного сечения, или, как говорят, через сопло. Мы будем предполагать, что движение газа можно считать в каждом месте трубы однородным по ее сечению, а скорость - направленной практически вдоль оси трубы. Для этого труба должна быть не слишком широка, и площадь S ее сечения должна достаточно медленно меняться вдоль ее длины. Таким образом, все величины, характеризующие течение, будут функциями только от координаты вдоль оси трубы. При этих условиях можно применять полученные в § 83 соотношения, имеющие место вдоль линии тока, непосредственно к изменению величин вдоль длины трубы.

Количество (масса) газа, проходящего в единицу времени через поперечное сечение трубы, или, как говорят, расход газа, равно $Q = \rho v S$; эта величина должна, очевидно, оставаться постоянной вдоль всей трубы:

$$Q = S\rho v = \text{const},$$

Линейные размеры самого сосуда предполагаются очень большими по сравнению с диаметром трубы. Поэтому скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, и соответственно этому все величины с индексом нуль в формулах §83 будут представлять собой значения соответствующих величин внутри сосуда.

Мы видели, что плотность потока $j = \rho v$ не может превышать некоторого предельного значения j_* . Ясно поэтому, что и возможные значения полного расхода газа Q будут иметь (для данной трубы и при заданном состоянии газа внутри сосуда) верхнюю границу Q_{\max} , которую легко определить. Если бы значение j_* плотности потока было достигнуто не в самом узком месте трубы, то в сечениях с меньшим S было бы $j > j_*$, что невозможно. Поэтому значение $j = j_*$ может быть достигнуто только в самом узком месте трубы, площадь сечения которого обозначим посредством S_{\min} . Таким образом, верхняя граница полного расхода газа есть

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} S_{\min} \quad (97, 2)$$

Рассмотрим сначала сопло, монотонно суживающееся по направлению к своему внешнему концу, так что минимальная площадь сечения достигается на этом конце (рис. 70). В силу (97, 1) плотность потока j монотонно возрастает вдоль трубы. То же самое касается скорости газа v , а давление соответственно монотонно падает. Наибольшее возможное значение j будет достигнуто, если скорость v достигает значедавлению p в сосуде, и вплоть до значения p_* одновременно с ним оба эти давления (p_1 и p_e) остаются

равными друг другу; дроба эти давления (p_1 и p_e) остаются равными друг другу; другими словами, все Падение давления от p_0 до внешнего давления $Q = j_1 S_{\min}$ монотонно возрастают, При $p_e = p_*$ газа $Q = j_1 S_{\min}$ монотонно возрастают, При $p_e = p_*$ выходная него давления выходное давление перестает падать и остается все время равным p_* ; падение же давления от p_* до p_e происходит уже вне трубы, в окружающем пространстве, Другими словами, ни при каком внешнем давлении падение давления газа в трубе не может быть бОльшим, чем от p_0 до p_* ; так, для воздуха ($p_* = 0,53p_0$) максимальное падение давления составляет $0,47p_0$, Выходная скорость и расход газа тоже остаются (при ($p_e < p_*$)) постоянными, Таким образом, при истечении через суживающееся сопло газ не может приобрести сверхзвуковой скорости. Невозможность достижения сверхзвуковых скоростей при выпуске газа через суживающееся сопло связана с тем, что скорость, равная местной скорости звука, мо.

жет достигаться только на самом выходном конце такой трубы, Ясно, что сверхзвуковая скорость сможет быть достигнута с помощью сопла сначала суживающегося, а затем вновь расширяющегося (рис, 71), Такие сопла называются соплами Лавала. Максимальная плотность потока j_* , если и достигается, то опять-таки только в наиболее узком сечении, так что и в таком сопле расход газа не может превышать значения $S_{\min} j_*$, В суживающейся части сопла плотность потока возрастает (а давление падает); на кривой рис, 72, изображающей зависимость j от p^1 , Это соответствует передвижению от точки c по направлению к b , Если в сечении S_{\min} достигается максимальный поток (точка b на рис, 72), то в расширяющейся части сопла давление будет продолжать падать и начнет падать также и j соответственно перемещению по кривой рис, 72 от точки b по направлению к , На выходном конце трубы поток j приобретает тогда вполне определенное значение, равное

$$j_{1\max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1}.$$

а давление - соответствующее этому потоку значение, обозначенное на рис, 72 посредством p'_1 (некоторая точка d на кривой), Если же в сечении S_{\min} достигается лишь некоторая точка e , то в расширяющейся части сопла давление будет возрастать соответственно обратному перемещению по кривой вниз от точки e , На первый взгляд могло бы показаться, что с ветви cb кривой можно перейти на ветвь ab скачком, минуя точку b , посредством образования ударной волны; это, однако, невозможно, так как «втекающий» в ударную волну газ не может иметь дозвуковой скорости.

Имея в виду все эти замечания, проследим теперь за изменением режима вытекания по мере постепенного увеличения внешнего давления p_e , При малых давлениях, начиная от нуля и до значения $p_e = p'_1$, устанавливается режим, при котором в сечении S_{\min} достигается давление p_* и скорость $v_* = c_*$, В расширяющейся части сопла скорость продолжает расти, так что осуществляется сверхзвуковое течение газа, а давление продолжает соответственно падать, достигая на выходном конце значения p'_1 вне зависимости от величины p_e , Падение давления от p'_1 до p_e происходит вне сопла, в отходящей от края его отверстия волне разрежения (как это будет описано в § 112).

Когда p_e начинает превышать значение p'_1 , появляется отходящая от края отверстия сопла косая ударная волна, сжимающая газ от выходного давления p'_1 до давления p_e (§112), Мы увидим, однако, что стационарная ударная волна может отходить от твердой поверхности лишь Постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§111), Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причем перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв, При некотором значении p_e ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится

всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла, Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трехмерный характер.

З а д а ч а

На малом участке длины трубы к стационарно текущему по ней газу подводится небольшое количество тепла, Определить изменение скорости газа при прохождении им этого участка, Газ предполагается политропным.

Реш е н и е,

Пусть Sq есть подводимое в единицу времени количество тепла (S - площадь сечения трубы в данном ее участке), На обеих сторонах участка подогрева одинаковы плотности потока массы $j = \rho v$ и потока импульса $p + jv$; отсюда $\Delta p = -j\Delta v$, где Δ обозначает изменение величины при прохождении этого участка, Разность же плотностей потока энергии $(w + v^2/2)i$ равна q , Написав w в виде

$$\omega = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{\gamma p v}{(\gamma - 1)j},$$

получим (считая $\Delta 0$ и Δp малыми):

$$vj\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p\Delta v + v\Delta p) = q$$

Исключая Δp из этих двух соотношений, найдем:

$$\Delta v = \frac{(\gamma - 1)q}{\rho(c^2 - v^2)}$$

Мы видим, что при дозвуковом течении подвод тепла ускоряет поток ($\Delta v > 0$), а при сверхзвуковом - замедляет.

Написав температуру газа в виде $T = \mu p/R\rho = \mu p v/R$ (R - газовая постоянная), найдем для ее изменения выражение

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma - 1)q}{Rj(c^2 - v^2)} \left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2 \right).$$

При сверхзвуковом движении это выражение всегда положительно-температура газа повышается; при дозвуковом же движении оно может быть как положительным, так и отрицательным.

- 11.0.2 Вязкое движение сжимаемого газа по трубе
- 11.0.3 Одномерное автомодельное движение
- 11.0.4 Разрывы в начальных условиях
- 11.0.5 Одномерные бегущие волны
- 11.0.6 Образование разрывов в звуковой волне
- 11.0.7 Характеристики
- 11.0.8 Инварианты Римана
- 11.0.9 Произвольное одномерное движение сжимаемого газа
- 11.0.10 Задача о сильном взрыве
- 11.0.11 Сходящаяся сферическая ударная волна
- 11.0.12 Теория “мелкой воды”

Part III

Основы теории упругости

12 Основы (?)

12.0.1 Тензор деформации

(ландау)

Суть

Теория

Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется ее радиус-вектором \mathbf{r} (с компонентами $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела; если ее радиус-вектор до деформирования был \mathbf{r} , то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение \mathbf{r}' (с компонентами x'_i). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, который мы обозначим буквой \mathbf{u} :

$$u_i = x'_i - x_i$$

Вектор \mathbf{u} называют вектором деформации (или вектором смещения). Координаты x'_i смещенной точки являются, конечно, функциями от координат x_i той же точки до ее смещения. Поэтому \mathbf{u} и вектор деформации является функцией координат x_i . Задание вектора \mathbf{u} как функции от x_i полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был dx_i , то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет $dx'_i = dx_i + du_i$. Само расстояние между точками до деформирования было равно

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$$

Так как $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, то перепишем dl'^2 в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

Поскольку во втором члене оба индекса i и k являются немymi, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$$

В третьем же члене поменяем местами индексы i и l . Тогда окончательно получаем

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx_i dx_k$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Этим и выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела. Тензор u_{ik} называют тензором деформации; по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki}$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат - главные оси тензора, - в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33} . Эти компоненты - главные значения тензора деформации обозначим через $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$. Надо, конечно, помнить, что если тензор u_{ik} приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведен в данной точке к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2 \end{aligned}$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объема тела деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых

деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям - главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина dx_1 вдоль первой из главных осей превращается в длину

$$dx'_1 = \sqrt{1 + 2u^{(1)}} dx_1$$

и аналогично для двух других осей. Величины

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

представляют собой, следовательно, относительные удлинения $(dx'_i - dx_i)/dx_i$ вдоль этих осей. Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации, то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев ¹⁾, при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трехмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не специально малы ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в гл. II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях смещения u_i , а с ними и их производные по координатам, малы. Поэтому в общем выражении (1.3) можно пренебречь по-

следним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

относительные удлинения элементов длины вдоль главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора u_{ik} . Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема dV и определим его величину dV' после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины dx_1, dx_2, dx_3 вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx'_1 = (1 + u^{(1)}) dx_1$ и т. д. Объем dV есть произведение $dx_1 dx_2 dx_3$, объем же dV' равен $dx'_1 dx'_2 dx'_3$. Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u^{(1)}) (1 + u^{(2)}) (1 + u^{(3)})$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})$$

Но сумма $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$. Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u_{ii})$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема $(dV' - dV)/dV$. Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведем

здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах r, θ, φ имеем

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r} \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \\ 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах r, φ, z

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

его применения

12.0.2 Тензор напряжения

Суть

Теория

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем

отсутствуют.

Внутренние напряжения обуславливаются молекулярными силами и, т.

е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень небольшим радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обуславливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от

каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, действующие на какую-нибудь

часть тела со стороны окружающих ее частей, проявляют это действие только непосредственно через поверхность этой части тела.

Здесь необходима следующая оговорка: сделанное утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей; такие тела (так называемые пьезо- и пьезоэлектрические) рассматриваются в т. VIII этого курса.

Выделим в теле какой-нибудь объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила может быть представлена в виде объемного интеграла

$$\int \mathbf{F} dV$$

где \mathbf{F} - сила, действующая на единицу объема тела. С другой стороны, силы, с которыми

действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объема, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объем со стороны окружающих его частей тела. Но, согласно сказанному выше, эти силы действуют на рассматриваемый

объем через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема, т. е. в виде некоторого интеграла

по этой поверхности.

Таким образом, для любого объема тела каждая из трех компонент $\int F_i dV$ равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объема. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор F_i должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга,

т. е. иметь вид ¹⁾

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей этот объем ²⁾

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k$$

Тензор σ_{ik} называют тензором напряжений. Как видно из (2.2), $\sigma_{ik} df_k$ есть i -я компонента силы, действующей на элемент поверхности df . Выбирая элементы

поверхности в плоскостях xy ; yz ; xz , находим, что компонента σ_{ik} тензора напряжений есть i -я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k . Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x , действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы $\sigma_{ik} df_k$. В (2.2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объем со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объем действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$-\oint \sigma_{ik} df_k$$

где интеграл берется по поверхности тела, а df направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объем тела. Момент силы \mathbf{F} можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами $F_i x_k - F_k x_i$, где x_i - координаты точки приложения силы ¹⁾. Поэтому момент сил, действующих на элемент объема dV , есть $(F_i x_k - F_k x_i) dV$, а на весь объем действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV$$

Как и полная сила, действующая на любой объем, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объема. Подставляя для F_i выражение (2.1), находим

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV \end{aligned}$$

Замечаем, что во втором члене производные $\partial x_k / \partial x_l$ составляют единичный тензор δ_{kl} . В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл преобразуется в интеграл по поверхности. В результате находим

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV$$

Тензор M_{ik} будет выражен в виде интеграла только по поверхности, если тензор напряжений симметричен,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

так что объемный интеграл исчезает (к обоснованию важного утверждения (2.4) мы вернемся еще в конце параграфа). Момент сил, действующих на некоторый объем тела, представится тогда в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного всестороннего сжатия тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объема тела. Если обозначить это давление буквой p , то на элемент поверхности df_i действует сила $-p df_i$. С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид $\sigma_{ik} df_k$. Написав $-p df_i$ в виде $-p \delta_{ik} df_k$, мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению. В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, скалывающие, напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга. В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объема тела, т. е. должно быть $F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма $\mathbf{F} + \rho \mathbf{g}$ сил внутренних напряжений и силы тяжести $\rho \mathbf{g}$, действующей на единицу объема тела (ρ — плотность ¹), \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть \mathbf{P} есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности df действует сила $\mathbf{P}^a df$. В равновесии она должна компенсироваться силой $-\sigma_{ik} df_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где \mathbf{n} - единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik} n_k = P_i$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь еще формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2.7) на x_k и проинтегрируем по всему объему тела:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l} dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором интеграле имеем ввиду, что $\partial x_k / \partial x_l = \delta_{kl}$. Отсюда получаем

$$\oint \sigma_{il} x_k df_l - \int \sigma_{ik} dV = 0$$

Подставляя в первый интеграл (2.9), находим

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = V \bar{\sigma}_{ik}$$

где V - объем тела, а $\bar{\sigma}_{ik}$ - среднее по всему объему значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнений равновесия. Вернемся к приведенному выше доказательству симметричности тензора напряжений; оно нуждается в уточнении. Поставленное физическое условие (представимость тензора M_{ik} в виде интеграла только по поверхности) будет выполнено, не только

если антисимметричная часть тензора σ_{ik} (т. е. подынтегральное выражение в объемном интеграле в (2.3)) равна нулю, но и если она представляет собой некоторую полную дивергенцию, т. е. ϵ_{ijk} и

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2 \frac{\partial}{\partial x_l} \varphi_{ikl}, \quad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil}$$

где φ_{ikl} - произвольный тензор, антисимметричный по первой паре индексов. В данном случае этот последний тензор должен выражаться через производные $\partial u_i / \partial x_k$ и соответственно в тензоре напряжений возникнут члены с высшим и производными от

вектора смещения. В рамках излагаемой в этой книге теории упругости все такие члены должны рассматриваться как малые высшего порядка и опускаться.

С принципиальной точки зрения существенно, однако, что тензор напряжений может быть приведен к сим метричному виду и без этих пренебрежений ¹). Дело в том, что определение этого тензора, согласно (2.1), неоднозначно - допустимо любое преобразование вида

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l} \chi_{ikl}, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}$$

где χ_{ikl} - произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов; очевидно, что производные $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ и $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, определяющие силу \mathbf{F} , тождественно совпадают. Если антисим метричная часть тензора σ_{ik} имеет вид (2.11), то несимметричный тензор σ_{ik} может быть приведен к сим метричному виду преобразованием такого вида. Симметричный тензор имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\varphi_{ilk} + \varphi_{kli})$$

Действительно, легко убедиться, что разность $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ имеет вид (2.12) с тензором

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{ilk} - \varphi_{ikl}$$

его применения

12.0.3 Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации u_i изменяется на малую величину δu_i . Определим работу,

Суть

Теория

12.0.4 Закон Гука

Суть

Теория

12.0.5 Однородные деформации

Суть

Теория

12.0.6 Деформации с изменением температуры

часто возникает вопрос, как изменится температура тела при деформациях?

Суть

Теория

12.0.7 Уравнения равновесия изотропных тел

Суть

Теория

12.0.8 Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Суть

Теория

12.0.9 Соприкосновение твердых тел

Суть

Теория

10

12.0.10 Упругие свойства кристаллов

Суть

Теория

12.1 Основные примеры деформаций

соберем полезные заготовки для задач на деформацию, чтобы потом брать их - и применять в аналогичных случаях в жизни.

так что тут простые задачи и модели будут, которые потом вставляются в задачи про деформацию

12.1.1 Деформация прямоугольного параллелепипеда

12.1.2 Всесторонне сжатие и растяжение

Суть

Теория

12.1.3 Кручение

интересно очень, как описывать кручение?

вот тут теория прямо на это

простейшая теория

(общефиз)

В отличие от растяжения и сжатия, деформация сдвига вызывается касательными напряжениями (рис. 8.3а). Пусть $\tau = dF_{\parallel}/dS$ - касательное напряжение (\vec{F}_{\parallel} - сила, параллельная поверхности пробного кубика). Следствием деформации будет угол перекося γ . При условии его малости связь между воздействием и откликом должна быть линейной -

$$\gamma = G\tau$$

где коэффициент G именуется модулем сдвига, а все соотношение (8.9), как и (8.3), - законом Гука.

Для равновесия деформированного кубика к нему одновременно с касательным напряжением τ должно быть приложено еще одно, равное и противоположно направленное (показано

на рис. 8.3 а штрихованной стрелкой), а также дополнительная пара сил, уравнивающая момент этих сил, показанная на рис. 8.3 а точечными стрелками. Два верхних напряжения обеспечиваются непосредственно воздействием, нижние - реакцией опоры. Рассмотрим равновесие уголка ABC (рис. 8.3 б). Из построения равновесия сил, действующих на уголок (τdS вдоль граней BA и BC , $\tau dS\sqrt{2}$ - по биссектрисе угла ABC), следует, что на поверхности BA возникает такое же напряжение τ , но уже не касательное, а нормальное. Как следствие, внутри деформируемого кубика можно выделить кубик $abcd$ (рис. 8.3 в), который подвергается растяжению по оси η и сжатию по оси ξ . Далее каждому способу рассмотрения упругой деформации будет удобно поставить в соответствие свою плотность энергии. Во-первых, в соответствии с рис. 8.3а,

$$dU = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \tau dx dy \cdot dz \gamma \Rightarrow w = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

С другой стороны (см. рис. 8.3в)

$$-\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_{\eta} = \frac{\tau}{E} + \mu \frac{\tau}{E} \Rightarrow dU = 2 \cdot \tau d\eta d\xi \frac{|\varepsilon_{\xi}| d\xi}{2} \Rightarrow w = \tau |\varepsilon_{\xi}|$$

Таким образом,

$$\frac{\tau^2}{2G} = \tau^2 \frac{1+\mu}{E} \Rightarrow G = \frac{E}{1+\mu}$$

Итак, модуль сдвига удастся выразить через две ранее введенные упругие константы.

Рассмотрим деформацию кручения (рис. 8.4). Пусть к цилиндру радиуса R с закрепленным основанием приложен крутящий момент M . Если при этом свободный конец прокручивается на угол φ , то линейный закон, аналогичный (8.3), имеет вид

$$M = f\varphi$$

где f именуется модулем кручения. Рассмотрев деформацию трубочки радиуса r и толщины $\delta r \ll r$, нетрудно убедиться, что для нее кручение эквивалентно деформации сдвига, причем угол

сдвига тривиальным образом связан с φ ,

$$\gamma h = \varphi r$$

где h - длина образца. Вклад в полный момент от нашей трубочки равен $\delta M = \tau \cdot 2\pi r \delta r \cdot r$, где $\tau = G\gamma = G\varphi \frac{r}{h}$. Соответственно, для сплошного цилиндра

$$M = \int \delta M = \int_0^R \frac{2\pi G}{h} \varphi r^3 dr = \varphi \frac{\pi G R^4}{2h} \equiv f \cdot \varphi$$

б

Таким образом, модуль кручения однородного стержня равен $\pi GR^4/(2h)$, а для тонкой трубочки $-2\pi r^3 \delta r \cdot G/h$. Мы вновь

убедились в том, что линейный отклик на внешнее воздействие может быть выражен исключительно через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Интересным следствием закона (8.11) оказывается соотношение для так называемых крутильных колебаний. Пусть массивное симметричное тело радиуса R с моментом инерции I подвешено на проволоке длины l и радиуса r с модулем кручения f (рис. 8.5). Уравнение моментов (7.13) для этого случая приводится к виду

$$I\ddot{\varphi} = -M(\varphi) = -f\varphi$$

а это уравнение типа (4.18), решение которого хорошо известно

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \psi), \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{f}{I} = \frac{\pi Gr^4}{mlR^2}$$

12.1.4 Простейшие деформации

соберем тут общезвестный.

12.2 Равновесие стержней и пластинок

12.2.1 Энергия изогнутой пластинки

12.2.2 Уравнение равновесия пластинки

12.2.3 Продольные деформации пластинок

12.2.4 Сильный изгиб пластинок

12.2.5 Деформация оболочек

12.2.6 Кручение стержней

12.2.7 Изгиб стержней

12.2.8 Энергия деформированного стержня

12.2.9 Уравнение равновесия стержней

20

12.2.10 Слабый изгиб стержней.

2

12.2.11 Устойчивость упругих систем

13 Упругие волны

(пока глава, вообще, мб частью сделаю отдельной)

2

13.1 Упругие волны в изотропной среде

13.2 Упругие волны в кристаллах

13.3 Поверхностные волны

13.4 Колебания стержней и пластинок

13.5 Ангармонические колебания

Part IV

Problems

14 Типичные задачи механики сплошных сред

14.1 Simplified and introductory problems

14.1.1 Задачи общей физике (???)

(с нее начну, там в механике есть эти элементы!)

14.1.2 Задачи о поверхности воды

ТУЙМ-48. Волны в ручье (2010 год)

При обтекании воткнутой в дно ручья палки образовались неподвижные относительно берега поверхностные волны (рис. 16,17).

1. Определите диаметр d палки.
2. Определите скорость u течения ручья.

Примечание.

Зависимость скорости v поверхностных волн от длины волны λ (закон дисперсии) имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения, $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$ - коэффициент поверхностного натяжения воды, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ - плотность воды.



Рис. 16. Короткие волны перед палкой (крупный масштаб)



Рис. 17. Длинные волны после палки (мелкий масштаб)

ТУЙМ-решение.48. Волны в ручье (2010 год)

Начнем с прикидывания, сколько разница длин волн.

Запишем длины волн, образовавшихся по разные стороны от палки, в виде $\lambda_1 = k_1 d$ и $\lambda_2 = k_2 d$, где коэффициенты $k_1 = 1/6$ и $k_2 = 8$ определяются по фотографиям: сколько λ_1 укладывается в d и сколько d укладывается в λ_2 .

В системе отсчёта, связанной с водой, палка и обе волны движутся со скоростью u (аналогично картине волн от катера). Подставим $v = u$ в закон дисперсии и запишем его в виде

$$\frac{g}{2\pi} \lambda^2 - u^2 \lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho} = 0$$

Поскольку λ_1 и λ_2 - корни данного уравнения, по теореме Виета

$$\frac{g}{2\pi} \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho}, \quad \frac{g}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) = u^2.$$

После подстановки выражений для λ_1 и λ_2 находим

$$d = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{k_1 k_2 \rho g}} \approx 15 \text{ мм}, \quad u = \sqrt{\sqrt{\frac{g\sigma}{k_1 k_2 \rho}} (k_1 + k_2)} \approx 43 \text{ см/с}.$$

Решение Клименюка (????)

(пока просто не до просмотра этого.)

Из первой, крупной фотографии, выясняем, что в диаметре палки укладывается примерно 6 коротких волн $\lambda_1 \approx d/6$, в то время как в одной длинной волне, как видно из второго снимка, укладывается примерно 7.5 диаметров палки $\lambda_2 \approx 7.5d$. Таким образом, $\lambda_2 \approx 45\lambda_1$.

Далее удобно рассуждать, перейдя в систему, связанную с водой. В этой системе препятствие, движущееся относительно воды со скоростью реки v , порождает волны, покоящиеся относительно препятствия и, соответственно, движущиеся относительно воды со скоростью v . Этой скорости соответствуют волны с длинами λ_1 и λ_2 , которые являются решением квадратного уравнения:

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$$

$$\lambda^2 - \frac{2\pi v^2}{g} \lambda + \frac{4\pi^2 \sigma}{\rho g} = 0$$

По теореме Виета $\lambda_1 \lambda_2 = 4\pi^2 \sigma / g\rho$. Учитывая, что $\lambda_2 \approx 45\lambda_1$, получаем $\lambda_1 = 2\pi \sqrt{\sigma / 45g\rho} = 2.6 \text{ мм}$; $\lambda_2 = 45\lambda_1 = 116 \text{ мм}$. Скорость $v^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) g / 2\rho$ (вторая часть т. Виета) тогда $V = 43 \text{ см/с}$. Диаметр палки $d = 6\lambda_1 = 15.5 \text{ мм}$.

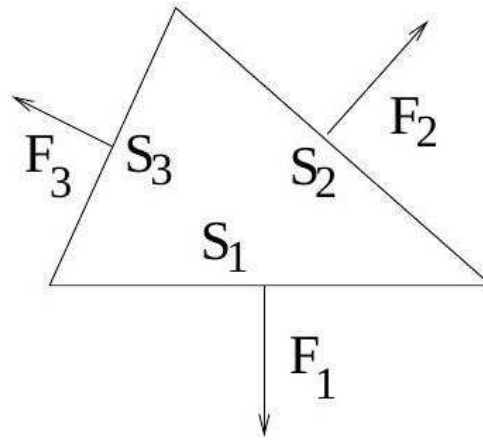
Разные задачи**14.1.3 Exercises 1****F-1.**

1 Proceeding from the fact that the force exerted across any plane surface is wholly normal, prove that its intensity (per unit area) is the same for all aspects of the plane (Pascal Law).

1.

1.

Consider a prism inside the fluid.



Forces must sum into zero in equilibrium which means that after being rotated by $\pi/2$ force vectors form a closed triangle similar to that of the prism. Therefore, the forces are proportional to the areas of the respective faces and the pressures are equal.

F-1.

2 Consider self-gravitating fluid with the gravitational potential ϕ related to the density by

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

G being the constant of gravitation. Assume spherical symmetry and static equilibrium. Describe the radial distribution of pressure for an incompressible liquid.

1.2 .

The force $-\nabla\psi$ must balance the gradient of pressure

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dp}{\rho dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho, \quad p = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 (R^2 - r^2) \quad (5.1)$$

F-1.

3 Find the discharge rate from a small orifice with a cylindrical tube, projecting inward. Assume h, S and the gravity acceleration g given. Whether such a hole corresponds to the limiting (smallest or largest) value of the "coefficient of contraction" S'/S ? Here S is the orifice area and S' is the area of the jet where contraction ceases (vena contracta).

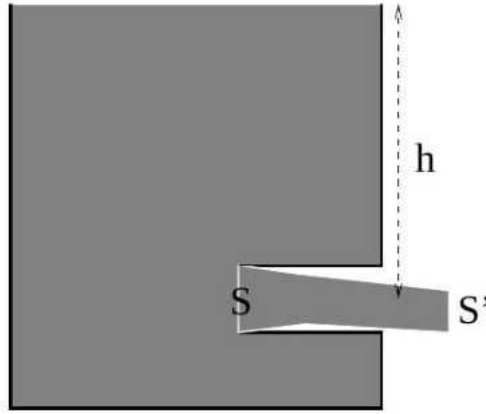


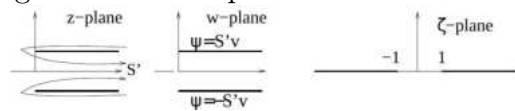
Figure 1.20 Borda mouthpiece

1.

3 .

The discharge rate is $S'\sqrt{2gh}$. Energy conservation gives us $v = \sqrt{gh}$ at the vena contracta. This velocity squared times density times area S' gives the momentum flux which must be determined by the force exerted by the walls on the fluid. The difference between the orifice, drilled directly in the wall as in Fig. 1.3, and the tube, projecting inward (called Borda's mouthpiece), is that in the latter case one can neglect the motion near the walls so that the force imbalance is the pressure $p = \rho gh$ times the hole area S . We thus get $\rho v^2 S' = \rho gh S$ and $S' = S/2$. Generally, the motion near the walls diminishes the pressure near the exit and makes the force imbalance larger. The reaction force is therefore greater and so is the momentum flux. Since the jet exits with the same velocity it must have a larger cross-section, so that $S'/S \geq 1/2$ (for a round hole in a thin wall it is empirically known that $S'/S \simeq 0.62$).

The above general argument based on the conservation laws of energy and momentum works in any dimension. For Borda's mouthpiece in two dimensions, one can describe the whole flow neglecting gravity and assuming the (plane) tube infinite, both assumptions valid for a flow not far from the corner. This is a flow along the tube wall on the one side and detached from it on the other side in distinction from a symmetric flow shown in Figure 1.8 with $n = 1/2$. Flow description can be done using conformal maps shown in the following figure:



The tube walls coincide with the streamlines and must be cuts in ζ plane because of jumps in the potential. That corresponds to $w \propto \ln \zeta$, the details can be found in Section 11.51 of [13]. For a slit in a thin wall, 2d solution can be found in Section 11.53 of [13] or Section 10 of [10], which gives the coefficient of contraction $\pi/(\pi + 2) \approx 0.61$.

F-1.

4 Prove that if you put a little solid particle - not an infinitesimal point - at any place in the liquid it will rotate with the angular velocity Ω equal to the half of the local vorticity $\omega = \text{curl } \vec{v} : \Omega = \omega/2$.

1.

4 .

Simply speaking, vorticity is the velocity circulation (=vorticity flux) divided by the area while the angular velocity Ω is the velocity circulation (around the particle) divided by the radius a and the circumference $2\pi a$:

$$\Omega = \int u dl / 2\pi a^2 = \int \omega df / 2\pi a^2 = \omega / 2$$

A bit more formally, place the origin inside the particle and consider the velocity of a point of the piece with radius vector \mathbf{r} . Since the particle is small we use Taylor expansion $v_i(\mathbf{r}) = S_{ij}r_j + A_{ij}r_j$ where $S_{ij} = (\partial_i r_j + \partial_j r_i) / 2$ and $A_{ij} = (\partial_i r_j - \partial_j r_i) / 2$. Rigid body can not be deformed thus $S_{ij} = 0$. The only isometries that do not deform the body and do not shift its center of mass are the rotations. The rotation with the angular velocity Ω gives $A_{ik}r_k = \epsilon_{ijk}\Omega_j r_k$. On the other hand, the vorticity component

$$\omega_i \equiv [\nabla \times \mathbf{v}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j v_k - \partial_k v_j)$$

Using the identity $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{mk}$ and

$$\epsilon_{imn}\omega_i = \frac{1}{2} (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{mk}) (\partial_j v_k - \partial_k v_j) = \partial_m v_n - \partial_n v_m$$

we derive $A_{ik}r_k = \epsilon_{ijk}\omega_j r_k / 2$ and $\Omega = \omega / 2$.

F-1.

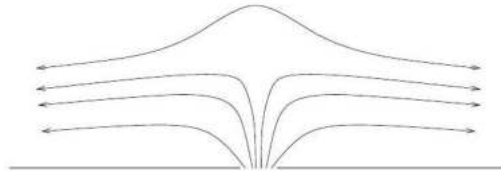
5 There is a permanent source of water on the bottom of a large reservoir. Find the maximal elevation of the water surface for two cases:

- i) a straight narrow slit with the constant influx q (g/cm · sec) per unit length;
- ii) a point-like source with the influx Q (g/sec) The fluid density is ρ , the depth of the fluid far away from the source is h . Gravity acceleration is g . Assume that the flow is potential.

1.

5 .

Use Bernoulli equation, written for the point of maximal elevation (when $v = 0$ and the height is H) and at infinity: $2gH = 2gh + v_\infty^2$.



- i) Flow is two-dimensional and far from the slit has only a horizontal velocity which does not depend on the vertical coordinate because of potentiality. Conservation of mass requires $v_\infty = q / 2\rho g$ and the elevation $H - h = q^2 / 8g\rho^2 h^2$.

ii) There is no elevation for a potential flow in this case since the velocity goes to zero at large distances (as an inverse distance from the source). A fountain with an underwater source is surely due to a non-potential flow.

F-1.

6 Sketch streamlines for the potential inviscid flow and for the viscous Stokes flow in two reference systems, in which: i) fluid at infinity is at rest; ii) sphere is at rest. Hint: Since the flow past a sphere is actually a set of plane flows, one can introduce the stream function analogous to that in two dimensions. If one defines a vector whose only component is perpendicular to the plane and equal to the stream function then the velocity is the curl of that vector and the streamlines are level lines of the stream function.

1.

6 .

In the reference frame of the sphere, the velocity of the inviscid potential flow is as follows:

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta (1 - (R/r)^3) \\ v_\theta &= -u \sin \theta (1 + (R^3/2r^3)) \end{aligned}$$

Streamlines by definition are the lines where

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{f} = (v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times (dr \hat{\mathbf{r}} + d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = r v_r d\theta - v_\theta dr = 0$$

which gives the equation

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{2r^3 + R^3}{2r(r^3 - R^3)} \tan \theta$$

whose integration gives the streamlines

$$\begin{aligned} -\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{2}{\tan \theta} &= \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{2r^3 + R^3}{r(r^3 - R^3)} \\ \left(\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right)^2 &= \frac{r_2(r_1 - R)(r_1^2 + r_1 R + R^2)}{r_1(r_2 - R)(r_2^2 + r_2 R + R^2)} \end{aligned}$$

It corresponds to the the stream function in the sphere reference frame as follows: $\psi = -ur^2 \sin^2 \theta (1/2 - R^3/r^3)$. The streamlines relative to the sphere are in the right part of Figure 5.1.



Figure 5.1 Streamlines of the potential flow around a sphere in the reference frame where the fluid is at rest at infinity (left) and in the reference frame moving with the sphere (right).

In the reference frame where the fluid is at rest at infinity,

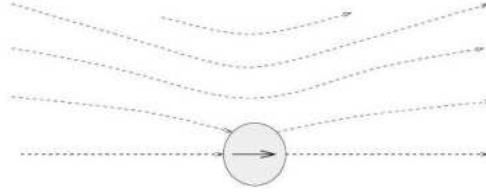
$$v_r = -u \cos \theta (R/r)^3, \quad v_\theta = -(1/2)u \sin \theta (R/r)^3$$

Integrating

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{\tan \theta}{2r}$$

one obtains the stream function $\psi = -uR^3 \sin^2 \theta / 2r$ whose streamlines are shown in the left part of Figure 5.1.

From the velocity of the viscous Stokes flow given by (1.48), one can obtain the stream function. In the reference frame where the fluid is at rest at infinity, $\psi = urR \sin^2 \theta (3/4 - R^3/3r^3)$, the streamlines are shown in the figure below.



Apparently, the main difference is that inviscid streamlines are loops (compare with the loops made by trajectories as shown in Fig. 1.9), while viscous flow is one-way.

In the sphere reference frame, the Stokes stream function is $\psi = -ur^2 \sin^2 \theta (1/2 - 3R/4r + R^3/4r^3)$ and the streamlines are qualitatively similar to those in the right part of Figure 5.1.

F-1.

7 A small heavy ball with the density ρ_0 connected to a spring has the oscillation frequency ω_a . The same ball attached to a rope makes a pendulum with the oscillation frequency ω_b . How those frequencies change if such oscillators are placed into an ideal fluid with the density ρ ? What change brings an account of a small viscosity of the fluid ($\nu \ll \omega_{a,b} a^2$ where a is the ball radius and ν is the kinematic viscosity).

1.7.

The equation of motion for the ball on a spring is $m\ddot{x} = -kx$ and the corresponding frequency is $\omega_a = \sqrt{k/m}$. In a fluid,

$$m\ddot{x} = -kx - \tilde{m}\ddot{x} \quad (5.2)$$

where $\tilde{m} = \rho V/2$ is the induced mass of a sphere. The frequency of oscillations in an ideal fluid is

$$\omega_{a, \text{fluid}} = \omega_a \sqrt{\frac{2\rho_0}{2\rho_0 + \rho}} \quad (5.3)$$

here ρ is fluid density and ρ_0 is the ball's density.

The equation of motion for the pendulum is $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$. In a fluid, it is

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta + \rho V g \theta - \tilde{m}l\ddot{\theta} \quad (5.4)$$

where $\rho V g \theta$ is the Archimedes force, $-\tilde{m}l\ddot{\theta}$ inertial force. From $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$ we get $\omega_b = \sqrt{g/l}$, while when placed in the fluid we have that frequency of oscillations is

$$\omega_{b, \text{fluid}} = \omega_b \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)}{2\rho_0 + \rho}} \quad (5.5)$$

Fluid viscosity would lead to some damping. When the viscosity is small, $\nu \ll \omega_{a,b} a^2$, then the width of the boundary layer is much less than the size of the body: $\nu/\omega_{a,b} a \ll a$. We then can consider the boundary layer as locally flat and for a small piece near a flat surface we derive

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$v_x(y, t) = u \exp\{-(1+i)y/\delta + i\omega t\}, \quad \delta = \sqrt{2\eta/\rho_0\omega} \quad (5.6)$$

Such fluid motion provides for the viscous stress on the body surface

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{\partial v_x(0, t)}{\partial y} = (i-1)v_x(0, t)\sqrt{\omega\eta\rho/2}$$

which leads to the energy dissipation rate per unit area

$$-\sigma_{yx}v_y = u^2\sqrt{\omega\eta\rho/8}$$

An estimate of the energy loss one obtains multiplying it by the surface area. To get an exact answer for the viscous dissipation by the oscillating sphere, one needs to find the velocity distribution around the surface, see e.g. Sect. 24 of [10].

F-1.

8 Underwater explosion released the energy E and produced a gas bubble oscillating with the period T , which is known to be completely determined by E , the static pressure p in the water and the water density ρ . Find the form of the dependence $T(E, p, \rho)$ (without numerical factors). If the initial radius a is known instead of E , can we determine the form of the dependence $T(a, p, \rho)$?

1.8 .

Dimensional analysis and simple estimates. In the expression $T \propto E^\alpha p^\beta \rho^\gamma$, three unknowns α, β, γ can be found from considering three dimensionalities (grams, meters and seconds), which gives

$$T \propto E^{1/3} p^{-5/6} \rho^{1/2}$$

Analogously, $T \propto ap^{-1/2}\rho^{1/2}$. Note that here $c \propto \sqrt{p/\rho}$ is the sound velocity so that the period is a/c . The energy is pressure times volume: $E = 4\pi a^3 p/3$. That way people measure the energy of the explosions underwater: wait until the bubble is formed and then relate the bubble size, obtained by measuring bubble oscillations, to the energy of the explosion.

Sketch of a theory. The radius of the bubble varies like: $r_0 = a + b \exp(-i\omega t)$, where a is the initial radius and $b \ll a$ is a small amplitude of oscillations with the period $T = 2\pi/\omega$. The induced fluid flow is radial, if we neglect gravity, $v = v_r(r, t)$. Incompressibility requires $v(r, t) = A \exp(-i\omega t)/r^2$. On the surface of the bubble, $dr_0/dt = v(r, t)$, which gives $A = -iba^2\omega$. So the velocity is as follows

$$v(r, t) = -ib(a/r)^2\omega \exp(-i\omega t) \quad (5.7)$$

Note that $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \simeq b^2\omega^2/a \ll \partial_t \mathbf{v} \simeq b\omega^2$, since it corresponds to the assumption $b \ll a(|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}| \propto)$. Now we use the linearized Navier-Stokes equations and spherical symmetry and get:

$$p_{\text{water}} = p_{\text{static}} - \rho\omega^2 b \left(\frac{a^2}{r}\right) e^{-i\omega t} \quad (5.8)$$

where p_{static} is the static pressure of water - unperturbed by oscillations. Since $\rho_{\text{air}}/\rho_{\text{water}} = 10^{-3}$, then the bubble compressions and expansions can be considered quasi-static, $p_{\text{bubble}} r_0^{3\gamma} = p_{\text{static}} a^{3\gamma}$, which gives:

$$p_{\text{bubble}} = p_{\text{static}} (1 - 3\gamma(b/a)e^{-i\omega t}) \quad (5.9)$$

Now use the boundary condition for the bubble-water interface at $r = a$

$$-p_{\text{bubble}} \delta_{ik} = -p_{\text{water}} \delta_{ik} + \eta (\partial_k v_i + \partial_i v_k) \quad (5.10)$$

where η is the water dynamic viscosity. The component σ_{rr} gives $\rho(a\omega)^2 + 4i\eta - 3\gamma p = 0$ with the solution

$$\omega = \left(-\frac{2\eta i}{a^2 \rho} \pm \sqrt{\frac{3\gamma p}{\rho a^2} - \frac{4\eta^2}{a^4 \rho^2}} \right) \quad (5.11)$$

For large viscosity, it describes aperiodic decay; for $\eta^2 < 3\gamma p \rho a^2/4$ the frequency of oscillations is as follows:

$$\omega = 2\pi/T(a, p, \rho) = \sqrt{\frac{3\gamma p}{\rho a^2} - \frac{4\eta^2}{a^4 \rho^2}} \quad (5.12)$$

Viscosity increases the period which may be relevant for small bubbles, see [20] for more details.

F-1.

9 At $t = 0$ a straight vortex line exists in a viscous fluid. In cylindrical coordinates, it is described as follows: $v_r = v_z = 0, v_\theta = \Gamma/2\pi r$, where Γ is some constant. Find the vorticity $\omega(r, t)$ as a function of time and the time behavior of the total vorticity $\int \omega(r) r dr$.

1.

9 .

The Navier-Stokes equation for the vorticity in an incompressible fluid,

$$\partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \omega$$

in the cylindrically symmetric case is reduced to the diffusion equation,

$$\partial_t \omega = \nu \Delta \omega$$

since $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{0}$. The diffusion equation with the deltafunction initial condition has the solution

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

which conserves the total vorticity:

$$\Omega(t) = 2\pi \int_0^\infty \omega(r, t) r dr = \frac{\Gamma}{2\nu t} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) r dr = \Gamma$$

Generally, for any two-dimensional incompressible flow, the NavierStokes equation takes the form $\partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega$, which conserves the vorticity integral as long as it is finite.

F-1.

10 To appreciate how one swims in a syrup, consider the so-called Purcell swimmer shown in Figure 1.22. It can change its shape by changing separately the angles between the middle link and the arms. Assume that the angle θ is small. Numbers correspond to consecutive shapes. In a position 5 it has the same shape as in

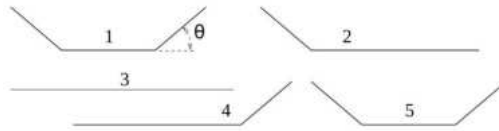


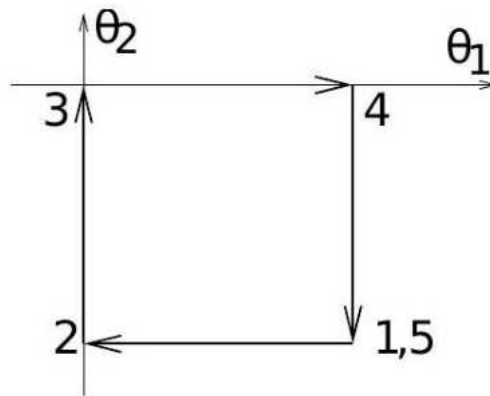
Figure 1.21 Subsequent shapes of the swimmer.

1 but moved in space. Which direction? What distinguishes this direction? How the displacement depends on θ ?

1.10

The shape of the swimmer is characterized by the angles between the arms and the middle link. Therefore, the configuration space is twodimensional. Our swimmer goes around a loop in this space with the displacement proportional to the loop area which is θ^2 . Transformation $y \rightarrow -y, \theta_1 \rightarrow -\theta_1, \theta_2 \rightarrow -\theta_2$ produces the same loop, therefore y displacement must be zero. Since it is easier to move when the nonmoving arm is aligned with the body (i.e. either θ_1 or θ_2 is zero), then it is clear that during $1 \rightarrow 2$ and $4 \rightarrow 5$ the swimmer shifts to the left less than it shifts to the right during $2 \rightarrow 3$ and $3 \rightarrow 4$, at least when $\theta \ll 1$. Therefore the total displacement is to the right or generally in the direction of the arm that moved first. Further reading: Sect. 7.5 of [1]; Purcell, E. M. (1977) Life at low Reynolds number, American Journal of Physics, vol 45, p. 3; Childress, S. (1981) Mechanics of swimming and flying (Cambridge Univ. Press).

Anchoring the swimmer one gets a pump. Geometrical nature of swimming and pumping by micro-organisms makes them a subject of a nonAbelian gauge field theory with rich connections to many other phenomena, see Wilczek, F. and Shapere, A. (1989) Geometry of self-propulsion at low Reynolds number, Journal of Fluid Mechanics, vol 198, p. 557.



F-1.

11 In making a free kick, good soccer players are able to utilize the Magnus force to send the ball around the wall of defenders. Neglecting vertical motion, estimate the horizontal deflection of the ball (with the radius $R = 11$ cm and the weight $m = 450$ g according to FIFA rules) sent with the speed $v_0 = 30$ m/s and the side-spin $\Omega = 10$ revolutions per second towards the goal which is $L = 30$ m away. Take the air density $\rho = 10^{-3}$ g/cm³.



Figure 1.22 Left panel: the sailor holds the sail against the wind which is thus coming from behind her back. Right panel: scheme of the position of the board and its sail with respect to the wind.

1.11 .

Simple estimate. The lift force can be estimated as $\rho v \Omega R^2 \simeq 3$ N . The rough estimate of the deflection can be done by neglecting the ball deceleration and estimating the time of flight as $T \simeq L/v_0 \simeq 1$ s. Further, neglecting the drag in the perpendicular direction we estimate that the acceleration $\rho v_0 \Omega R^3/m \simeq 6.7$ m · s⁻² causes the deflection

$$y(T) = \frac{\rho v_0 \Omega R^3 T^2}{2m} \simeq \frac{\rho \Omega R^3 L^2}{2m v_0} = L \frac{\Omega R}{v_0} \frac{\rho R^2 L}{2m} \simeq 3.35 \text{ m} \quad (5.13)$$

Sketch of a theory. It is straightforward to account for the drag force, $C \rho v^2 \pi R^2/2$, which leads to the logarithmic law of displacement:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{v^2}{L_0}, & v(t) &= \frac{v_0}{1 + v_0 t/L_0} \\ x(t) &= L_0 \ln(1 + v_0 t/L_0) \end{aligned} \quad (5.14)$$

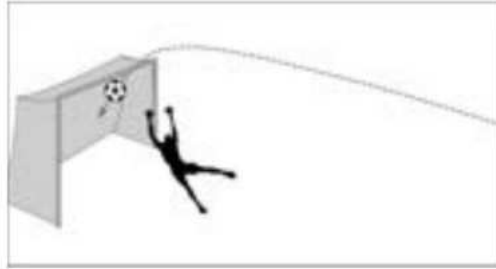
Here $L_0 = 2 \text{ m}/C \rho \pi R^2 \simeq 100$ m with $C \simeq 0.25$ for $Re = v_0 R/\nu \simeq 2 \cdot 10^5$. The meaning of the parameter L_0 is that this is the distance at which drag substantially affects the speed; non-surprisingly, it corresponds to the mass of the air displaced, $\rho \pi R^2 L$, being of the order of the ball mass. We get the travel time T from (5.14): $v_0 T/L_0 = \exp(L/L_0) - 1 > L/L_0$. We can now account for the time-dependence $v(t)$ in the deflection. Assuming that the deflection in y -direction is small comparing to the path travelled in x direction, we get

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{\rho \Omega R^3 v(t)}{m} = \frac{\rho \Omega R^3 v_0}{m(1 + v_0 t/L_0)} \\ y(0) &= \dot{y}(0) = 0 \\ y(t) &= L_0 \frac{\Omega R}{v_0} \frac{2}{\pi C} [(1 + v_0 t/L_0) \ln(1 + v_0 t/L_0) - v_0 t/L_0] \end{aligned} \quad (5.15)$$

It turns into (5.13) in the limit $L \ll L_0$ (works well for a penalty kick). For longer L one also needs to account for the drag in the y -direction which leads to the saturation of \dot{y} at the value

$\sim \sqrt{\Omega R v}$. Still, such detailed consideration does not make much sense because we took a very crude estimate of the lift force and neglected vertical displacement $gT^2/2$, which is comparable with the deflection.

Remark. Great soccer players are able also to utilize the drag crisis which is a sharp increase of the drag coefficient C from 0.15 to 0.5 when Re decreases from $2.5 \cdot 10^5$ to $1.5 \cdot 10^5$ (ball velocity drops from 37.5 m/s to 22.5 m/s). As a result, some way into its path the ball sharply decelerates and the Magnus force comes even more into effect. The phenomenon of drag crisis is also used for making a long shot over the goalkeeper who came out too far from the goal; in this case, the ball smoothly rises up and then falls down steeply (see Figure). A topspin adds Magnus force which enhances this effect.



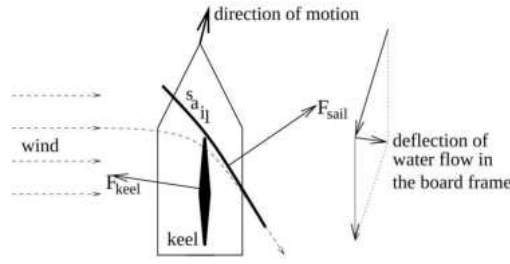
F-1.

12 Like flying, sailing also utilizes the lift (perpendicular) force acting on the sails and the keel. The fact that wind provides a force perpendicular to the sail allows one even to move against the wind. But most optimal for starting and reaching maximal speed, as all windsurfers know, is to orient the board perpendicular to the wind and set the sail at about 45 degrees, see Figure 1.22. Why? Draw the forces acting on the board. Does the board move exactly in the direction at which the keel is pointed? Can one move faster than wind?

1.

12

Lift force on the keel exists only if the board moves not exactly in the direction in which it is pointed. The direction of the force acting on the keel can be understood considering the deflection of water in the reference frame of the keel - water comes from the direction of motion and leaves along the keel. The direction of the force acting on the keel is opposite to the direction of deflection of water by the keel. That force, \mathbf{F}_{keel} , acting mainly to the side (left in the Figure), must be counteracted by the force acting by the wind on the sail. Wind leaves along the sail and its deflection determines \mathbf{F}_{sail} . For a board in a steady motion, the vector $\mathbf{F}_{\text{keel}} + \mathbf{F}_{\text{sail}}$ points in the direction of motion and it is balanced by the drag force. Decreasing the drag one can in principle move faster than the wind since \mathbf{F}_{sail} does not depend on the board speed (as long as one keeps the wind perpendicular in the reference frame of the board). On the contrary, when the board moves downwind, it cannot move faster than the wind.



For details, see B.D. Anderson, The physics of sailing, Physics Today, February 2008, 38-43.

F-1.

13 Find the fall velocity of a liquid water droplet with the radius 0.01 mm in the air. Air and water viscosities and densities are respectively $\eta_a = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ g/s} \cdot \text{cm}$, $\eta_w = 0.01 \text{ g/s} \cdot \text{cm}$ and $\rho = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$.

1.

13 .

Simple answer. If droplet was a solid sphere, one uses the Stokes force and gets the steady fall velocity from the force balance

$$6\pi R\eta_a u = mg, \quad u = \frac{2\rho_w g R^2}{9\eta_a} \simeq 1.21 \text{ cm/s} \quad (5.16)$$

Justification and correction. The Reynolds number is $\text{Re} \simeq 0.008$, which justifies our approach and guarantees that we can neglect finite Re corrections. Note that $\text{Re} \propto vR \propto R^3$, so that $\text{Re} \simeq 1$ already for $R = 0.05 \text{ mm}$. Sphericity is maintained by surface tension, the relevant parameter is the ratio of the viscous stress $\eta_w u/R$ to the surface tension stress α/R , that ratio is $\eta_w u/\alpha \simeq 0.00017$ for $\alpha = 70 \text{ g/s}^2$. Another unaccounted phenomenon is an internal circulation in a liquid droplet. Viscous stress tensor $\sigma_{r\theta}$ must be continuous through the droplet surface, so that the velocity inside can be estimated as the velocity outside times the small factor $\eta_a/\eta_w \simeq 0.018 \ll 1$, which is expected to give 2% correction to the force and to the fall velocity. Let us calculate this. The equation for the motion of the fluid inside is the same as outside: $\Delta^2 \nabla f = 0$, see (1.46). The solution regular at infinity is (1.47) i.e.

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})}{r} + b \frac{3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{u})}{r^3}$$

while the solution regular at zero is $f = Ar^2/4 + Br^4/8$, which gives

$$\mathbf{v}_w = -A\mathbf{u} + B\mathbf{r}^2(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - 2\mathbf{u})$$

Four boundary conditions on the surface (zero normal velocities and continuous tangential velocities and stresses) fix the four constants A, B, a, b and gives the drag force

$$F = 8\pi a\eta_w u = 2\pi u\eta_a R \frac{2\eta_a + 3\eta_w}{\eta_a + \eta_w} \quad (5.17)$$

which leads to

$$u = \frac{2\rho R^2 g}{3\eta_a} \left(\frac{3\eta_a + 3\eta_w}{2\eta_a + 3\eta_w} \right) \simeq \frac{2\rho R^2 g}{9\eta_a} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\eta_a}{\eta_w} \right) \simeq 1.22 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Inside circulation acts as a lubricant decreasing drag and increasing fall velocity. In reality, however, water droplets often fall as solid spheres because of a dense "coat" of dust particles accumulated on the surface.

F-1.

14 Describe the motion of an initially small spherical water droplet falling in a saturated cloud and absorbing the vapor in a swept volume so that its volume grows proportionally to its velocity and its cross-section. Consider quasi-steady approximation when the droplet acceleration is much less than the gravity acceleration g .

1.

14.

Basic Solution. Denote the droplet radius r and its velocity v . We need to write conservation of mass $\dot{r} = Av$ and the equation of motion, $dr^3v/dt = gr^3 - Bvr$, where we assumed a low Reynolds number and used the Stokes expression for the friction force. Here A, B are some constants. One can exclude v from here but the resulting second-order differential equation is complicated. To simplify, we assume that the motion is quasi-steady so that gravity and friction almost balance each other. That requires $\dot{v} \ll g$ and gives $v \approx gr^2/B$. Substituting that into the mass conservation gives $dr/dt = Agr^2/B$. The solution of this equation gives an explosive growth of the particle radius and velocity: and $r(t) = r_0/(1 - r_0Agt/B)$. This solution is true as long as $\dot{v} \ll g$ and $Re = vr/\nu \ll 1$.

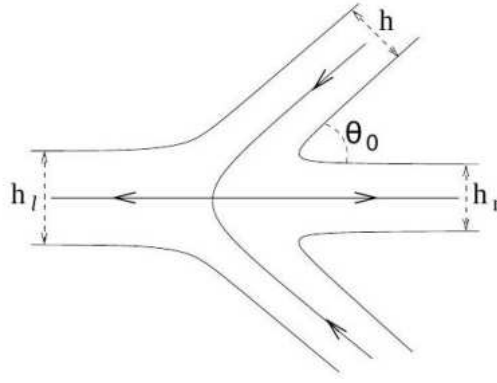
Detailed Solution. Denote ρ_w, ρ, ρ_v respectively densities of the liquid water, air and water vapor. Assume $\rho_w \gg \rho \gg \rho_v$. Mass conservation gives $dm = \rho_v \pi r^2 v dt = \rho_w 4\pi r^2 dr$ so that $dr/dt = v\rho_v/4\rho_w$. Initially, we may consider low-Re motion so that the equation of motion is as follows: $dr^3v/dt = gr^3 - 9\nu\rho vr/2\rho_0$. Quasi-static approximation is $v \approx 2gr^2\rho_w/9\nu\rho$ according to (5.16), which gives the equation $dr/dt = gr^2\rho_v/18\nu\rho$ independent of ρ_w . The solution of this equation gives an explosive growth of the particle radius and velocity:

$$r(t) = r_0 \left(1 - \frac{\rho_v r_0 g t}{\rho \cdot 18\nu} \right)^{-1}, \quad v(t) = \frac{\rho_w}{\rho} \frac{2gr_0^2}{9\nu} \left(1 - \frac{\rho_v r_0 g t}{\rho \cdot 18\nu} \right)^{-2}$$

This solution is true as long as $\dot{v} = 4gr\dot{r}\rho_0/9\nu\rho = 2g^2r^3\rho_v\rho_0/81\nu^2\rho^2 \ll g$. Also, when $r(t)v(t) \simeq \nu$ the regime changes so that $mg = C\rho\pi r^2v^2$, $v \propto \sqrt{r}$ and $r \propto t^2, v \propto t$.

F-1.

15 Consider plane free jets in an ideal fluid in the geometry shown in the Figure. Find how the widths of the outgoing jets depend on the angle $2\theta_0$ between the impinging jets.



1.15

Pressure is constant along the free jet boundaries and so the velocity is constant as well. Therefore, the asymptotic velocities in the outgoing jets are the same as in the incoming jets. Conservation of mass, energy and horizontal momentum give for the left/right jets respectively

$$h_l = h(1 + \cos \theta_0), \quad h_r = h(1 - \cos \theta_0)$$

where h is the width of the incoming jet. Therefore, a fraction $(1 - \cos \theta_0)/2$ of the metal cone is injected into the forward jet.

One can describe the whole flow field in terms of the complex velocity \mathbf{v} which changes inside a circle whose radius is the velocity at infinity, u (see, e.g. Chapter XI of [13]). On the circle, the stream function is

piecewise constant with the jumps equal to the jet fluxes:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq \theta_0, & \psi &= -hu \quad \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq \pi \\ \psi &= (h_l - h)u \quad \text{for } \pi \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0, & \text{etc.} \end{aligned}$$

We can now find the complex potential everywhere in the circle by using the Schwartz formula:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{v}) &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \frac{u \exp(i\theta) + \mathbf{v}}{u \exp(i\theta) - \mathbf{v}} d\theta \\ &= \frac{u}{\pi} \left\{ h_r \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} \right) + h_l \ln \left(1 + \frac{\mathbf{v}}{u} \right) \right. \\ &\quad \left. - h \ln \left[\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{i\theta_0} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{-i\theta_0} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

To relate the space coordinate z and the velocity \mathbf{v} we use $\mathbf{v} = -dw/dz$ so that one needs to differentiate $w(\mathbf{v})$ and then integrate once the relation $dz/d\mathbf{v} = -\mathbf{v}^{-1}dw/d\mathbf{v}$ using $z = 0$ at $\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi z}{h} &= (1 - \cos \theta_0) \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} \right) - (1 + \cos \theta_0) \ln \left(1 + \frac{\mathbf{v}}{u} \right) \\ &\quad + e^{i\theta_0} \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{i\theta_0} \right) + e^{-i\theta_0} \ln \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{u} e^{-i\theta_0} \right) \end{aligned}$$

14.1.4 Exercises 2

F-2.

1 i) Consider two-dimensional incompressible saddle-point flow (pure strain): $v_x = \lambda x, v_y = -\lambda y$ and the fluid particle with the coordinates x, y that satisfy the equations

$\dot{x} = v_x$ and $\dot{y} = v_y$. Whether the vector $\mathbf{r} = (x, y)$ is stretched or contracted after some time T depends on its orientation and on T . Find which fraction of the vectors is stretched.

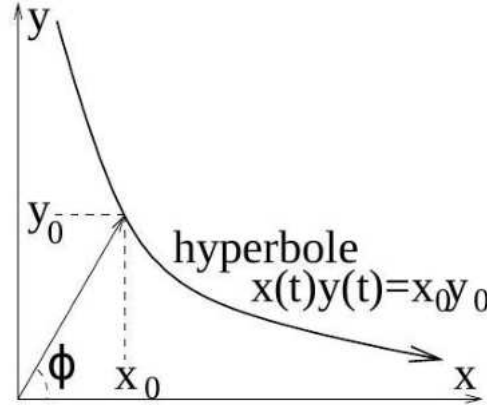
ii) Consider two-dimensional incompressible flow having both permanent strain λ and vorticity ω : $v_x = \lambda x + \omega y/2$, $v_y = -\lambda y - \omega x/2$. Describe the motion of the particle, $x(t), y(t)$, for different relations between λ and ω .

2.

1.

We have seen in Sect. 1.2.1 that in a locally smooth flow, fluid elements either stretch/contract exponentially in a strain-dominated flow or rotate in a vorticity-dominated flow. This is true also for the flows in phase space, discussed at the beginning of Sect. 2.2.

i) Since $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ and $y(t) = y_0 \exp(-\lambda t) = x_0 y_0 / x(t)$ then every streamline (and trajectory) is a hyperbole. A vector initially forming an angle φ with the x axis will be stretched after time T if $\cos \varphi \geq [1 + \exp(2\lambda T)]^{-1/2}$, i.e. the fraction of stretched directions is larger than half. That means, in particular, that if one randomly changes directions after some times, still the net effect is stretching.



ii) The eigenvectors of this problem evolve according to $\exp(\pm i\Omega t)$ where

$$\Omega^2 = 4\omega^2 - \lambda^2 \quad (5.18)$$

We see that fluid rotates inside vorticity-dominated (elliptic) regions and is monotonically deformed in strain-dominated (hyperbolic) regions. The marginal case is a shear flow (see Figure 1.6) where $\lambda = 2\omega$ and the distances grow linearly with time.

In a random flow (either in real space or in phase space), a fluid element visits on its way many different elliptic and hyperbolic regions. After a long random sequence of deformations and rotations, we find it stretched into a thin strip. Of course, this is a statistical statement meaning that the probability to find a ball turning into an exponentially stretching ellipse goes to unity as time increases. The physical reason for it is that substantial deformation appears sooner or later. To reverse it, one needs to meet an orientation of stretching/contraction directions in a narrow angle (defined by the ellipse eccentricity), which is unlikely. Randomly oriented deformations on average continue to increase the eccentricity. After the strip length reaches the scale of the velocity change (when one already cannot approximate the velocity by a linear profile), strip starts to fold continuing locally the exponential stretching. Eventually, one can find the points from the initial ball everywhere which means that the flow is mixing.

F-2.

2 Consider a fluid layer between two horizontal parallel plates kept at the distance h at temperatures that differ by Θ . The fluid has kinematic viscosity ν , thermal conductivity χ (both measured in cm^2/sec) and the coefficient of thermal expansion $\beta = -\partial \ln \rho / \partial T$, such that the relative density change due to the temperature difference, $\beta\Theta$, far exceeds the change due to hydrostatic pressure difference, gh/c^2 , where c is sound velocity. Find the control parameter(s) for the appearance of the convective (Rayleigh-Bénard) instability.

2.2.

Dimensional reasoning. With six parameters, $g, \beta, \Theta, h, \nu, \chi$ and three independent dimensions, cm , sec and Kelvin degree, one can combine three different dimensionless parameters, according to the π -theorem of Sect. 1.4.4. That is too many parameters for any meaningful study.

Basic physical reasoning suggests that the first three parameters can come up only as a product, $g\beta\Theta$, which is a buoyancy force per unit mass (the density cannot enter because there is no other parameter having mass units). We now have four parameters, $\beta g\Theta, h, \nu, \chi$ and two independent dimensions, cm , sec , so that we can make two dimensionless parameters. The first one characterizes the medium and is called the Prandtl number:

$$\text{Pr} = \nu / \chi \quad (5.19)$$

The same molecular motion is responsible for the diffusion of momentum by viscosity and the diffusion of heat by thermal conductivity. Nevertheless, the Prandtl number varies greatly from substance to substance. For gases, one can estimate χ as the thermal velocity times the mean free path, exactly like for viscosity in Section 1.4.3, so that the Prandtl number is always of order unity. For liquids, Pr varies from 0.044 for mercury to 6.75 for water and 7250 for glycerol.

The second parameter can be constructed in infinitely many ways as it can contain an arbitrary function of the first parameter. One may settle on any such parameter claiming that it is a good control parameter for a given medium (for fixed Pr). However, one can do better than that and find the control parameter which is the same for all media (i.e. all Pr). The physical reasoning helps one to choose the right parameter. It is clear that convection can occur when the buoyancy force, $\beta g\Theta$, is larger than the friction force, $\nu v/h^2$. It may seem that taking velocity v small enough, one can always satisfy that criterium. However, one must not forget that as the hotter fluid rises it loses heat by thermal conduction and gets more dense. Our estimate of the buoyancy force is valid as long as the conduction time, h^2/χ , exceeds the convection time, h/v , so that the minimal velocity is $v \simeq \chi/h$. Substituting that velocity into the friction force, we obtain the correct dimensionless parameter as the force ratio which is called the Rayleigh number:

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu\chi} \quad (5.20)$$

Sketch of a theory. The temperature T satisfies the linear convection-conduction equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \chi \Delta T \quad (5.21)$$

For the perturbation $\tau = (T - T_0)/T_0$ relative to the steady profile $T_0(z) = \Theta z/h$, we obtain

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - v_z \Theta / h = \chi \Delta \tau \quad (5.22)$$

Since the velocity is itself a perturbation, so that it satisfies the incompressibility condition, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, and the linearized Navier-Stokes equation with the buoyancy force:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla W + \nu \Delta \mathbf{v} + \beta \tau \mathbf{g} \quad (5.23)$$

where W is the enthalpy perturbation. Of course, the properties of the convection above the threshold depend on both parameters, Ra and Pr , so that one cannot eliminate one of them from the system of equations. If, however, one considers the convection threshold where $\partial \mathbf{v} / \partial t = \partial \tau / \partial t = 0$, then one can choose the dimensionless variables $\mathbf{u} = \mathbf{v}h/\chi$ and $w = Wh^2/\nu\chi$ such that the system contains only Ra :

$$-u_z = \Delta \tau, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta u_z + \tau Ra, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \Delta u_x \quad (5.24)$$

Solving this with proper boundary conditions, for eigenmodes built out of $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ and $\sinh(qz)$, $\cosh(qz)$ (which describe rectangular cells or rolls), one obtains Ra_{cr} as the lowest eigenvalue, see e.g. [10], Sect. 57 .

Note the difference between the sufficient condition for convection onset, $Ra > Ra_{cr}$, formulated in terms of the control parameter Ra , which is global (a characteristics of the whole system), and a local necessary condition (1.9) found in Sect. 1.1.3.

F-2.

3 Consider a shock wave with the velocity w_1 normal to the front in a polytropic gas having the enthalpy

$$W = c_p T = PV \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{P}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}$$

where $\gamma = c_p/c_v$. Write Rankine-Hugoniot relations for this case.

Express the ratio of densities ρ_2/ρ_1 via the pressure ratio P_2/P_1 , where the subscripts 1,2 denote the values before/after the shock. Express P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 and $\mathcal{M}_2 = w_2/c_2$ via the pre-shock Mach number $\mathcal{M}_1 = w_1/c_1$. Consider limits of strong and weak shocks.

2.3 .

Consider the continuity of the fluxes of mass, normal momentum and energy:

$$\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2, \quad P_1 + \rho_1 w_1^2 = P_2 + \rho_2 w_2^2 \quad (5.25)$$

$$W_1 + w_1^2/2 = \frac{\rho_2 w_2}{\rho_1 w_1} (W_2 + w_2^2/2) = W_2 + w_2^2/2 \quad (5.26)$$

Excluding w_1, w_2 from (5.25),

$$w_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad w_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (5.27)$$

and substituting it into the Bernoulli relation (5.26) we derive the relation called the shock adiabat:

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2} (P_1 - P_2) (V_1 + V_2) \quad (5.28)$$

For given pre-shock values of P_1, V_1 , it determines the relation between P_2 and V_2 . Shock adiabat is determined by two parameters, P_1, V_1 , as distinct from the constant-entropy (Poisson) adiabat $PV^\gamma = \text{const}$, which is determined by a single parameter, entropy. Of course, the aftershock parameters are completely determined if all the three pre-shock parameters, P_1, V_1, w_1 , are given.

Substituting $W = \gamma P / \rho(\gamma - 1)$ into (5.28) we obtain the shock adiabat for a polytropic gas in two equivalent forms:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\beta P_1 + P_2}{P_1 + \beta P_2}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_1 - \beta \rho_2}{\rho_2 - \beta \rho_1}, \quad \beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (5.29)$$

Since pressures must be positive, the density ratio ρ_2/ρ_1 must not exceed $1/\beta$ (4 and 6 for monatomic and diatomic gases respectively). If the preshock velocity w_1 is given, the dimensionless ratios $\rho_2/\rho_1, P_2/P_1$ and $\mathcal{M}_2 = w_2/c_2 = w_2\sqrt{\rho_2/\gamma P_2}$ can be expressed via the dimensionless Mach number $\mathcal{M}_1 = w_1/c_1 = w_1\sqrt{\rho_1/\gamma P_1}$ by combining (5.27, 5.29):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \beta + \frac{2}{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma\mathcal{M}_1^2}{\gamma + 1} - \beta, \quad \mathcal{M}_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2}{2\gamma\mathcal{M}_1^2 + 1 - \gamma} \quad (5.30)$$

To have a subsonic flow after the shock, $\mathcal{M}_2 < 1$, one needs a supersonic flow before the shock, $\mathcal{M}_1 > 1$.

Thermodynamic inequality $\gamma > 1$ guarantees the regularity of all the above relations. The entropy is determined by the ratio P/ρ^γ , it is actually proportional to $\log(P/\rho^\gamma)$. Using (5.30) one can show that $s_2 - s_1 \propto \ln(P_2\rho_1^\gamma/P_1\rho_2^\gamma) > 0$ which corresponds to an irreversible conversion of the mechanical energy of the fluid motion into the thermal energy of the fluid. See Sects. 85, 89 of [10] for more details.

F-2.

4 For Burgers turbulence, express the fifth structure function S_5 via the dissipation rate $\epsilon_4 = 6\nu [\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle]$.

2.4.

Simple estimate. We use a single shock, which has the form $u = -v \tanh(vx/2\nu)$ in the reference frame with the zero mean velocity. We then simply get $\langle u^2 u_x^2 \rangle = 2v^5/15L$ so that

$$\epsilon_4 = 6\nu [\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle] = 24v^5/5L$$

Substituting $v^5/L = 5\epsilon_4/24$ into $S_5 = -32v^5x/L$ we get

$$S_5 = -20\epsilon_4 x/3 = -40\nu x [\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle] \quad (5.31)$$

Sketch of a theory. One can also derive the evolution equation for the structure function, analogous to (2.10) and (2.32). Consider

$$\partial_t S_4 = -(3/5)\partial_x S_5 - 24\nu [\langle u^2 u_x^2 \rangle + \langle u_1^2 u_{2x}^2 \rangle] + 48\nu \langle u_1 u_2 u_{1x}^2 \rangle + 8\nu \langle u_1^3 u_{2xx} \rangle$$

Since the distance x_{12} is in the inertial interval then we can neglect $\langle u_1^3 u_{2xx} \rangle$ and $\langle u_1 u_2 u_{1x}^2 \rangle$, and we can put $\langle u_1^2 u_{2x}^2 \rangle \approx \langle u^2 \rangle \langle u_x^2 \rangle$. Assuming that

$$\partial_t S_4 \simeq S_4 u / L \ll \epsilon_4 \simeq u^5 / L$$

we neglect the lhs and obtain (5.31). Generally, one can derive

$$S_{2n+1} = -4\epsilon_n x \frac{2n+1}{2n-1}$$

F-2.

5 In a standing sound wave, fluid locally moves as follows: $v = a \sin(\omega t)$. Assuming small amplitude, $ka \ll \omega$, describe how a small spherical particle with the density ρ_0 moves in the fluid with the density ρ (find how the particle velocity changes with time). Consider the case when the particle material is dissolved into the fluid so that its volume decreases with the constant rate α : $V(t) = V(0) - \alpha t$. The particle is initially at rest.

2.

5.

We write the equation of motion (1.29):

$$\frac{d}{dt} \rho_0 V(t) u = \rho V(t) \dot{v} + \frac{d}{dt} \rho V(t) \frac{v - u}{2} \quad (5.32)$$

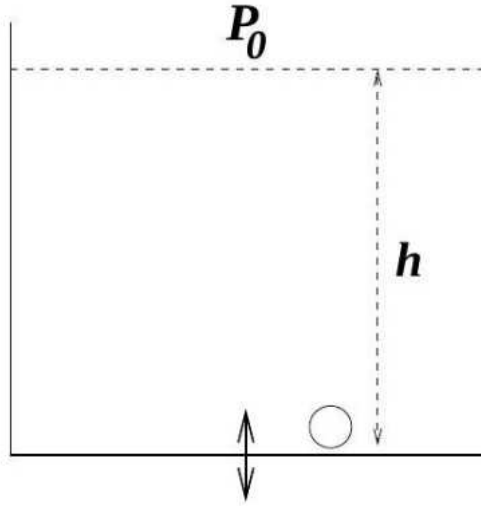
The solution is

$$u(t) = a \sin \omega t \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0} + \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1) \frac{2\rho}{\rho + 2\rho_0} \frac{\alpha}{V(0) - \alpha t} \quad (5.33)$$

It shows that the volume change causes the phase shift and amplitude increase in oscillations and a negative drift. The solution (5.33) loses validity when u increases to the point where $ku \simeq \omega$.

F-2.

6 There is an anecdotal evidence that early missiles suffered from an interesting malfunction of the fuel gauge. The gauge was a simple floater (small air-filled rubber balloon) whose position was supposed to signal the level of liquid fuel during the ascending stage. However, when the engine was warming up before the start, the gauge unexpectedly sank to the bottom, signalling zero level of fuel and shutting out the engine. How do engine-reduced vibrations reverse the sign of effective gravity for the floater?



Consider an air bubble in the vessel filled up to the depth h by a liquid with density ρ . The vessel vertically vibrates according to $x(t) = (Ag/\omega^2)\sin(\omega t)$, where g is the static gravity acceleration. Find the threshold amplitude A necessary to keep the bubble near the bottom. The pressure on the free surface is P_0 .

2.6.

Rough estimate can be obtained even without proper understanding the phenomenon. The effect must be independent of the phase of oscillations i.e. of the sign of A , therefore, the dimensionless parameter A^2 must be expressed via the dimensionless parameter $P_0/\rho gh$. When the ratio $P_0/\rho gh$ is small we expect the answer to be independent of it, i.e. the threshold to be of order unity. When $P_0/\rho gh \gg 1$ then the threshold must be large as well since large P_0 decreases any effect of bubble oscillations, so one may expect the threshold at $A^2 \simeq P_0/\rho gh$. One can make a simple interpolation between the limits

$$A^2 \simeq 1 + \frac{P_0}{\rho gh} \quad (5.34)$$

Qualitative explanation of the effect invokes compressibility of the bubble (Bleich, 1956). Vertical oscillations of the vessel cause periodic variations of the gravity acceleration. Upward acceleration of the vessel causes downward gravity which provides for the buoyancy force directed up and vice versa for another half period. It is important that related variations of the buoyancy force do not average to zero since the volume of the bubble oscillates too because of oscillations of pressure due to column of liquid above. The volume is smaller when the vessel accelerates upward since the effective gravity and pressure are larger then. As a result, buoyancy force is lower when the vessel and the bubble accelerate up. The net result of symmetric up-down oscillations is thus downward force acting on the bubble. When that force exceeds the upward buoyancy force provided by the static gravity g , the bubble sinks.

Theory. Consider an ideal fluid where there is no drag. The equation of motion in the vessel reference frame is obtained from (1.29, 5.32) by adding buoyancy and neglecting the mass of the air in the bubble:

$$\frac{d}{dt}V(t)u = V(t)G(t), \quad G(t) = g + \ddot{x} \quad (5.35)$$

Here $V(t)$ is the time-dependent bubble volume. Denote z the bubble vertical displacement with respect to the vessel, so that $u = \dot{z}$, positive upward. Assume compressions and expansions

of the bubble to be adiabatic, which requires the frequency to be larger than thermal diffusivity κ divided by the bubble size a . If, on the other hand, the vibration frequency is much smaller than the eigenfrequency (5.12) (sound velocity divided by the bubble radius) then one can relate the volume $V(t)$ to the pressure and the coordinate at the same instant of time:

$$PV^\gamma(t) = [P_0 + \rho G(h - z)] V^\gamma = (P_0 + \rho gh) V_0^\gamma$$

Assuming small variations in z and $V = V_0 + \delta V \sin(\omega t)$ we get

$$\delta V = V_0 \frac{A \rho gh}{\gamma (P_0 + \rho gh)} \quad (5.36)$$

The net change of the bubble momentum during the period can be obtained by integrating (5.35):

$$\int_0^{2\pi/\omega} V(t') G(t') dt' = \frac{2\pi V_0 g}{\omega} (1 - \delta V A / 2V_0) + o(A^2) \quad (5.37)$$

The threshold corresponds to zero momentum transfer, which requires $\delta V = 2V_0/A$. According to (5.36), that gives the following answer:

$$A^2 = 2\gamma \left(1 + \frac{P_0}{\rho gh} \right) \quad (5.38)$$

At this value of A , the equation (5.35) has an oscillatory solution $z(t) \approx -(2Ag/\omega^2) \sin(\omega t)$ valid when $Ag/\omega^2 \ll h$. Another way to interpret (5.38) is to say that it gives the depth h where small oscillations are possible for a given amplitude of vibrations A . Moment reflection tells

that these oscillations are unstable i.e. bubbles below h has their downward momentum transfer stronger and will sink while bubbles above rise.

Notice that the threshold value does not depend on the frequency and the bubble radius (under an implicit assumption $a \ll h$). However, neglecting viscous friction is justified only when the Reynolds number of the flow around the bubble is large: $a\dot{z}/\nu \simeq aAg/\omega\nu \gg 1$, where ν is the kinematic viscosity of the liquid. Different treatment is needed for small bubbles where inertia can be neglected comparing to viscous friction and (5.35) is replaced by

$$4\pi\nu a(t)\dot{z} = V(t)G(t) = 4\pi a^3(t)G/3 \quad (5.39)$$

Here we used the expression (5.17) for the viscous friction of fluid sphere with the interchange water \leftrightarrow air. Dividing by $a(t)$ and integrating over period we get the velocity change proportional to $1 - \delta a A / a = 1 - \delta V A / 3V_0$. Another difference is that $a^2 \ll \kappa/\omega$ for small bubbles, so that heat exchange is fast and we must use isothermal rather than adiabatic equation of state i.e. put $\gamma = 1$ in (5.36). That gives the threshold which is again independent of the bubble size:

$$A^2 = 3 \left(1 + \frac{P_0}{\rho gh} \right) \quad (5.40)$$

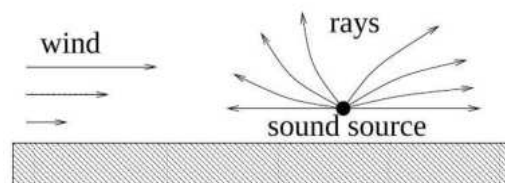
F-2.

7 It is a common experience that acoustic intensity drops fast with the distance when the sound propagates upwind. Why it is so difficult to hear somebody shouting against the wind?

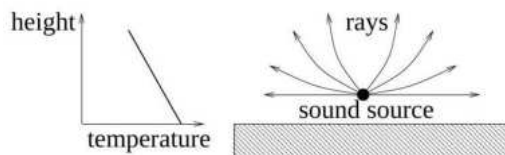
2.

7.

"The answer is blowing in the wind". The first that comes to mind is that for upwind propagation the distance is larger by the factor $1 + v/c$ where v is the wind speed. Viscous dissipation in the air decreases the intensity q with the distance r according to $q \propto \exp(-\nu\omega^2 r/c^3)$. Another factor is spreading of the acoustic energy flux over the half-sphere of an increasing radius: $q \propto r^{-2}$. Note however that near the ground (where most of our shouting happens), the wind speed is generally less than 30 m/sec so that $v/c < 0.1$ and can be treated as a small factor. Therefore, the difference between upwind and downwind intensities would be of order v/c i.e. small. The real reason for the fast intensity drop upwind is the inhomogeneous wind speed profile near the ground. That bends sound rays which encounter stronger winds when they are further from the ground. As shown in the figure, that refraction makes the spreading of acoustic rays near the ground much faster upwind than downwind.



Similar upward curvature of sound rays (now isotropic in the horizontal plane) is caused by the temperature gradient in the atmosphere. For sound propagating at some angle to the ground, the part of the constant phase surface which is higher moves slower which turns the surface up. The speed of sound is proportional to the square root of temperature in Kelvin degrees. When temperature drops by 6.5 degrees per kilometer (see Section 1.1.3) the speed of sound decreases by about 5 m/sec. Such refraction creates so-called "zone of silence" around the source on the ground; similar phenomenon is also known from optics where rays bend towards more optically dense medium.



14.1.5 Exercises 3

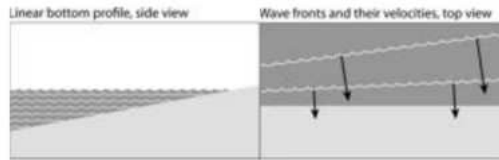
F-3.

1 Why beachcomber (a long water wave rolling upon the beach) usually comes to the coast being almost parallel to the coastline even while the wind blows at an angle?

3.

1.

Wave velocity, $v_g = \sqrt{gh}$, grows with the depth. Depth usually decreases as one approaches the shore. Therefore, even if the wave comes from the deep at an angle, the parts of the wave fronts that are in deeper water move faster changing the orientation of the fronts (like in Exercise 2.7).

**F-3.**

2 The quasi-monochromatic packet of waves contains N crests and wells propagating along the fluid surface. How many "up and down" motions undergoes a light float while the packet passes? Consider two cases: i) gravity waves on deep water, ii) capillary waves on a deep water.

3.

2 .

The length of the wave packet is $L = N\lambda = 2\pi N/k$. The wave packet propagates with v_{group} . The float will be disturbed by the wave packet during the time: $\tau = L/v_{\text{group}} = 2\pi N/kv_{\text{group}}$. For a quasi monochromatic wave packet $T = 2\pi/\omega(k)$, the number of "up and down" motions of the wave packet is $n = \tau/T = Nv_{\text{phase}}/v_{\text{group}}$. For gravity waves on deep water $\omega = \sqrt{gk}$ we have $n = 2N$. For gravity-capillary waves on deep water $\omega = \sqrt{(gk + \sigma k^3/\rho)}$ we have

$$n = 2N \frac{(gk + \sigma k^3/\rho)}{k(gk + 3\sigma k^2/\rho)}$$

and for purely capillary waves $\omega = \sqrt{\sigma k^3/\rho}$, $n = 2N/3$.

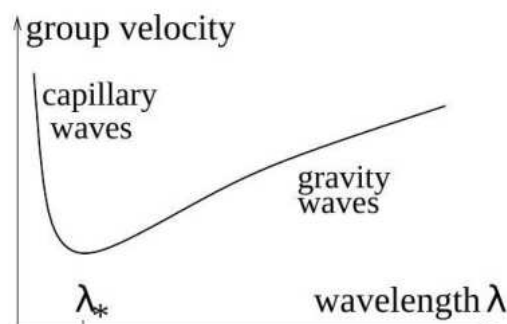
Remark. That was linear consideration (due to [20]). Nonlinear Stokes drift causes the float to move with the wave so that the relative speed is less: $v_{\text{group}} \rightarrow v_{\text{group}} [1 - (ak)^2]$.

F-3.

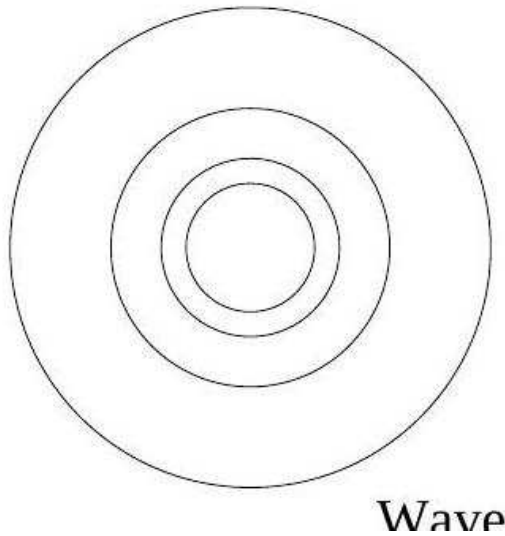
3 Dropping stone into the deep water, one could see, after a little while, waves propagating outside an expanding circle of a rest fluid. Sketch a snapshot of the wave crests. What is the velocity of the boundary of quiescent fluid circle?

3.3.

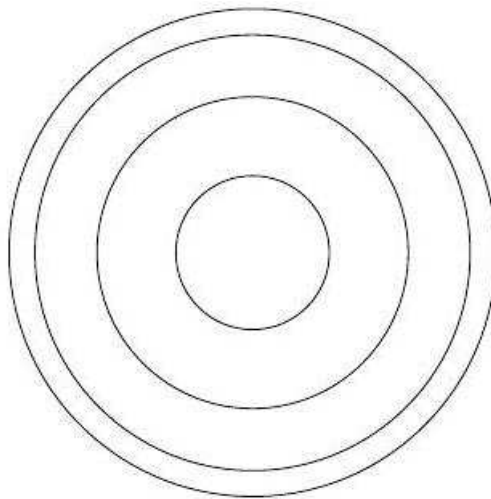
Qualitative analysis and simple estimate. The group velocity of surface waves depends on their wavelength non-monotonically as shown in the Figure:



The stone excites waves with the wavelengths exceeding its size. Indeed, a Fourier image of a bump with the width l is nonzero for wavenumbers less than $1/l$. Therefore, the wave pattern on a water surface depends on the relation between the size of the initial perturbation and λ_* . If we drop a large stone (with a size far exceeding λ_*) it will mostly generate gravity waves which are the longer the faster. As a result, the wavelength increases with the distance from the origin that is the larger circles are progressively sparser. On the contrary, small stones and raindrops can generate also capillary waves with shortest being fastest so that the distance between circles decreases with the radius. Since there is a minimal wave speed $v_* \simeq (g\alpha/\rho)^{1/4} \simeq 17$ cm/s, then there are no waves inside the circle with the radius v_*t , this circle is a caustic. General consideration of caustics including stone-generated surface wave can be found in [11], Sect. 4.11.



Wave patterns produced by
gravity waves



capillary waves

Both gravity and capillary waves can be seen in Figure 5.2. For a given speed exceeding v_* , there are two distinct wavelengths that propagate together.



Figure 5.2 Long gravity waves and short capillary ripples propagating together.

Sketch of a theory for gravity waves is based on Sections 3.1.1 and 3.1.4. The perturbation can be considered as a force localized both in space and in time. Since we aim to describe time intervals far exceeding the time of stone sinking and wavelengths far exceeding its size we model this force by the product of delta functions $\delta(t)\delta(\mathbf{r})$. Adding such force to the equation of motion (3.4) we get

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \delta(t)\delta(\mathbf{r})$$

which gives $\zeta_k = i \exp(-i\sqrt{gk}t)/\sqrt{gk}$ and

$$\zeta(r, t) = \frac{i}{8\pi^2 \sqrt{g}} \int \sqrt{k} dk d\theta \exp(ikr \cos \theta - i\sqrt{gk}t) \quad (5.41)$$

$$= \frac{i}{4\pi^2 \sqrt{g}} \int_0^\infty dk \sqrt{k} J_0(kr) \exp(-i\sqrt{gk}t) \equiv \frac{i}{2\pi g^2 t^3} \Phi\left(\frac{r}{gt^2}\right)$$

$$\Phi(y) = \int_0^\infty dz z^2 J_0(yz^2) \exp(-iz) \quad (5.42)$$

Here J_0 is the Bessel function. One can see that the crests accelerate with the gravity acceleration g . Before the leading crest, for $r \gg gt^2$, the surface is steady:

$$\zeta(r) \propto g^2 t^{-3} (gt^2/r)^{3/2} \propto g^{-1/2} r^{-3/2}$$

Behind the leading crest, for $r \ll gt^2$, the main contribution into (5.41) is given by $\theta = 0$, $r = \omega'(k)t = t\sqrt{g/k}/2$, that is by $k = gt^2/4r^2$, so that

$$\zeta(r, t) \propto \sin(gt^2/4r)$$

The crests are at the following radial positions:

$$r_n = \frac{gt^2}{2\pi(4n+1)}$$

For details, see <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/dek12/>, Tale 8 by D. Khmel'nitskii. General consideration that accounts for a finite stone size and capillary waves can be found in Sect. 17.09 of Jeffreys, H. and Swirles, B. (1966) *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).

F-3.

4 The existence of the stable small-amplitude waves that are described by (3.19) cannot be taken for granted. Consider a general form of the quadratic Hamiltonian

$$\mathcal{H}_2 = \int [A(k) |b_k|^2 + B(k) (b_k b_{-k} + b_k^* b_{-k}^*)] d\mathbf{k} \quad (3.43)$$

1a. Find the linear transformation (Bogolyubov u-v transformation) $b_k = u_k a_k + v_k a_{-k}^*$ that turns (3.43) into (3.19).

1 b . Consider the case when the even part $A(k) + A(-k)$ changes sign on some surface (or line) in k -space while $B(k) \neq 0$ there. What does it mean physically? In this case, what simplest form the quadratic Hamiltonian \mathcal{H}_2 can be turned into?

3.

4.

Hamiltonian is real therefore $A(k)$ is real, we denote A_1, A_2 respectively its symmetric and antisymmetric parts. Also, $B(k) = B(-k)$ and we can consider $B(k)$ real, absorbing its phase into $b(k)$. The same is true for the transformation coefficients u, v which also could be chosen real (as is also clear below). The canonicity of u - v transformation requires

$$u^2(k) - v^2(k) = 1, \quad u(k)v(-k) = u(-k)v(k)$$

and suggests the substitution

$$u(k) = \cosh[\zeta(k)], \quad v(k) = \sinh[\zeta(k)]$$

In this terms, the transformation equations take the form

$$\omega_k = A_2 + A_1 / \cosh(2\zeta), \quad A_1 \sinh(2\zeta) = B [\cosh^2(\zeta) + \sinh^2(\zeta)]$$

That gives

$$\omega_k = A_2(k) + \text{sign } A_1(k) \sqrt{A_2^2(k) - B^2(k)}$$

If $A_1(k)$ turns into zero when $B(k) \neq 0$, we have complex frequency which describes exponential growth of waves i.e. instability. The quadratic Hamiltonian can be reduced to the form

$$\mathcal{H}_2 = \int C(k) [a(k)a(-k) + a^*(k)a^*(-k)] d\mathbf{k}$$

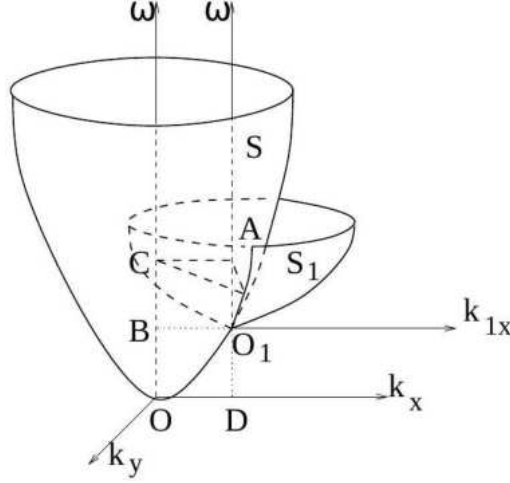
which describes the creation of the pair of quasi-particles from vacuum and the inverse process, see [21], Sec. 1.1.

F-3.

5 Show that the power dispersion relation $\omega_k \propto k^\alpha$ is of decay type if $\alpha \geq 1$, i.e. it is possible to find such $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ that $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega_1 + \omega_2$. Consider two-dimensional space $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$. Hint: ω_k is a concave surface and the resonance condition can be thought of as an intersection of some two surfaces.

3.5

For two-dimensional wave vectors, $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$, the function $\omega(\mathbf{k})$ determines a surface in the three-dimensional space ω, k_x, k_y . In an isotropic case, $\omega(k)$ determines a surface of revolution. Consider two such surfaces: S determined by $\omega(k)$ and S_1 by $\omega(k_1)$. The possibility to find such \mathbf{k}_1, \mathbf{k} that $\omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) = \omega(k_1) + \omega(k)$ means that the second surface must be shifted up by $\omega(k)$ and right by \mathbf{k} and that the two surfaces must intersect:



All three points with the coordinates $\{\omega, k\}$, $\{\omega_1, k_1\}$ and $\{\omega(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1), \mathbf{k} + \mathbf{k}_1\}$ must lie on the intersection line O_1A . For example, $OD = k$, $OB = \omega$, $BC = \omega_1$. For intersection, $\omega(k)$ must define a convex surface. For power laws, $\omega(k) \propto k^\alpha$, that requires $\alpha > 1$. For $\alpha = 1$, only waves with collinear wave vectors can interact resonantly.

The equation for the standing soliton analogous to (3.32) is now

$$\omega'' \Delta A = 2T (A^3 - A_0^2 A)$$

In polar coordinates, $\Delta = r^{-1} \partial_r r \partial_r + r^{-2} \partial_\phi^2$. It is thus clear that the dependence on the angle ϕ makes the condensate amplitude turning into zero on the axis: $A \propto r$ as $r \rightarrow 0$. Denote $f(r/r_0) \equiv A/A_0$. Considering $r \rightarrow \infty$ one concludes that $r_0^2 = \omega'' / (2TA^2)$ i.e. the amplitude and the size are inversely related as in 1d. The resulting equation in the variable $\xi = r/r_0$ has the following form:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right) + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) f - f^3 = 0 \quad (5.43)$$

It can be solved numerically. When $\xi \rightarrow 0$ then $f \propto \xi$ for $\xi \rightarrow 0$. When $\xi \rightarrow \infty$, $f = 1 + \delta f$ and in a linear approximation we get

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\delta f}{d\xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} - 2\delta f - \frac{1}{\xi^2} \delta f = 0 \quad (5.44)$$

which has a solution $\delta f = -1/2\xi^2$. The solution is a vortex because there is a line in space, $r = 0$, where $|\psi|^2 = 0$. Going around the vortex line, the phase acquires 2π . That this is a vortex is also clear from the fact that there is a current J (and the velocity) around it:

$$J_\phi \propto i \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{r \partial \phi} - \psi^* \frac{\partial \psi}{r \partial \phi} \right) = \frac{A^2}{r}$$

so that the circulation is independent of the distance from the vortex. Note that the kinetic energy of a single vortex diverges logarithmically with the system size (or with the distance to

another parallel vortex line with an opposite circulation): $\int v^2 r dr \propto \int dr/r$. That has many consequences in different fields of physics, in particularly in two dimensions (like Berezinski-Kosterlitz-Thouless phase transition).

F-3.

6 Consider the case of a stable condensate in 3 d and describe a solution of the NSE equation (3.28) having the form

$$\psi = A e^{-iT A^2 t + i\varphi} f(r/r_0)$$

where r is the distance from the vortex axis and φ is a polar angle. Are the parameters A and r_0 independent? Describe the asymptotics of f for small and large distances. Why it is called a vortex?

F-3.

7 Consider a discrete spectral representation of the Hamiltonian of the 1 d NSE in a finite medium:

$$H = \sum_m \beta m^2 |a_m|^2 + (T/2) \sum_{ikm} a_i a_k a_{i+k-m}^* a_m^*$$

Take only three modes $m = 0, 1, -1$. Describe dynamics of such 3 -mode system.

3.7

Qualitative answer. To integrate a general system of $2n$ first-order differential equations one needs to know $2n$ conserved quantities. For Hamiltonian system though, Liouville theorem tells us that n independent integrals of motion is enough to make the system integrable and its motion equivalent to n oscillators. For three modes, the number of degrees of freedom is exactly equal to the number of the general integrals of motion: Hamiltonian H , total number of waves $P = \sum |a_m|^2$ and the momentum $M = \sum m |a_m|^2$. That means that the system is integrable: in the six-dimensional space of a_0, a_1, a_{-1} , every trajectory is a 3 -torus.

Quantitative solution. The full system,

$$i \frac{da_0}{dt} = T (|a_0|^2 + 2|a_1|^2 + 2|a_{-1}|^2) a_0 + 2T a_1 a_{-1} a_0^* \quad (5.45)$$

$$i \frac{da_1}{dt} = \beta a_1 + T (|a_1|^2 + 2|a_0|^2 + 2|a_{-1}|^2) a_1 + T a_{-1}^* a_0^2 \quad (5.46)$$

$$i \frac{da_{-1}}{dt} = \beta a_{-1} + T (|a_{-1}|^2 + 2|a_0|^2 + 2|a_1|^2) a_{-1} + T a_1^* a_0^2 \quad (5.47)$$

can be reduced explicitly to a single degree of freedom using the integrals of motion. Consider for simplicity $M = 0$ and put $a_0 = A_0 \exp(i\theta)$, $a_1 = A_1 \exp(i\theta_1)$ and $a_{-1} = A_{-1} \exp(i\theta_{-1})$, where $A_1, \theta_1, \theta_{-1}$ are real. Introducing $\theta = 2\theta_0 - \theta_1 - \theta_{-1}$, the system can be written as follows:

$$\frac{dA_0}{dt} = -2 \frac{dA_1}{dt} = -2T A_0 A_1^2 \sin \theta \quad (5.48)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\beta + 2T (A_0^2 - A_1^2) + 2T (A_0^2 - 2A_1^2) \cos \theta \quad (5.49)$$

This system conserves the Hamiltonian $H = 2\beta A_1^2 + TA_0^4/2 + 3TA_1^4 + 4TA_0^2A_1^2 + 2TA_1^2A_0^2 \cos \theta$ and $P = A_0^2 + 2A_1^2$. Introducing $B = A_1^2$ one can write $H = (2\beta + TP/2)B + TB(P - 2B)(2 \cos \theta + 3/2)$ and

$$\frac{dB}{dt} = 2TB(P - 2B) \sin \theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (5.50)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\beta + 2T(P - 3B) + 2T(P - 4B) \cos \theta = \frac{\partial H}{\partial B} \quad (5.51)$$

Expressing θ via H, B and substituting into (5.50), one can find the solution in terms of an elliptic integral. To understand the qualitative nature of the motion, it helps to draw the contours of constant H in coordinates $B, \cos \theta$. The evolution proceeds along those contours. The phase space is restricted by two straight lines $B = 0$ (which corresponds to $H = 0$) and $B = P/2$ (which corresponds to $A_0 = 0$ and $H = \beta P + TP^2/4$). It is instructive, in particular, to compare the phase portraits with and without the modulational instability. Indeed, exactly like in Sect. 3.3.2, we can consider $|a_0| \gg |a_1|, |a_{-1}|$ and $|a_0|^2 \approx P$, linearize (5.46, 5.47) and for $a_1, a_{-1} \propto \exp(i\Omega t - iTPt)$ obtain $\Omega^2 = \beta(\beta + 2TP)$ in agreement with (3.5). When $\Omega^2 = \beta(\beta + 2TP) < 0$, there is an instability, while in the phase portrait of (5.50, 5.51) there exist two fixed points at $B = 0, \cos \theta_0 = -1 - \beta/TP$, which are saddles connected by a separatrix. Even for trajectories that start infinitesimally close to $B = 0$, the separatrix makes it necessary to deviate to finite B , as seen from the right panel of Figure 5.3.

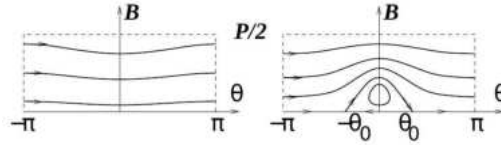
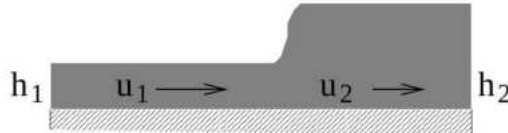


Figure 5.3 Sketch of the phase-space trajectories for large positive β (left, stable case) and $-2TP < \beta < 0$ (right, unstable case).

In the Hamiltonian integrable case, the separatrix is an unstable manifold for one fixed point and a stable manifold for another. When the system is perturbed (say, by small pumping and damping) and loses its Hamiltonian structure and integrability, the stable and unstable manifolds do not coincide anymore but have an infinite number of intersections. That separatrix splitting is responsible for creating a chaotic attractor.

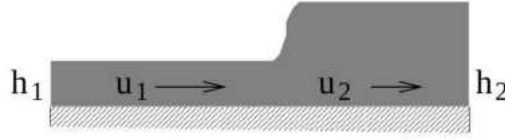
F-3.

8 Calculate the energy dissipation rate per unit length of the hydraulic jump. Fluid flows with the velocity u_1 in a thin layer of the height h_1 such that the Froude number slightly exceeds unity: $u_1^2/gh_1 = 1 + \epsilon, \epsilon \ll 1$.



3.8

As in any shock, mass and momentum are conserved but the mechanical energy is not.



Mass flux is $\rho u h$ so that the flux constancy gives $u_1 h_1 = u_2 h_2$. The momentum flux (1.17) includes the pressure which must be integrated over the vertical coordinate. Where the flow is uniform, the pressure can be taken hydrostatic, $P(z) = \rho g(h - z)$, which gives the momentum flux as follows:

$$\int_0^h [p(z) + \rho u^2] dz = \rho g h^2 / 2 + \rho h u^2$$

The momentum flux constancy gives $g h_1^2 + 2 h_1 u_1^2 = g h_2^2 + 2 h_2 u_2^2$. Substituting here $u_2 = u_1 h_1 / h_2$ we find $g h_1^2 - g h_2^2 = g (h_1 - h_2) (h_1 + h_2) = 2 u_1^2 h_1^2 / h_2 - 2 h_1 u_1^2 = 2 u_1^2 h_1 (h_1 - h_2) / h_2$. That gives the height after the jump:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{u_1^2}{g h_1}} \approx 1 + \frac{2\epsilon}{3}$$

This is actually the first Rankine-Hugoniot relation (5.30) taken for $\gamma = 2$, $\mathcal{M}_1^2 = 1 + \epsilon$. The flux of mechanical energy is as follows

$$\int_0^h [p(z) + \rho u^2 / 2 + \rho g z] u dz = \rho g u h^2 + \rho h u^3 / 2$$

Here the first term is the work done by the pressure forces, the second term is the flux of the kinetic energy and the third term is the flux of the potential energy. The difference in energy fluxes is then the energy dissipation rate:

$$\begin{aligned} & \rho g u_1 h_1^2 + \rho h_1 u_1^3 / 2 - \rho g u_2 h_2^2 - \rho h_2 u_2^3 / 2 = \rho g u_1 h_1 (h_1 - h_2) \\ & + \frac{\rho u_1}{4} [2 h_2 u_2^2 + g (h_2^2 - h_1^2)] - \frac{\rho u_2}{4} [2 h_1 u_1^2 + g (h_1^2 - h_2^2)] \\ & = \rho g u_1 h_1 (h_1 - h_2) + \frac{\rho (u_1 + u_2)}{4} g (h_2^2 - h_1^2) \\ & = \rho g u_1 (h_2 - h_1)^3 / 4 h_2 \approx 2 \epsilon^3 \rho u_1^5 / 27 g \end{aligned} \quad (5.52)$$

The reader is advised to make observations in his/her kitchen sink to appreciate how complicated and turbulent the real hydraulic jump is. It is amazing then that the dissipation is completely determined by the pre-shock flow via the conservation laws of the mass and momentum.

Comparing (5.52) with the Rankine-Hugoniot energy-continuity relation (5.26) from Exercise 2.3, the difference is that for a gas we wrote the total energy which is, of course, conserved. Another difference is that the pressure is determined by height (analog of density) for a shallow fluid, so that two conservation laws of mass and momentum are sufficient in this case to determine the velocity and height after the shock.

F-3.

9 If one ought to take into account both dissipation and dispersion of sound wave, then the so-called KdV-Burgers equation arises:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} = 0 \quad (3.44)$$

For example, it allows to describe the influence of dispersion on the structure of weak shock wave. Consider a traveling solution $u_0(x - vt)$ of this equation, assuming zero conditions at $+\infty$: $u_0 = u_{0x} = u_{0xx} = 0$. Sketch the form of $u_0(x)$ for $\mu \ll \sqrt{\beta v}$ and for $\mu \gg \sqrt{\beta v}$.

3.

9.

For a running wave of the form $u(x - vt)$ the equation

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} - \mu u_{xx} = 0$$

takes the form

$$-vu + u^2/2 + \beta u_{xx} - \mu u_x = \text{const}$$

Integrate it using the boundary conditions and introduce $\tau = x\sqrt{v/\beta}$ and $q(\tau) = u/v$:

$$\ddot{q} = -2\lambda\dot{q} + q - q^2/2 \quad 2\lambda \equiv \mu/\sqrt{\beta v} \quad (5.53)$$

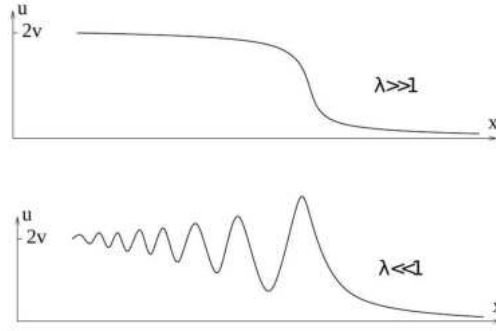
It is a Newton equation for a particle in the potential $U = q^3/6 - q^2/2$ under the action of the friction force (we assume $\beta > 0$). The initial conditions in the distant past are $q(-\infty) = \dot{q}(-\infty) = \ddot{q}(-\infty) = 0$ so that the particle has zero energy: $E = \dot{q}^2/2 + q^3/6 - q^2/2$. We consider $q \geq 0$ since negative q goes to $q(\infty) = -\infty$, which gives non-physical u . Friction eventually bring particle to the minimum of the potential: $q \rightarrow 2$ as $\tau \rightarrow \infty$. Near the minimum we can use the harmonic approximation,

$$\ddot{q} \simeq -2\lambda\dot{q} - (q - 2) \quad (5.54)$$

which gives the law of decay: $q - 2 \propto \exp(rt)$ with $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$. We see that for $\lambda < 1$ the asymptotic decay is accompanied by oscillations while for $\lambda \geq 1$ it is monotonic. For $\lambda \ll 1$, an initial evolution is described by the (soliton) solution without friction,

$$q = \frac{3}{\text{ch}^2[(t - t_0)/2]}$$

it brings the particle almost to $q \approx 3$, after which it goes back almost to $q \approx 0$, and then approach minimum oscillating. On the other hand, for very large friction, $\lambda \ll 1$, the particle goes to the minimum monotonically and the solution is close to the Burgers shock wave. It is clear that there exists an interval of $\lambda > 1$ where the solution (called collision-less shock) has a finite number of oscillations. It is an interesting question how large must be λ that no oscillations were present.



Note that adding small dispersion does not change the shock much while adding even small dissipation turns the soliton into the (collisionless) shock i.e. strongly changes the whole $x \rightarrow -\infty$ asymptotics; this is because friction is a symmetry-breaking perturbation as it breaks timereversal symmetry.

F-3.

10 Find the dispersion relation of the waves on the boundary between two fluids, one flowing and one still, at the presence of gravity g and the surface tension α . Describe possible instabilities. Consider, in particular, the cases $\rho_1 > \rho_2, v = 0$ (inverted gravity) and $\rho_1 \ll \rho_2$ (wind upon water).

$$\begin{array}{l} v_1 = v \\ v_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho_1 \\ \rho_2 \end{array} \quad \alpha g$$

3.

10.

Simple estimate. Let us first use the virial theorem to estimate the dispersion relation for $v = 0$. This is done following (3.1,3.2). Both fluids are involved into the motion so that the kinetic energy per unit area can be estimated as $(\rho_1 + \rho_2) \omega^2 a^2 \lambda$, where a is the surface elevation. Under such elevation, the gravitational potential energy increases for the lower fluid and decreases for the upper fluid so that the net potential energy per unit area is $(\rho_2 - \rho_1) g a^2$. Potential energy of surface tension is the same $\alpha(a/\lambda)^2$. Virial theorem then generalizes (3.2) into

$$(\rho_1 + \rho_2) \omega^2 \simeq (\rho_2 - \rho_1) g \lambda^{-1} + \alpha \lambda^{-3} \quad (5.55)$$

Complete solution. We need to combine the approach of Section 2.1 with that of Section 3.1. We introduce the velocity potentials ϕ_1 and ϕ_2 on both sides of the surface. Then the respective values of the pressure in the approximation linear with respect to the potentials ϕ_1, ϕ_2 and the elevation ζ are as follows:

$$P_1 = \rho_1 \left(g\zeta + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + v \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right), \quad P_2 = \rho_2 \left(g\zeta + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) \quad (5.56)$$

The pressure difference between the two sides is balanced by the surface tension as in (3.11):

$$\rho_2 \left(g\zeta + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) - \rho_1 \left(g\zeta + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + v \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) = \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (5.57)$$

We express the potential ϕ_1, ϕ_2 via the elevation ζ using the kinematic boundary conditions:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.58)$$

For $\zeta(x, t) \propto \exp(ikx - i\Omega t)$ we obtain from (5.57, 5.58) the dispersion relation

$$\Omega^2 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v k \Omega + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v^2 k^2 - c_0^2 k^2 = 0 \quad (5.59)$$

$$c_0^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho_1 + \rho_2} \quad (5.60)$$

Here $k > 0$ and c_0 is the phase velocity of the gravity-capillary waves in the case $v = 0$. In this case, we see that when $\rho_1 > \rho_2$ the phase velocity and the frequency are imaginary for sufficiently long waves with $k^2 < (\rho_1 - \rho_2) g / \alpha$. That signals so-called Rayleigh-Taylor instability, which is responsible, in particular, for water spilling out of an overturned glass. In this case, inverted gravity causes the instability while surface tension stabilizes it. Consider now a bottom-heavy configuration, $\rho_1 < \rho_2$, which is stable for $v = 0$ since $c_0^2 > 0$. For sufficiently high v , we have Kelvin-Helmholtz instability when one can find such k that the determinant of the quadratic equation (5.59) is negative:

$$v^2 > \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{\rho_1 \rho_2} \min_k c_0^2(k) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{4(\rho_2 - \rho_1) g \alpha} \quad (5.61)$$

Again, like in the Landau criterium for generating excitations in superfluid, the criterium for generating surface waves is the possibility that the flow moves faster than the minimal phase velocity of the waves. In this case, both gravity and surface tension are needed to provide for a nonzero minimal velocity; in other words, their interplay makes the flow stable for lower speeds. Application of (5.61) to wind upon water where $\rho_1 / \rho_2 \simeq 10^{-3}$ gives the threshold value

$$v_{th} \approx 30 \left(\frac{4g\alpha}{\rho_2} \right)^{1/4} \approx 7 \text{ m/sec}$$

This is unrealistically high. By blowing air over the cup of tea, it is easy to observe that one can ruffle the surface with much smaller air velocity. Realistic theory of wave generation by wind not only requires an account of viscosity but also of the fact that the wind is practically always turbulent; strong coupling between water waves and air vortices makes such theory non-trivial.

15 Problems about specific phenomena

15.0.1 Problems about phenomena in nature

ТУЙМ-26. Цунами (2003 год)

В данной задаче исследуются некоторые особенности распространения волн в жидкостях.

1. На поверхности океанов иногда наблюдаются гигантские волны - цунами. Найдите скорость таких волн, предполагая, что длина волны много больше глубины океана h . При этом условии в волновое движение вовлекаются все частицы воды, в противном случае только те частицы, которые находятся в поверхностном слое толщиной порядка длины волны.

2. Вблизи прямолинейного участка берега моря на расстоянии L от него произошёл взрыв. Считая, что дно моря слабо отличается от наклонной плоскости, найдите длину участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом. Считать, что глубина моря в месте взрыва достаточно мала.

ТУЙМ-решение.26. Цунами (2003 год)

Пусть цунами перемещается вдоль оси x со скоростью v . Рассмотрим движение частиц воды в системе отсчёта, связанной с горбом волны (рис. 99).

Вдали от горба в сечении 1 вода относительно этой системы отсчёта движется со скоростью v в направлении, противоположном оси x . В области горба горизонтальная составляющая скорости частиц воды равна u . Вследствие несжимаемости жидкости массы воды, проходящей за время Δt через сечения 1 и 2, равны:

$$\rho h b v \Delta t = \rho h_1 b u \Delta t$$

где ρ - плотность воды, b - толщина рассматриваемого слоя воды в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Из полученного соотношения следует, что

$$u = v \frac{h}{h_1}$$

Применим к воде рассматриваемого слоя, которая заключена в объёме между сечениями 1 и 2, закон изменения импульса за время Δt :

$$\rho v b h v \Delta t - \rho u b h_1 v \Delta t = \frac{1}{2} (-\rho g h^2 b + \rho g h_1^2 b) \Delta t, \text{ или } h v (v - u) = \frac{g}{2} (h_1 - h) (h + h_1),$$

где g - ускорение свободного падения, а множитель $1/2$ учитывает линейное уменьшение давления с высотой. Подставляя в последнее выражение соотношение (97) и учитывая, что высота волны существенно меньше глубины водоёма, то есть $h + h_1 \approx 2h$, получим

$$v \approx \sqrt{gh}$$

Этот результат ограничен требованием малости глубины h по сравнению с длиной волны λ . В противном случае в волновое движение вовлекается только слой воды глубиной порядка λ . Тогда скорость волны выражается приближённой формулой

$$v \sim \sqrt{g\lambda}, \quad \text{или, точнее,} \quad v = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Скорость волн, о которых идёт речь во втором пункте, уменьшается при приближении к берегу в соответствии с полученным выше результатом:

$$v(x) = \sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}$$

где α - угол наклона к горизонту морского дна. Эта зависимость приводит к искривлению линии (волнового луча), вдоль которой распространяется волна. Изменение направления волнового луча определяется соотношением, которое чаще всего используется для оптических волн:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

где φ_1 и φ_2 - углы падения и преломления луча на границе сред, скорости распространения волн в которых равны соответственно v_1 и v_2 . Соотношение (99) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2} = \frac{\sin \varphi}{v} = \text{const}$$

В таком виде формула (100) применима и к непрерывному изменению угла φ (искривлению луча), если скорость волны плавно изменяется от точки к точке.

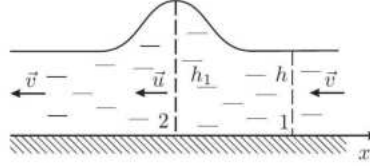


Рис. 99

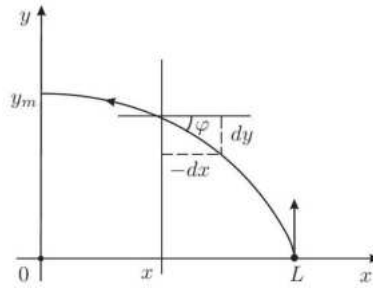


Рис. 100 Для определения положения точки на поверхности моря введём декартову систему координат так, чтобы ось y была направлена вдоль берега, а ось x проходила через точку с координатой $x = L$, в которой произошёл взрыв, вызвавший волны. Рассмотрим искривление луча, попадающего в точку берега с координатой y_m , наиболее удалённую от места взрыва (рис. 100). Из этого рисунка видно, что

$$\text{tg } \varphi = -\frac{dy}{dx}$$

В соотношение (99) подставим выражение (98) и учтём, что при $x \rightarrow L$ угол падения φ стремится к $\pi/2$:

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{gx \text{tg } \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{gL \text{tg } \alpha}}$$

откуда

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Последнее выражение позволяет переписать уравнение (101) в виде

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{x}{L - x}}.$$

Остаётся проинтегрировать это уравнение:

$$y_m = -\int_L^0 \sqrt{\frac{x}{L - x}} dx$$

Используя подстановку $x = L \sin^2 \beta$, получим

$$y_m = L \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} 2 \cos \beta \sin \beta d\beta = L \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \beta d\beta = L \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, длина участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом, равна $2y_m = \pi L$.

15.0.2 Problems about реакцию-диффузию

(Пухов, раздел 7)

Пухов.диффуз-методл131

Найти форму профиля фронта $u(\xi)$ и скорость распространения кинка v в модели, когда нелинейная функция $f(u)$ имеет вид кубического полинома: $f(u) = -\alpha u(u-1)(u-\beta)$. Найдите предельную скорость кинка в этой модели.

Ответ: $v = \sqrt{\alpha/2}(1 - 2\beta)$.

Пухов.диффуз-методл132

1. Найти форму профиля фронта $u(\xi)$ и скорость распространения кинка v в скачковой модели:

$$f(u) = -u + \theta(u - \beta)$$

где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда. Найдите предельную скорость кинка в этой модели.

Ответ: $v = (1 - 2\beta)/\sqrt{\beta(1 - \beta)}$.

Пухов.диффуз-методл133

2. Найти форму профиля фронта $u(\xi)$ и скорость распространения кинка v в модели, когда нелинейная функция $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\lambda u - \beta, & u \leq 0, \\ u - \beta, & 0 < u < 1, \\ -\lambda(u - 1) + 1 - \beta, & u \geq 1 \end{cases}$$

Ответ: $v = K/\sqrt{1 + K^2}$, где $K = \pi^{-1} \frac{\ln(1-\beta)}{\beta}$.

Пухов.диффуз-методл134

3. В 2D-среде (x, y) распространение кинка с прямолинейным фронтом $u(x - vt)$ происходит со скоростью v . Найдите скорость распространения кинка с искривленным фронтом $u(r - v(R)t)$ при $R \gg 1$. Используя полученное Вами асимптотическое выражение $v(R)$, оцените радиус критического зародыша стабильной фазы R_c из условия остановки кругового фронта $v(R_c) = 0$.
4. В бесконечной одномерной среде кинк покоится при $\beta = \beta_p$. Что будет с тем же кинком при тех же граничных условиях $u_\xi(\pm\infty) = 0$, если длина среды L ? Укажите критерий бесконечной протяженности среды.
5. Получите выражение для скорости кинка в приближении больших скоростей (Зельдовича), качественно проанализировав поведение сепаратрисы на фазовой плоскости УРД.

5. Покажите, что особые точки фазовой плоскости уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова являются: $(0, 0)$ - неустойчивым узлом при $v > v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$, $(1, 0)$ - седлом при $v > 0$.
6. Для двумерной задачи (19) покажите, что любое реалистическое распределение (например, в форме зародыша) эволюционирует в круговую фазовую волну с минимальной скоростью $v = v_{\min}$.
7. Покажите, что оператор L задачи Штурма-Лиувилля (33) не является самосопряжённым. Укажите способ приведения его к самосопряжённому виду. Исходя из этого, качественно оцените максимальную скорость кинка. Подсказка: в данной задаче оператор L самосопряженный, если для любых интегрируемых с квадратом $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, удовлетворяющих граничным условиям, выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(L\varphi(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(L\psi(x))dx.$$

9. Покажите, что оценка (10) совпадает с приближенным выражением для скорости кинка (20) в пределе больших скоростей.
10. В 1D-уравнении «реакция-диффузия» функция $f(u) = 0$ имеет пять корней, т.е. существует три устойчивые фазы среды: u_1, u_3 и u_5 . Известно, что фаза u_1 вытесняется фазой u_3 кинком со скоростью v_{13} , а фаза u_3 вытесняется фазой u_5 кинком со скоростью v_{35} . На основании механической аналогии вынесите суждение о том, всегда ли существует кинк, переводящий среду из фазы u_1 в фазу u_5 . В каком соотношении его скорость v_{15} находится с v_{13} и v_{35} ?

15.0.3 Задачи о странных явлениях (???)

(?? там много таких в МСС вообще)

16 General Questions and problems for checking understanding

16.1 Questions about understanding

С какой скоростью будет всплывать пузырь

(там на ютубе есть о всплывающих пузырях, дойду - изучу)

Человек начинает тонуть в воде. Оценить при этом его ускорение.

Найти расход вязкого газа при адиабатическом течении через длинную трубу под действием большого перепада давления.

Горизонтальная тонкая пластина находится в воде на малом расстоянии от дна по сравнению с поперечным размером пластины, выдавливая воду из зазора. Оценить скорость опускания пластины.

Почему перепад давления в воздухе не приводит к переносу тепла?

Показать, что теплопроводность воздуха при очень высоких температурах пропорциональна пятой степени температуры.

При медленном течении воды в трубке температура стенок трубки поддерживается постоянной. Оценить разность температур на оси трубки и на ее стенках.

Горячая струя воздуха бьет горизонтально из отверстия и изгибается вверх под действием силы Архимеда. Найти форму струи.

Оценить коэффициент диффузии сахара в стакане воды в зависимости от ее температуры.

Оценить толщину пленки типичного мыльного пузыря.

За какое время притянутся друг к другу две параллельные спички на поверхности воды при начальном расстоянии в 1 см между ними.

Как зависит от температуры скорость звука в воздухе при очень высоких температурах?

Звуковая волна распространяется вверх в атмосфере. На какой высоте ее скорость минимальна?

Оценить мощность звукового излучения от типичной молнии.

Как движется пылинка в воздухе под действием звуковой волны?

Лектор читает лекцию. Какая доля звуковой энергии поглощается в стенках аудитории?

Как зависит от температуры теплопроводность воздуха при низких температурах?

В слабоионизованном газе оценить ионную проводимость в слабом электрическом поле.

На какое расстояние проникает в плазму электромагнитная волна малой частоты?

Как зависит сечение рассеяния света в воде от его частоты?

Как зависит сечение поглощения света в воде от его частоты?

При каком условии в слабоионизованном газе можно вводить отдельно электронную и ионную температуры?

Почему равновесная температура устанавливается в плазме гораздо быстрее, чем равновесная плотность?

Почему проводимость плазмы определяется столкновениями электронов с ионами, а не с электронами?

Начиная с какой степени ионизации слабо ионизованного газа электрическая проводимость обусловлена столкновениями электронов с ионами, а не с нейтральными атомами?

На каком расстоянии остановятся в ткани человека протоны с начальной энергией 200 МэВ?

Как зависит от температуры температурный коэффициент линейного расширения диэлектрического кристалла при низких температурах?

Как зависит от температуры температурный коэффициент линейного расширения металла при очень низких температурах?

Как зависит от температуры кинематическая вязкость фононного газа в диэлектриках при температурах выше температуры Дебая?

Как зависит от температуры теплопроводность чистого диэлектрика при температурах, много меньших температуры Дебая?

Как зависит от температуры теплопроводность диэлектрика из-за рассеяния акустических фононов на примесных центрах?

Показать, что в металле при температурах выше температуры Дебая установление равновесия в фононном газе происходит из-за столкновений фононов друг с другом, а не из-за столкновений фононов с электронами.

Как зависит от температуры металла электрическая проводимость, обязанная электрон-электронным столкновениям?

Как зависит от температуры металла теплопроводность, обязанная электрон-электронным столкновениям?

16.2 Типичные технические задачи для проверки знаний (???)

(тут скорее всего из ЛЛ гидродинамика все будет, очень много крутых задач!)

Обтекание жидкостью движущегося в ней шара

(?? звучит просто, а пока не готов вообще решать.)

задача об обтекании жидкостью движущегося в ней шара (см. V, §20):

ЛЛ5-20.2. Пузырь

Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью η'), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью η) W. Rybczynski, 1911).

Р е ш е н и е.

Воспользуемся системой координат, в которой капля покоится. Для жидкости снаружи капли ищем решение уравнения (20.5) опять в виде (20.6), так что скорость имеет вид (20.7). Для жидкости же внутри капли надо искать решение, не обладающее особой точкой при $r = 0$ (причем должны оставаться конечными также и вторые производные от f , определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4}r^2 + \frac{B}{8}r^4$$

чему соответствует скорость

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{un}) - 2\mathbf{u}]$$

На поверхности шара ¹⁾ должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости вещества вне ($\mathbf{v}^{(e)}$) и внутри ($\mathbf{v}^{(i)}$) капли должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

то же самое должно иметь место для компоненты $\sigma_{r\theta}$ тензора напряжений

$$\sigma_{r\theta}^{(i)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент σ_{rr} тензора напряжений можно не писать - оно определило бы собой искомую скорость u , которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырех условий получаем четыре уравнения для постоянных a, b, A, B , решение которых дает

$$a = R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3 \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (20.14a):

$$F = 2\pi u \eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}$$

При $\eta' \rightarrow \infty$ (что соответствует твердому шару) эта формула переходит в формулу Стокса. В предельном же случае $\eta' \rightarrow 0$ (газовый пузырек) получается $F = 4\pi\eta R$, т. е. сила сопротивления составляет $2/3$ сопротивления твердому шару.

Приравняв F действующей на каплю силе тяжести $\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho')g$, найдем

$$u = \frac{2R^2 g (\rho - \rho') (\eta + \eta')}{3\eta (2\eta + 3\eta')}$$

(только на самом деле шар то сплюснутым будет, но мб про это потом подумаю.)

¹⁾ Изменение формы капли при ее движении можно не рассматривать, так как оно представляет собой эффект высшего порядка малости. Но для того чтобы движущаяся капля фактически была шарообразной, силы поверхностного натяжения на ее границе должны превышать силы, происходящие от неравномерности давления и стремящиеся нарушить шаровую форму. Это значит, что должно быть $\eta u/R \ll \alpha/R$ (α - коэффициент поверхностного натяжения) или, подставляя $u \sim R^2 g \rho / \eta$:

$$R \ll (\alpha/(\rho g))^{1/2}$$

ЛЛ5-20.3. Две пластины

Две параллельные плоские круглые пластинки (радиуса R) расположены одна над другой на малом расстоянии друг от друга; пространство между ними заполнено жидкостью. Пластины сближаются друг с другом с постоянной скоростью, вытесняя жидкость. Определить испытываемое пластинками сопротивление (*O. Reynolds*).

Р е ш е н и е.

(??? типичная общезнаковая задача, напишу в 1ю часть про нее тоже!)

Выбираем цилиндрические координаты с началом в центре нижней пластинки (которую полагаем неподвижной). Движение жидкости осесимметрично, а ввиду тонкости слоя жидкости в основном радиально ($v_z \ll v_r$), причем $\partial v_r / \partial r \ll \partial v_r / \partial z$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} &= \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 : \quad v_r &= v_z = 0, \\ \text{при } z = h : \quad v_r &= 0, \quad v_z = -u, \\ \text{при } r = R : \quad p &= p_0 \end{aligned}$$

h - расстояние между пластинками, p_0 - внешнее давление). Из уравнений (1) находим

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dr} z(z-h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по dz , получим

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right),$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3} (R^2 - r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая на пластинку, равна

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

16.3 Questions about interesting phenomena

Why if we step on a sand, it gets dry?

(see youtube "action lab" for now)

17 Problems about applications

17.0.1 О некоторых прикладных задачах

(тут указываю на задачи в приложениях, важная тоже заготовка. все в параграфах, потому что нужно просто указать и всё, так-то про каждую задачу можно будет под 100 страниц написать.)

18 Задачи Пухова о волнах

18.0.1 Задачи Пухова 1

П.сб.зад-

Волны в одномерном кристалле. Одномерный кристалл представляет собой бесконечную линейную цепочку атомов массой m , расположенных на одинаковых расстояниях a друг от друга и связанных одинаковыми пружинками жесткости κ . Покажите, что по кристаллу могут распространяться гармонические волны смещения атомов. Найдите их дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$. Нарисуйте картину зон Бриллюэна. Получите волновое уравнение для кристалла в континуальном пределе $ka \ll 1$. Чему равна скорость звука в кристалле?

Solution

П.сб.зад-

Кристалл с двумя атомами в ячейке. Та же цепочка, что и в предыдущей задаче, но с двумя атомами в элементарной ячейке. Это значит, что в цепочке чередуются атомы с массами m и M . Найдите дисперсионные соотношения $\omega = \omega(k)$. Покажите, что при $m = M$ на границе зоны Бриллюэна акустическая и оптическая ветви смыкаются, а зонная структура становится такой же, как для цепочки одинаковых атомов.

Solution

П.сб.зад-

Дисперсионная поправка к волновому уравнению. Одномерная цепочка образована шариками массой m , связанными пружинками жесткостью κ и расположенными на

расстоянии a друг от друга. Найдите поправку к волновому уравнению, описывающему волны в этой цепочке и учитывающую дискретность цепочки в континуальном пределе $ka \ll 1$. Вычислите дисперсию волн $\omega(k)$, описываемых уравнением с поправкой. Сравните с точным ответом $\omega(k) = 2\sqrt{\kappa/m} \sin ka$. Подсказка: при переходе от конечно-разностных уравнений цепочки к континуальному пределу сохраните в разложении члены до $(ka)^4$ включительно.

Solution

П.сб.зад-

Цепочка связанных маятников. Цепочка идентичных математических маятников с массой m и длиной l , связанных между собой пружинками жесткости κ , совершает малые колебания в одной плоскости. Маятники подвешены на одной высоте и одинаковом расстоянии a друг от друга. Найдите частоты и пространственные распределения собственных мод цепочки. Покажите, что в континуальном пределе $ka \ll 1$ моды цепочки представляют собой бегущие гармонические волны, описываемые уравнением Клейна-Гордона. Найдите для них дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$.

Solution

П.сб.зад-

Линеаризованное уравнение Буссинеска. Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$, групповую $v_{\text{гр}}$ и фазовую $v_{\text{ф}}$ скорости волны, описываемой линеаризованным уравнением Буссинеска: $u_{tt} - c^2 u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0$. Покажите, что в такой среде не могут распространяться волны с частотой выше $\omega_{\text{max}} = c/\sqrt{\beta}$.

Solution

П.сб.зад-

Ударная волна в кристалле. Одномерный кристалл представляет собой цепочку шариков массой m , расположенных на расстоянии a друг от друга и соединенных одинаковыми нелинейными пружинками. Благодаря пружинкам каждый шарик взаимодействует только с двумя ближайшими соседями с силой $f(x) = \kappa x - \mu x^3$, где x - растяжение пружинки, $\mu > 0$. В континуальном пределе $ka \ll 1$ получите уравнение Буссинеска, описывающее смещение $u(x, t)$ цепочки. Найдите его решение типа доменной стенки (кинка) при $u_x(-\infty, t) = u_x(+\infty, t) = 0$. Покажите, что распределение деформации в кристалле $u_x(x, t)$ представляет собой солитон, движущийся со скоростью v . Как его амплитуда и ширина зависят от скорости v ?

Solution

П.сб.зад-

Струна и мембрана. Выведите волновое уравнение для струны и мембраны, воспользовавшись: а) уравнением Ньютона, б) вариационным принципом.

Solution**П.сб.зад-**

Волновое уравнение. Получите уравнение распространения для а) волны по одномерной струне с натяжением F и линейной плотностью ρ ; б) продольной волны по сжимаемой среде, процесс сжатия которой происходит адиабатически $p = p(\rho)$; в) продольных волн в твердом теле, с модулем Юнга E . Обсудите возможность считать, что сжимаемость среды - адиабатическая. Найдите фазовую скорость волн.

Solution**П.сб.зад-**

Законы преломления Декарта и Снеллиуса. Согласно корпускулярной теории Декарта частицы света свободно распространяются в среде 1 со скоростью v_1 . Пересекая границу раздела со средой 2, они испытывают «преломление» в силу скачка потенциала так, что их скорость изменяется до v_2 . Сформулируйте закон преломления Декарта, связывающий углы падения θ_1 и преломления θ_2 таких частиц. Согласно волновой теории плоская волна распространяется в среде 1 с фазовой скоростью v_1 . Пересекая границу раздела со средой 2, она испытывает «преломление» в соответствии с принципом Гюйгенса и распространяется далее с фазовой скоростью v_2 . Сформулируйте закон преломления Снеллиуса для такой волны. Сравните законы преломления для этих двух случаев. Нарисуйте графики зависимостей θ_2 от θ_1 .

Solution**П.сб.зад- Механическая линза. (????)**

Вдоль оси горизонтального цилиндрического желоба с радиусом r могут скользить без трения точечные частицы со скоростью v . Объясните фокусирующее действие желоба для частиц, вылетающих из точки нижней образующей со скоростями, почти параллельными ей (параксиальный пучок). Найдите фокусное расстояние такой линзы. Оцените величину ее аберрации.

(???? я не понял, что происходит. что за желоб, как он работает???? пока забиваю на эту задачу)

Solution**П.сб.зад- Время удара стержня о стену.**

Стальной стержень движется со скоростью v вдоль своей оси и сталкивается перпендикулярно с абсолютно твердой недеформируемой поверхностью своим торцом. Считая удар абсолютно упругим, найдите относительное сжатие стержня в момент наибольшей деформации. Оцените время удара стержня о стенку. Модуль Юнга стержня E , плотность ρ .

Solution

(???? По идее просто закон сохранения энергии нужен и все, ну и там половина периода - время колебания. в школе похожую решал, потом порешаю еще раз.)

П.сб.зад- Подвешенный стержень.

Стержень длиной L , сечением S с модулем Юнга E и массой m жестко прикреплен (заделан) своим торцом к потолку. а) На какую величину ΔL удлиняется стержень под действием собственного веса? б) Опишите моды вертикальных колебаний стержня, вычислите их частоты. в) То же для вертикального стержня, жестко прикрепленного своим торцом к столу.

Solution

(опять теория упругости, вот там это и буду решать, не тут.)

П.сб.зад-

Можно ли «услышать» форму мембраны барабана? Мембрана барабана представляет собой односвязную область с фиксированной границей заданной формы, периметра и площади. Можно ли по звуку барабана (спектру и плотности числа собственных мод) восстановить его форму?

Solution**П.сб.зад-**

Закон Вебера-Фехнера. Это психофизический закон, заключающийся в том, что минимальное изменение интенсивности звука ΔI , которое способно различить человеческое ухо, составляет 10% от исходной интенсивности I . На сколько дБ должна измениться громкость звука, чтобы это изменение можно было заметить?

Solution**П.сб.зад-**

Бинауральный эффект. Это психофизическое явление, заключающееся в способности левого и правого уха улавливать временную задержку приходящего звукового сигнала по разности фаз и определять направление на источник звука (акустическая стереофония). Оцените, при каких частотах из диапазона слышимости этот эффект перестает работать, считая расстояние между ушами 20 см, а скорость звука 340 м /с.

Solution**П.сб.зад-**

Резонатор Гельмгольца. Это акустический резонатор в виде сферической колбы объемом V с открытой горловиной в форме трубки длиной L и площадью сечения S . Найдите собственную частоту ν колебаний резонатора, учитывая, что скорость звука в воздухе c . Вычислите ν для типичного лабораторного резонатора Гельмгольца с $V = 1$ л, $S = 1$ см², $L = 1$ см при $c \approx 330$ м/с. Убедитесь, что эта частота значительно меньше частоты стоячей акустической волны в колбе.

Solution**П.сб.зад-**

Резонатор Гельмгольца с дыркой. Это резонатор в виде колбы объемом V , у которого вместо горловины небольшая дырка площадью S . Размер дырки тем не менее значительно больше толщины стенок колбы. Оцените собственную частоту ν колебаний резонатора. Скорость звука в воздухе c . Вычислите ν для типичных значений $V = 1$ л, $S = 1$ см². Убедитесь, что эта частота значительно меньше частоты стоячей акустической волны в колбе.

Solution**П.сб.зад-**

Добротность резонатора Гельмгольца. Оцените добротность Q резонатора Гельмгольца с объемом колбы V и горловиной длиной L с площадью сечения S , полагая доминирующими потери, связанные с излучением звука. Вычислите Q для $V = 1$ л, $S = 1$ см², $L = 1$ см при $c = 330$ /с и $\nu = 500$ Гц.

Solution**П.сб.зад-**

Потенциал скорости. Выразите плотность энергии акустической волны в среде w и ее поток j через потенциал φ поля скоростей $\mathbf{v} = \nabla\varphi$.

Solution**П.сб.зад-**

Звук в гравитационном поле. Рассмотрите распространение звуковой волны в среде с учетом однородного гравитационного поля g . Найдите дисперсионное соотношение, полагая, что скорость звука и энтропия постоянны во всей среде.

Solution**П.сб.зад-**

Радиационное давление звука. Вычислите радиационное давление, оказываемое плоской звуковой волной на стенку, если известна вариация давления в звуковой волне p_m .

Solution**П.сб.зад-**

Давление звука на стенку. На стенку нормально падает гармоническая волна с частотой ω и амплитудой смещения a . Плотность среды ρ , скорость звука c . а) Чему равно среднее по времени давление звука на стенку в условиях его полного отражения? б) То же, если акустический импеданс стенки $\rho_1 c_1$.

Solution**П.сб.зад-**

Давление звука на ухо. Громкость звука составляет $\Gamma = 120$ дБ (болевого порог). Найдите звуковое давление на ухо и поток энергии, попадающий за 1 с в ухо человека. Считайте площадь уха равной 4 см^2 и ухо перпендикулярным направлению распространения звуковой волны, $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c = 340 \text{ м/с}$.

Solution**П.сб.зад-**

Звук в воде. Интенсивность звука в воде $I = 0,1 \text{ В/м}^2$. Вычислите объемную плотность энергии \bar{w} , давление p_m и смещение частиц воды a в плоской волне на частоте $\nu = 10 \text{ кГц}$. Плотность воды $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, скорость звука $c = 1500 \text{ м/с}$.

Solution**П.сб.зад-**

Поток акустической энергии. В плоской гармонической волне с частотой $\nu = 1 \text{ кГц}$ амплитуда звукового давления равна $p_m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$. Вычислите амплитуду скоростей v_m , смещений частиц воздуха a , среднее значение плотности энергии \bar{w} и интенсивность звуковой волны I в воздухе $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c = 330 \text{ м/с}$.

Solution**П.сб.зад-**

Температурные волны. Вследствие годовых колебаний температуры земля в данном месте промерзает на глубину 2 м. На какую глубину она промерзла бы а) вследствие суточных колебаний такой же амплитуды; б) в месте, где теплопроводность грунта в 4 раза меньше? При каких условиях возникает вечная мерзлота?

Solution**П.сб.зад-**

Смена сезонов в грунте. На какой глубине в грунте лето, в то время как на поверхности зима? Теплопроводность грунта $\chi = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$. Во сколько раз сезонная вариация температуры на этой глубине меньше, чем на поверхности?

Solution**П.сб.зад-**

Температура поверхности Земли. Оцените среднюю температуру земной поверхности T_\oplus . Для оценки считайте, что тепловой баланс Земли определяется равенством поглощенной Землей энергии солнечного излучения и ее переизлучением с поверхности Земли в пространство. Это равенство обеспечивает постоянство T_\oplus во времени, иначе она росла бы. Угловой диаметр Солнца $0,01 \text{ рад}$, длина волны максимума спектра поверхности Солнца $\lambda_m \approx 5000 \text{ Å}$.

Solution**П.сб.зад-**

Предел Эддингтона. Определите критическую светимость I звезды массой M , выше которой она начинает сбрасывать свою внешнюю оболочку. Оболочка представляет собой плазму полностью ионизированного водорода. Насколько далека светимость $I_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с Солнца $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33}$ г от критической?

Solution**П.сб.зад-**

Солнечный парус. Это огромное сплошное полотно толщиной d из материала плотности ρ , которое парит в свободном космосе. Вычислите минимальную толщину полотна, при которой давление солнечного излучения уравнивает гравитационное притяжение паруса к Солнцу. Светимость и масса Солнца $I_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с, $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33}$ г, плотность материала паруса $\rho = 2$ г/см³, гравитационная постоянная $G \approx 6,7 \cdot 10^{-8}$ дин см²/Г². Оцените коэффициент эффективности (отношение предельной силы светового давления к силе притяжения к Солнцу) паруса площадью 120 тысяч квадратных метров и весом 500 килограмм, считая отражение света полным.

Solution**П.сб.зад-**

Вращение Солнца. Длина волны водородной линии H_{α} составляет $\lambda = 656$ нм. При наблюдении этой линии в излучении от диаметрально противоположных краев солнечного диска было обнаружено различие длин волн $\Delta\lambda = 0.088 \text{ \AA}$. Найдите период вращения Солнца T (в сутках). Радиус Солнца $R \approx 700000$ км. Нужно ли в Вашем расчёте учитывать гравитационное красное смещение $\Delta\lambda_{\text{грав}}$?

Solution**18.0.2 Задачи Пухова 2****П.сб.зад-**

Опыт Белопольского. Экспериментальное наблюдение оптического эффекта Доплера удалось благодаря многократному отражению света от движущихся зеркал. Источник света с длиной волны λ расположен между параллельными зеркалами, каждое из которых удаляется от него со скоростью v . После n отражений луч от источника выводится из системы зеркал в спектроскоп. Каков сдвиг длины волны света $\Delta\lambda$, регистрируемый спектроскопом? Вычислите $\Delta\lambda$ для условий опыта Белопольского (1895) $v = 30 \text{ М/с}$, $n = 10$, $\lambda = 650 \text{ нм}$.

Solution**П.сб.зад-**

Эффект Саньяка. В лазерном гироскопе луч света в кольцевом интерферометре описывает замкнутую кривую. Если гироскоп вращается с угловой скоростью Ω , перпендикулярной плоскости интерферометра, то возникает фазовый сдвиг φ встречных

волн, пробегающих интерферометр по и против часовой стрелки. Покажите, что $\varphi = 4\Omega S\omega/c^2$, где ω - частота света, S - площадь, охватываемая замкнутой кривой.

Solution

П.сб.зад-

Звук в движущейся среде. а) По неподвижной среде распространяется гармоническая звуковая волна с амплитудой a , волновым вектором \mathbf{k} , частотой ω и скоростью c . Найдите уравнение этой волны, ее частоту ω' , амплитуду a' и длину волны λ' в системе, движущейся со скоростью \mathbf{v} относительно среды. Особо выпишите выражения для случая $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$. б) Найдите уравнение звуковой волны в системе отсчета, связанной с неподвижной средой, ее частоту ω , амплитуду a и длину волны λ , если источник гармонического звука движется со скоростью \mathbf{v} относительно среды. В системе источника волна имеет частоту ω' , амплитуду a' и волновой вектор \mathbf{k}' . Особо выпишите выражения для случая $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$. с) Найдите уравнение звуковой волны в системе, движущейся со скоростью \mathbf{v} относительно неподвижной среды. Источник звука с частотой ω' и амплитудой a' движется относительно среды со скоростью \mathbf{u} . Особо выпишите выражения для случая $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$.

Solution

П.сб.зад-

Парадокс лучника. Когда лучник прицеливается, то он совмещает цель с плоскостью дуги лука. При этом стрела может отклоняться от линии прицеливания на угол в несколько градусов. Это связано с конечностью толщины стрелы, лежащей на дуге лука. Парадокс лучника заключается в том, что, несмотря на это отклонение, правильно нацеленная стрела все равно попадает в цель. Объясните механизм этого явления. Оцените максимально возможный угол отклонения стрелы от линии прицеливания. 208. Колебания стрелы в полете. Замедленная съемка показывает, что вылетающая из лука стрела совершает изгибные поперечные колебания. Их возникновение тесно связано с парадоксом лучника: несимметричностью приложенного тетивой к стреле импульса. Для тонкой цилиндрической стрелы длиной $l = 0.7$, плотностью $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ с поперечным сечением $S = 20 \text{ мм}^2$ и модулем Юнга $E = 5 \cdot 10^7 \text{ Па}$ определите частоту основной моды поперечных колебаний стрелы. Подсказки: изгибные колебания длинного узкого стержня описываются уравнением $u_{tt} + r^2 c^2 u_{xxx} = 0$, где $r = 7 \text{ мм}$ - радиус инерции поперечного сечения стрелы, $c^2 = E/\rho$. Первый корень уравнения $\text{ch } x \cos x = 1$ равен $x_1 = 4.73$.

Solution

П.сб.зад-

Туннелирование света. В стекле пропилена щель толщиной d (микронного масштаба), заполненная воздухом. На щель со стороны стекла под углом полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пво}} = 45^\circ$ падает плоская монохроматическая волна с частотой $\omega \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$. При каких толщинах d между стеклянными полупространствами все еще будет сохраняться оптический контакт?

Solution**П.сб.зад-**

Колебания заделанной балки. В отличие от поперечных колебаний струны, при поперечных (изгибных) колебаниях тонкой балки (стержня) она оказывает сопротивление изгибу. Граничными условиями для заделанного конца $x = 0$ является неподвижность балки $u(0, t) = 0$ и горизонтальность касательной к ней $u_x(0, t) = 0$. А на свободном конце $x = l$ должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная (перерезывающая) сила, то есть $u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0$. Вычислите основную частоту ω_0 собственных колебаний горизонтальной заделанной в стену балки.

Solution**П.сб.зад-**

Дребезжащая линейка. Пластиковую или железную линейку прижмите к столу так, чтобы большая ее часть свисала за краем. Если оттянуть и отпустить линейку, то раздастся дребезжащий звук. Оцените его основную частоту ω_0 , считая линейку тонким стержнем с длиной $l = 30$ см, модулем Юнга $E = 200$ Па, плотностью $\rho = 8$ тонн /м³, моментом инерции сечения $I = 80^4$ и площадью поперечного сечения $S = 20$ мм².

Solution**П.сб.зад-**

Управляющее уравнение. Найдите управляющее уравнение для якобиана перехода $J = \partial(\mathbf{x})/\partial(\mathbf{x}_0)$ от лагранжевых \mathbf{x}_0 к эйлеровым \mathbf{x} переменным. Как выглядит уравнение непрерывности в лагранжевых переменных?

Solution**П.сб.зад-**

Резонансы Шумана. Оцените минимальные собственные частоты электромагнитных колебаний в атмосфере Земли, создаваемых грозowymi разрядами между ионосферой и поверхностью.

Solution**П.сб.зад-**

Движение в волноводе. Закон дисперсии в длинном цилиндрическом волноводе имеет вид $(\omega^2 - \omega_0^2) k^{-2} = \text{const}$. Каков закон дисперсии в системе, движущейся вдоль оси волновода со скоростью v для: а) электромагнитных волн; б) звуковых волн?

Solution**П.сб.зад-**

Сферический резонатор. а) Найдите частоты собственных колебаний акустического резонатора в форме сферы радиуса R , скорость звука c . б) Чему равны кратности их вырождения? с) Найдите основную частоту ω_0 резонатора, зная, что пространственное распределение этой моды не зависит от углов. Подсказки: радиальная часть

3D-лапласиана имеет вид $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$, а первый ненулевой корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ равен $x_1 = 4.5$.

Solution

П.сб.зад-

Квантовые резонаторы. Исходя из представления о том, что резонатор - это ограниченный объем, в котором возникает стоячая волна, рассмотрите а) 1D-квантовую яму шириной a ; б) 1D-осциллятор с частотой ω ; в) водородоподобный атом с зарядом ядра Ze и $l = 0$; г) частицу в гравитационном поле над плоскостью $U(x) = Fx, x > 0$; $U(x) = +\infty, x < 0$. Получите их спектры E_n из условия, что на характерной длине резонатора укладывается целое число длин полуволин де Бройля. Уточните численные множители в полученных Вами оценках E_n , используя принцип соответствия $(E_{n+1} - E_n)/\hbar = 2\pi/T_{\text{кп}}$ при $n \gg 1$. Сравните полученные результаты с предсказаниями квантовой механики. 217. Спектр квантового барабана. Известно, что собственные частоты круглой мембраны барабана радиуса a с натяжением σ и поверхностной плотностью λ равны $\omega_{mn} = \sqrt{\sigma\mu_{mn}}/\sqrt{\lambda a}$, где μ_{mn} - n -й по счёту ненулевой корень функции Бесселя m -го порядка. Чему равны собственные значения энергии E бесспиновой квантовой частицы массой m , находящейся в цилиндрическом ящике с радиусом a и длиной L ? Какова кратность вырождения этих уровней?

Solution

П.сб.зад-

Заряженная бесстолкновительная среда. Найдите эволюцию скоростей $u(x, t)$ бесстолкновительной среды заряженных частиц, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= v\varphi_x \\ \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ \varphi_{xx} &= 4\pi(\rho - \rho_0)\end{aligned}$$

при начальном распределении скоростей $u(x, 0) = u_0(x)$. Здесь ρ - плотность заряда среды, $v = e/m$ - удельный заряд частицы, φ - потенциал пространственного заряда, ρ_0 - плотность заряда положительного фона. Найдите момент опрокидывания волны.

Solution

П.сб.зад-

Бесстолкновительная диссипативная среда. Найдите момент опрокидывания волны в нелинейной диссипативной среде, описываемой уравнением $u_t + uu_x + vu = 0$. Скорость диссипации v определяется, например, столкновением частиц. Начальное распределение скоростей среды $u(x, t) = u_0(x)$.

Solution

П.сб.зад-

Возмущение среды движущимся источником. Генерация волн источником, движущимся с постоянной скоростью v в бесстолкновительной среде, описывается

уравнением $u_t + uu_x = f(x - vt)$. Покажите, что при условии $v^2 > 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy$ источник «убегает» от генерируемых им волн и разрывов не возникает. Получите условие образования разрывов для точечного источника $f(x) = f_0 \delta(x)$.

Solution

П.сб.зад-

Термооптическая генерация звука. Оптическое излучение падает на среду, по которой распространяется звуковая волна $u(x, 0) = a \sin kx$. Волна изменяет коэффициент поглощения света и соответственно тепловыделение в ней. Возникает положительная обратная связь так, что распространение волны описывается уравнением активной среды $u_t + uu_x = vu$. Найдите условие опрокидывания волны и критерий стабилизации неустойчивости диссипацией энергии на разрыве.

Solution

П.сб.зад-

Нелокальное волновое уравнение. В первой среде волна описывается интегродифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x - x') \cdot u(x', t) dx' = 0$$

Во второй среде закон дисперсии $\omega = \Omega(k)$ известен, причем $\Omega(k)$ - фурье-образ функции ядра $\Omega(x)$ первой среды:

$$\Omega(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) e^{-ikx} dx$$

В какой среде фазовая скорость v_ϕ волны $u(x, t) = a \exp(ikx - i\omega t)$ больше? Вынесите Ваше суждение о связи дисперсии с пространственной и временной нелокальностью.

Solution

П.сб.зад-

Дисперсия неполярного диэлектрика. Простейшим представлением об однородном неполярном диэлектрике служит модель Лоренца. Электроны, связанные в нейтральных неподвижных молекулах, совершают собственные колебания с частотой ω_0 . Концентрация электронов такова, что их продольные длинноволновые колебания в диэлектрике имеют частоту $\omega_e > \omega_0$. Тогда в пренебрежении диссипацией показатель преломления диэлектрика равен

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_e^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Нарисуйте дисперсионные зависимости $\omega(k)$ электромагнитных волн в таком диэлектрике. Укажите окна прозрачности, найдите длинноволновые и коротковолновые групповые скорости.

Solution**П.сб.зад-**

Неявное дисперсионное соотношение. Вычислите групповую скорость $v_{\text{гр}}$, если дисперсионное соотношение задано в неявной форме $D(\omega, k) = 0$.

Solution**П.сб.зад-**

Групповая скорость. Найдите групповую скорость $v_{\text{г}}$, если дисперсия среды задана соотношениями а) $v_{\phi} = v_{\phi}(k)$; б) $v_{\phi} = v_{\phi}(\lambda)$; в) $v_{\phi} = c/n(\omega)$; г) $v_{\phi} = a\lambda^b$; е) $v_{\phi} = c/n(\lambda)$.

Solution**П.сб.зад-**

Коллапсы и возрождения волнового пакета. Плоский волновой пакет распространяется в среде, в которой фазовая скорость линейно зависит от длины волны $v_{\phi} = a + b\lambda$, где a и b - положительные постоянные. Покажите, что форма пакета будет периодически восстанавливаться через промежуток времени $\tau = b^{-1}$.

Solution**П.сб.зад-**

Формула Рэлея. Докажите формулу Рэлея $v_{\text{г}} = v_{\phi} - \lambda dv_{\phi}/d\lambda$. Используя её, придумайте геометрическое построение, позволяющее сравнить групповую и фазовую скорости. При каких условиях групповая скорость больше фазовой?

Solution**П.сб.зад-**

Вариационный принцип Рэлея. Сформулируйте вариационный принцип для собственной частоты ω колебаний мембраны заданной формы с поверхностным натяжением σ и поверхностной плотностью λ , края которой закреплены. Другими словами, подберите подходящий функционал (интеграл по поверхности мембраны), экстремальные значения которого дают частоты мод колебаний мембраны. Прямым варьированием проверьте правильность Вашего выбора.

Solution**П.сб.зад-**

Пробная функция для принципа Рэлея. Используя вариационный принцип Рэлея, оцените частоту колебаний основной моды следующих резонаторов: а) струны длиной a , пробная функция $u(x) \propto x(x - a)$, б) квадратной мембраны со стороной a , пробная функция $u(x, y) \propto xy(x - a)(y - a)$, в) круглой мембраны с радиусом a , пробная функция $u(r, \varphi) \propto (1 - r/a)$. На сколько процентов Ваше предсказание отличается от точного ответа?

Solution**П.сб.зад-**

Предвестники Зоммерфельда и Бриллюэна. Короткий одномерный импульс (волновой пакет) распространяется в среде с частотной дисперсией, показатель преломления которой $n(\omega)$. Покажите, что высокочастотная составляющая импульса распространяется в среде со скоростью, большей групповой. Раньше всех в точку наблюдения приходит высокочастотный предвестник Зоммерфельда, который распространяется со скоростью света в вакууме c . Следом за ним приходит предвестник Бриллюэна с низкочастотной составляющей сигнала, распространяющегося с фазовой скоростью v_ϕ . И уже следом за ними приходит основной сигнал с групповой скоростью v_r . Воспользуйтесь асимптотическим методом седловой точки. Рассмотрите для простоты среду с одним резонансом Лоренца.

Solution**П.сб.зад-**

Формула Эйнштейна для фотона волновой моды. Найдите групповую скорость v_r для волноводной моды с дисперсионным соотношением $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_c^2$, где k - продольное волновое число, ω_c - частота отсечки. Получите зависимость частоты от групповой скорости $\omega = \omega(v_r)$. Сравнив ее с формулой Эйнштейна для релятивистской частицы $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, покажите, что масса фотона волноводной моды равна $m_\phi = \hbar\omega_c/c^2$, а его скорость $v = v_r$.

Solution**П.сб.зад-**

Столкновение кинков Бюргерса. Покажите, что две попутные слабые ударные волны сталкиваются по закону абсолютно неупругого удара двух частиц; при этом аналогом массы частицы m является величина скачка $(u_2 - u_1)$, а аналогом скорости частицы v - скорость движения фронта кинка $(u_1 + u_2)/2$.

Solution**18.0.3 Задачи Пухова 3****П.сб.зад-**

Ширина фронта кинка Бюргерса. Найдите ширину и скорость ударной волны, представляющей собой перепад между скоростями u_1 и u_2 среды с кинематической вязкостью ν , описываемой уравнением Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$.

Solution**П.сб.зад-**

Глубинные подводные взрывы. Защищая секретную морскую базу, противолодочный крейсер атакует подводную лодку. Гидроакустическая станция подводной лодки способна зарегистрировать не только взрыв глубинной бомбы, но и колебания газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва. Пузырь быстро осциллирует (т.е. периодически изменяет свой радиус) с периодом $T \propto \rho^a P^b E^c$, величина которого

зависит от давления P , плотности воды ρ и полной энергии взрыва E , при этом a, b и c - постоянные безразмерные величины. Используя метод размерностей, оцените период колебаний объема газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва. Определите, во сколько раз изменится частота колебаний пузыря, если полная энергия взрыва увеличится в 2,2 раза.

Solution

П.сб.зад-

Схлопывание кавитационного пузырька. Найдите время схлопывания кавитационного пузырька радиусом R , образовавшегося в жидкости плотности ρ с избыточным давлением ΔP . Оцените характерные частоты шума кавитационных пузырьков радиусом ≈ 1 мм, схлопывающихся в воде при избыточном давлении 0.1-1 атм. Оцените скорость схлопывания и давление в таких пузырьках на финальной стадии схлопывания. Достаточно ли этих условий для образования ударных волн в воде? 236. Движущийся и «поющий» бархан. Бархан (разновидность дюны) это песчаный холм, образовавшийся под действием ветра. Наветренная сторона полого ($\approx 15^\circ$), подветренная сторона крутая ($\approx 35^\circ$) и осыпается. Высота бархана 15 м, средний размер кремниевых песчинок, из которых он состоит, 200 мкм. Оцените скорость передвижения такого бархана (в м/год), полагая для оценки, что ветер дует в одном направлении со скоростью 5 м/с. Оцените частоту звукового тона, издаваемого барханом при передвижении.

Solution

П.сб.зад-

Ящерка бежит по воде. На замедленной съемке видно, как небольшая ящерица Basiliscus бежит по воде. Она весит 100 грамм, имеет длину 20 сантиметров. Размер ее кистей ног 3 см. Оцените скорость, с которой она должна бежать, чтобы не тонуть. Сравните Вашу оценку с наблюдаемой скоростью ящерицы 5 км/ч. Какое предсказание развитая Вами теория дает для человека?

Solution

П.сб.зад-

Хожение по водам. Оцените порядок скорости, с которой человек должен бежать по воде, чтобы не тонуть.

Solution

П.сб.зад-

Гидравлический удар Жуковского. Вдоль длинной прямой трубки постоянного сечения течёт вода с постоянной скоростью $u(x, 0) = u_0$. В некоторый момент времени выходное сечение трубки мгновенно перекрывается. Определите дальнейшее течение воды $u(x, t)$ и изменение её давления $p(x, t)$. Оцените величину давления удара P при скорости $u_0 = 1$ м/с. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см³, адиабатическая сжимаемость $\beta = 5 \cdot 10^{-5}$ атм⁻¹.

Solution**П.сб.зад-**

Скорость скачка уплотнения. Прямая узкая труба заполнена жидкостью с плотностью ρ_0 . В трубу вдвигается поршень, оказывающий на жидкость давление P . Поршень порождает в жидкости скачок уплотнения, движущийся вперед со скоростью s так, что плотность жидкости между скачком и поршнем равна ρ . Найдите скачок плотности $\rho - \rho_0$ и скорость его движения s .

Solution**П.сб.зад-**

Простые волны Римана. Из системы уравнений одномерной газовой динамики идеального газа в представлении Эйлера

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ p &= p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma\end{aligned}$$

где p_0 и ρ_0 - равновесные значения давления и плотности, γ - показатель адиабаты Пуассона, получите уравнение простой волны Римана.

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm (c_s + \varepsilon v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Здесь $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ - скорость звука в невозмущенном газе, $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ - параметр акустической нелинейности.

Solution**П.сб.зад-**

Уравнение Ирншоу. Покажите, что система уравнений одномерной гидродинамики в лагранжевых переменных

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

сводится к нелинейному уравнению Ирншоу:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-\gamma-1}$$

для смещения частиц среды $\xi(x, t)$ в зависимости от времени t и их начального положения x . Считая нелинейность слабой ($|\partial \xi / \partial x| \ll 1$, малое акустическое число Маха), упростите уравнение Ирншоу, сохранив в нем только главный нелинейный член. Покажите, что в сопутствующей системе отсчета, движущейся со скоростью $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$, колебательная скорость частиц среды $u = \partial \xi / \partial t$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial t}$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ - параметр акустической нелинейности.

Solution

П.сб.зад-

Скорость фронта ударной волны. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью и показателем адиабаты γ , плотностью ρ_0 , давлением p_0 и температурой T_0 распространяется плоская ударная волна. Найдите скорость ее фронта v , а также плотность ρ , температуру и скорость u газа за фронтом, если задана сила ударной волны p/p_0 . Покажите, что слабые ударные волны $p/p_0 \approx 1$ распространяются со скоростью звука $v \approx c = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, а сильные ударные волны $p/p_0 \gg 1$ - со скоростью $v \propto \sqrt{p/p_0}$. Покажите, что кинетическая энергия (относительно фронта) неподвижного перед фронтом газа за фронтом превращается в его тепловую энергию (энтальпию).

Solution

П.сб.зад-

Ионизация газа ударной волной. Оцените скорость ударной волны в воздухе, выше которой начинается существенная ионизация газа за фронтом ударной волны.

Solution

П.сб.зад-

Ширина фронта ударной волны. Оцените ширину фронта ударной волны, распространяющейся в идеальном газе с постоянной теплоемкостью, теплопроводностью κ и вязкостью η . Сравните ее с длиной пробега молекул газа.

Solution

П.сб.зад-

Отраженная ударная волна. Сильная ударная волна с $p \gg p_0$ падает нормально на абсолютно твердую стенку. Покажите, что в отраженной ударной волне перепад давлений $p' - p_0$ равен $(p' - p_0) / (p - p_0) = (3\gamma - 1) / (\gamma - 1)$.

Solution

П.сб.зад-

Автомобильная пробка как ударная волна. Напряженный трафик на дороге привел к образованию границы, до которой автомобили двигаются со скоростью v_1 и плотностью n_1 , а после которой - со скоростью v_2 и плотностью n_2 . а) С какой скоростью и в какую сторону движется эта граница? б) Воспользовавшись уравнением Хопфа, опишите динамику образования этой границы.

Solution

П.сб.зад-

Телеграфные уравнения. Двухпроводная линия имеет погонные емкость C , сопротивление R , индуктивность L и утечку G . Запишите телеграфные уравнения для

распределения тока $i(x, t)$ и напряжения $v(x, t)$ вдоль линии. Получите условие, при котором такая линия будет свободна от искажений.

Solution

П.сб.зад-

Колебания подвешенной нити. Тяжелая однородная гибкая нить длиной l с линейной плотностью ρ подвешена за верхний конец. Получите уравнение малых колебаний нити в поле тяжести g . Найдите собственные моды колебаний нити. Чему равна частота основного тона?

Solution

П.сб.зад-

Вращающаяся подвешенная нить. Как изменится уравнение, описывающее малые поперечные колебания вертикально подвешенной нити (см. предыдущую задачу), если точка ее подвеса будет вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω ? Исследуйте его решение в приближении ВКБ. Найдите собственные моды колебаний нити.

Solution

П.сб.зад-

Неустойчивость Джинса. Однородный и изотропный гравитирующий газ простирается во всех направлениях и находится при постоянных плотности ρ_0 , гравитационном потенциале φ_0 и давлении p_0 . Уравнение состояния газа $p = p(\rho)$. Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений плотности и потенциала этого газа. Покажите, что система неустойчива относительно длинноволновых возмущений ($\lambda > \lambda_c$). Оцените размер и массу гравитационных сгустков (планет, звезд...), возникающих в системе на нелинейной стадии развития неустойчивости. Оцените массу Джинса звездного скопления (в массах Солнца), образовавшегося в результате развития такой неустойчивости из среды с $\rho_0 = 0.025 M_\odot \cdot \text{Пс}^{-3}$, $T = 10 \text{ K}$.

Solution

П.сб.зад-

Неустойчивость Рэлея-Тейлора. Это неустойчивость горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в поле тяжести, когда более плотная жидкость лежит в неустойчивом равновесии на менее плотной.

Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений формы поверхности раздела.

Solution

П.сб.зад-

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Это неустойчивость поверхности раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 , которые скользят относительно поверхности со скоростями v_1 и v_2 . Найдите закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ малых возмущений формы поверхности раздела. Оцените время развития неустойчивости, разрушающей плоскую поверхность раздела.

Solution**П.сб.зад-**

Неустойчивость Тонкса-Френкеля. Это неустойчивость плоской горизонтальной поверхности жидкого проводника (металла) с поверхностным натяжением σ , заряженной до определенного поверхностного поля ε . Получите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для гравитационно-капиллярных волн в присутствии электрического поля. Найдите критическое поле ε_c развития неустойчивости поверхности.

Solution**П.сб.зад-**

Гравитационные и капиллярные волны. Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для волн, распространяющихся по горизонтальной поверхности жидкости с плотностью ρ и поверхностным натяжением σ в поле тяжести g .

Solution**П.сб.зад-**

Капиллярная неустойчивость жидкой струи. Струя жидкости плотности ρ вытекает из круглого отверстия радиусом r со скоростью v . Найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для возмущений поверхности струи с поверхностным натяжением σ . Оцените размер капель, на которые распадется струя вследствие развития капиллярной неустойчивости. На каком расстоянии от отверстия произойдет распад на капли?

Solution**П.сб.зад-**

Неустойчивость заряженной капли. Жидкая капля радиусом r с поверхностным натяжением σ заряжена до заряда q . Исследуйте устойчивость ее поверхности. Найдите максимальный заряд q_c , до которого ее можно зарядить.

Solution**П.сб.зад-**

Устойчивость тангенциального разрыва. Объединяя результаты решений предыдущих задач, найдите дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ для волн, распространяющихся по горизонтальной поверхности раздела двух разных жидкостей в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения. Скорости жидкостей различны. Получите условие устойчивости разрыва.

Solution**П.сб.зад-**

Неустойчивость Рэлея-Бенара. Слой жидкости с положительным коэффициентом объемного расширения подогревается снизу в поле тяжести. Жидкость вблизи дна нагревается и расширяется, за счет дополнительной подъемной силы стремится подняться вверх. Холодная жидкость сверху стремится опуститься вниз. Этим

движениям препятствует вязкое трение жидкости и теплопроводность в ней. Вязкие силы тормозят движение жидкости. Медленно поднимаясь вверх, она за счет теплопроводности остывает и сжимается обратно. Так что дополнительная подъемная сила исчезает, и движение жидкости прекращается. В результате при малой разности температур ΔT конвекции в слое нет, и тепло переносится за счет обычной теплопроводности жидкости. Локально жидкость при этом покоится, т.е. среднее значение скорости в любой точке жидкости равно нулю. При превышении критической разности температур ΔT_c это состояние равновесия становится неустойчивым. В жидкости появляется конвекция, макроскопическое движение. В определенных местах слоя нагретая внизу жидкость поднимается вверх, в других, наоборот, холодные верхние слои опускаются вниз. В слое возникает упорядоченная конвективная структура.

Solution

П.сб.зад-

Колебания жидкой капли. а) Капля жидкости с поверхностным натяжением σ и плотностью ρ совершает колебания в невесомости. Опишите моды ее колебаний и найдите их частоты. б) То же для гравитирующей капли, когда поверхностным натяжением можно пренебречь. При каких размерах такая капля превращается в жидкую планету? с) Для вращающейся капли оцените критическую угловую скорость, при которой её разорвёт.

Solution

П.сб.зад-

Поплавок на воде. Поплавок от удочки плавает на поверхности воды. По поверхности распространяется гармоническая волна с амплитудой a и частотой ω , которая поднимает и опускает поплавок. Какую траекторию он описывает относительно неподвижной системы отсчета, связанной с дном?

Solution

П.сб.зад-

Звук в раскаленном воздухе. Определите скорость звука в воздухе, нагретом до столь высокой температуры, что давление равновесного черного излучения в нем сравнимо с давлением самого газа.

Solution

П.сб.зад-

Затухание капиллярных волн. Определите коэффициент затухания капиллярных волн.

Solution

18.0.4 Задачи Пухова 3

П.сб.зад-

Затухание гравитационных волн. Определите коэффициент затухания гравитационных волн.

Solution

П.сб.зад-

Ветер по морю гуляет. Как скорость и высота волн на море зависят от скорости ветра?

Solution

П.сб.зад-

Скорость звука в воде. Почему скорость звука в воде, в отличие от других жидкостей, растет с ростом температуры?

Solution

П.сб.зад-

Коэффициент поглощения звука. Почему при одинаковой частоте коэффициент поглощения звука в жидкостях значительно меньше, чем в газах?

Solution

П.сб.зад-

Звук в океане. Объясните физику зависимости скорости звука в океане от степени его солености и от глубины.

Solution

П.сб.зад-

Механизм поглощения звука. Объяснить, почему в жидкости поглощение звука определяется вязкостью, а не теплопроводностью.

Solution

П.сб.зад-

Мозги заколебали. Оцените собственную частоту сферических колебаний вещества мозга в голове взрослого человека.

Solution

П.сб.зад-

Аномалия воды. Объяснить, почему вода не расширяется, а сжимается при нагревании от нуля до четырех градусов Цельсия?

Solution

П.сб.зад-

Дождевая капля. Определите форму падающей дождевой капли.

Solution**П.сб.зад-**

Сильный взрыв 1. В воздухе происходит сильный точечный взрыв, при котором распространяется мощная сферическая ударная волна. Покажите, что в каждый момент времени плотность воздуха внутри области взрыва зависит от расстояния r до центра взрыва как $r^{15/2}$.

Solution**П.сб.зад-**

Сильный взрыв 2. В воздухе происходит сильный точечный взрыв, при котором распространяется мощная сферическая ударная волна. Покажите, что в каждый момент времени давление внутри почти всей области взрыва, кроме фронта, практически одинаково и мало по сравнению с давлением на фронте.

Solution**П.сб.зад-**

Звук в тумане. Оцените коэффициент поглощения звука речи человека в тумане при комнатной температуре. Радиус капельки воды в тумане - 1 мкм, масса водяных капелек -0.1 г/М^3 .

Solution**П.сб.зад-**

Рассеяние звука. Показать, что интенсивность рассеяния звуковой волны на теле малых (по сравнению с длиной волны звука) размеров значительно больше в направлении, противоположном направлению падения волны, нежели в направлении падения.

Solution**П.сб.зад-**

Скорость пузырька пара. С какой скоростью поднимаются пузырьки пара в кипящем чайнике?

Solution**П.сб.зад-**

Железный метеорит. Оцените минимальный размер железного метеорита, который не сгорит при прохождении атмосферы Земли.

Solution**П.сб.зад-**

Электромагнитная ударная волна. Электромагнитная волна распространяется по среде с $\varepsilon = \varepsilon(E)$, $\mu = \mu(H)$. Найдите формулу фронта ударной волны, движущейся со

скоростью v . Вычислите диссипацию энергии на разрыве при а) $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 \pm 3\alpha E^2)$, $\mu = \mu_0$; б) $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0(1 \pm \alpha H)$.

Solution

П.сб.зад- Солитон Кортевега-де Фриза.

Уравнение Кортевега-де Фриза $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$ описывает гравитационные волны на мелкой воде, ионно-звуковые волны в плазме, волны Россби во вращающейся жидкости. Найдите его решение в виде солитона $u(\pm\infty, t) = 0$, движущегося со скоростью v . Определите амплитуду и ширину солитона.

Solution

П.сб.зад- Солитон синус-Гордона.

Уравнение синус-Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0$ описывает волны в джозефсоновской среде, динамику дислокаций в кристалле, ультракороткие лазерные импульсы в двухуровневой среде. Найдите его решение в виде кинка $u_x(\pm\infty, t) = 0$, движущегося со скоростью v . Определите амплитуду и ширину кинка. Покажите, что деформация $u_x(x, t)$ имеет вид солитона.

Solution

П.сб.зад-

Солитон Буссинеска. Уравнение Буссинеска $u_{tt} - u_{xx} + (uu_x)_x + u_{xxx} = 0$ описывает волны в нелинейном кристалле и на мелкой воде. Найдите его решение в виде кинка $u_x(\pm\infty, t) = 0$, движущегося со скоростью v . Определите амплитуду и ширину кинка. Покажите, что деформация $u_x(x, t)$ имеет вид солитона.

Solution

П.сб.зад-

Устойчивость солитонов. Исследуйте устойчивость солитонов Кортевега-де Фриза, синус-Гордона и Буссинеска. Получите критерии стабильности.

Solution

П.сб.зад-

Инвариантность уравнения синус-Гордона. Покажите, что уравнение синус-Гордона $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0$ инвариантно относительно преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Solution

П.сб.зад-

Гамильтоновость уравнения Кортевега-де Фриза. Покажите, что уравнение Кортевега-де Фриза описывает распределенную гамильтонову систему. Укажите ее гамильтониан и

скобки Пуассона.

Solution

П.сб.зад-

Скорость кинка. Найдите скорость кинка, являющегося автомодельным решением 1D-уравнения «реакция-диффузия» $u_t = u_{xx} + f(u, \beta)$, переводящего среду из метастабильного состояния в стабильное состояние. Воспользуйтесь кубической моделью $f(u, \beta) = -u(u - \beta)(u - 1)$, найдите предельную скорость кинка. Подсказка: на фазовой плоскости (u, u_x) кинку соответствует сепаратриса, идущая из седла в седло по параболе.

Solution

П.сб.зад-

Уравнение «реакция-диффузия». Вариационный принцип. Приведите уравнение «реакция-диффузия» к градиентному виду, указав явный вид функционала. Сформулируйте и докажите вариационный принцип для полной производной функционала. Покажите, что функционал достигает минимума в стационарных состояниях.

Solution

П.сб.зад-

Энергия критического зародыша. Критическим зародышем стабильной фазы u_3 на фоне метастабильной u_1 называется стационарное решение уравнения «реакция-диффузия» с $u(\pm\infty) = u_1$. Вычислите энергию его образования $\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x) - u_1] dx$ в рамках скачковой модели $f(u, \beta) = -u$ при $0 < u < \beta$ и $f(u, \beta) = 1 - u$ при $\beta < u < 1$. В какой связи находятся значения параметра β , соответствующие нулевой скорости кинка и бесконечной энергии зародыша?

Solution

П.сб.зад- Мультистабильная среда.

Вытеснение фаз. В 1D-уравнении «реакция-диффузия» функция $f(u) = 0$ имеет пять корней, т.е. существуют три устойчивые фазы среды u_1, u_3 и u_5 . Известно, что фаза u_1 вытесняется фазой u_3 кинком со скоростью v_{13} , а фаза u_3 вытесняется фазой u_5 кинком со скоростью v_{35} . На основании механической аналогии вынесите суждение о том, всегда ли существует кинк, переводящий среду из фазы u_1 в фазу u_5 . В каком соотношении его скорость v_{15} находится с v_{13} и v_{35} ?

Solution

П.сб.зад-

Устойчивость кинка и домена. Рассмотрите устойчивость решений уравнения «реакция-диффузия» типа кинка и домена, получите критерии их устойчивости.

Solution**П.сб.зад-**

Предельная скорость кинка. Найдите профиль фронта $u(\xi)$ и скорость распространения кинка $v(\beta)$ в модели, когда нелинейная функция $f(u)$ имеет вид: а) кубического полинома: $f(u) = -\alpha u(u-1)(u-\beta)$, б) скачковой функции: $f(u) = -u + \theta(u-\beta)$, где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, с) кусочно-линейной функции:

$$f(u) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\lambda u - \beta, u \leq 0 \\ u - \beta, 0 < u < 1 \\ -\lambda(u-1) + 1 - \beta, u \geq 1 \end{cases}$$

д) синусоидальной функции $f(u) = k_1 \sin \pi u + k_2 \sin 2\pi u, k_2 > 0$. Найдите предельную скорость кинка v_{\max} в этой модели.

Solution**П.сб.зад- Двумерный фронт кинка.**

В 2D-среде распространение кинка с прямолинейным фронтом $u(x-vt)$ происходит со скоростью v . Найдите скорость распространения кинка с круговым фронтом $u(r-v(R)t)$ при $R \gg 1$. Используя полученное Вами асимптотическое выражение $v(R)$, оцените радиус критического зародыша стабильной фазы R_c из условия остановки кругового фронта $v(R_c) = 0$. Покажите, что любое реалистическое начальное распределение $u_0(x, y)$ (например, в форме зародыша) эволюционирует в круговую волну горячей фазы.

Solution**П.сб.зад- Покоящийся кинк.**

В бесконечной одномерной среде кинк покоится при $\beta = \beta_p$. Что будет с тем же кинком при тех же граничных условиях $u_\xi(\pm\infty) = 0$, если длина среды L ? Укажите критерий бесконечной протяженности среды.

Solution**18.0.5 Задачи Пухова 4****П.сб.зад- Приближение Зельдовича**

Получите выражение для скорости кинка в приближении больших скоростей, качественно проанализировав поведение сепаратрисы на фазовой плоскости уравнения «реакция-диффузия». Покажите, что Ваша оценка совпадает с выражением для максимальной скорости кинка в модели кубического полинома.

Solution

(как видно, эту тему я вообще не усвоил)

П.сб.зад-

Фазовая плоскость уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова. Покажите, что особые точки фазовой плоскости уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова являются: $(0, 0)$ - неустойчивым узлом при $v > v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$, $(1, 0)$ - седлом при $v > 0$.

Solution**П.сб.зад-**

Устойчивость движущегося кинка. Покажите, что оператор L Штурма-Лиувилля задачи об устойчивости кинка $L = \partial^2/\partial\xi^2 + v\partial/\partial\xi + W(\xi)$, где $W(\xi) = -\partial f[u_k(\xi)]/\partial u$ с граничными условиями $\delta u(\pm\infty, t) = 0$, не является самосопряжённым. Укажите способ приведения его к самосопряжённому виду. Исходя из этого, качественно оцените максимальную скорость кинка v_{\max} . Подсказка: в данной задаче оператор L самосопряженный, если для любых интегрируемых с квадратом $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, удовлетворяющих граничным условиям, выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(L\varphi(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(L\psi(x))dx.$$

Solution**П.сб.зад-**

Температурная ударная волна. Для среды со степенными зависимостями теплоёмкости и теплопроводности от температуры u уравнение теплопроводности имеет вид $u_t = (u^n u_x)_x$. Найдите его симметричное решение: $u(-x, t) = u(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0)dx = 1$. Покажите, что при $n > 0$ это решение соответствует температурной ударной волне.

Solution**П.сб.зад-**

Нелинейное горение. В важном для физики плазмы и теории горения частном случае нелинейное уравнение «реакция-диффузия» имеет вид $c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)$, где $c(u) = \text{const}$, а $k(u)$ и $f(u)$ являются степенными функциями температуры $k(u) = k_0 u^\sigma$; $f(u) = q_0 u^\beta$; $\sigma > 0, \beta > 1$. Покажите, что решения этого уравнения описывают локализацию тепла и режим с обострением - температура в локальной области возрастает до бесконечности за конечное время. Опишите возникающую диссипативную структуру, когда «рассасывание» тепла вдоль нелинейной среды действует совместно с горением и формирует области локализации горения.

Solution**П.сб.зад-**

Функционал уравнения «реакция-диффузия». Прямым вычислением покажите, что вариационная производная функционала $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x) dx$ равна

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_x}$$

Solution

П.сб.зад-

Градиентный вид уравнения «реакция-диффузия». Приведите уравнение «реакция-диффузия» к градиентному виду $u_t = -\delta F/\delta u$, указав явный вид функционала $F[u]$. Сформулируйте и докажите вариационный принцип (принцип минимальности функционала Ляпунова) для полной производной $F[u]$ по времени. Покажите, что для бистабильной среды функционал достигает локальных минимумов в стационарных состояниях $u(x, t) = u_1$ и $u(x, t) = u_3$. Вычислите его значение $F[u_1]$ для метастабильного и $F[u_3]$ для стабильного состояний 1D-среды длины L . Вынесите суждение об эволюции начального распределения $u(x, 0)$ в зависимости от величины $F[u(x, 0)]$.

Solution

П.сб.зад-

Минимальная распространяющаяся зона. Критическим зародышем (минимальной распространяющейся зоной) стабильной фазы u_3 на фоне метастабильной u_1 называется стационарное решение уравнения «реакция-диффузия» с $u(\pm\infty) = u_1$. Вычислите энергию его образования в рамках скачковой модели $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$, где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда. Как связаны значения параметра β , соответствующие нулевой скорости кинка $v(\beta) = 0$ и бесконечной энергии критического зародыша $e_d(\beta) = \infty$?

Solution

П.сб.зад-

Релаксация возмущения среды. Пусть начальное распределение бистабильной среды $u(x, 0)$ таково, что оно нигде не превосходит значения u_2 , отвечающего минимуму функции $V(u)$. Покажите, что такое распределение не отвечает минимуму функционала F и будет релаксировать к стационарному однородному состоянию $u = u_1$. Аналогичное утверждение можно сделать для любого начального распределения $u(x, 0)$, нигде не опускающегося ниже величины u_2 . Оно неустойчиво и релаксирует к однородному стационарному состоянию $u = u_3$.

Solution

П.сб.зад-

Динамика фазы бистабильной среды. Пусть фаза $u = u_3$ стабильна, а фаза $u = u_1$ метастабильна. Покажите, что любое начальное распределение $u(x, 0)$, для которого $F[u(x, 0)] < 0$, будет релаксировать к однородному состоянию $u = u_3$.

Solution**П.сб.зад-**

Критический зародыш. Определите радиус R_D и энергию образования e_{dD} критического зародыша в рамках скачковой модели $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$ в одномерном ($D = 1$), двумерном ($D = 2$), трехмерном ($D = 3$) случаях. Покажите, что

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{1-2\beta} \right), e_{d1} = 2R_1, & D = 1, \\ \beta &= \frac{I_1(R_2)K_0(R_2)}{I_1(R_2)K_0(R_2) + I_0(R_2)K_1(R_2)}, e_{d2} = \pi R_2^2, & D = 2, \\ \beta &= \frac{R_3 \operatorname{th}(R_3) - 1}{R_3(1 + \operatorname{th}(R_3))}, e_{d3} = \frac{4}{3}\pi R_3^3, & D = 3, \end{aligned}$$

где $I(x), K(x)$ - модифицированные функции Бесселя.

Solution**П.сб.зад-**

Критическое возмущение. Определите критическое возмущение e_{cD} для уравнения «реакция-диффузия»

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_{cD} \delta^D(r) \delta(t)$$

в рамках скачковой модели $f(u, \beta) = -u + \theta(u - \beta)$ в одномерном ($D = 1$), двумерном ($D = 2$) и трехмерном ($D = 3$) случаях. Покажите, что

$$e_{cD} \approx \frac{C_D \beta^{1+D/2}}{(1-2\beta)^{D/2}}$$

где множитель C_D может быть определен только численно.

Solution**П.сб.зад-**

Высокотемпературные сверхпроводники. Для таких сверхпроводников с током характерен быстрый рост электрического сопротивления с температурой. Это приводит к неограниченному джоулеву саморазогреву сверхпроводника при достаточно высоком токе, т.е. его моностабильности. Сверхпроводник описывается уравнением «реакция-диффузия» с функцией источника вида $f(u) = (au - b)\theta(u - b/a)$, где постоянные a, b зависят от тока. Неограниченный разогрев нормальной области сверхпроводника является причиной особого характера развития неустойчивости. Оно осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснение сверхпроводящего участка нормальным и быстрый разогрев нормального участка. Отсутствие стационарной нормальной зоны и ее экспоненциально быстрый разогрев могут служить основанием для названия взрывная неустойчивость. Автомодельное решение типа кинка отсутствует, однако холодные хвосты границы нормальной области распространяются с постоянной скоростью v . С помощью теоретико-групповых соображений найдите зависимость v от a и b .

Solution**П.сб.зад-**

Неустойчивость в моностабильной среде. Развитие неустойчивости инициируется внешними тепловыми возмущениями. Этот процесс имеет пороговый характер, то есть существуют критические возмущения, «запускающие» неустойчивость. Величина энергии критических возмущений e_c для высокотемпературных сверхпроводников может быть найдена при помощи групповых соображений, аналогичных использованным в предыдущей задаче для нахождения скорости v . Найдите зависимость e_c от a и b .

Solution**П.сб.зад-**

Автомодельное решение уравнения теплопроводности. Покажите, что уравнение $u_t = u_{xx}$ с граничными $u(\pm\infty) = 0$ и начальным $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = 1$ условиями инвариантно относительно группы растяжений $t' = L^\alpha t$, $x' = L^\beta x$, $u' = L^\gamma u$ с масштабным фактором L . Найдите α, β и γ . Используя инварианты группы x/\sqrt{t} и $u\sqrt{t}$, найдите автомодельное решение задачи $u(x, t) = e^{-x^2/4t}/\sqrt{4\pi t}$.

Solution**П.сб.зад-**

Тепло сохраняется. Покажите, что для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ начальная энергия возмущения сохраняется со временем $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const}$.

Solution**П.сб.зад-**

Нелинейное уравнение теплопроводности. Покажите, что в уравнении $c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)$ можно «избавиться» от теплоёмкости, приведя его к виду $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$. Для этого сделайте замену $dw = c(u)du$ и перейдите от температуры u к удельной энтальпии $w = \int_0^u c(u') du'$ и температуропроводности $\chi(w) = k(u)/c(u)$.

Solution**П.сб.зад-**

Степенные теплоемкость и теплопроводность. Теплоемкость $c(u) = c_0 u^p$, теплопроводность $k(u) = k_0 u^q$ и функция источника среды $f(u) = f_0 u^r$ являются степенными функциями u . Совершая переход к удельной энтальпии w (см. предыдущую задачу), покажите, что $\chi \sim w^s$ и $F \sim w^t$ - также степенные функции. Определите s, t .

Solution**П.сб.зад-**

Локализация кинка. Оцените величину интервала локализации кинка $\Delta\beta = \beta_F - \beta_p$ на точечной неоднородности $\Gamma\delta(x)$ в пределе слабой неоднородности $\Gamma \ll 1$.

Solution**П.сб.зад-**

Локализация домена. Рассмотрите локализацию домена на точечной неоднородности в одномерном ($D = 1$), двумерном ($D = 2$) и трехмерном ($D = 3$) случаях. В рамках скачковой модели определите интервал локализации $\Delta\beta = \beta_F - \beta_p$.

Solution**П.сб.зад-**

Неустойчивость Тьюринга. Одномерная система двух связанных уравнений «реакция-диффузия»

$$\begin{aligned}\tau_u u_t &= \lambda_u^2 u_{xx} + f(u, v) \\ \tau_v v_t &= \lambda_v^2 v_{xx} + g(u, v)\end{aligned}$$

имеет устойчивое стационарное решение $u_0(\beta), v_0(\beta)$. Исследуйте устойчивость этого решения. Найдите условия, соответствующие возникновению бифуркации Тьюринга.

Solution**П.сб.зад-**

Скорость нервного импульса. Распространение нервного импульса вдоль волокна (аксона) описывается системой уравнений ФитцХьюНагумо с $\tau_u = \varepsilon \ll 1, \tau_v = 1, l_u = 1, l_v = 0$ и

$$\begin{aligned}f(u, v) &= u - u^3/3 - v \\ g(u, v) &= u + a - bv\end{aligned}$$

где u - потенциал мембраны, v - проводимость ионного тока. Это система с восстановлением, когда состояние волокна после прохождения импульса восстанавливается. Найдите скорость импульса $V(\varepsilon)$. Покажите, что при $\varepsilon > \varepsilon_c$ устойчивого решения системы ФитцХью-Нагумо не существует. Оцените время рефрактерности T , необходимое для восстановления волокна после прохождения импульса.

Solution**П.сб.зад-**

Брюсселятор. Найдите стационарное решение $u_0(\beta), v_0(\beta)$ системы двух уравнений «реакция-диффузия» в модели брюсселятора

$$\begin{aligned}f(u, v) &= a + u^2v - bu \\ g(u, v) &= bu - u^2v.\end{aligned}$$

Найдите критические значения управляющего параметра в этих моделях, соответствующие возникновению бифуркации Тьюринга.

Solution

П.сб.зад-

Модель Гирера-Майнхардта. Найдите стационарное решение $u_0(\beta), v_0(\beta)$ системы двух уравнений «реакция-диффузия» в модели Гирера-Майнхардта:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u - B - \beta u^2/v \\ g(u, v) &= v - Cu^2 \end{aligned}$$

Найдите критические значения управляющего параметра $\beta = \beta_c$, соответствующие возникновению бифуркации Тьюринга.

Solution

П.сб.зад-

Контрастная диссипативная структура типа «складки». Такая структура возникает в одномерной среде, описываемой двумя уравнениями «реакция-диффузия» при $\lambda_u/\lambda_v \ll 1, \varepsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u + u^2 + v \\ g(u, v) &= -u - \varepsilon v \end{aligned}$$

и имеет пиковый характер по активатору u . Покажите, что при $\varepsilon < 0$ диссипативная структура состоит из единичного пика с характерным размером $l \approx \lambda_u$, а при $\varepsilon > 0$ и $\lambda_u/\lambda_v < \sqrt{6}$ диссипативная структура представляет собой периодическую структуру с расстоянием между пиками $L \approx \lambda_v$.

Solution

П.сб.зад-

Контрастная диссипативная структура типа «сборки». Такая структура возникает в одномерной среде, описываемой двумя уравнениями «реакция-диффузия» при $\lambda_u/\lambda_v \ll 1, \varepsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \varepsilon^2 u - \varepsilon u^3 + v \\ g(u, v) &= -u - \sqrt{\varepsilon} A - v/\varepsilon \end{aligned}$$

и имеет характер периодически чередующихся доменов активатора u . Покажите, что при $|A| \leq 1/\sqrt{3}$ характерный размер доменной стенки $l \approx \lambda_u$, а размер доменов $2^{-1/2} \ln(2\varepsilon\lambda_v^2/\lambda_u^2) \cdot \lambda_u \leq L \leq \lambda_v$.

Solution

П.сб.зад-

Устойчивость контрастных диссипативных структур. Исследуйте устойчивость контрастных диссипативных структур типа «складки» и «сборки» (см. предыдущие задачи).

Solution**П.сб.зад-**

Самодостройка контрастных диссипативных структур. Численное моделирование показывает, что кинетика образования контрастных диссипативных структур заключается в их равномерной самодостройке с постоянной скоростью. Оцените скорость такой самосборки для контрастных диссипативных структур типа «складки» и «сборки» (см. предыдущие задачи).

Solution**П.сб.зад-**

Оптика автоволн. Закон преломления Морнева. Плоский фронт кинка, описываемого уравнением «реакция-диффузия», распространяется по 2D активной среде со скоростью v_1 . Подходя к линейной границе раздела с областью с другой скоростью распространения v_2 , кинк испытывает преломление. Как связаны углы падения θ_1 и преломления θ_2 фронта кинка? Используя полученный закон преломления (закон Морнева), обсудите вопрос о возможности полного внутреннего отражения автоволн.

Solution**П.сб.зад-**

Ведущий центр. В 2D активной среде, описываемой уравнениями брюсселятора (см. задачу 314), возможен автоволновой режим, при котором концентрические волны активности периодически рождаются и убегают от ведущего центра (пейсмейкера). Получите критерий возникновения пейсмейкера. Найдите период колебаний пейсмейкера T . Исследуйте устойчивость решения такого типа. Может ли пейсмейкер возникать в произвольной точке однородной односвязной среды?

Solution**П.сб.зад-**

Спиральная волна. В 2D активной среде, описываемой уравнениями ФитцХью-Нагумо (см. задачу 313), возможен автоволновой режим, при котором спиральная волна активности (ревербатор) вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижного центра. Получите критерий возникновения ревербатора. Найдите угловую скорость его вращения ω . Исследуйте устойчивость решения такого типа. Может ли ревербатор возникать в произвольной точке однородной односвязной среды?

Solution**П.сб.зад-**

Топологический заряд автоволнового вихря. В среде, описываемой уравнениями ФитцХью-Нагумо, возник ревербатор. Найдите зависимость угловой скорости вращения ревербатора ω от числа рукавов спиральной волны (топологического заряда) N .

Solution**П.сб.зад-**

Конкуренция ревербаторов и пейсмейкеров. В активной 2D среде, описываемой уравнениями ФитцХью-Нагумо (см. задачу 313), возможно совместное сосуществование пейсмейкеров и ревербаторов. Получите критерий их одновременного возникновения. Чья частота (T^{-1} или ω') выше при прочих равных условиях? Кто из них будет поглощать и вытеснять другого?

18.0.6 Упражнения Пухова1**П.сб.зад-**

Коронация императрицы. В день своей коронации (1742 г.) Елизавета Петровна пожелала, чтобы после возложения патриархом на ее голову венца в Успенском соборе Кремля выстрелила пушка в Петропавловской крепости. Способ реализации соответствовал доэлектронной эпохе. На всем протяжении от собора до крепости на расстоянии прямой видимости выставили солдат с флажками. В момент коронации первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его движение, так же последовательно поступили все остальные. а) Если это волна, то что же она перенесла от собора к крепости? б) За какое время по Вашей оценке волна достигнет пункта назначения?

Solution**П.сб.зад-**

Эффект домино. На полу первого этажа ГК от лестницы до лестницы выстроены в линию параллельно друг другу на равных расстояниях костяшки домино. Каждая костяшка поставлена вертикально так, что при падении может повалить соседнюю. Запустив этот процесс, мы получим бегущую вдоль линии волну. а) оцените скорость волны и время, которое ей потребуется, чтобы пробежать всю дистанцию; б) Оцените отношение выделившейся в этом процессе энергии к затравочной энергии, необходимой для того, чтобы его запустить. Оправдывает ли Ваша оценка название этой задачи?

Solution**П.сб.зад-**

Пробка на светофоре. На светофоре скопилась длинная вереница автомобилей. Когда зажёгся зелёный, первая машина тронулась и поехала, за ней вторая и т.д. С какой скоростью бежит назад волна тронувшихся машин? Сколько по Вашей оценке машин успеют тронуться за 60 с?

Solution**П.сб.зад-**

Доплеровское уширение. Что больше: Доплеровское или ударное уширение линии излучения газа при нормальных условиях? Для оценок считайте, что сечение и молекулярная масса газа того же порядка, что и у воздуха.

Solution**П.сб.зад-**

Гравитационное красное смещение. Гамма-квант с энергией 15 кэВ, испущенный ядром железа, летит вертикально вверх в однородном гравитационном поле $g = 10 \text{ м/с}^2$. На высоте 23 м его частотный сдвиг регистрируется при помощи эффекта Мессбауэра на таком же ядре. Согласуется ли результат такого эксперимента $\Delta v/v = 2.5 \cdot 10^{-15}$ с Вашей теоретической оценкой?

Solution**П.сб.зад-**

Постоянная Хаббла. В спектре удаленной галактики линия водорода с длиной волны 4870 Å регистрируется с длиной волны 7300 Å . Независимые данные дают для расстояния до исследуемой галактики 5 миллиардов световых лет. Оцените, исходя из этих данных, постоянную Хаббла H и время жизни Вселенной H^{-1} .

Solution**П.сб.зад-**

Плотность спутника Сириуса. Самая яркая звезда неба Сириус (альфа Большого Пса) имеет в качестве спутника белый карлик с массой порядка массы Солнца $\approx 2 \cdot 10^{33}$ г. Спектроскопические исследования показали, что линии его химических элементов сдвинуты по частоте на $\Delta v/v \approx 7 \cdot 10^{-4}$ в красную сторону. Считая, что это гравитационное красное смещение, оцените среднюю плотность белого карлика.

Solution**П.сб.зад-**

Уравнения Шредингера и Клейна-Гордона. Два волновых пакета $u(x, t)$ имеют одинаковое распределение по волновым числам и среднее k . Движение одного из них описывается уравнением Шредингера $(\hat{e} - \hat{p}^2/2)u = 0$, движение другого - уравнением Клейна-Гордона $(\hat{e}^2 - \hat{p}^2 - 1)u = 0$. Здесь $\hat{e} = i\partial/\partial t$, $\hat{p} = -i\partial/\partial x$, $\hbar = c = m = 1$. У какого из них групповая скорость больше? Покажите, что фазовая и групповая скорости связаны соотношением $v_{\text{г}} v_{\text{ф}} = c^2$.

Solution**П.сб.зад-**

Формула д'Аламбера. Найдите общее решение 1D волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ для начальных условий $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

Solution**П.сб.зад-**

Выполняется ли принцип Гюйгенса. Получите общее решение одномерного волнового уравнения $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Воспользуйтесь заменой переменных (характеристиками) $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. Изобразите

эволюцию решения при а) $\varphi(x) = \delta(x)$, $\psi(x) = 0$; б) $\varphi = 0$, $\psi(x) = \delta(x)$; в) $\varphi(x) = \theta(x+1) - \theta(x-1)$, $\psi(x) = 0$; д) $\varphi(x) = e^{-|x|}$, $\psi(x) = 0$; е) $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \delta'(x)$; ф) $\varphi(x) = \delta(x)$, $\psi(x) = c\delta'(x)$. Демонстрирует ли Ваше решение диффузию волн или иллюстрирует принцип Гюйгенса?

Solution

П.сб.зад-

Уравнения Эйлера-Лагранжа для среды. Обобщите уравнение Эйлера-Лагранжа для среды $u(x, t)$ с плотностью лагранжиана $\mathcal{L}(t, u, u_t, u_x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 0$$

на случаи: а) многомерной среды $u(x, y, z, t)$; б) многокомпонентной среды $\mathbf{u}(x, t)$; в) плотности лагранжиана с высшими производными $\mathcal{L}(t, u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots)$.

Solution

П.сб.зад- Плотность лагражиана.

Подберите подходящую плотность лагранжиана $\mathcal{L}(u, u_x, u_t, \dots)$, дающую а) звуковое волновое уравнение $\rho_{tt} - c^2 \Delta \rho = 0$, б) уравнение мембраны $u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$, в) уравнение Клейн-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$, д) уравнение синус-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$, е) уравнение струны $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, ф) уравнение Шрёдингера $i u_t + u_{xx} - U(x)u = 0$, г) уравнение балки $u_{tt} + c^2 r^2 u_{xxx} = 0$, х) уравнение Буссинеска $u_{tt} - u_{xx} + (uu_x)_x + u_{xxx} = 0$, и) уравнение Кортвега-де Вриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.

Solution

П.сб.зад-

Уравнения движения. Получите уравнения движения поля $u(x, t)$, имеющего плотность лагранжиана: а) $\mathcal{L} = u_t^2/2 - u_x^2/2 - U(u)$; б) $\mathcal{L} = u_t^* u_t / c^2 - u_x^* u_x - u^* u / \lambda^2$; в) $\mathcal{L} = -(\hbar^2/2m) u_x^* u_x - (\hbar/i)(u^* u_t - u u_t^*) - U(x)u^* u$; д) $\mathcal{L} = -2Du_x^* u_x + u_t^* u - u_t u^*$; е) $\mathcal{L} = u_t^2/2 - u_x^2/2 - u_{xt}^2/2$; ф) $\mathcal{L} = u_t^2/2 - u_x^2/2 + (u_{xx})^2/2 - (u_x)^3/6$.

Solution

П.сб.зад-

Вариационный принцип. Получите из вариационного принципа: а) уравнение продольных упругих волн среды с плотностью ρ и модулем Юнга E , б) звуковое уравнение среды с $(\partial P / \partial \rho)_S = c^2$, в) струны с линейной плотностью ρ_1 и натяжением T , д) мембраны с поверхностной плотностью ρ_2 и натяжением σ , е) уравнение Шрёдингера частицы с массой m в потенциале $U(x)$, ф) уравнение Клейн-Гордона релятивистской частицы с массой m .

Solution

П.сб.зад-

Изотермический звук. При каких условиях в среде с температуропроводностью χ и адиабатической скоростью c звук распространяется изотермически для а) воздуха $\chi =$

$2.8 \cdot 10^{-5} \text{ М}^2/\text{с}$, $c = 330 \text{ М}/\text{с}$, б) воды $\chi = 10^{-7} \text{ М}^2/\text{с}$, $c = 1500 \text{ М}/\text{с}$, в) стали $\chi = 10^{-5} \text{ М}^2/\text{с}$, $c = 5200 \text{ М}/\text{с}$? Возможно ли осуществить эти условия физически?

Solution

П.сб.зад-

Температура звука. Найдите распределение температуры в плоской звуковой волне, распространяющейся с частотой ω по среде с температуропроводностью χ .

Solution

П.сб.зад-

Фигуры Хладни. Внешний источник, например скрипичный смычок, возбуждает в мембране колебания $au_{m,n} + bu_{n,m}$, где $u_{m,n}$ - собственная мода мембраны. Нарисуйте фигуры Хладни для: квадратной мембраны а) $m = 1, n = 2, a = b = 1$; б) $m = 1, n = 2, a = -b = 1$; в) $m = 1, n = 3, a = b = 1$; г) $m = 1, n = 3, a = -b = 1$; круглой мембраны е) $m = 0, n = 1, a = b = 1$; ф) $m = 0, n = 1, a = -b = 1$.

Solution

П.сб.зад-

Частоты трубы. Длина тонкой трубы с воздухом равна 1,7 м. Найти частоты, на которых она будет резонировать, если а) труба закрыта с обоих концов; б) труба закрыта с одного конца; в) труба открыта с обоих концов. Вычислите частоту основного тона трубы.

Solution

П.сб.зад-

Колебания частиц воздуха. Человек с хорошим слухом может еще слышать звук с колебанием давления $\approx 10^{-3}$ дин /см² при частоте 2000 Гц.

а) Оцените амплитуду смещения частиц воздуха ($\rho = 1.3 \text{ кг /М}^3$) при таком звуке. Ответ выразите в Å. Сделайте ту же оценку при интенсивности звука б) ноль дБ, в) 60 дБ (спокойный разговор), г) 120 дБ (болевого порог), е) 10^{-12} В/М^2 , ф) 10 В/М^2 .

Solution

П.сб.зад-

Акустические скорости в воздухе. Для воздуха при комнатной температуре ($T = 300 \text{ К}$, $\rho = 1.3 \text{ кг/М}^3$, $\mu = 28 \text{ г/моль}$) вычислите скорость звука c , среднюю скорость молекул $\langle v \rangle$ и скорость колебаний частиц воздуха $\max |u_t|$ в звуковой волне с интенсивностью 60 дБ.

Solution

П.сб.зад-

Адиабатический модуль объемной упругости. Как связаны адиабатический модуль объемной упругости $\kappa_S = v(\partial p / \partial v)_S$ и адиабатическая скорость звука c ? Вычислите

адиабатический модуль объемной упругости для воздуха ($c = 330 \text{ м/с}$, $\rho_0 = 1.3 \text{ кг /м}^3$) и воды ($c = 1500$, $\rho_0 = 10^3 \text{ кг /М}^3$) при нормальных условиях ($\rho_0 = 1 \text{ атм}$).

Solution**П.сб.зад-**

Почему на рыбалке нельзя шуметь? Оцените коэффициенты прохождения звука T из воздуха в воду и из воды в воздух. Объясните, почему мы не слышим рыб, а они нас слышат.

Solution**П.сб.зад-**

Эффект Доплера в отраженном звуке. Неподвижный относительно воздуха источник испускает звук частоты ν_0 . Найти частоту звука ν' , отраженного от стенки, которая удаляется от источника с постоянной скоростью v .

Solution**П.сб.зад-**

Океан. Сжимаемость воды $5 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$. На сколько плотность воды на глубине 10 км больше, чем на поверхности? Считая, что глубина океана $\approx 5 \text{ км}$, оцените изменение его глубины, если бы вода стала несжимаемой.

Solution**П.сб.зад-**

Сжимаемость. Сжимаемость ртути, воды и воздуха $3 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$ и 0.7 атм^{-1} , а плотности 13.6, 1 и $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ г-см}^{-3}$. Определите скорости звука в этих средах.

Solution**П.сб.зад-**

Глубоководный взрыв. В океане на глубине 1 км произошел подводный взрыв 1 кг тротила, при котором образовался пульсирующий газовый пузырь. Оценить период пульсаций этого пузыря.

Solution**П.сб.зад-**

Береговые волны. Скорость волны на мелкой воде уменьшается с уменьшением глубины. Прямой фронт такой волны падает под углом к берегу, дно которого полого уходит под воду. Почему фронт волны искривляется, стараясь повторить форму берега?

Solution**П.сб.зад-**

Истребитель и радар. Истребитель летит на радар, работающий на длине волны $\lambda = 20$ см. Какова скорость самолета v (в км/ч), если регистрируемая радаром частота биений между посылаемым и принимаемым сигналами составляет $\Delta\nu = 2778$ Гц?

Solution**П.сб.зад-**

Геометрия акустических резонаторов. Найдите вид и частоту основной моды колебаний резонаторов в форме а) круглой мембраны, б) квадратной мембраны, в) прямоугольного параллелепипеда, г) шара. Радиусы и стороны перечисленных фигур одинаковы, границы закреплены. Какая из основных частот минимальна?

Solution**П.сб.зад-**

Колебания стрелы в полете. Нарисуйте основную моду собственных колебаний стрелы в полете. Считая стрелу одномерной, укажите граничные условия для смещений на ее концах. Исходя из этого, нарисуйте форму следующей по счету моды собственных колебаний стрелы.

Solution**П.сб.зад-**

Фотон в волноводе. При распространении в волноводе с поперечным размером a фотон приобретает массу m . Оцените ее характерную величину в тракте Вашей домашней микроволновки.

Solution**П.сб.зад-**

Рабочая частота микроволновки. Ширина камеры домашней микроволновки, в которой Вы разогреваете пищу, составляет ≈ 30 см. Оцените частоту поля в камере ν . Чему на самом деле равна эта частота ν' , если принять во внимание, что СВЧ-мощность к камере еще нужно как-то подвести. Вернувшись домой, сравните Вашу оценку с данными, выбитыми на задней стенке микроволновки.

Solution**18.0.7 Упражнения Пухова2****П.сб.зад-**

Кило- и гигагерцы. Найдите частоту основных а) акустических, б) электромагнитных колебаний в) консервной банки диаметром 30 см и высотой 10 см, г) жестяного куба с ребром 20 см.

Solution**П.сб.зад-**

Акустический канал в океане. На глубинах между 500 м и 1000 м существует горизонтальный слой воды, в котором скорость звука $c = 1.5$ км/с существенно отличается от скорости звука выше и ниже этого слоя. В какую сторону она отличается по величине, если известно, что звук в этом слое распространяется на аномально большие расстояния (волноводный эффект)? При каких частотах звука возможно наблюдение этого эффекта?

Solution**П.сб.зад-**

Уравнение простой волны. Подберите простую замену переменных, сводящую уравнение простой волны Римана $u_t + c(u)u_x = 0$ к уравнению Хопфа $u_t + uu_x = 0$.

Solution**П.сб.зад-**

До первого ДТП. Посмотрим на трафик на шоссе как на движение одномерной бесстолкновительной среды. В начальный момент распределение скоростей автомобилей вдоль шоссе $u_0(x)$ имеет вид: а) $U_0(1 - \text{th}(x/L_0))$; б) $U_0(\pi/2 - \arctg(x/L_0))$; в) $U_0/(1 + (x/L_0)^2)$;

д) $U_0 \exp(-x^2/L_0^2)$, где $U_0 = 60$ км/ч, $L_0 = 500$ м. Через какое время τ произойдет первое ДТП? е) Что при этом будет с плотностью числа автомобилей на шоссе $n(x, t)$?

Solution**П.сб.зад-**

Тепловой скин-эффект. а) Глубина, на которую зарывают трубы септика на даче, обычно не превышает L метров. Оцените величину L для средней полосы России, где температуропроводность грунта $\chi \approx 2 \cdot 10^{-3}$ см²/с. Какова, в свете Вашей оценки, глубина L' , на которой следует вырывать погреб под домом? б) На какой глубине годовые колебания температуры грунта сдвинуты на полпериода по отношению к поверхности? в) На какую долю периода сдвинуты колебания температуры на глубине промерзания δ ?

Solution**П.сб.зад-**

Метод характеристик. Используя метод характеристик, решите задачу Коши $u(x, 0) = u_0(x)$ для следующих уравнений: а) $u_t + uu_x = 0$; б) $u_t + uu_x = 1$; в) $u_t + uu_x \pm vu = 0$.

Solution**П.сб.зад-**

Давление звука на поверхности. Найдите давление, оказываемое плоской акустической волной в воздухе, при нормальном падении на полностью отражающую поверхность.

Частота звука $f = 1$ кГц, амплитуда смещения частиц воздуха $a = 10^{-5}$ см, плотность воздуха $\rho_0 = 1,3$ кг /М³, скорость звука $c = 330$ м/с.

Solution

П.сб.зад-

Интегралы движения. Найдите один-два интеграла движения для уравнения с граничными условиями $u(\pm\infty) = u_x(\pm\infty) = \dots = 0$: а) диффузии $u_t = \nu u_{xx}$; б) Бюргерса $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$; в) Кортевега-де Фриза $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$; д) Шредингера $i u_t + u_{xx} = v(x)u$; е) Римана $u_t + c(u) \cdot u_x = 0$; ф) Хопфа $u_t + uu_x = 0$.

Solution

П.сб.зад-

Температура паров. Полуширина желтой линии $\lambda = 0,59$ мкм паров натрия ($\mu = 23$ г/моль) равна $\Delta\lambda = 2$ пм. Определите температуру T этих паров.

Solution

П.сб.зад-

Углы падения и преломления. Нарисуйте график зависимости угла преломления θ_2 от угла падения θ_1 луча света на границу раздела двух диэлектриков для случая: а) $n_1 < n_2$, б) $n_1 > n_2$.

Solution

П.сб.зад-

Динамика продольного движения газа в трубке. Опишите динамику продольного движения газа в узкой трубке так, что частицы газа движутся параллельно оси трубки. Опишите граничные условия для открытых и закрытых концов трубки.

Solution

П.сб.зад-

Звук на ветру. Известно, что интенсивность звука быстро падает с расстоянием, когда звук распространяется против ветра. Если источник звука и человек находятся примерно на одной высоте, то в направлении ветра звук слышен лучше, чем в противоположном. Как объяснить это явление? Почему так трудно слышать кричащих против ветра?

Solution

П.сб.зад-

Угловые зеркала. Квадратные зеркала приставлены друг к другу так, что образуют прямой а) двугранный; б) трехгранный угол. Что Вы увидите, посмотревшись в такое зеркало?

Solution

П.сб.зад-

Вопрос П.Н. Лебедева. Почему, когда Вы смотрите в зеркало, то правое и левое меняются местами, а верх и низ - нет?

Part V

—— Special Topics in Continuum Mechanics in a Nutshell ——

19 Special Models

19.0.1 Ideal liquid: other properties

Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Волны во вращающейся жидкости

Об определениях и основных уравнениях идеальной жидкости.

Непрерывность среды,

число Деборы,

непрерывные потоки

Задача тысячелетия на один миллион долларов.

19.0.2 Пограничные слои, обтекаемость, подъемная сила: special properties

Ламинарный пограничный слой

Движение вблизи линии отрыва

Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Логарифмический профиль скоростей

Турбулентное течение в трубах

Турбулентный пограничный слой

Кризис сопротивления

Хорошо обтекаемые тела

Индуктивное сопротивление

Подъемная сила тонкого крыла

19.0.3 Волны на свободной поверхности, пузыри, капли

(тут не только об этом, мб несколько разделов создам, пока так)

Лагранжиан потенциальных несжимаемых течений со свободной поверхностью в общем виде.

Пузыри и капли. (!!?)

(все нужные формулы про них!!!)

Канонические переменные.

Закон дисперсии поверхностных волн.

Асимптотическое разложение гамильтониана по степеням малого параметра нелинейности.

Конкуренция дисперсии и нелинейности в бегущей волне, уравнение Кортевега-де-Вриза, солитоны.

Конформные переменные в плоской задаче со свободной границей.

Задача о возбуждении волн ветром.

[3, 2, 7, 8, 12, 13, 6].

19.1 Some non-stationary effects

19.1.1 Диффузия

(see more kinetics about it)

Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

Коэффициенты диффузии и термодиффузии.

Диффузия взвешенных в жидкости частиц.

19.2 Fluid with viscosity: other properties

19.2.1 Точные решения для вязкой жидкости

(наверняка тут многое есть, поэтому отдельный раздел)

Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

19.2.2 Нелинейное резонансное взаимодействие волн.

см птф-[2, 6, 9, 10].

Редукция гамильтонианов.

Задача волн.

Взрывная неустойчивость.

Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей

(для слабонелинейной квазимонохроматической волны.)

Волновые коллапсы.

Слабонадкритические неустойчивости, образование структур.

Волновая турбулентность.

Кинетическое уравнение.

Каскад энергии и волнового действия.

19.2.3 Гидродинамика в конденсированных средах

(?? мб потом большой раздел будет, пока не занимался этим)

Электроны в графене и парадокс Стокса.

(??)

19.3 Hydrodynamics of non-typical media

19.3.1 Реакционно-диффузионная модель, ZFK, KPP–Fisher equations

(см Пухова методичку чуть что, прикольное явление, но не актуально пока что)

Основное

Основные формулы (???)

(спишу у Пухова!)

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

Рассмотрим решения вида $u(x, t) = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$ - автомодельная переменная, координата в сопутствующей системе, двигающейся с фронтом кинка; с граничными условиями $u(-\infty) = u_3, u(+\infty) = u_1$.

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u) = 0.$$

Часто появляется параметр β в f , этот параметр отражает влияние на систему.

Механическая аналогия для УРД

Введем аналог потенциала

$$V(u) = \int_0^u f(u') du'$$

$$u_{\xi\xi} = -\frac{\partial V}{\partial u} - vu_{\xi}$$

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u') du' = 0$$

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u', \beta_p) du' = 0$$

Фазовая плоскость УРД

На плоскости (u, u_ξ) уравнение (3) имеет три особые точки, из которых стационарные точки $(u_1, 0)$ и $(u_3, 0)$ являются седлами, а точка $(u_2, 0)$ - фокусом.

Точно решаемые модели

$$f(u) = -\alpha(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

Нетрудно показать, что в этом случае сепаратриса представляет собой параболу:

$$u_\xi = \text{const} (u - u_1)(u - u_3)$$

$$v = \sqrt{\alpha/2} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

Приближение малых скоростей кинка

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p), \quad u(\xi) = u_0(\xi) + \delta u(\xi),$$

$|\delta u| \ll u_0$. u_0 - стационарное.

Задача на собственное значение может быть решена по теории возмущений методом итераций. Нулевое приближение: $v = 0, u = u_0(\xi)$, удовлетворяющее уравнению

$$u_{0\xi\xi} + f(u_0, \beta) = 0$$

может быть решено в квадратурах:

$$\xi = \int_{u_1}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{2[V(u_1) - V(u)]}}.$$

Домножая (3) на u_ξ и интегрируя по координате ξ от $-\infty$ до $+\infty$, для скорости получаем

$$v = \frac{V(u_3, \beta) - V(u_1, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi}$$

Варьируя числитель (13) по β , имеем

$$\delta V(u_3, \beta) = \delta u_3 \partial V(u_3, \beta) / \partial u + \delta \beta \partial V(u_3, \beta) / \partial \beta$$

С учетом $\partial V(u_3, \beta) / \partial u = f(u_3, \beta) = 0$ для $\delta v = v$ получаем

$$v = \frac{\left. \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{u_1}^{u_3} f(u, \beta) du \right) \right|_{\beta_p}}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi}^2 d\xi} (\beta - \beta_p).$$

Таким образом, вблизи параметра распространения $\beta \approx \beta_p$ скорость кинка меняется линейно

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p).$$

Приближение больших скоростей кинка

$$u_{\xi\xi} + \frac{\partial V}{\partial u} \approx 0$$

$$u_{\xi}|_{u_2} \approx -\sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} \approx 0$$

$$u_2 - u_1 = v^{-1} u_{\xi}|_{u_2}$$

скорость быстрых кинков в приближении Зельдовича:

$$v \approx (u_2 - u_1)^{-1} \sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

$$v \approx (u_3 - u_1)^{-1} \sqrt{2 \int_{u_1}^{u_3} f(u') du'}.$$

Качественно, почему такие картинки?

(общий ответ тоже хочется услышать, а не только уравнения и результаты моделирования)

О другом про УРД (??)

(что еще важно - сюда потом тоже напишу.)

Элементарные УРД модели и решения (???)

(тут к Левену подготовка.)

19.3.2 Особа аэродинамика: эфф. Магнуса, бумеранг

(другие тоже сюда дописывать буду)

Эффект Магнуса наличия дополнительной силы на вращающиеся объекты

О применениях эффекта Магнуса

Спортивные игры очень сильно используют это: в настольном теннисе, в футболе профессионалы обязательно умеют закручивать шары и мячи, гольф, большой теннис.

А еще парус некоторых кораблей так работает, отклоняя перпендикулярные ветры (???)

Так что по сути очень важный эффект.

Бумеранг (?????)

(когда-то напишу тут, как же он работает? хз, нужно минимум день думать про это)

19.3.3 Особенности струй жидкостей

Эффект Коандэ (???)

Струя жидкости, вытекающая из сопла, стремится отклониться по направлению к стенке и при определенных условиях прилипает к ней. Это объясняется тем, что боковая стенка препятствует свободному поступлению воздуха с одной стороны струи, создавая вихрь в зоне пониженного давления. Аналогично и поведение струи газа. На основе этого эффекта строится одна из ветвей пневмоники (струйной автоматики).

Выпрыгивание падающей струи

(есть такой эффект, почти не думал про него)

19.3.4 Суспензии, колебания в жидкостях

Вязкость суспензий

Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твердых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью η , отличной от вязкости η_0 основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объем всех частиц предполагается малым по сравнению с объемом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (А. Эйнштейн, 1906).

Колебательное движение в вязкой жидкости

19.3.5 Сверхтекучая гидродинамика, возбуждения, конденсаты,

см ПТФ-[4, 5, 11].

Спектр элементарных возбуждений в квантовой бозе-жидкости и явление сверхтекучести.

Двухскоростная гидродинамика.

Квантованные вихревые нити.

Вихревая решетка, волны Ткаченко.

(специфика, статьи про это гуглятся, не изучал пока)

Сверхтекучая турбулентность.

Слабо неидеальный бозе-газ при нуле температур, уравнение Гросса-Питаевского.

Неустойчивость конденсата и коллапс волновой функции в случае притяжения.

19.4 Sound and acoustics: Other Properties

Излучение звука

74.Излучение звука

$$4\pi a = \dot{V}$$

Таким образом, на расстояниях r , удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$, движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}$$

С другой стороны, на расстояниях $r \gg \lambda$ (в волновой зоне) φ должно представлять расходящуюся сферическую волну, т. е. иметь вид

$$\varphi = -\frac{f(t - r/c)}{r}.$$

Поэтому мы приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с l) вид

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t - r/c)}{4\pi r}$$

получающийся заменой в $\dot{V}(t)$ аргумента t на $t - r/c$.

75. Возбуждение звука турбулентностью

76. Принцип взаимности

Звук в трубке, рассеяние, поглощение

77. Распространение звука по трубке

78. Рассеяние звука

79. Поглощение звука

80. Акустическое течение

81. Вторая вязкость

20 Special Applications

20.1 Very special applications in physics

20.1.1 Горение

(см Ландау, большая тема)

128. Медленное горение 129. Детонация 130. Распространение детонационной волны
131. Соотношение между различными режимами горения 132. Конденсационные скачки

20.1.2 Ударные волны: other models

(?? see Landau)

Ударные волны в политропном газе.

Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Распространение ударной волны по трубке

Косая ударная волна

Ширина ударных волн

Ударные волны в релаксирующей среде

Изотермический скачок

Слабые разрывы

20.1.3 Cosmological applications

(см. пока запись по космологии, потом и сюда это пропишу когда-то)

Общая идея космологии и жидкостей на космологических масштабах

(описание вообще общей концепции)

Формулы (???)

Consider a non-relativistic fluid with mass density ρ , pressure $P \ll \rho$ and velocity \mathbf{u} . Denote the position vector of a fluid element by \mathbf{r} and time by t . The equations of motion are given by basic fluid dynamics. ¹ Mass conservation implies the continuity equation

$$\partial_t \rho = -\nabla_r \cdot (\rho \mathbf{u})$$

while momentum conservation leads to the Euler equation

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_r) \mathbf{u} = -\frac{\nabla_r P}{\rho} - \nabla_r \Phi$$

The last equation is simply " $F = ma$ " for a fluid element. The gravitational potential Φ is determined by the Poisson equation

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

20.1.4 гравитационных волнах в средах

(см. пока отдельная запись)

Затухание гравитационных волн по ЛЛ6.25

(??? интересно, но это специфика)

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{Mex}} &= \rho \int \bar{v}^2 dV = \rho \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dV \\ \bar{E}_{\text{mex}} &= 2\rho k^2 \int \bar{\varphi}^2 dV \end{aligned}$$

Затухание волн удобно характеризовать коэффициентом затухания γ , определенным как отношение

$$\gamma = \left| \bar{\dot{E}}_{\text{Mex}} \right| / (2\bar{E})$$

20.1.5 Об атмосфере Земли и погоде

(это можно всю жинь изучать, но что-то напишу. Может, увеличу потом раздел)

20.1.6 выработке энергии из аэро- и гидродинамики

Part VI

Другие темы

(потом второстепенные темы понижу в приоритетности, пока это не фильтровал, структура Ландау.)

21 Другие известные модели

21.1 Распространение и устойчивость УРД по Пухову

21.1.1 Одномерные автомодельные решения УРД

1. Уравнение кинка

Автоволновые режимы являются аналогом автоколебаний для распределенных сред, описываемых уравнением «реакция-диффузия» (1). Основными типами автоволновых режимов является распространение одиночных волн переключения (кинков) и одиночных бегущих импульсов (автосолитонов). Распространение с постоянной скоростью волны стационарного профиля (с не изменяющейся формой фронта) в нелинейном уравнении «реакция-диффузия» - довольно неожиданный результат, впервые установленный независимо для волн популяций и генов (Колмогоров-Петровский-Пискунов, 1937; Фишер, 1938) и для волн горения (Зельдович, Франк-Каменецкий, 1938).

Основным типом структуры, возникающей в простых (однокомпонентных) бистабильных средах, является автоволна переключения (кинк). При её распространении среда из состояния $u = u_1$ переходит (переключается) в состояние $u = u_3$. Кинк (англ. kink - изгиб, перегиб), движущийся со скоростью v , представляет собой частное (автомодельное) решение (1) вида $u(x, t) = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$ - автомодельная переменная, координата в сопутствующей системе, двигающейся с фронтом кинка; с граничными условиями $u(-\infty) = u_3, u(+\infty) = u_1$. Для $u(\xi)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u) = 0$$

Фактически (3) представляет собой нелинейную краевую задачу на собственное значение v .

2. Механическая аналогия для УРД

Для качественного анализа уравнения (3) удобно воспользоваться следующей «механической» аналогией. Если ввести функцию потенциальной энергии

$$V(u) = \int_0^u f(u') du'$$

то уравнение (3) приобретает вид уравнения Ньютона для частиц единичной массы с координатой u , зависящей от времени ξ . Частица движется в потенциале $V(u)$ при наличии вязкого трения:

$$u_{\xi\xi} = -\frac{\partial V}{\partial u} - vu_{\xi}$$

Для бистабильной среды в точках $u = u_1$ и $u = u_3$ функция $V(u)$ имеет максимумы, а в промежуточной точке $u = u_2$ она имеет локальный минимум. Предположим, что $V(u_3) > V(u_1)$, то есть согласно (4) алгебраическая площадь под кривой $f(u)$ положительна:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u) du.$$

Решение типа кинка с его граничными условиями тогда приобретает наглядный физический смысл. Оно соответствует ситуации, когда частица скатывается с горки высотой $V(u_3)$ из положения $u = u_3$ с нулевой начальной скоростью при $-\infty$ начальном времени и забирается на горку высотой $V(u_1)$. При этом существует единственное значение коэффициента трения v , при котором потеря энергии частицы на трение в точности компенсируется разницей потенциалов $V(u_3) - V(u_1)$. Тогда частица попадает в положение $u = u_1$ так же с нулевой скоростью при $+\infty$ конечном времени. Это условие однозначно определяет как скорость распространения v , так и форму фронта $u(\xi)$ кинка. Скорость v положительна при $V(u_3) > V(u_1)$ и отрицательна при $V(u_3) < V(u_1)$ (фаза $u = u_1$ среды вытесняет фазу $u = u_3$). Скорость кинка обращается в ноль (волна переключения покоится, имеет место фазовое равновесие) при выполнении условия $V(u_3) = V(u_1)$, аналогичного теореме равных площадей Максвелла [6, 9, 25, 26]:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u') du' = 0$$

Если нелинейность $f(u, \beta)$ среды зависит от какого-либо управляющего параметра β (тока, температуры охладителя, скорости реакции и т.д.), то условие (6) определяет значение параметра распространения β_p , при котором кинк покоится:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u', \beta_p) du' = 0$$

3. Фазовая плоскость УРД

Качественный анализ уравнения (3) можно произвести также при помощи фазовой плоскости.

Действительно, на плоскости (u, u_ξ) уравнение (3) имеет три особые точки, из которых стационарные точки $(u_1, 0)$ и $(u_3, 0)$ по стандартной классификации [5, 6] являются седлами, а точка $(u_2, 0)$ - фокусом.

При произвольном выборе величины v имеется разнообразный набор неограниченных и осциллирующих решений (3), не удовлетворяющих граничным условиям (3). Существует единственное значение v , при котором траектория идет из седла в седло, то есть является сепаратрисой. Это значение и определяет скорость кинка, а сепаратриса форму его фронта.

4. Точно решаемые модели

Точных аналитических методов, позволяющих решить нелинейную краевую задачу (3) и рассчитать скорость кинка при произвольной $f(u)$, не существует [1-4]. Поэтому представляют большой интерес частные случаи, которые допускают точное решение. Они приведены в качестве задач в конце пособия. Здесь укажем только случай, когда $f(u)$ представляет собой кубический полином:

$$f(u) = -\alpha(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

Нетрудно показать, что в этом случае сепаратриса представляет собой параболу:

$$u_\xi = \text{const} (u - u_1) (u - u_3)$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой (9) в (3), которая позволяет найти константу (9). Профиль фронта при этом имеет вид гиперболического тангенса, а скорость кинка равна

$$v = \sqrt{\alpha/2} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

Несколько других примеров, допускающих точное решение, приведены в конце пособия в качестве задач.

5. Приближение малых скоростей кинка

Поскольку задача (3) определения собственного значения v нелинейна, обычно при расчете скорости волн переключения приходится использовать приближенные и асимптотические методы. Рассмотрим сначала приближение медленных волн, когда параметр β близок к параметру распространения β_p . Вблизи параметра распространения $v(\beta) \sim (\beta - \beta_p)$, а профиль фронта кинка близок к покоящемуся $u(\xi) = u_0(\xi) + \delta u(\xi)$, $|\delta u| \ll u_0$. Задача на собственное значение может быть решена по теории возмущений методом итераций. Нулевое приближение: $v = 0, u = u_0(\xi)$, удовлетворяющее уравнению

$$u_{0\xi\xi} + f(u_0, \beta) = 0$$

может быть решено в квадратурах:

$$\xi = \int_{u_1}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{2[V(u_1) - V(u)]}}.$$

Домножая (3) на u_ξ и интегрируя по координате ξ от $-\infty$ до $+\infty$, для скорости получаем

$$v = \frac{V(u_3, \beta) - V(u_1, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi}$$

Варьируя числитель (13) по β , имеем

$$\delta V(u_3, \beta) = \delta u_3 \partial V(u_3, \beta) / \partial u + \delta \beta \partial V(u_3, \beta) / \partial \beta$$

С учетом $\partial V(u_3, \beta) / \partial u = f(u_3, \beta) = 0$ для $\delta v = v$ получаем

$$v = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{u_1}^{u_3} f(u, \beta) du \right) \Big|_{\beta_p}}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi} (\beta - \beta_p).$$

Таким образом, вблизи параметра распространения $\beta \approx \beta_p$ скорость кинка меняется линейно

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p).$$

6. Приближение больших скоростей кинка

При стремлении управляющего параметра к границам интервала бистабильности $[\beta_-, \beta_+]$ скорость кинка достигает своих максимальных положительных $v(\beta_+)$ и отрицательных $v(\beta_-)$ значений. Их величина будет оценена ниже при исследовании устойчивости кинка. Кроме того, приближенный способ её расчета может быть дан в важном частном случае (Зельдович, Франк-Каменецкий, 1938), когда функция $f(u)$ достигает больших положительных значений в узком интервале $u_2 < u < u_3$, $|u_3 - u_2| < u$ и является отрицательной, малой по модулю в интервале $u_1 < u < u_2$. Такая ситуация характерна для волн горения [10]. Обратимся к механической аналогии. На участке $u_2 < u < u_3$ происходит быстрый разгон частицы; потенциальная сила $f(u)$ велика по сравнению с силой вязкого трения $-vu_\xi$, которой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + \frac{\partial V}{\partial u} \approx 0$$

Тогда, интегрируя (15), понимаем, что при u_2 скорость частицы достигает значения

$$u_\xi|_{u_2} \approx -\sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

На участке же $u_1 < u < u_2$, наоборот, основное влияние на движение частицы оказывает сила вязкого трения, тогда как потенциальной силой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + vu_\xi \approx 0$$

Уравнение (17) описывает торможение частицы, имеющей в точке u_2 начальную скорость (16). Собственное значение определяется из условия, что в конце длины торможения $u_2 - u_1$ частица остановится с нулевой скоростью через время $\xi \rightarrow \infty$, $u(+\infty) = u_1$, $u_\xi(+\infty) = 0$. Интегрируя (17) по ξ , получаем

$$u_2 - u_1 = v^{-1}u_\xi|_{u_2}$$

Приравнявая (18) и (16), находим скорость быстрых кинков в приближении Зельдовича:

$$v \approx (u_2 - u_1)^{-1} \sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

Вспоминая теперь, что согласно сделанным выше предположениям о свойствах функции $f(u)$ величина $v(u_2)$ близка к $v(u_1)$, а значение u_2 мало отличается от u_3 , для скорости кинка получаем

$$v \approx (u_3 - u_1)^{-1} \sqrt{2 \int_{u_1}^{u_3} f(u') du'}.$$

То же рассуждение можно провести и на фазовой плоскости. Ниже мы увидим, что (20) является хорошей оценкой максимальной скорости кинка по порядку величины и в случае произвольного вида нелинейной функции $f(u)$.

3. Критический зародыш стабильной фазы (домен)

(у пухова отдельная часть, объясняю это тем, что он плохо умеет писать книги.)

Проведенное выше рассмотрение показывает, что из двух устойчивых фаз бистабильной среды u_1 и u_3 одна является метастабильной, а другая - абсолютно стабильной. Критерием является знак v (направление движения кинка), т.е.

метастабильна та фаза, у которой ниже горка потенциала. Абсолютно стабильной является та фаза среды, которая при данных параметрах вытесняет метастабильную. Поскольку метастабильная фаза, тем не менее, устойчива по отношению к малым возмущениям, возникает проблема расчета критического зародыша, которого достаточно, чтобы инициировать переход всей распределенной системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. Форме критического зародыша (домена, лат. *domen* - область) ставится в соответствие стационарное решение (2), то есть решение уравнения (1) с граничными условиями $u(\pm\infty) = u_1$ при $v = 0$. На языке механической аналогии это означает, что частица спускается без трения с горки $V(u_1)$, достигает точки поворота u_m при $\xi = 0$ и возвращается обратно. Для нахождения формы критического зародыша с центром в точке $\xi = 0$ можно воспользоваться решением в квадратурах (12), а величина $u(0) = u_m$ в центре зародыша определяется равенством

$$\int_{u_1}^{u_m} f(u, \beta) du = 0$$

Это соотношение также представляет собой правило площадей, модифицированное на случай критического зародыша [25-27]. В случае $\beta < \beta_p$, когда метастабильна фаза $u = u_3$, его форма находится аналогично. Ниже мы увидим, что критический зародыш представляет собой стационарное, но абсолютно неустойчивое решение УРД. Это значит, что энергия его образования может служить оценкой величины критического возмущения, достаточного для инициации нелинейной стадии развития неустойчивости.

21.1.2 4УРД для 2D- и 3D-бистабильных сред

В этом разделе мы приведем несколько количественных результатов, относящихся к двумерным и трехмерным бистабильным средам. Ясно, что проведенное выше рассмотрение одномерных волн переключения справедливо и для волн с плоским фронтом, распространяющихся в 2D- или 3D-бистабильной среде. Возникает вопрос, как будут распространяться волны с искривленным фронтом?

Рассмотрим сначала волны переключения в двумерной бистабильной среде. Очевидно, что всякую волну с искривленным фронтом можно разбить на совокупности достаточно малых участков, каждый из которых представляет собой сегмент окружности. Поэтому найдем закон расширения кругового фронта, радиус R которого велик по сравнению с шириной фронта волны $R \gg 1$. В полярной системе координат (r, φ) с учетом аксиальной симметрии фронта ($\partial^2 u / \partial \varphi^2 = 0$) УРД имеет вид

$$u_t = r^{-1} u_r + u_{rr}.$$

Пусть $v(R)$ есть мгновенная скорость распространения фронта с локальным радиусом R . С учетом сделанных выше приближений такой фронт отвечает автомодельному решению

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - v(R)t$$

дифференциального уравнения

$$u_{\xi\xi} + (v(R) + 1/r)u_{\xi} + f(u) = 0$$

с граничными условиями $u(+\infty) = u_1$ и $u(-\infty) = u_3$. Заметим, что координата ξ , конечно, формально не может принимать сколь угодно больших отрицательных

значений, в силу полярности системы координат. Однако величина u экспоненциально мало отличается от u_3 уже на небольшом удалении от фронта волны, поэтому граничные условия справедливы в приближении $R \gg 1$.

Кроме того, фактически производная u_r в (22) отлична от нуля лишь в пределах узкого фронта волны вблизи значения $r = R$. В том же приближении $R \gg 1$ во втором слагаемом (24) можно приближенно положить $r = R$. Тогда (24) принимает вид

$$u_{\xi\xi} + (v(R) + 1/R)u_{\xi} + f(u) = 0$$

полностью совпадающий с одномерным уравнением (3) для плоской волны переключения, если положить $v = v(R) + 1/R$. Идентичны также граничные условия, которым должны удовлетворять оба эти решения. Поэтому, если известна скорость движения плоской волны переключения, то скорость распространения фронта с радиусом кривизны можно выразить как

$$v(R) = v - \frac{1}{R}$$

Следовательно, выпуклый фронт движения медленней, чем плоский. Более того, если R достаточно мало, направление движения может смениться на обратное. Области достаточно малых размеров не растут, а сокращаются. Критический радиус области, которая не растёт и не сокращается, равен

$$R_c = \frac{1}{v}$$

Такая область и представляет собой критический зародыш «новой» ($u = u_1$) фазы в «старой» ($u = u_3$): если радиус области чуть-чуть увеличится, то она начинает расти, если же его слегка уменьшить, то область сокращается и исчезает. Здесь имеется полная аналогия с фазовыми переходами первого рода, что и является основанием для названия критический зародыши (домен).

Следует напомнить, что выражение (26) является асимптотическим и верно лишь для больших зародышей, с радиусом значительно большим ширины фронта $R \gg 1$. Это условие выполнено, если скорость распространения плоского фронта мала.

Полученный результат имеет еще один важный физический смысл. Соотношение (26) обеспечивает устойчивость плоского фронта по отношению к малым возмущениям его формы. Если на фронте появляется выступ, т.е. выпуклый участок, он станет сдвигаться с меньшей скоростью, и возмущенный участок фронта выравнивается.

Для волн переключения в 3D-бистабильных средах рассмотрение проводится совершенно аналогично. Скорость перемещения выпуклого 3D-фронта равна

$$v(R) = v - \frac{2}{R}$$

а 3D-критический зародыш имеет радиус

$$R_c = \frac{2}{v}$$

Выражение (29) является асимптотическим и справедливо при $R_c \gg 1$.

21.1.3 Устойчивость одномерных автомодельных решений УРД

Рассмотрим теперь важный вопрос об устойчивости автомодельных решений УРД. Начнем с однородных стационарных состояний.

1. Устойчивость однородных стационарных состояний

Линейный анализ устойчивости производится следующим образом. Исходное состояние $u_i (i = 1, 2, 3)$ слабо возмущается $u(x, t) = u^i + \delta u(x, t)$. Если любое малое возмущение затухает, то состояние устойчиво. Подставляя возмущенное решение в (1) и учитывая $u_t^i = u_{xx}^i + f(u^i) = 0$, получаем уравнение в вариациях:

$$\delta u_t = \delta u_{xx} + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i) \delta u$$

Решение (30) пишется в стандартном виде: $\delta u(x, t) = e^{\lambda t} \psi(x)$ где, λ - инкремент. Однако, учитывая, что (1) - уравнение с постоянными коэффициентами, $\psi(x)$ можно разложить в интеграл Фурье и сразу исследовать устойчивость Фурье-гармоники $\sim e^{\lambda(k)t} e^{ikx}$. Подставляя разложение $\delta u(x, t)$ в (30), получаем дисперсионное соотношение:

$$\lambda(k) = -k^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i)$$

из которого видно, что наиболее «опасными» в этом случае являются однородные возмущения с $k = 0$. При этом состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ ($\partial f / \partial u(u_i) < 0$) устойчивы, а состояние $u = u_2$ ($\partial f / \partial u(u_i) > 0$) - нет. Этот вывод совпадает с качественным рассмотрением, данным выше.

2. Устойчивость кинка

Здесь нам понадобится все наше умение отличать то, что легко, от того, что правильно. Проф. Альбус Дамблдор

Теперь рассмотрим устойчивость движущегося кинка $u(x, t) = u_k(x - vt)$. Перейдем в систему отсчёта, движущуюся вместе с кинком $t \rightarrow t, x \rightarrow \xi + vt$. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$u_t = u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u)$$

а уравнение в вариациях для малого возмущения $\delta u(\xi, t)$:

$$\delta u_t = \delta u_{\xi\xi} + v\delta u_{\xi} + \frac{\partial f[u_k(\xi)]}{\partial u} \delta u$$

Так же, как и для (30), решение (33) ищется в виде $\sim e^{\lambda(k)t} e^{ikx}$, однако теперь (33) представляет собой уравнение с переменными коэффициентами. Это значит, что (33) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля с граничными условиями $\delta u(\pm\infty, t) = 0$ и оператором $L = \partial^2 / \partial \xi^2 + vW(\xi) \partial / \partial \xi$, где $W(\xi) = -\partial f[u_k(\xi)] / \partial u$. Сразу отметим, что оператор L не является самосопряженным. Поэтому сначала для того, чтобы качественно разобраться в вопросе об устойчивости, рассмотрим простейший случай покоящегося кинка: $v = 0$.

В этом случае оператор L - самосопряженный, а уравнение (33) полностью аналогично уравнению Шредингера. При этом $-\lambda$ играет роль энергии, а $W(\xi)$ - потенциальной энергии частицы. Легко видеть, что в случае кинка потенциал $W(\xi)$ представляет собой несимметричную яму с $W(-\infty) = -\partial f(u_3) / \partial u$ и $W(+\infty) = -\partial f(u_1) / \partial u$. Глубина ямы равна $\max |\partial f / \partial u|$, найденному на участке $\partial f / \partial u < 0$. Дискретный набор уровней этой ямы и будет определять устойчивость кинка. Сразу отметим, что в яме всегда есть уровень $\lambda = 0$. Действительно, (33) удовлетворяется тождественно, если в качестве волновой функции взять $\psi = \partial u_k / \partial \xi$. Этот факт не чувствителен к небольшим «шевелениям» функции $f(u)$ при сохранении её качественного вида. Наличие собственного значения $\lambda = 0$ имеет ясный физический смысл и связано с трансляционной инвариантностью уравнения

(33), т.е. отсутствием явной зависимости от x . Действительно, решение УРД можно сместить на любое расстояние a , так что $u_k(\xi + a)$ также будет решением (33). Если a мало, то

$$u_k(\xi + a) = u_k(\xi) + a \frac{\partial u_k}{\partial \xi}.$$

Таким образом, $\partial u_k / \partial \xi$ является решением уравнения в вариациях при $\lambda = 0$. Это позволяет вынести суждение о знаке остальных собственных значений λ_k в полном решении уравнения (33):

$$\delta\psi(\xi) = \sum_k \psi_k(\xi) e^{\lambda_k t}$$

Действительно, при $v = 0$ оператор L эрмитов, и к задаче может быть применена осцилляционная теорема. Наименьшему собственному значению (основному состоянию) соответствует собственная функция без узлов. Поскольку $u_k(\xi)$ имеет вид доменной стенки, то $\partial u_k / \partial \xi$ имеет вид гауссова колпачка! Это означает, что все остальные значения λ_k отрицательны и кинк устойчив.

Теперь рассмотрим случай движущегося кинка: $v \neq 0$. Оператор L можно привести к самосопряженному виду при помощи замены:

$$\psi(\xi) = e^{-v\xi/2} \varphi(\xi).$$

Тогда для новой собственной функции $\varphi(\xi)$ мы получаем ту же задачу Штурма-Лиувилля, но с потенциалом $W(\xi) \rightarrow W(\xi) + v^2/4$. Эффективно это сводится к тому, что с ростом скорости кинка v потенциальная яма сдвигается вверх на величину $v^2/4$. Это обстоятельство позволяет дать качественную оценку максимально возможной скорости кинка. Действительно, поскольку из-за наличия уровня $\lambda_0 = 0$ дно ямы не может подняться выше нуля, максимальная скорость кинка приблизительно равна

$$\frac{v^2}{4} \approx \max \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|,$$

где производная берется на участке положительного наклона функции $f(u)$. Легко убедиться, что эта оценка совпадает с приближенным выражением для скорости кинка (20) в пределе больших скоростей (приближение Зельдовича).

3. Устойчивость домена

Теперь рассмотрим устойчивость критического зародыша стабильной фазы (домена) $u_d(\xi)$. Действуем совершенно аналогично. Форма домена $u_d(\xi)$ имеет вид колпачка, то есть $\partial u_d(\xi) / \partial \xi$ имеет один узел. В соответствии с осцилляционной теоремой это означает, что выше уровня $\lambda_1 = 0$ существует еще один положительный уровень $\lambda_0 > 0$. Таким образом, критический зародыш абсолютно неустойчив: он либо «рассасывается», либо эволюционирует в участок новой фазы, распространяющейся затем на весь образец. Время разрушения домена $\approx \lambda_0^{-1}$ можно оценить в пределе домена большой длины $\beta \rightarrow \beta_p$. В этом случае потенциал $W(\xi)$ можно представить себе как совокупность двух ям, разделенных большим расстоянием $R \gg 1$. Каждая яма локализована возле одной из двух стенок домена, где $\partial u_d(\xi) / \partial \xi$ велико. Тогда уровни представляют собой расщепленную пару близких уровней λ_1 и λ_0 , где по-прежнему $\lambda_1 = 0$ [8, 9]:

$$\lambda_0 \sim e^{-R}$$

То есть, при $\beta \rightarrow \beta_p$ домен эквивалентен двум удаленным $R \gg 1$ и покоящимся доменным стенкам (кинку и антикинку) и практически стабилен. Такую ситуацию на языке температурных доменов в металлах принято называть стабильностью в «режиме постоянного тока» [7, 23, 27]. Следует отметить, что в «режиме постоянного напряжения» температурный домен практически всегда стабилен [27].

21.1.4 Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. Фазовые волны

До сих пор мы рассматривали бистабильные среды, где имеется два устойчивых, $u = u_1, u = u_3$, и одно неустойчивое $u = u_2$ однородные стационарные состояния. Волну переключения, распространяющуюся в такой среде, поэтому естественно назвать триггерной.

Помимо триггерных, возможно существование фазовых [6, 8, 10] волн переключения. Они осуществляют переключение среды из состояния хотя и стационарного, но неустойчивого по отношению к малым возмущениям. Это возможно, если функция $f(u)$ обращается в ноль лишь при двух значениях: неустойчивом $u = u_2$ и устойчивом $u = u_3$.

Исторически такие среды были первыми, рассмотренными при помощи УРД в 1937 г. независимо и одновременно Колмогоровым, Петровским и Пискуновым в задаче о волнах заселения среды популяцией и Фишером в задаче о распространении ареала гена.

Пусть, например, в среде идет процесс размножения и диффузии популяции. Число новых организмов, рождающихся в единицу времени, пропорционально числу уже имеющихся организмов u и массе пищи, убывающей с ростом u . Тогда нелинейную функцию $f(u)$ можно представить в виде

$$f(u) = \alpha u(1 - u)$$

Может возникнуть вопрос, зачем вообще рассматривать задачу о распространении волны по неустойчивой среде. Казалось бы, малые флуктуации, всегда присутствующие в реальных системах, должны разрушить неустойчивое однородное состояние еще до прихода волны переключения. Так и произошло бы при рассмотрении системы физической или химической природы. В задаче же о распространении биологического вида спонтанное рождение организмов невозможно, поэтому малые флуктуации в незаселенном состоянии отсутствуют. Поэтому оно сохраняется до тех пор, пока пришедшая волна не внесет в него «затравку» в виде некоторого числа организмов. Итак, рассмотрим волну переключения (заселения среды), описывающуюся в стационарном режиме решением уравнения (3) с правой частью вида (39) с граничными условиями вида

$$u(+\infty) = u_2 = 0, u(-\infty) = u_3 = 1$$

Качественно проанализировать свойства такого решения можно на языке механической аналогии. Частица скатывается с горки $V(u_3)$ из точки $u = u_3$ в бесконечно удаленный момент времени $\xi \rightarrow -\infty$. Она должна попасть в яму потенциала $V(u_2)$ в точку $u = u_2$ асимптотически, то есть при $\xi \rightarrow +\infty$. Это возможно, только если коэффициент трения не слишком мал: $v > v_{\min}$. Иначе частица придет в точку $u = u_2$ за конечное время и с ненулевой скоростью и продолжит движение в сторону меньших значений, нарушив тем самым необходимые граничные условия. Таким образом, в отличие от триггерных волн, где значение скорости кинка имеет единственное значение, для фазовых волн возможен целый спектр значений $v > v_{\min}$. Для фазовых волн с большой скоростью $v \gg 1$ в

уравнении (3) можно пренебречь диффузией: $vu_\xi + f(u) = 0$ и получить форму профиля быстрой фазовой волны в квадратурах:

$$-v^{-1}\xi = \int_{u(0)}^u \frac{du'}{f(u')}$$

Таким образом, чем больше скорость волны v , тем более пологим является её профиль.

Еще большую информацию о волне может дать рассмотрение фазовой плоскости. На фазовой (u, u_ξ) плоскости уравнения КПП (39) имеется две особые точки: $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Можно показать, что (см. задачи) точка $(0, 0)$ является неустойчивым узлом при всех $v > v_{\min}$, где

$$v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$$

В остальных случаях это неустойчивый фокус, что соответствует осциллирующим и отрицательным решениям, которые, как мы видели выше, неустойчивы. Особая точка $(1, 0)$ является седлом для любых положительных $v \geq 0$. Таким образом, каждому значению скорости $v > v_{\min}$ соответствует устойчивая фазовая волна. Континуум этих волн обладает одним замечательным свойством. Любое начальное распределение $u(x, 0)$ реалистического вида (скажем, в форме ступеньки), обращающееся в ноль правее определенной величины x , всегда будет эволюционировать в фазовую волну с минимальной скоростью $v = v_{\min}$. То есть начальное распределение эволюционирует в профиль, который движется направо, не изменяя формы с минимально возможной скоростью. Идея доказательства этого факта заключается в том, чтобы рассмотреть нестационарную скорость распространения фронта. Её можно определить как скорость перемещения точки $X(t)$ на фронте волны, в которой $u(X(t), t)$ равно некоторой определенной, фиксированной величине $u(X(t), t) = U$. Рассмотрение задачи Коши показывает, что эта скорость меньше, чем граничная скорость v_{\min} и при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к этому пределу. Таким образом, из бесконечного набора стационарно распространяющихся решений в действительности осуществляется лишь одно, являющееся устойчивым. Действительно, если в результате решения задачи Коши получен выход на стационарный режим распространения автоволны, то тем самым доказана и её устойчивость по отношению к малым возмущениям.

Выход на режим стационарного распространения можно наглядно проиллюстрировать, рассмотрев передний хвост волны, в котором $u(x, t) < U \ll 1$. В хвосте $u(x, t)$ мало, и уравнение КПП можно линеаризовать:

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

После замены $u(x, t) = e^{\alpha t} \tilde{u}(x, t)$ это уравнение сводится к уравнению диффузии: $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$. Его решением при $t \rightarrow \infty$ (далеко от области локализации начального распределения $u(x, 0)$), как известно, является

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

где $c = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx$. Для $u(x, t)$ в «хвосте» фронта получаем

$$u(x, t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t} + \alpha t}$$

Таким образом, точка на фронте с фиксированным значением $u(X(t), t) = U$ распространяется по закону $X(t)$:

$$\ln U = \ln \frac{c}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\ln t}{2} + \alpha t - \frac{X^2}{4t}$$

или, при $t \rightarrow \infty$, асимптотически:

$$X(t) = 2\sqrt{\alpha}t \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \frac{\ln t}{t} + \dots \right)$$

со скоростью $dX(t)/dt = 2\sqrt{\alpha} - 1/(\sqrt{\alpha}t) + \dots$. Значит, скорость фронта стремится снизу к своему постоянному пределу $v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$.

21.2 Зарождение и эволюция УРД по Пухову

21.2.1 Вариационный принцип. Градиентная форма УРД. Функционал Ляпунова

Проведенный в предыдущей главе анализ устойчивости однородных и неоднородных решений УРД по отношению к малым возмущениям оставляет открытыми ряд важных вопросов. Являются ли волны переключения единственным возможным типом установившегося волнового режима в бистабильной среде? Что происходит при столкновении двух таких волн? Какова последующая эволюция произвольного начального распределения $u(x, 0)$? Ответы на эти вопросы помогает получить подходящим образом сформулированный для УРД вариационный принцип. Это можно сделать, придав УРД (1) градиентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u}$$

подобрав соответствующий функционал Ляпунова $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x) dx$ (см. задачу 1). Здесь вариационная производная определяется обычным образом: $\delta F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right) \delta u dx$ или, что то же самое,

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} = \lim_{\int \delta u(x') dx' \rightarrow 0} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int \delta u(x') dx'},$$

где вариация $\delta u(x')$ локализована вблизи точки $x' = x$. Нетрудно показать, что для УРД следует выбрать

$$F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} (u_x)^2 - V(u) \right] dx$$

где потенциал $V(u)$ определяется выражением $V(u) = \int_0^u f(u') du'$.

Из (48) следует, что величина F не возрастает с течением времени независимо от выбора исходного состояния среды - начального распределения $u(x, 0)$. Действительно, полная производная функционала Ляпунова по времени равна

$$\frac{dF}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta F[u]}{\delta u(x, t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

или, с учетом (48):

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta F}{\delta u} \right)^2 dx.$$

Видно, что в любой момент времени (52) является неположительной величиной. Это означает, что выбранная в форме (50) величина F действительно является функционалом Ляпунова. Или, в терминах теории фазовых переходов, F представляет собой термодинамический потенциал для параметра порядка $u(x, t)$. В соответствии с этим стационарным состоянием среды соответствуют минимумы функционала F , а эволюция системы с течением времени заключается в приближении к одному из таких стационарных состояний. Этот вариационный принцип позволяет ответить на вопросы, сформулированные в начале этого параграфа.

1. Стационарные однородные состояния среды

Отметим прежде всего, что состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ всегда устойчивы по отношению к малым возмущениям. В самом деле, слабое возмущение одного из этих состояний $\delta u(x)$ приводит к изменению функционала δF , складывающегося из двух частей. Во-первых, из-за изменения u становится отличным от нуля первое слагаемое в (50), пропорциональное $(u_x)^2$, и поэтому положительное. Во-вторых, из-за изменения $u(x)$ возрастает и второе слагаемое в (50), поскольку выбранные нами однородные решения u_1 и u_3 отвечают максимумам $V(u)$. Видно, что обе возникающие добавки к F положительны, и, следовательно, любое малое неоднородное возмущение $\delta u(x)$ может приводить лишь к возрастанию функционала Ляпунова. Это и означает устойчивость однородных состояний $u = u_1$ и $u = u_3$ по отношению к малым возмущениям.

2. Начальное распределение в форме кинка

Пусть начальное распределение имеет форму волны переключения из метастабильной $u = u_1$ в стабильную $u = u_3$ фазу среды. Распределение такого типа «глобально» неустойчиво, поскольку всегда можно понизить значение функционала F , сдвигая границу между областями в сторону метастабильной фазы. Действительно, если сдвинуть фронт волны на величину a , не изменяя его формы, то вклад первого слагаемого в (50), очевидно, не из-за второго слагаемого будет отрицательным: $-aV(u_3)$. В результате последовательности таких сдвигов (распространение кинка), в конце концов, установится стационарное однородное распределение $u = u_3$.

Особой является ситуация, когда оба минимума F при $u = u_1$ и $u = u_3$ имеют одинаковую глубину: $V(u_1) = V(u_3)$, то есть выполняется условие неподвижности кинка: $\beta = \beta_p$. В этом случае в среде возможно стационарное сосуществование двух фаз, разделенных плоским переходным слоем. Такое фазовое равновесие не отвечает абсолютному минимуму функционала F из-за наличия неоднородности переходного слоя между фазами. Тем не менее мы не можем понизить значение F , сдвигая границу. Это означает, что фазовое равновесие является «безразличным», т.е. обладает нейтральной устойчивостью.

3. Начальное распределение в форме кинка и антикинка. Аннигиляция кинков

Пусть в тех же условиях, $V(u_3) > 0$, начальное распределение представляет собой участок фазы $u = u_3$ на фоне фазы $u = u_1$ или наоборот. С точки зрения примера, рассмотренного в предыдущем пункте, такое распределение соответствует паре кинк-антикинк. Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что оно релаксирует

к однородному распределению $u = u_3$. Это, в частности, означает, что две столкнувшиеся автоволны переключения всегда полностью гасят друг друга.

4. Начальное распределение в форме критического зародыша

Выше мы отмечали, что оба однородных состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ устойчивы относительно малых возмущений. Абсолютному же минимуму функционала F соответствует, однако, лишь одно из них, с наибольшим значением $V(u_i)$. Другое состояние при этом будет метастабильным. Если система первоначально находилась в метастабильном состоянии, то, создав достаточно большое возмущение, её можно перевести в наиболее устойчивое состояние, отвечающее более глубокому (абсолютному) минимуму функционала F . Одной из возможных форм таких критических возмущений и является критический зародыш.

Действительно, существует значительная аналогия между рассматриваемыми явлениями и фазовыми переходами I рода. В соответствии с этой аналогией однородные распределения u_1 и u_3 , которым соответствует минимум F , являются фазами системы. Если данная фаза соответствует лишь локальному, а не абсолютному минимуму F , её называют метастабильной. Метастабильная фаза неустойчива по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри неё возник достаточно большой зародыш устойчивой фазы, то он начинает расти и формирует две разбегающиеся волны переключения (пара кинк-антикинк), после расхождения которых среда переходит в наиболее однородное устойчивое состояние.

Размер и форма критического зародыша определяется конкуренцией двух факторов. С одной стороны, образование зародыша, внутри которого $u(x)$ близко к u_3 , выгодно для системы, поскольку это уменьшает второе слагаемое в (50). С другой стороны, неоднородность $u(x)$ внутри зародыша приводит к возрастанию первого слагаемого в (50) и появлению положительного вклада в F . Это означает, что форма критического зародыша соответствует стационарному, но абсолютно неустойчивому неоднородному решению уравнения (1). Это возможно только при $F[u(x)] = 0$, что как раз и соответствует профилю критического зародыша $u = u_d(x)$, полученному ранее, в главе 1.

5. Достаточное условие перехода среды в абсолютно устойчивое состояние

В заключение этого параграфа укажем достаточное условие разрушения метастабильного состояния $u = u_1$ начальным возмущением $u(x, 0)$. Нетрудно убедиться, что $F[u_1] = 0$ и $F[u_3] < 0$. Таким образом, если $F[u(x, 0)] > 0$, то дальнейшую эволюцию возмущения однозначно предсказать невозможно. Однако если $F[u(x, 0)] < 0$, то, в силу $dF/dt < 0$, финальной стадией такой эволюции может быть только однородное состояние $u = u_3$. Это условие доставляет нам достаточное, но не необходимое условие перехода среды из «холодного» в «горячее» состояние.

9. Критические возмущения в бистабильной среде

Выше мы установили, что каждая из фаз $u = u_1$ и $u = u_3$ бистабильной среды устойчива по отношению к малым возмущениям. Однако одна из них является метастабильной, т.е. может быть разрушена достаточно сильным возмущением. Пусть для определённости это будет «холодная» фаза $u = u_1$. Это значит, что возмущение с достаточно большой энергией переводит среду из состояния $u = u_1$ в состояние $u = u_3$. Таким образом, процесс перехода носит пороговый характер. Возмущение, действующее на среду, характеризуется своей мощностью $w(x, t)$, которую следует добавить в правую часть УРД (1). В задаче имеется естественный масштаб времени 1. В соответствии с этим возмущения удобно разделить на длительные (со временем действия 1) и

импульсные (со временем действия 1). Длительное возмущение аналогично неоднородности среды. Поэтому даже без детальных вычислений ясно, что в результате действия длительных возмущений в среде либо возникают метастабильные структуры типа локализованных в неоднородностях доменов [27], либо среда переводится в «горячее» состояние вследствие распространения кинка и антикинка [25, 26]. Поэтому наибольший интерес представляет рассмотрение импульсных возмущений. За время действия возмущения выделяется энергия

$$e = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dt dx$$

Если энергия возмущения мала, то возникшее в результате возмущения начальное распределение $u(x, 0)$ будет расплываться за счет диффузии, и первоначальное однородное состояние среды $u = u_1$ восстановится. Если же энергия возмущения достаточно велика, то в результате его действия формируются две доменные стенки (кинк и антикинк), которые разбегаются друг от друга и переводят образец в абсолютно стабильное однородное состояние $u = u_3$. Возникает задача определения критической энергии $e = e_c$, где

$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, 0) - u_1] dx$$

достаточной для перехода. Такая терминология возникла в нелинейных тепловых задачах, где u играет роль температуры.

В общем случае величина критической энергии e_c определяется решением нелинейного дифференциального уравнения и может быть найдена только численно. Однако поскольку в задаче есть естественный масштаб длины (ширина фронта кинка 1), то все возмущения естественным образом делятся на два класса. Это протяженные возмущения с шириной начального распределения $\gg 1$ и локальные возмущения с шириной $\ll 1$. Рассмотрим сначала протяженные возмущения.

21.2.2 Протяженные возмущения

Разрушение «холодного» состояния $u = u_1$ протяженными возмущениями также представляет собой сложную нелинейную задачу. Однако по порядку величины e_c может быть оценена как энергия e_d неустойчивого доменного решения u_d (см. [25-27]), представляющего собой критический зародыш «горячей» фазы. Выше было показано, что такое решение удовлетворяет стационарному уравнению

$$(u_d)_{xx} + f(u_d) = 0$$

с граничными условиями $u_d(\pm\infty) = u_1$. Наиболее просто энергия критического зародыша $e_d = \int_{-\infty}^{+\infty} [u_d(x, 0) - u_1] dx$ может быть получена в рамках скачковой модели $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$. Тогда УРД приобретает вид $u_{dxx} - u_d + \theta(u - \beta) = 0$. Интегрируя его по x от $-\infty$ до $+\infty$, для e_d получаем $e_d = 2R$, где $2R$ - длина критического зародыша $u_d(R) = \beta$. Величину R можно получить из решения того же стационарного УРД:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - 2\beta} \right)$$

Таким образом, для энергии критического зародыша получаем

$$e_d = \ln \left(\frac{1}{1 - 2\beta} \right)$$

Данный результат допускает обобщение на двух- и трехмерный случаи (см. задачу 18).

2. Локальные возмущения

Рассмотрим теперь локальные импульсные возмущения длительностью $\ll 1$, действующие на область среды с размером $\ll 1$. Тогда возмущение среды после действия такого импульса в одномерном случае будет описываться уравнением

$$u_t = u_{xx} + f(u, \beta) + e\delta(x)\delta(t).$$

Критической энергии соответствует минимальное значение $e = e_c$, начиная с которого зародившаяся горячая фаза неограниченно расширяется на весь образец. Из (58) видно, что $e_c(\beta)$ является универсальной функцией, зависящей лишь от размерности задачи D и одного безразмерного управляющего параметра β . Поскольку (58) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных, то функция $e_c(\beta)$ может быть найдена только численно. Однако в рамках скачковой модели

$$f(u, \beta) = -u + \theta(u - \beta)$$

качественный анализ задачи позволяет получить асимптотическую оценку для функции $e_c(\beta)$. Рассмотрим качественно физическую интерпретацию эволюции зародыша горячей фазы в этом случае.

Ясно, что вблизи границы интервала бистабильности $\beta \approx 1$ время существования горячей фазы, возникающей под действием импульсного возмущения, мало: $(1 - \beta)$. Поэтому основным механизмом «рассасывания» возмущения является диффузия тепла вдоль среды, а величину критической энергии можно оценить как $e_c = \Delta u \cdot l^D$, где $\Delta u \approx \beta$ - характерное изменение u в нагретой (возмущенной) области, l - характерный размер этой области. Величину l можно получить из (58), оценив по порядку величины

$$\frac{\Delta u}{l^2} \approx 1 - \gamma \Delta u$$

где γ - численный коэффициент порядка единицы, пока неизвестный. Поскольку очевидно, что вблизи параметра распространения $\beta \approx \beta_p = 1/2$ скорость кинка $v \rightarrow 0$, то критическая энергия $e_c \rightarrow \infty$, а с ней и $l \rightarrow \infty$. Это значит, что в (60) следует положить $\gamma = 2$. Тогда для размера прогретой области l получаем

$$l \approx \sqrt{\frac{\Delta u}{1 - 2\Delta u}} \approx \sqrt{\frac{\beta}{1 - 2\beta}}.$$

Соответственно для величины критической энергии e_c имеем

$$e_c \approx \frac{C_D \beta^{\frac{D}{2}+1}}{(1 - 2\beta)^{D/2}}.$$

Множитель C_D в (62) может быть определен только численно [31]. В другом предельном случае, когда управляющий параметр близок к параметру распространения $\beta \approx \beta_p$, основным механизмом «рассасывания» возмущения является уменьшение и за счет функции источника $f(u)$, которая в данном случае работает как «сток». Тогда,

пренебрегая в (1) положительным вкладом в $f(u)$, получаем линейное уравнение диффузии «со стоком» $u_t = u_{xx} - u$. Его решение хорошо известно [42]:

$$u(x, t) = \frac{e}{(2\sqrt{\pi t})^D} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t} - t}$$

Размер прогретой области тогда можно определить из условия $u(l, t) \approx \beta$. Поскольку время существования возмущенной области в этом случае велико, $\sim \ln(l)$, зависимостью предэкспоненциального множителя от времени в (63) можно пренебречь. Тогда для зависимости l от t получаем

$$l^2 = 4t \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) - 4t^2$$

и, следовательно, максимальный размер прогретой области, достигнутый за время действия возмущения l_m , равен

$$l_m \approx \ln \left(\frac{1}{\beta} \right).$$

Теперь величину критической энергии $e = e_c$ можно оценить из условия, что максимальная длина возмущенной области равна размеру критического зародыша горячей фазы: $l_m \approx R_d$. Например, в одномерном случае ($D = 1$) $R_1 = -\frac{1}{2} \ln(1 - \beta/2)$, что даёт $e_c \approx \beta \exp(R_1)$, т.е. $e_c \approx (1 - 2\beta)^{-1/2}$. Эта оценка согласуется с (62), что говорит о правильности оценки численного фактора γ . Численные множители в (65) могут быть получены только путём численного решения (58). Например, в одномерном случае ($D = 1$) получается [31]

$$e_{c1} = 2.3(1 - 2\beta)^{-1/2}.$$

Данный результат допускает обобщение на двумерный и трехмерный случаи (см. задачу 18).

Сравним теперь величины e_c и e_d . Соотношение между ними зависит от величины β . Из сказанного выше следует, что $e_d \gg e_c$ при $\beta \approx 1$ и $e_d \ll e_c$ при $\beta \approx 1/2$. Поскольку разрушение холодного состояния инициируется в основном возмущением с минимальной критической энергией, от β зависит сам характер разрушения метастабильного состояния. При $\beta \approx 1$ наибольшую «опасность» представляют локальные импульсы, а величина критической энергии существенным образом зависит от деталей динамики $u(x, t)$. Вблизи $\beta \approx 1/2$ метастабильное состояние разрушается в результате возникновения неустойчивых зародышей горячей фазы, то есть наиболее «опасными» являются возмущения с пространственным размером ~ 1 . В этом случае величина e_c порядка e_d и не зависит от конкретной динамики среды $u(x, t)$ после действия возмущения.

21.2.3 УРД для моностабильной среды. Критические возмущения и нелинейная стадия развития неустойчивости в моностабильной среде

Целый ряд сильнонеравновесных физических систем (активных сред) описывается 3D-нелинейным уравнением типа «реакция-диффузия»:

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, а u в зависимости от характера диссипативного процесса может представлять собой температуру среды, концентрацию реагентов, электрическое поле и т.д. Ниже для определенности под величиной u будем подразумевать температуру. Характер нелинейной стадии развития неустойчивости в таких системах полностью определяется видом функции источника $f(u)$. Например, для бистабильных систем переход между двумя устойчивыми состояниями среды $u(x, y, z, t) = u_1$ и $u(x, y, z, t) = u_2$ осуществляется посредством распространения по ней автоволны переключения. В одномерном случае асимптотическое поведение такой волны $u(x, t) = u(x - vt)$ характеризуется постоянством скорости ее распространения v . Способы приближенного вычисления скорости волны и ее зависимость от параметров задачи были описаны ранее, в первой главе.

Однако в целом ряде ситуаций бистабильность утрачивается системой (сильная зависимость диссипации от температуры, резкое возрастание дифференциальной проводимости и т.д.). При превышении температурой u в какой-либо области среды порогового значения u_2 происходит ее неограниченный саморазогрев. Это обстоятельство является причиной особого характера развития неустойчивости в моностабильной среде и структуры фронта нелинейной автоволны $u(x, y, z, t)$, разделяющей «горячую» и «холодную» области среды.

Рассмотрим сначала одномерный случай ($D = 1$). Уравнение (67) не имеет автомодельного решения типа бегущей автоволны $u(x, t) = u(x - vt)$ в силу неограниченного увеличения температуры «горячей» области при $u(x, t) > u_2$. Однако для целого ряда моностабильных активных сред численное моделирование показало [32-34], что, несмотря на нестационарность температуры $u(x, t)$ в «горячей» области среды, фронт движется с постоянной скоростью v . Таким образом, распределение $u(x, t)$ в «холодном» хвосте фронта имеет вид $u(x, t) = u(x - vt)$, и в системе, движущейся вместе с волной, удовлетворяет асимптотически ($u \cong u_1$) уравнению (67). В достаточно общем виде нелинейную функцию источника $f(u)$ можно представить как [33, 34]

$$f(u) = au^m(u^n - b),$$

где m, n, a, b - произвольные положительные величины, $b = u_2^n$. Отсутствие автомодельного решения не позволяет определить величину скорости v стандартными методами [6-11] теории распространения автоволн конечной амплитуды как собственное значение уравнения (67) с граничными условиями $u_x(\pm\infty) = 0$. Для нахождения величины v в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями [35-37]. Будем считать, что степени m и n фиксированы, а a и b являются управляющими параметрами задачи. Тогда уравнения (67), (68) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида [35-37]

$$x = L^{-p}x', u = L^q u', v = L^p v', a = L^{2p+(1-m-n)q} a', b = L^{nq} b',$$

представляющих собой группу растяжений с масштабным фактором L . Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (67), (68) относительно преобразования (69) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (67), (68). Это приводит к тому, что группа преобразований (69) содержит свободные параметры L, p и q , которые могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости v в (67), (68) есть функция только a и b : $v = F(a, b)$. Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (69), т.е. $v' = F(a', b')$. Будем искать решение в виде $v \propto a^r b^s$, где степени r и s подлежат определению. Тогда

$$v/(a^r b^s) = L^{p(2r-1)+q(ns+(1-n-m)r)} v'/(a'^r b'^s)$$

и из условия инвариантности $v/(a^r b^s) = v'/(a'^r b'^s)$ получаем $p(2r-1) + q(ns + (1-m-n)r) = 0$. В силу произвольности p и q в (69) получаем однозначные выражения для степеней: $r = 1/2$, $s = (m+n-1)/2n$. Итак, для скорости v имеем

$$v \propto a^{1/2} b^{(m+n-1)/2n}.$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (71) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты, либо привлечение дополнительных соображений [32-34].

В симметричных двумерном ($D = 2, r = \sqrt{x^2 + y^2}$) и трехмерном ($D = 3, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) случаях автомодельность является приближенной: $u(x, t) \cong u(x - vt)$, и при $r \gg 1$ для скорости фронта волны получаем $x_t = v - (D-1)/r$. Кривизна фронта вызывает замедление волны, что приводит к логарифмической поправке в равномерном распространении фронта: $r \cong vt - v^{-1}(D-1)\ln(t)$. Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (67), (68) позволяет получить функциональную зависимость v от управляющих параметров при любой размерности задачи.

Отметим, что рассмотренные особенности нелинейной стадии развития неустойчивости в моностабильной активной среде сближают ее с так называемыми режимами с обострением. Такие режимы возникают в задачах о нелинейных активных средах с сильной зависимостью теплоемкости и тепловыделения от температуры, описываемых уравнением

$$u^k u_t = \nabla(u^l \nabla u) + f(u).$$

Применяя рассмотренную выше процедуру к уравнениям (68), (72), для скорости фронта волны получаем [32-34]

$$v \propto a^{1/2} b^{(m+n+l-2k-1)/2n}.$$

Однако, используя этот результат, следует принимать во внимание, что для режима с обострением может быть характерен «взрывной» характер развития неустойчивости, когда температура среды обращается в бесконечность за конечное время ($m+n-k-1 > 0$).

Отдельно следует исследовать вопрос о критических возмущениях, инициирующих развитие неустойчивости. Инициация развития неустойчивости в сильнонеравновесных физических системах (активных средах) внешними возмущениями имеет пороговый характер, причем наиболее «опасными» являются локальные и импульсные возмущения, обладающие минимальной критической энергией. Действие локального импульсного критического возмущения в активной среде (67), (68) описывается уравнением

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t)$$

где $\Delta = r^{-(D-1)} \partial(r^{D-1} \partial/\partial r) / \partial r$ - радиальная часть лапласиана, r и t - безразмерные координата и время, $\delta^D(r) = (k_D r^{D-1})^{-1} \delta(r)$, k_D - геометрический фактор ($k_1 = 1, k_2 = 2\pi, k_3 = 4\pi$). Как отмечалось выше, величина критической энергии e_c полностью определяется видом функции источника $f(u)$.

Для моностабильной среды зависимость $f(u)$ описывается уравнением (68). Такая среда имеет одно устойчивое состояние $u = u_1 = 0$ и при превышении температурой u в достаточно большой области среды порогового значения u_2 происходит ее неограниченный

саморазогрев. Для нахождения величины e_c в этом случае также можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями. Действительно, уравнения (68), (74) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида [32 – 34]

$$t = L^{2p}t', r = L^p r', u = L^q u', e_c = L^{q+Dp} e'_c, \\ a = L^{-2p+(1-m-n)q} a', b = L^{nq} b'.$$

Как и при вычислении скорости, степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (68), (74) относительно преобразования (75) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (68), (74). Используя процедуру, описанную выше, для критической энергии e_c имеем [32-34]

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{(1-D(m+n-1)/2)/n}$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (76) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты, либо привлечение дополнительных соображений. Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (68), (74) позволяет получить функциональную зависимость e_c от управляющих параметров при любой размерности задачи.

Из (75) следует, что с ростом пороговой температуры $u_2 = b^{1/n}$ устойчивость моностабильной среды по отношению к внешним возмущениям возрастает - при не слишком больших значениях m, n критическая энергия e_c растет степенным образом. Обсудим это условие подробнее. Рассмотренный выше метод вычисления критической энергии e_c применим и для активных сред с сильной зависимостью теплоемкости и теплопроводности от температуры, описываемых уравнением

$$u^k u_t = \nabla (u^l \nabla u) + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t).$$

Здесь $\nabla (u^l \nabla u) = r^{-(D-1)} \partial (r^{D-1} u^l \partial u / \partial r) / \partial r$. Применяя описанную выше процедуру к уравнениям (24), (32), для критической энергии e_c получаем

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{(k+1-D(m+n-l-1)/2)/n}.$$

Для таких сред характерно наличие так называемых режимов с обострением. В частности, при условии

$$m + n - k > 1$$

происходит тепловой взрыв: температура достаточно большой, однородно прогретой области среды (диффузия тепла от границ мала по сравнению с диссипацией внутри области) обращается в бесконечность за конечное время [32-34]. Из (78) видно, что в этом случае существенным образом меняется зависимость критической энергии e_c от пороговой температуры $u_2 = b^{1/n}$. Так, при

$$m + n - k > 1 + 2/D + l + k(2/D - 1)$$

величина e_c убывает степенным образом с ростом u_2 , то есть стабильность среды снижается с ростом пороговой температуры.

Отметим, что условие (80) может быть более «жестким», чем условие (79). Физический смысл поправки в (80) связан с локальностью разогрева среды внешним возмущением. Энергия возмущения расходуется не только на разогрев и расширение области «горячей» фазы ($u > u_2$), но и на диффузию тепла от ее границ. Быстрый рост теплоемкости ($\sim u^k$) и теплопроводности ($\sim u^l$) затрудняет процесс образования в среде области «горячей» фазы, достаточной для инициации развития неустойчивости [32-34].

1. Взрывные режимы и режимы с обострением для УРД

Суть же метода, мной применённого тут,
Объяснить я подробней готов, Если есть у вас пара свободных минут
И хотя бы крупица мозгов.
Л. Кэрролл. Охота на сарка

Важной особенностью автомодельных решений УРД является наличие у них режимов с обострением и взрывных режимов [38-41]. Для возникновения таких режимов необходима сильная зависимость теплоёмкости $c(u)$, теплопроводности $k(u)$ и тепловыделения $f(u)$ среды от температуры u . Используя такой «тепловой» язык, УРД можно записать в виде

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u).$$

Подобные сильные зависимости характерны для нелинейного горения среды [8], высокотемпературных процессов в плазме [39], эффектов локализации и инерции тепла [40, 41] и т.д. Режимы с обострением характеризуются обращением $u(x)$ при конечном значении x (отсутствие «диффузионного» хвоста). Физический смысл такого обострения заключается в том, что решение $u(x)$ локализовано на конечном интервале координаты, и у него отсутствует «диффузионный» хвост. В таких случаях говорят об обострении по координате. Кроме того, возможны режимы с обострением по времени. В этом случае решение $u(t)$ неограниченно растёт и обращается в бесконечность за конечное время. Такие режимы, называемые также взрывными, возникают при резкой зависимости тепловыделения в среде от её температуры. Например, в задачах о динамике народонаселения Земли [41] и химическом взрыве [10]. Они описывают процессы нелинейного горения и теплопроводности в активных средах.

Основные особенности диссипативных процессов в активных средах связаны с их нелинейностью. Первое следствие нелинейности - нарушение принципа суперпозиции, свойственного линейным однородным задачам. Это обеспечивает неисчерпаемое множество возможных направлений эволюции, а также определяет возникновение в среде дискретного набора пространственно-временных масштабов. Они характеризуют автономные свойства среды, не зависящие от внешних воздействий. Второе следствие - нелинейные диссипативные среды могут проявлять некоторую внутреннюю упорядоченность, связанную со спонтанным нарушением симметрии. Оно проявляется в спонтанном возникновении в среде сложных диссипативных структур, устойчивых к возмущениям. В ходе эволюции, таким образом, происходит процесс самоорганизации среды.

Особое место среди таких нелинейных процессов занимают неограниченные решения, или, как их иначе называют, режимы с обострением. Такие решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени. То, что такие сингулярные по времени решения имеют физический смысл, было известно еще из задач теплового взрыва, кумуляции ударных волн, самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, нестационарных структур в магнитной гидродинамике, нелинейных задачах лазерной термохимии и т.д. До настоящего времени до конца не ясно, какие свойства нестационарных диссипативных процессов они описывают. Свойства эти очень необычны и парадоксальны с позиций обычных взглядов на нестационарные диссипативные процессы.

Сформулируем критерии возникновения режимов с обострением. Обострение по времени (взрывной режим) возникает при достаточно быстром возрастании $f(u)$ с ростом u . Рассмотрим однородную среду $\partial u / \partial x = 0$. Тогда, интегрируя (81), получаем

$$\int_{u_0}^{u_1} c(u') du / f(u) = t + \text{const},$$

то есть «температура» среды u обращается в бесконечность за конечное время при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{c(u)du}{f(u)} < \infty$$

где u_0 - некоторое фиксированное значение $u(t_0) = u_0$. При выполнении условия (82) «тепловой взрыв» среды наступает в момент времени обострения: $\tau = t_0 + \int_{u_0}^{\infty} c(u)du/f(u)$.

Вопрос о пространственном обострении касается формы профиля температурной волны. Обычно холодный хвост фронта волны простирается до бесконечности (диффузионное «размытие», бесконечная скорость диффузионного распространения). Но при определённых условиях фронт имеет резкую границу, т.е. температура u обращается в ноль с конечной производной u_x , и далее перед фронтом u равна нулю (финитное решение). Возникает обострение по координате. Для этого необходимо, чтобы $k(u)$ достаточно быстро возрастала с ростом u . Рассмотрим температурную волну, описываемую уравнением (81) при $f(u) \equiv 0$. Считая, что на коротких временах фронт описывается автомодельным решением $u(\xi)$ с $\xi = x - vt, v = \text{const}$, и интегрируя $(k(u)u_\xi)_\xi + vc(u)u_\xi = 0$, с учетом $u(+\infty) = u_\xi(+\infty) = 0$ получаем $\int_u^{\infty} k(u)du/w(u) = -v\xi + \text{const}$, где $w(u) = \int_0^u c(u')du'$ - удельная энтальпия среды. Таким образом, финитное решение с резким краем фронта (температурная ударная волна) получается при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{k(u)du}{w(u)} < \infty$$

или, что то же самое, $\int_{u_0}^{\infty} \frac{\chi(w)dw}{w} < \infty$ (см. задачу 13).

И, наконец, в условиях нелинейного горения ($f(u) \neq 0$) могут возникать конечные домены с резкими границами (локализация горения, инерция тепла). Рассмотрим такую покоящуюся границу ($u_t = 0$), описываемую уравнением $(k(u)u_x)_x + f(u) = 0$. Интегрируя его с учётом $u(+\infty) = u_x(+\infty) = 0$, получаем $(k(u)u_x)^2 + 2 \int_u^{\infty} k(u)f(u)du = \text{const}$. Постоянная интегрирования равна нулю из-за граничных условий, так что $k(u)u_x = \sqrt{-2V(u)}$, где $V(u) = \int_0^u k(u')f(u')du'$ - обобщение механического потенциала частицы. Таким образом, резкая граница области локализованного горения возникает при условии

$$\int_0^{u_0} \frac{k(u)du}{\sqrt{-2V(u)}} < \infty$$

Рассмотрим возникновение таких режимов с обострением на нескольких конкретных примерах.

1. Взрывной рост народонаселения Земли

Подробные и достоверные демографические данные о динамике роста народонаселения Земли за последние три сотни лет показывают, что число людей $N(t)$ растёт не в соответствии с законом Мальтуса: $\dot{N} \sim N$ (геометрическая прогрессия), а быстрее. $N(t)$ растёт в соответствии с законом бимолекулярной реакции: $\dot{N} \sim N^2$ (парные столкновения мужских и женских особей), что приводит к режиму с

обострением. Действительно, решением в этом случае является $N(t) \sim (\tau - t)^{-1}$, т.е. обращается в ∞ за конечное время. Решение такого вида соответствует обострению по времени. В частности, демографические данные дают $\tau \approx 2030$ г., т.е. модель предсказывает ∞ большое число людей к этому году. Естественно, что реально ∞ численность не является достижимой. В окрестности точки $t = \tau$ начнут проявляться процессы, ограничивающие рост населения [38 – 41].

Рассмотрим рост численности населения Земли подробнее. Оказывается, что несмотря на территориальные, расовые и сословные барьеры темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Считая с большой точностью, что они равны, получаем

$$\dot{N} = \frac{N^2}{C}$$

где C - постоянная Фёрстера [41]. Интегрируя (85) с учетом начального условия $N(t_0) = N_0$, получаем

$$N = \frac{C}{\tau - t}$$

где $\tau = t_0 + CN_0^{-1}$ - момент времени, когда число обитателей земного шара обратится в бесконечность. Учитывая, что значение постоянной Фёрстера составляет $C \approx 2 \cdot 10^{11}$ лет·чел⁻¹, можно предсказать дату «конца света»: $\tau \approx 2030$ г. Этот сенсационный результат проник даже в средства массовой информации, где катастрофа была назначена на пятницу 13 ноября 2026 года [35, 39, 41].

2. Температурная ударная волна

Процесс линейной теплопроводности обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство. Например, тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в ноль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от u теплопроводностью $k(u)$, если она - не слишком быстро возрастающая функция u . Если же теплопроводность возрастает достаточно быстро, то это приводит к замедлению процесса диффузии тепла. В результате влияние любого теплового возмущения будет простирается в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства [38-41]. Вне этой области температура среды u строго равна нулю. Возникает режим обострения по координате в соответствии с критерием (38). Таким образом, речь идет о распространении температурной ударной волны с резким фронтом [38-41].

В качестве примера рассмотрим среду с $f(u) = 0$ и степенными зависимостями теплоёмкости и теплопроводности от u . Тогда решение задачи сводится к уравнению для внутренней энергии w (см. задачу 7); далее, для единообразия изложения сохраним за ней обозначение u :

$$u_t = (u^n u_x)_x.$$

Будем искать его симметричное решение: $u(-x, t) = u(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = 1$. Обратимся к теоретико-групповым соображениям [43]. Уравнение (87) инвариантно относительно группы растяжений [42, 43]:

$$t' = Lt, x' = L^\alpha x, u' = L^\beta u.$$

Показатели α и β однозначно фиксируются требованием инвариантности относительно группы (88) как уравнения, так и начального условия: $L^\alpha L^\beta = 1$ и $L^{\beta-1} = L^{\beta(n+1)-2\alpha}$. Отсюда $\alpha = 1/(n+2)$, $\beta = -1/(n+2)$. Инвариантами группы являются две величины $ut^{1/(n+2)}$ и $xt^{-1/(n+2)}$, так что автомодельное решение (42) следует искать в виде

$$u(x, t) = t^{-1/(n+2)} \cdot f(xt^{-1/(n+2)})$$

Автомодельная подстановка приводит уравнение к обыкновенному дифференциальному:

$$(f^n f')' + (n+2)^{-1} \cdot (\xi f') = 0$$

где $\xi = xt^{-1/(n+2)}$. Уравнение (90) легко интегрируется:

$$f^n f' + (n+2)^{-1} \cdot \xi f = C_1.$$

Поскольку мы рассматривали симметричное решение, то $f'(0) = 0$ и $C_1 = 0$. Интегрируя еще раз, получаем

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{n+2}} \left[C - \frac{nx^2}{2(n+2)t^{2/n+2}} \right]^{1/n}$$

при $x^2 < x_\phi^2 = 2C(n+2)t^{2/n+2}/n$ и $u(x, t) = 0$ при $x^2 > x_\phi^2$. Константа интегрирования находится из начального условия $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0)dx = 1$:

$$C = \left[\frac{n(n+2)}{8\pi} \cdot \frac{\Gamma^2(1/n + 1/2)}{\Gamma^2(1/n)} \right]^{\frac{n}{n+2}}$$

где $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$ - гамма-функция Эйлера. В частности, при $n = 2$ получаем $C = \pi^{-1}$. Данное решение соответствует температурной ударной волне при $n > 0$. Действительно, вблизи от края фронта $u \sim [x_\phi^2 - x^2]^{1/n}$ или $u \sim |x - x_\phi|^{1/n}$. При $n = 0$ решение (92), (93) переходит в диффузионный хвост и остается инфинитным и при $n < 0$ [39-41].

3. Нелинейное горение

Некоторые процессы в плазме, ряд эффектов в биологических системах, химические реакции на определенной стадии описываются нелинейным УРД вида (81). В важном для физики плазмы и теории горения частном случае $k(u)$ и $f(u)$ являются степенными функциями температуры u : $k(u) = k_0 u^\sigma$; $f(u) = q_0 u^\beta$; $\sigma > 0, \beta > 1$. Решения этого уравнения доставляет необычные явления: локализация тепла и режим с обострением - температура в локальной области возрастает до бесконечности за конечное время. Возникает диссипативная структура, для образования которой нелинейная теплопроводность (диссипация) играет ключевую роль: «рассасывание» тепла вдоль нелинейной среды действует совместно с горением и формирует эту структуру [39-41]. Иными словами, диффузия тепла согласует процессы роста температуры u (обусловленные нелинейностью горения) в разных точках среды.

Будем искать решение (81) методом разделения переменных $u(x, t) = g(t)f(\xi)$; $\xi = x/\varphi(t)$. Тогда

$$g(t) = A \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{1-\beta}}$$

$$\varphi(t) = B \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}$$

Здесь $A = (q_0\sigma(\sigma+2)/2(\sigma+1))^{-1/\sigma}$ и $B = \sqrt{\delta^2 q_0/4k_0(1+\sigma)}$ [41], а $f(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{(\beta-1)\tau}f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)\tau}f_\xi\xi = (f^\sigma f_\xi)_\xi + f^\beta.$$

Качественно решения (95) имеют схожий вид при произвольных σ и β , но особенно просто они выглядят при $\beta = \sigma + 1$, когда $f(\xi)$ можно представить в аналитическом виде [39-41]:

$$f(\xi) = \left(\cos^2\left(\frac{\pi\xi}{L}\right) \cdot \frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}$$

Здесь $L = 2\pi\sqrt{(\sigma+1)k_0}/\sigma\sqrt{q_0}$ - длина области локализации горения, а τ - время обострения горения. Таким образом, в нелинейной среде на конечное время возникают устойчивые области горения с фиксированным размером.

2. Задачи для самостоятельного решения

11. Прямым вычислением покажите, что вариационная производная функционала $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x) dx$ равна $\delta F/\delta u = \partial F/\partial u - d(\partial F/\partial u_x)/dx$. 12. Приведите УРД к градиентному виду $u_t = -\delta F/\delta u$, указав явный вид функционала $F[u]$. Сформулируйте и докажите вариационный принцип (принцип минимальности функционала Ляпунова) для полной производной $F[u]$ по времени. Покажите, что функционал достигает локальных минимумов в стационарных состояниях $u(x, t) = u_1$ и $u(x, t) = u_3$.
12. Приведите УРД к градиентному виду $u_t = -\delta F/\delta u$, указав явный вид функционала $F[u]$. Вычислите его значение $F[u_1]$ для метастабильного и $F[u_3]$ для стабильного состояний 1D-среды длины L . Вынесите суждение об эволюции начального распределения $u(x, 0)$ в зависимости от величины $F[u(x, 0)]$.
13. Критическим зародышем стабильной фазы u_3 на фоне метастабильной u_1 называется стационарное решение уравнения «реакция-диффузия» с $u(\pm\infty) = u_1$. Вычислите энергию его образования в рамках скачковой модели $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$, где $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда. Как связаны значения параметра β , соответствующие нулевой скорости кинка и бесконечной энергии зародыша $e_d(\beta) = \infty$?
14. Пусть начальное распределение $u(x, 0)$ таково, что оно нигде не превосходит значения u_2 , отвечающего минимуму функции $V(u)$. Покажите, что такое распределение не отвечает минимуму функционала F и будет релаксировать к стационарному однородному состоянию $u = u_1$. Аналогичное утверждение можно сделать для любого начального распределения $u(x, 0)$, нигде не опускающегося ниже величины u_2 . Оно неустойчиво и релаксирует к однородному стационарному состоянию $u = u_3$.

15. Пусть фаза $u = u_3$ стабильна, а фаза $u = u_1$ метастабильна. Покажите, что любое начальное распределение $u(x, 0)$, для которого $F[u(x, 0)] < 0$, будет релаксировать к однородному состоянию $u = u_3$.
16. Определите радиус R и энергию образования e_d критического зародыша в рамках скачковой модели $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$ в одномерном ($D = 1$), двумерном ($D = 2$), трехмерном ($D = 3$) случаях. Покажите, что

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - 2\beta} \right), e_{d1} = 2R_1, \quad D = 1,$$

$$\beta = \frac{I_1(R_2)K_0(R_2)}{I_1(R_2)K_0(R_2) + I_0(R_2)K_1(R_2)}, e_{d2} = \pi R_2^2, \quad D = 2,$$

$$\beta = \frac{R_3 \operatorname{th}(R_3) - 1}{R_3(1 + \operatorname{th}(R_3))}, e_{d3} = \frac{4}{3} \pi R_3^3, \quad D = 3,$$

где $I(x), K(x)$ - модифицированные функции Бесселя.

Используя процедуру качественной оценки $e_c(60) - (61)$, покажите справедливость выражения (62) для $D = 1, 2, 3$.

18. Высокотемпературные сверхпроводники с током характеризуются быстрым ростом электрического сопротивления с температурой [31-33]. Это приводит к неограниченному джоулеву саморазогреву сверхпроводника при достаточно высоком токе, т.е. моностабильности таких сред и особому характеру развития тепловой неустойчивости в них. Она может быть описана уравнением (1) с функцией источника вида $f(u) = (au - b)\theta(u - b/a)$, где постоянные a, b зависят от тока [32-34]. Неограниченный разогрев нормальной области сверхпроводника является причиной особого характера развития неустойчивости. Оно осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснение сверхпроводящего участка нормальным и быстрый разогрев нормального участка. Отсутствие стационарной нормальной зоны и ее экспоненциально быстрый разогрев могут служить основанием для названия «взрывная» неустойчивость. Автомодельное решение типа кинка отсутствует, однако холодные хвосты границ с нормальными областями распространяются с постоянной скоростью v . Распределение температуры в «холодном» хвосте границы имеет вид $u(x, t) = u(x - vt)$ и удовлетворяет асимптотически ($u \ll 1$) уравнению

$$u_{xx} + vu_x + f(u) = 0$$

где x - координата в сопутствующей системе. Уравнение (97) не имеет решения типа бегущей автоволны в силу неограниченного разогрева нормального участка ($u > b/a$). Однако границы саморазогревающегося участка разбегаются с постоянной скоростью v . Установившаяся скорость не зависит от выбора начального профиля температуры, что свидетельствует об устойчивости такой волны. Отсутствие автомодельного решения (97) не позволяет определить величину скорости v стандартными методами теории распространения автоволн конечной амплитуды как собственное значение уравнения (97). Для нахождения величины v в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями. Покажите, что уравнение (97) инвариантно относительно группы преобразований координат и переменных вида [32-34]

$$\xi = L^p \xi', u = L^q u', v = L^{-p} v', a = L^{-2p} a', b = L^{q-2p} b',$$

представляющей собой группу растяжений с масштабным фактором L . Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (97) относительно преобразований (98) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (97). Это приводит к тому, что свободные параметры L, p и q могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости v в (97) есть функция только a и b : $v = F(a, b)$. Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (98), то есть $v' = F(a', b')$. Будем искать решение в виде $v \propto a^r b^s$, где степени r и s подлежат определению. Тогда $v / (a^r b^s) = L^{-p+2pr+2ps-2qs} v' / (a'^r b'^s)$, и из условия инвариантности $v / (a^r b^s) = v' / (a'^r b'^s)$ получаем $p(2r + 2s - 1) - qs = 0$. Воспользовавшись произвольностью величин p и q в (98), получите однозначные выражения для степеней: $r = 1/2, s = 0$.

Убедитесь, что скорость кинка имеет вид $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$.

19. Неизвестный коэффициент пропорциональности в $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$ не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения требуется привлечение дополнительных соображений. Рассмотрите случай $a = 1, b = 0$, когда уравнение (97) соответствует известной задаче Колмогорова, Петровского, Пискунова [6, 7]. Покажите, что скорость распространения в этом случае есть $v = 2\sqrt{df(u)/du}\big|_{u=0} = 2$ [8, 10, 11]. Получите для скорости распространения волны «взрывной» неустойчивости выражение $v = 2\sqrt{a}$ [32-34].

20. Развитие неустойчивости, как правило, инициируется внешними тепловыми возмущениями. Этот процесс имеет пороговый характер, то есть существуют критические возмущения, «запускающие» неустойчивость. Величина энергии критических возмущений e_c может быть найдена при помощи групповых соображений, аналогичных использованным в предыдущих задачах для нахождения скорости v .

Действие локального импульсного критического возмущения в активной среде описывается уравнением

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t)$$

где $\Delta = r^{-(D-1)} \partial (r^{D-1} \partial / \partial r) / \partial r$ - радиальная часть лапласиана, r и t - безразмерные координата и время, $\delta^D(r) = (k_D r^{D-1})^{-1} \delta(r)$, k_D - геометрический фактор ($k_1 = 1, k_2 = 2\pi, k_3 = 4\pi$). Покажите, что уравнение (99) инвариантно относительно группы преобразования переменных вида

$$t = L^{2p} t', r = L^p r', u = L^q u', e_c = L^{q+p} e'_c, \\ a = L^{-2p} a', b = L^{q-2p} b'.$$

Как и при вычислении скорости, степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (99) относительно преобразования (100) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (99). Используя процедуру, описанную выше, для критической энергии возмущений e_c , достаточной для инициации неустойчивости, получите выражение

$$e_c \propto ab^{(D+2)/2}.$$

Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнения (99) позволяет получить функциональную зависимость e_c от управляющих параметров при любой размерности задачи.

21. Автомоделное решение уравнения теплопроводности. Покажите, что уравнение $u_t = u_{xx}$ с граничными $u(\pm\infty) = 0$ и начальным $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = 1$ условиями инвариантно относительно группы растяжений $t' = L^\alpha t$, $x' = L^\beta x$, $u' = L^\gamma u$ и с масштабным фактором L . Найдите α, β и γ . Используя инварианты группы x/\sqrt{t} и $u\sqrt{t}$, найдите автомоделное решение задачи $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$.

22. Показать, что для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ начальная энергия возмущения (условие нормировки) сохраняется со временем $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const.}$

23. Показать, что в уравнении (81) можно «избавиться» от теплоёмкости, приведя его к виду $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$. Подсказка: сделать замену $dw = c(u)du$ и перейти от температуры u к удельной энтальпии $w = \int_0^u c(u') du'$. Привести уравнение к виду $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$, где

температуропроводность $\chi(w) = k(u)/c(u)$, а функция источника

$$F(w) = f[u(w)]$$

24. Теплоемкость $c(u) = c_0 u^p$, теплопроводность $k(u) = k_0 u^q$ и функция источника $f(u) = f_0 u^r$ среды являются степенными функциями u . Совершая переход к удельной энтальпии w (см. задачу 24), показать, что $\chi \sim w^s$ и $F \sim w^t$ - также степенные функции, и определить s, t .

25. Определить погрешность времени «конца света» τ в (86), если постоянная Фёрстера $C = 2 \cdot 10^{11}$ лет \cdot чел. $^{-1}$ известна с относительной точностью $\Delta C/C = \alpha$. В момент времени $t_0 = 2000$ г. население Земли $N_0 = 6 \cdot 10^9$ чел. известно практически достоверно.

21.2.4 Локализация и структуры

(пока вообще не нужно это)

3. Локализация кинков и доменов на неоднородности

В предыдущих главах мы подробно рассмотрели вопросы зарождения, распространения и устойчивости нелинейных автоволн. Теперь обратимся к исследованию локализации таких волн и возникновения диссипативных структур на их основе.

В реальных средах всегда существуют неоднородности физических величин (их зависимость от x), определяющих $f(u)$ в уравнении (1). Наличие в среде неоднородностей в условиях бистабильности влияет на условия зарождения и характер распространения автоволн. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи о динамике прохождения автоволн через такие неоднородности. В этом разделе мы рассмотрим, как изменяются полученные ранее результаты при наличии в среде неоднородностей. Будет показано, что при определенных условиях возможна

локализация автоволн на неоднородностях и определены интервалы значений управляющего параметра β , соответствующие локализации.

В общем случае для произвольного вида неоднородности (произвольной зависимости функции источника $f(u, x)$ от координаты x) аналитическое решение задачи о локализации невозможно. Однако в задаче существует естественный пространственный масштаб (ширина фронта кинка 1). Поэтому для качественного анализа ситуации достаточно ограничиться двумя предельными случаями: плавной ($\gg 1$) и точечной ($\ll 1$) неоднородностей.

1. Плавная неоднородность

Начнем с плавной неоднородности 1D-среды, когда все параметры медленно меняются на характерном масштабе ширины фронта кинка 1. Если теперь возбудить в такой среде автоволну типа кинка, то скорость движения его фронта \dot{X} будет медленно изменяться вдоль среды в зависимости от локальной величины параметра распространения $\beta_p(x)$, а именно $v(x) = v(\beta, \beta_p(x))$. Таким образом,

$$\dot{X} = v(X)$$

где $X(t)$ - координата фронта кинка, $v(X)$ - его скорость, полученная из локального уравнения (1), локально для каждой точки среды $x = X$ в соответствии с процедурой, описанной в первой главе. Например, при малых скоростях $v \ll 1$ зависимость от β линейная $v(x) \approx (\beta - \beta_p(x))$ [6, 8, 10, 11].

С математической точки зрения ситуацию удобно представлять себе так. Функция источника в (1) $f(u, \beta, x)$ зависит как от управляющего параметра β , так и от локальной координаты x . Для анализа распространения кинка (доменной стенки) удобно представлять себе зависимость функции источника в другом, эквивалентном виде $f(u, \beta, \beta_p(x))$. Тогда распространение кинка происходит квазистационарно, а его скорость адиабатически подстраивается под значение $v(\beta, \beta_p(x))$.

Рассмотрим окрестности «точки остановки» кинка $x = a$, в которой его локальная скорость обращается в ноль: $\beta = \beta_p(a)$. В этой точке в соответствии с (102) кинк покоится: $X(t) = a$. Рассмотрим малое отклонение $\delta X(t)$ фронта кинка от положения равновесия. В силу (102) получаем

$$\delta \dot{X} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_a \delta X$$

Декремент затухания (нарастания) λ возмущения $\delta X \sim e^{\lambda t}$ имеет вид

$$\lambda = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_a = \frac{\partial v}{\partial \beta_p} \frac{\partial \beta_p(a)}{\partial x},$$

где $\partial v / \partial \beta_p \approx \pm \beta_p^{-1}$, а знак зависит от того, какая фаза (горячая, холодная) исчезает на границе интервала бистабильности (правой, левой). Или, что то же самое, знак зависит от $\text{sign}(v / (\beta - \beta_p))$. Выражение (104) показывает, что положение равновесия кинка $X(t) = a$ устойчиво ($\lambda < 0$), если горячая фаза $u = u_3$ возбуждена в области, где знак скорости совпадает со знаком $\partial \beta_p(a) / \partial x$. То есть скорость кинка должна быть направлена к точ-

21.3 Диффузия

21.3.1 Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

21.3.2 Коэффициенты диффузии и термодиффузии

21.3.3 Диффузия взвешенных в жидкости частиц

21.4 Поверхностные явления (????)

21.4.1 Формула Лапласа

21.4.2 Капиллярные волны

21.4.3 Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

22 Звук

22.0.1 Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнем с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют звуковыми волнами. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость \mathbf{v} в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где ρ_0, p_0 - постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а ρ', p' - их изменения в звуковой волне ($\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$). Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

при подстановке в него (64, 1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка (ρ', p', \mathbf{v} надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

В том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0.$$

Условие применимости линеаризованных уравнений движения (64, 2) и (64, 3) для распространения звуковых волн заключается в малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$. Это условие можно получить, например, из требования $\rho' \ll \rho_0$ (см. ниже формулу (64, 12))

Уравнения (64, 2) и (64, 3) содержат неизвестные функции \mathbf{v}, p', ρ' . Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение p' давления связано с малым изменением ρ' плотности уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho'.$$

Заменив с его помощью ρ' на p' в уравнении (64, 2), получим:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Два уравнения (64, 3) и (64, 5) с неизвестными \mathbf{v} и p' полностью описывают звуковую волну.

Для того чтобы выразить все неизвестные величины через одну из них, удобно ввести потенциал скорости согласно $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Из уравнения (64, 3) получим равенство

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

связывающее p' с φ (индекс у ρ_0 и ρ_0 здесь и ниже мы будем для краткости опускать). После этого найдем из (64, 5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0,$$

которому должен удовлетворять потенциал φ ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}.$$

Уравнение вида (64, 7) называется волновым. Применив к (64, 7) операцию grad , найдем, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трех компонент скорости \mathbf{v} , а взяв производную по времени от (64, 7), найдем, что волновому уравнению удовлетворяет и давление p' (а потому и ρ').

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от x . Другими словами, все движение однородно в плоскости y, z ; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (64, 7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения вводим вместо x, t новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

352 Звук | ГЛ. VIII Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (64, 9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ , находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ - произвольная функция. Интегрируя еще раз, получим $\varphi_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 - произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин (p', ρ', v) в плоской волне.

Будем говорить для определенности о плотности. Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $\rho' = f_1(x - ct)$. Выясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const}$ плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных x . Очевидно, что плотность одинакова для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const}$, или

$$x = \text{const} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке жидкости ее плотность имеет определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение плотность имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движения распространяется в среде вдоль оси x со скоростью c , называемой скоростью звука.

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой, как говорят, беаущую плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Очевидно, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x .

Из трех компонент скорости $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ в плоской волне отлична от нуля только компонента $v_x = \partial\varphi/\partial x$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена вдоль распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость $v_x = v$ связана с давлением p' и плотностью ρ' простыми соотношениями. Написав $\varphi = f(x - ct)$, имеем

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'(x - ct), p' = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct).$$

Сравнив эти выражения, находим:

$$v = \frac{p'}{\rho c}.$$

Подставляя сюда согласно (64, 4) $p' = c^2 \rho'$, находим связь между скоростью и изменением плотности:

$$v = \frac{c \rho'}{\rho}.$$

Укажем также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем $T' = (\partial T / \partial p)_s p'$ и, воспользовавшись известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

и формулой (64, 11), получим:

$$T' = \frac{c \beta T}{c_p} v,$$

где $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ - температурный коэффициент расширения. Формула (64, 8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости вещества. Последняя связана с изотермической сжимаемостью известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T.$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Уравнение состояния идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где R - газовая постоянная, а μ - молекулярный вес. Для скорости звука получим выражение

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

где посредством γ обозначено отношение $\gamma = c_p/c_v$. Поскольку γ обычно слабо зависит от температуры, то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры. При заданной температуре она не зависит от давления газа.

Весьма важным случаем волн являются монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения (см. начало § 24). Так, для потенциала скорости напомним

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \},$$

где ω - частота волны. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0,$$

получающемуся при подстановке (64, 16) в (64, 7). Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . В такой волне все величины являются функциями только от $x - ct$, и потому, скажем, потенциал имеет вид где A - постоянная, называемая комплексной амплитудой. Написав ее в виде $A = ae^{i\alpha}$ с вещественными постоянными a и α имеем:

$$\varphi = a \cos \left(\frac{\omega}{c} x - \omega t + \alpha \right).$$

Постоянную a называют амплитудой, а аргумент под знаком в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$$

называют волновым вектором (а его абсолютную величину часто называют волновым числом). С этим обозначением выражение (64, 18), записывается в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}$$

Монохроматические волны играют весьма существенную роль в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические волны является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нем говорят также как о спектральном разложении). Об отдельных компонентах этого разложения говорят как о монохроматических компонентах волны или как о ее компонентах Фурье.

ЛЛ6

Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нем мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы. Решение. В двухфазной системе p и T не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз. Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую. Пусть x - доля (по массе) фазы 2 в системе. Имеем:

$$s = (1 - x)s_1 + xs_2,$$

$$V = (1 - x)V_1 + xV_2,$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам 1 и 2. Для вычисления производной $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ преобразуем ее от переменных p, s к переменным p, x и получаем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p}$$

после чего подстановка (1) дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = x \left[\frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_2}{dp} \right] + (1 - x) \left[\frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_1}{dp} \right]$$

22.0.2 Энергия и импульс звуковых волн**22.0.3 Отражение и преломление звуковых волн****22.0.4 Геометрическая акустика****22.0.5 Распространение звука в движущейся среде****22.0.6 Собственные колебания****22.0.7 Сферические волны****22.0.8 Цилиндрические волны****22.0.9 Другое о звуке (???)**

(тут много еще может быть вопросов, ну и ладно, чуть что займусь ими, пока не до них.)

Общее решение волнового уравнения

Боковая волна

Излучение звука

Возбуждение звука турбулентностью

Принцип взаимности

Распространение звука по трубке

Рассеяние звука

Поглощение звука

Акустическое течение

Вторая вязкость

23 Ударные волны

23.0.1 Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

23.0.2 Стационарный поток сжимаемого газа

23.0.3 Поверхности разрыва

23.0.4 Ударная адиабата

23.0.5 Ударные волны слабой интенсивности

23.0.6 Направление изменения величин в ударной волне

23.0.7 Эволюционность ударных волн

Теория

Вывод неравенств (87, 1 – 4) в §§86, 87 был связан с определенным предположением о термодинамических свойствах среды - с положительностью производной $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$. Весьма существенно, однако, что неравенства

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2$$

для скоростей могут быть получены также и из совершенно иных соображений, показывающих, что ударные волны с нарушенными условиями (88, 1) все равно не могли бы существовать, даже если бы это не противоречило изложенным выше чисто термодинамическим соображениям¹⁾.

Именно необходимо исследовать еще вопрос об устойчивости ударных волн. Наиболее общее необходимое условие устойчивости состоит в требовании, чтобы любое бесконечно малое возмущение начального (в некоторый момент $t = 0$) состояния приводило бы лишь к вполне определенным бесконечно малым же изменениям течения, - по крайней мере в течение достаточно малого промежутка времени t . Последняя оговорка означает недостаточность указанного условия; так, если начальное малое возмущение возрастает даже экспоненциально (как $e^{\gamma t}$ с положительной постоянной γ), то в течение времени $t \leq 1/\gamma$ возмущение остается малым, хотя в конце концов оно и приводит к разрушению данного режима движения. Возмущением, не удовлетворяющим поставленному необходимому условию, является расщепление ударной волны на два (или более)

последовательных разрыва; очевидно, что изменение движения при этом сразу же оказывается не малым, хотя при малых t (когда оба разрыва не разошлись еще на большое расстояние) оно и занимает лишь небольшой интервал расстояний δx .

Произвольное начальное малое возмущение определяется некоторым числом независимых параметров. Дальнейшая же эволюция возмущения определяется системой линеаризованных граничных условий, которые должны удовлетворяться на поверхности разрыва. Поставленное выше необходимое условие устойчивости будет выполнено, если число этих уравнений совпадает с числом содержащихся в них неизвестных параметров - тогда граничные условия определяют дальнейшее развитие возмущения, которое при малых $t > 0$ останется малым. Если же число уравнений больше или меньше числа независимых параметров, то задача о малом возмущении не имеет решений вовсе или имеет их бесконечное множество. Оба случая свидетельствовали бы о неправомерности исходного предположения (малость возмущения при малых t) и, таким образом, противоречили бы поставленному требованию. Сформулированное таким образом условие называют условием эволюционности течения.

Рассмотрим возмущение ударной волны, представляющее собой ее бесконечно малое смещение в направлении, перпендикулярном ее плоскости ¹⁾. Оно сопровождается бесконечно малым возмущением также и других величин - давления, скорости и т. д. газа по обеим сторонам поверхности разрыва. Эти возмущения, возникнув вблизи волны, будут затем распространяться от нее, переносясь (относительно газа) со скоростью звука; это не относится лишь к возмущению энтропии, которое будет переноситься только с самим газом. Таким образом, произвольное возмущение данного типа можно рассматривать как совокупность звуковых возмущений, распространяющихся в газах 1 и 2 по обе стороны ударной волны, и возмущения энтропии; последнее, перемешаясь вместе с газом, будет, очевидно, существовать лишь в газе 2 позади ударной волны. В каждом из звуковых возмущений изменения всех величин связаны друг с другом определенными соотношениями, следующими из уравнений движения (как в любой звуковой волне; §64); поэтому каждое такое возмущение определяется всего лишь одним параметром. Подсчитаем теперь число возможных звуковых возмущений. Оно зависит от относительной величины скоростей газа v_1, v_2 и скоростей звука c_1, c_2 . Выберем направление движения газа (со стороны 1 на сторону 2) в качестве положительного направления оси x . Скорость распространения возмущения в газе 1 относительно неподвижной ударной волны есть $u_1 = v_1 \pm c_1$, а в газе 2 $u_2 = v_2 \pm c_2$. Тот факт, что эти возмущения должны распространяться по направлению от ударной волны, означает, что должно быть $u_1 < 0, u_2 > 0$.

23.0.8 Ударные волны в политропном газе

23.0.9 Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Соблюдение условий эволюционности само по себе необходимо, но еще недостаточно для гарантирования устойчивости ударной волны. Волна может оказаться неустойчивой по отношению к возмущениям, характеризующимся периодичностью вдоль поверхности разрыва и представляющим собой как бы «рябь», или «гофрировку», на этой поверхности (такого рода возмущения рассматривались уже в §29 для тангенциальных разрывов ¹⁾). Покажем, каким образом исследуется этот вопрос для ударных волн в произвольной среде (С. П. Дьяков, 1954). Пусть ударная волна поконится, занимая плоскость $x = 0$; жидкость движется сквозь нее слева направо, в положительном направлении оси x . Пусть поверхность разрыва испытывает возмущение, при котором ее точки смещаются вдоль оси

x на малую величину

$$\zeta = \xi_0 e^{i(k_y y - \omega t)}$$

где k_y - волновой вектор «ряби». Эта рябь на поверхности вызывает возмущение течения позади ударной волны, в области $x > 0$ (течение же перед разрывом, $x < 0$, не испытывает возмущения в силу своей сверхзвуковой скорости).

Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны (см. задачу к §82). В обоих зависимость величин от времени и координат дается множителем вида $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ с той же частотой ω , что и в (90, 1). Из соображений симметрии очевидно, что волновой вектор \mathbf{k} лежит в плоскости xy ; его y -компонента совпадает с k_y в (90, 1), а x -компонента различна для возмущений двух типов. В энтропийно-вихревой волне $k_2 = \omega$, т. е. $k_x = \omega/v_2$ (v_2 — невозмущенная скорость газа за разрывом). В этой волне возмущение давления отсутствует, возмущение удельного объема связано с возмущением энтропии, $\delta V^{(3)} = (\partial V/\partial s)_p \delta s$, а возму-

23.0.10 Распространение ударной волны по трубе

23.0.11 Косая ударная волна

23.0.12 Ширина ударных волн

Мы говорили до сих пор об ударных волнах как о геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что ударные волны с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в ударной волне не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что в макроскопической теории не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (85, 1 – 3) на ударной волне были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (85, 1) не меняется:

$$\rho v \equiv j = \text{const.}$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси x), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой $-\sigma'_{xx}$ вязкого тензора напряжений; согласно общему выражению (15, 3) для этого тензора имеем:

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx}$$

Условие (85, 2) приобретает теперь вид ¹⁾

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx} = \text{const.}$$

Как и в §85, введем вместо скорости v удельный объем V согласно $v = jV$. Постоянную же в правой стороне равенства выразим через предельные значения величин на большом расстоянии впереди ударной волны (сторона 1). Тогда написанное

23.0.13 Ударные волны в релаксирующей среде

23.0.14 Изотермический скачок

23.0.15 Слабые разрывы

24 Пересечение поверхностей разрыва

24.0.1 Волна разрежения

24.0.2 Типы пересечений поверхностей разрыва

24.0.3 Пересечение ударных волн с твердой поверхностью

24.0.4 Сверхзвуковое обтекание угла

24.0.5 Обтекание конического острия

25 Другие темы

25.1 Модели аэродинамики для приложений

25.1.1 Бумеранг

(когда-то напишу тут, как же он работает?)

25.2 Плоское течение сжимаемого газа

Потенциальное движение сжимаемого газа

Стационарные простые волны

Уравнение Чаплыгина (общая задача о двухмерном стационарном движении сжимаемого газа)

Характеристики плоского стационарного течения

Уравнение Эйлера-ТрикомиПереход через звуковую скорость

Решения уравнения Эйлера-Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Обтекание со звуковой скоростью

Отражение слабого разрыва от звуковой линии

25.3 Обтекание конечных тел

Образование ударных волн при сверхзвуковом обтекании тел

Теория

Простые соображения показывают, что при обтекании произвольного тела сверхзвуковым потоком перед телом возникает ударная волна. Действительно, в сверхзвуковом потоке возмущения, обусловленные наличием обтекаемого тела, распространяются только вниз по течению. Поэтому натекающий на тело однородный сверхзвуковой поток должен был бы доходить до самого переднего конца тела

невозмущенным. Но тогда на поверхности этого конца нормальная компонента скорости газа была бы отличной от нуля в противоречии с необходимым граничным условием. Выходом из этого положения может являться только возникновение ударной волны, в результате чего движение газа между нею и передним концом тела становится дозвуковым.

Таким образом, при сверхзвуковом обтекании тела перед ним возникает ударная волна; ее называют головной. При обтекании тела с тупым передним концом эта волна не соприкасается с самим телом. Спереди от ударной волны Поток однороден, а позади нее движение меняется, и поток огибает обтекаемое тело (рис. 127, а). Поверхность ударной волны уходит на бесконечность, причем вдали от тела, где интенсивность волны мала, она пересекает направление набегающего потока под углом, близким к углу маха. Характерной чертой обтекания тела с тупым концом является существование дозвуковой области течения за ударной волной - позади наиболее выдающейся вперед части ее поверхности; эта область простирается до обтекаемого тела и, таким образом, ограничена поверхностью разрыва, поверхностью тела и «боковой» звуковой поверхностью (пунктирные линии на рис. 127, а).

Ударная волна может соприкаться с телом только если его передний конец заострен. Тогда поверхность разрыва тоже обладает точкой заострения, совпадающей с острием тела (рис. 127, б); при несимметричном обтекании часть этой поверхности может являться поверхностью слабого разрыва. Для тела заданной формы такой режим обтекания оказывается, однако, возможным лишь при скоростях, превышающих определенный предел; при меньших скоростях ударная волна отрывается от носика тела, несмотря на наличие острия (см. §113).

Рассмотрим осесимметричное сверхзвуковое обтекание тела вращения и определим давление на переднем закругленном конце тела (в точке остановки - точка на рис. 127, а). Из соображений симметрии очевидно, что линия тока, заканчивающаяся в точке O , пересекает ударную волну в нормальном к ней направлении, так что в точке A нормальная к поверхности разрыва компонента скорости совпадает с полной скоростью. Значения величин в набегающем потоке отмечаем, как обычно, индексом 1, а значения величин в точке A на задней стороне ударной волны - индексом 2. Последние определяются по формулам (89, 6 – 7) в виде

$$p_2 = \frac{p_1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1}, \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}.$$

Давление p_0 в точке O (в которой скорость газа $v = 0$) можно получить теперь с помощью формул, определяющих изменение величин вдоль линии тока. Имеем (см. задачу к §83):

$$p_0 = p_2 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_2^2}{c_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

и простое вычисление приводит к следующему результату:

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} M_1^2 \left[\gamma - \frac{\gamma - 1}{2M_1^2} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Этим и определяется давление на переднем конце тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком ($M_1 > 1$).

Для сравнения приведем формулу для давления в точке остановки, которое получилось бы в результате непрерывного адиабатического торможения газа без ударной волны (как

это было бы при дозвуковом обтекании):

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

При $M_1 = 1$ обе формулы дают одинаковое значение p_0 , а при $M_1 > 1$ давление (122, 2) всегда превышает истинное давление, даваемое формулой (122, 1)¹⁾.

В предельном случае очень больших скоростей ($M_1 \gg 1$) формула (122, 1) дает

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma - 1}} M_1^2,$$

т. е. давление p_0 пропорционально квадрату скорости обтекания. На основании этого результата можно сделать заключение о том, что и полная испытываемая телом сила сопротивления при скоростях, больших по сравнению со скоростью звука, пропорциональна квадрату скорости. Обращаем внимание на то, что этот закон - такой же, по которому меняется сила сопротивления при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, но настолько больших, чтобы число Рейнольдса было достаточно велико (см. § 45).

Помимо самого факта необходимости возникновения ударных волн, можно еще утверждать, что при сверхзвуковом обтекании конечного тела на больших расстояниях от него во всяком случае должны иметься две следующие друг за другом ударные волны (Л. Ландау, 1945). Действительно, на больших расстояниях от тела вызываемые им возмущения слабы и поэтому их можно рассматривать как цилиндрическую звуковую волну, расходящуюся от оси x , проходящей через тело параллельно направлению обтекания; рассматривая, как это мы везде делаем, движение в той системе координат, в которой тело покоится, мы будем иметь волну, в которой роль времени играет x/v_1 , а роль скорости распространения $v_1/\sqrt{M_1^2 - 1}$ (см. ниже § 123). Поэтому мы можем непосредственно применить результаты, полученные в § 102 для цилиндрической волны на больших расстояниях ударных волн на далеком расстоянии от тела: в первой ударной волне давление испытывает скачок вверх, так что за ней возникает сгущение; затем давление постепенно убывает, сгущение сменяется разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во второй ударной волне. Интенсивность передней ударной волны падает с увеличением расстояния r от оси x как $r^{3/4}$, а расстояние между обеими волнами возрастает как $r^{1/4}$ ¹⁾.

Проследим за появлением и развитием ударных волн при постепенном увеличении числа Маха M_1 . Сверхзвуковая область в газовом потоке появляется впервые при некотором значении $M_1 < 1$ в виде области, прилегающей к поверхности обтекаемого тела. В этой области появляется по крайней мере одна ударная волна - обычно замыкающая сверхзвуковую область. По мере увеличения M_1 эта область расширяется, а вместе с ней удлиняется и ударная волна, существование которой при $M_1 = 1$ было доказано (для плоского случая) в § 120; тем самым была доказана необходимость первого появления ударной волны уже при $M_1 < 1$. Как только M_1 начинает превышать единицу, появляется еще одна ударная волна - головная волна, пересекающая весь бесконечно широкий натекающий поток газа. При M_1 , в точности равном единице, все течение впереди тела является дозвуковым. Поэтому при $M_1 > 1$, но сколь угодно близком к единице ударная волна находится сколь угодно далеко впереди тела. По мере дальнейшего увеличения M_1 головная волна постепенно приближается к телу.

Ударная волна в местной сверхзвуковой зоне должна каким-то образом пересекаться со звуковой линией (мы будем говорить о плоском случае). Вопрос о характере такого пересечения нельзя считать выясненным. Если ударная волна заканчивается в точке

пересечения, то в самой этой точке ее интенсивность обращается в ноль, а во всей плоскости вблизи точки пересечения движение околосвуковое. Картина течения в таком случае должна описываться соответствующим решением уравнения Эйлера Трикоми. Помимо общих условий однозначности решения в физической плоскости и граничных условий на ударной волне, должны выполняться еще и следующие условия: 1) если по обе стороны от ударной волны движение сверхзвуковое (так будет, если в точке пересечения кончается только ударная волна, «упираясь» в звуковую линию), то ударная волна должна быть «приходящей» по отношению к точке пересечения, 2) «приходящие» к точке пересечения характеристические линии в сверхзвуковой области не должны нести на себе никаких особенностей течения (особенности могли бы возникнуть лишь в результате самого пересечения и, таким образом, должны были бы уноситься от точки пересечения). Существование решения уравнения Эйлера Трикоми, удовлетворяющего всем этим требованиям, по-видимому, еще не доказано.

Другая возможность для конфигурации ударной волны и звуковой линии в местной сверхзвуковой зоне состоит в окончании в точке пересечения одной лишь звуковой линии (рис. 128,б); в этой точке интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль, так что течение вблизи нее является околосвуковым лишь по одну сторону от ударной волны. Сама ударная волна может при этом одним концом «упираться» в твердую поверхность, а другим (или обоими) начинаться непосредственно в сверхзвуковом потоке (ср. конец §115).

Сверхзвуковое обтекание заостренного тела

Дозвуковое обтекание тонкого крыла

Сверхзвуковое обтекание крыла

Околосвуковой закон подобия

Гиперзвуковой закон подобия

25.4 Гидродинамика горения

Медленное горение

Теория

Скорость химической реакции (измеряемая, скажем, числом прореагировавших в единицу времени молекул) зависит от температуры газовой смеси, в которой она происходит, увеличиваясь вместе с ней. Во многих случаях эта зависимость очень сильная. Скорость реакции может при этом оказаться при обычных температурах настолько малой, что реакция практически вовсе не идет, несмотря на то, что состоянию термодинамического (химического) равновесия соответствовала бы газовая смесь, компоненты которой прореагировали друг с другом. При достаточном же повышении температуры реакция протекает со значительной скоростью. Если реакция эндотермична, то для ее протекания необходим непрерывный подвод тепла извне; если ограничиться одним только начальным повышением температуры смеси, то прореагирует лишь незначительное количество вещества, вслед за чем температура газа настолько понизится, что реакция снова прекратится. Совсем иначе будет обстоять дело при сильно экзотермической реакции, сопровождающейся значительным выделением тепла. Здесь достаточно повысить температуру хотя бы в одном каком-нибудь месте смеси; начавшаяся в этом месте реакция в результате выделения тепла сама будет производить нагревание окружающего газа и, таким образом, реакция, раз начавшись, будет сама собой распространяться по газу. В таких случаях говорят о медленном горении газовой

смеси или о дефлаграции.

Горение газовой смеси непременно сопровождается также и движением газа. Другими словами, процесс горения представляет собой, отвлекаясь от его химической стороны, также и газодинамический процесс. В общем случае для определения режима горения необходимо совместное решение системы уравнений, включающей в себя как уравнения химической кинетики данной реакции, так и уравнения движения газовой смеси.

Положение, однако, существенно упрощается в том весьма важном случае (с которым обычно и приходится иметь дело), когда характерные размеры l , определяющие условия данной конкретной задачи, достаточно велики (по сравнению с чем именно, будет выяснено ниже). Мы увидим, что в таких случаях чисто газодинамическая задача может быть в известном смысле отделена от задачи химической кинетики.

Область сгоревшего газа (т. е. область, в которой реакция уже закончилась и газ представляет собой смесь продуктов горения) отделена от газа, в котором горение еще не началось, некоторым переходным слоем, где как раз и происходит самая реакция (зона горения или пламя); с течением времени этот слой передвигается вперед со скоростью, которую можно назвать скоростью распространения горения в газе. Величина скорости распространения зависит от интенсивности теплопередачи из зоны горения в ненагретую исходную газовую смесь, причем основной механизм теплопередачи состоит в обычной теплопроводности (В. А. Михельсон, 1890).

Порядок величины ширины зоны горения δ определяется средним расстоянием, на которое успевает распространиться выделяющееся в реакции тепло за то время τ , в течение которого длится эта реакция (в данном участке газа). Время τ есть величина, характерная для данной реакции, и зависит лишь от термодинамического состояния горящего газа (но не от характеристических параметров l задачи). Если χ -температуропро- . Водность газа, то имеем см. (51, 6) : 1)

$$\delta \sim \sqrt{\chi\tau}$$

Уточним теперь сделанное выше предположение: мы будем считать, что характерные размеры задачи велики по сравнению с толщиной зоны горения ($l \gg \delta$). При соблюдении этого условия можно выделить чисто газодинамическую задачу. При определении движения газа можно пренебречь толщиной зоны горения и рассматривать ее просто как поверхность, разделяющую продукты горения и несгоревший газ. На этой поверхности (фронт пламени) состояние газа испытывает скачок, т. е. она представляет собой своеобразную поверхность разрыва.

Скорость перемещения v_1 этого разрыва относительно самого газа (в нормальном к фронту направлении) называют нормальстраницы на расстояние порядка величины δ ; поэтому искомая скорость пламени:

$$v_1 \sim \delta/\tau \sim (\chi/\tau)^{1/2}.$$

Обычная температуропроводность газа - порядка величины произведения длины свободного пробега молекул на их тепловую скорость, или, что то же, произведения времени свободного прорость молекул совпадает по порядку величины со скоростью звука, найдем:

$$v_1/c \sim (\chi/\tau c^2)^{1/2} \sim (\tau_{св}/\tau)^{1/2}.$$

Отнюдь не каждое столкновение молекул сопровождается химической реакцией между ними; напротив, в реакцию вступает лишь очень незначительная доля сталкивающихся молекул. Это значит, что $\tau_{св} \ll \tau$ и потому $v_1 \ll c$. Таким образом, в рассматриваемом режиме скорость распространения пламени мала по сравнению со скоростью звука.

На поверхности разрыва, заменяющего собой зону горения, как и на всяком вообще разрыве, должны выполняться условия непрерывности потоков вещества, импульса и энергии. Первое из этих условий, как обычно, определяет отношение нормальных к поверхности разрыва компонент скорости газа относительно разрыва: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, или

$$v_1/v_2 = V_1/V_2,$$

где V_1, V_2 - удельные объемы несгоревшего газа и продуктов горения. Согласно общим результатам, полученным в § 84 для произвольных разрывов, при наличии скачка нормальной скорости касательная компонента скорости должна быть непрерывна. Поэтому линии тока преломляются на поверхности разрыва.

Благодаря малости нормальной скорости распространения пламени по сравнению со скоростью звука условие непрерывности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии - к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2.$$

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга. Считая газ политропным, имеем:

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, \quad w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2;$$

аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчета энергии), поскольку здесь w_{01} и w_{02} различны. Введем обозначение $w_{01} - w_{02} = q$; q есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесенная к единице массы), если бы эта реакция происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ 1) и сгоревшего (газ 2) газов:

$$p_1 = p_2, T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (128, 5)$$

Наличие определенной нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения самого газа, приводит к установлению определенной формы фронта пламени при стационарном горении в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если v есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что $v_1 S_1 = vS$, где S - площадь поперечного сечения трубки, а S_1 - полная площадь поверхности фронта пламени.

(далее забил выгружать.)

Детонация

Распространение детонационной волны

Соотношение между различными режимами горения

Конденсационные скачки

25.5 Релятивистская гидродинамика

Тензор энергии-импульса жидкости

Релятивистские гидродинамические уравнения

Ударные волны в релятивистской гидродинамике

Релятивистские уравнения движения вязкой и теплопроводной среды

25.6 Гидродинамика сверхтекучей жидкости

Основные свойства сверхтекучей жидкости

Термомеханический эффект

Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости

Распространение звука в сверхтекучей жидкости

25.7 О теории упругости

(это отдельная запись, тут пока вижу смысл указать основы её)

ности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии - к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2.$$

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга. Считая газ политропным, имеем:

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2;$$

аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчета энергии), поскольку здесь w_{01} и w_{02} различны. Введем обозначение $w_{01} - w_{02} = q$; q есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесенная к единице массы), если бы эта реакция происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ 1) и сгоревшего (газ 2) газов:

$$p_1 = p_2, T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (128, 5)$$

Наличие определенной нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения самого газа, приводит к установлению определенной формы фронта пламени при стационарном горении в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если v есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что $v_1 S_1 = v S$, где S - площадь поперечного сечения трубки, а S_1 - полная площадь поверхности фронта пламени.

25.8 Магнитная гидродинамика

25.9 гидродинамика плазмы

25.10 неньютоновская жидкость

интересно ведь.

25.11 Ударные волны

(структура лл)

(мб подглавой сделаю, пока так)

25.11.1 Основное по Ландау

Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

Стационарный поток сжимаемого газа

Поверхности разрыва

Ударная адиабата

Ударные волны слабой интенсивности

Направление изменения величин в ударной волне

25.11.2 Другое по Ландау

(по идее эти темы не очень нужны)

Эволюционность ударных волн

Ударные волны в политропном газе

Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Распространение ударной волны по трубе

Косая ударная волна

Ширина ударных волн

Ударные волны в релаксирующей среде

Изотермический скачок

Слабые разрывы

Part VII

Appendix

A Введение в механику сплошных сред

A.1 Еще мотивация

Обсудим, какова польза предмета и приведем всю мотивацию, которая позволит нам его познать без проблем.

Гидродинамика - это круто и мало кто в ней разбирается

(раскрою потом)

Фундаментальные вопросы о физике, например, о турбулентности, именно в рамках гидродинамики (!?!?)

(дорасту - пойму, впишу)

A.2 Мышление профессионала механики сплошных сред

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоения предмета.

A.2.1 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.

A.2.2 Необходимые и дополнительные темы для МСС

A.2.3 Способы изучения предмета

A.3 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.4 Literature

A.4.1 Основная

Basic educational literature

[1] David Tong Lectures on Fluid Mechanics
I believe that this is the top 1 book to start.

[2] K. Zhou Lecture Notes on Undergraduate Physics
This notes have a short theory about continuum mechanics, which is enough for the basic preparation in it.

[3] G. Falkovich Fluid Mechanics: A Short Course for Physicists
Later I'll study with it, looks like a very good book for the start.

[4] Landau, L. D. Electrodynamics of Continuous Media, Volume 8
A big books with many properties of many liquids and many configurations.

[5] А. А. Пухов. Лекции по колебаниям и волнам: учеб. пособие. В двух частях. Ч. 2.
Волны

Наверное, хорошая очень методичка для начала. Скорее всего с нее и начну когда-то.
По сути те же темы, что и Ландау там.

Books With Many Solved Problems

A.4.2 Дополнительная

Дополнительная профессиональная

Об особых моделях гидродинамики

[6] Пухов А. А. Уравнение «реакция–диффузия»: учебное пособие

Хорошая методичка, над которой можно недели 2 посидеть. Однако экзамен она сдать мне не помогла, не все там написано, где-то можно было бы более простую теорию почитать про это. Но в целом, вроде неплохая методичка. На либ мипте ищется.

ПТФ-2 В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Успехи Физ. Наук 167, 1137 (1997).

ПТФ-3 Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика, (Москва, Наука, 1988).

ПТФ-4 Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика. Часть 2.

ПТФ-5 И.М. Халатников, Теория сверхтекучести, (Москва, Наука, 1971).

ПТФ-6 В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи, (Москва, Наука, 1980).

ПТФ-7 А. I. Dyachenko, Y. V. L'vov, and V. E. Zakharov, Physica D 87, 233 (1995).

ПТФ-8 А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, Физика Плазмы 22, 916 (1996).

ПТФ-9 А.М. Balk, Physica D 139, 137 (2000).

ПТФ-10 A.N. Pushkarev, V.E. Zakharov, Physica D 135, 98 (2000).

ПТФ-11 С.К. Немировский, В.В. Лебедев, ЖЭТФ 84, 1729 (1983).

ПТФ-12 V. P. Ruban and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E 68, 056301 (2003).

ПТФ-13 V. P. Ruban, Phys. Rev. E 70, 066302 (2004); Phys. Lett. A 340, 194 (2005).
Phys. Rev. E 78, 066308 (2008).

Статьи о теоретических методах

Literature about atmosphere

[7] Andrews, David G. An Introduction to Atmospheric Physics

Little nice book. Available free on lib MIPT. I'll look later, no time for it now.

[8] Salby, M.L. Fundamentals of Atmospheric Physics
Big detailed book, Google gives it.

О приложениях

А.5 Обзор механики сплошных сред

что вообще в нем происходит?

А.5.1 МСС в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

появление Предмет в нашей картине мира

один подход

второй подход

О диффузионной гидродинамике

(про УРД всякие рассуждения)

Чем автоволны отличаются от солитонов

Волны в возбудимых (активных) средах отличаются как от линейных волн, так и от солитонов и солитоноподобных решений. Если среда описывается линейными уравнениями, то для распространяющихся в ней волн выполняется принцип суперпозиции: при встрече двух волн наблюдается простое наложение их амплитуд и связанные с этим явления интерференции. Для нелинейных сред принцип суперпозиции всегда нарушен – волны сильно взаимодействуют между собой. Характер такого взаимодействия, однако, существенно отличается для солитонов и автоволн (автосолитонов). Солитоны (англ. solitary wave – уединенная волна) возникают в консервативных нелинейных средах без затухания и подвода энергии от внешних источников. Солитон – это нелинейная уединенная волна в виде импульса, способного распространяться без изменения формы и без потерь энергии. При столкновении двух солитонов принцип суперпозиции не выполняется. Однако после столкновения волны восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями и в тех же направлениях. Способность сохранять свою структуру после нелинейного взаимодействия с себе подобными означает, что солитоны в определенном смысле ведут себя как частицы. В отличие от этого при столкновении двух плоских автоволн в возбужденной неравновесной среде происходит их полное взаимное погашение (аннигиляция). Аннигиляцией при столкновениях автоволн объясняются также разнообразные эффекты синхронизации в возбудимых средах: быстрые периодические источники автоволн подавляют низкочастотные источники. Например, ревербераторы могут уничтожать соседний с ними ведущий центр.

В солитоне эффекты дисперсии сбалансированы нелинейным эффектом на непрерывном промежутке значений скоростей: дисперсия \leftrightarrow нелинейность. Эффекты дисперсии заключаются в распределении энергии солитона, а нелинейные эффекты – в связывании этих двух эффектов в единый процесс: дисперсия растаскивает, а нелинейность укучивает фронт. Таким образом, уединенная волна (солитон) проявляется

как независимая (консервативная) сущность, в которой поддерживается баланс между «Инь» дисперсии и «Янь» нелинейности. Этот баланс представляет собой замкнутую причинно-следственную связь и подобен древней мифологической змее Уроборос, кусающей свой хвост [20].

На языке этой аналогии для УРД «Инь» термальной диффузии находится в состоянии баланса с «Янь» нелинейного высвобождения энергии: диффузия нелинейность. Это представляет собой другую замкнутую причинно-следственную связь, которая приводит к возникновению новой сущности – автоволны переключения.

(по Пухову тут теория)

A.5.2 наиболее прикладные темы Предмета

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

title

A.5.3 Итоговые формулы и закономерности

A.5.4 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

Epilogue by Falkovich

Now that we have learnt basic mechanisms and elementary interplay between nonlinearity, dissipation and dispersion in fluid mechanics, where one can go from here? It is important to recognize that this book describes only few basic types of flows and leaves whole sets of physical phenomena outside of its scope. It is yet impossible to fit all of fluid mechanics into the format of a single story with few memorable protagonists. Here is the brief guide to further reading, more details can be found in Endnotes.

Comparable elementary textbook (which is about twice larger in size) is that of Acheson [1], it provides extra material and some alternative explanations on the subjects described in our Chapters 1 and 2. On the subjects of Chapter 3, timeless classics is the book by Lighthill [11]. For a deep and comprehensive study of fluid mechanics as a branch of theoretical physics one cannot do better than using another timeless classics, volume VI of the Landau-Lifshits course [10]. Apart from a more detailed treatment of the subjects covered here, it contains variety of different flows, the detailed presentation of the boundary layer theory, the theory of diffusion and thermal conductivity in fluids, relativistic and superfluid hydrodynamics etc. In addition to reading about fluids, it is worth looking at flows, which is as appealing aesthetically as it is instructive and helpful in developing physicist's intuition. Plenty of visual material, both images and videos, can be found in [9, 19] and Galleries at <http://www.efluids.com/>. And last but not least: the beauty of fluid mechanics can be revealed by simply looking at the world around us and doing simple experiments in a kitchen sink, bath tube, swimming pool etc. It is likely that fluid mechanics is the last frontier where fundamental discoveries in physics can still be made in such a way.

After learning what fluid mechanics can do for you, some of you may be interested to know what you can do for fluid mechanics. Let me briefly mention several directions of the present-day action in the physics of fluids. Considerable analytical and numerical work continues to be devoted to the fundamental properties of the equations of fluid mechanics, particularly to the existence and uniqueness of solutions. The subject of a finite-time singularity in incompressible flows particularly stands out.

Those are not arcane subtleties of mathematical description but the questions whose answers determine important physical properties, for instance, statistics of large fluctuations in turbulent flows. On the one hand, turbulence is a paradigmatic far-from-equilibrium state where we hope to learn general laws governing non-equilibrium systems; on the other hand, its ubiquity in nature and industry requires knowledge of many specific features. Therefore, experimental and numerical studies of turbulence continue towards both deeper understanding and wider applications in geophysics, astrophysics and industry, see e.g. [4, 8, 21]. At the other extreme, we have seen that flows at very low Reynolds number are far from being trivial; needs of biology and industry triggered an explosive development of micro-fluidics bringing new fundamental phenomena and amazing devices. Despite a natural tendency of theoreticians towards limits (of low and high Re , Fr , \mathcal{M}), experimentalists, observers and engineers continue to discover fascinating phenomena for the whole range of flow control parameters.

The domain of quantum fluids continues to expand including now superfluid liquids, cold gases, superconductors, electron droplets and other systems. Quantization of vorticity and a novel factor of disorder add to the interplay of nonlinearity, dispersion, dissipation. Many phenomena in plasma physics also belong to a domain of fluid mechanics. Quantum fluids and plasma can often be described by two interconnected fluids (normal and superfluid, electron and ion) which allows for rich set of phenomena.

Another booming subject is the studies of complex fluids. One important example is a liquid containing long polymer molecules that are able to store elastic stresses providing fluid with a memory. That elastic memory provides for inertia (and nonlinearity) of its own and introduces the new dimensionless control parameter, Weissenberg number, which is the product of fluid strain and the polymer response time. When the Weissenberg number increases, instabilities takes place (even at very low Reynolds number) culminating in so-called elastic turbulence [17]. Another example is a two-phase flow with numerous applications, from clouds to internal combustion engines; here a lot of interesting physics is related to relative inertia of two phases and very inhomogeneous distribution of droplets, particles or bubbles in a flow.

And coming back to basics: our present understanding of how fish and microorganisms swim and how birds and insects fly is so poor that further research is bound to bring new fundamental discoveries and new engineering ideas.

A.5.5 Удивительные факты

A.5.6 Результаты Предмет

A.5.7 Применения Предмет в других разделах физики

A.5.8 Обзор дальнейших развитий Предмет

A.6 Описание записи

A.6.1 описание глав и разделов

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

A.6.2 обозначения и константы

A.7 Головоломки на разные случаи жизни

(придумаю потом, пока не так нужно это)

A.8 Короткий исторический обзор

(не актуально это)

В Математика для механики сплошных сред

В.0.1 О комплексном анализе

(просто слышал, что он тут нужен)

C Bibliography

References

- [1] Tong, D.: *Lectures on Fluid Mechanics*. 2022. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>.
- [2] Zhou, K.: *Lecture Notes on Undergraduate Physics*. 2022. <https://knzhou.github.io/notes/phy.pdf>.
- [3] Falkovich, G.: *Fluid Mechanics: A Short Course for Physicists*. Cambridge University Press, 2011, ISBN 9781139497510. <https://books.google.si/books?id=3nsyFHmgpP4C>.
- [4] Landau, L. D., Pitaevskii, L. P., Lifshitz, E.M.: *Electrodynamics of Continuous Media 2nd Edition, Volume 8*. Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 2013, ISBN 9781483293752.
- [5] Pukhov, A.A.: *Lectures on vibrations and waves: textbook. stipend. In two parts, Part 2. Waves*. Moscow: MIPT, 2019, ISBN ISBN 978-5-7417-0698-5.
- [6] Пухов, А. А.: *The reaction–diffusion equation: a textbook*. Москва : МФТИ, 2014, ISBN ISBN 978-5-7417-0510-0.
- [7] Andrews, David G.: *An Introduction to Atmospheric Physics*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2010.
- [8] Salby, M.L.: *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Number v. 61 in *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Elsevier Science, 1996, ISBN 9780126151602. https://books.google.bg/books?id=xWQOG-_UTBoC.