

Quantum Information Theory

Yury Holubeu *

December 1, 2024

This note is not intended for distribution.

The quantum theory of information, its models and applications are discussed. Links below show contents of [problems](#), and theory by [Holevo](#).

Currently I have a plan to master basics, which will take around a week.

Contents

1	Preface and main motivation	6
I	—— Typical Quantum Inform Theory in a Nutshell ——	7
2	Об основных методах и концепциях	7
2.1	Основные методы квантовой информации	7
2.1.1	Определения и смысл состояний, запутанности и измерений	7
2.1.2	Преобразования состояний, простейших квантовых вентелях	9
2.1.3	Определения операторов и отображений	11
2.1.4	Основные свойства матриц плотности систем	11
2.1.5	Теоремы о свойствах состояний, операторов и измерений	12
2.1.6	Об квантовых энтропиях	13
2.1.7	О квантовой информации	13
2.1.8	О квантовых каналах	13
2.1.9	Описание многочастичных систем	13
2.1.10	Об энтропии	13
2.1.11	О словах	13
2.1.12	Ф-л1. Классическая теория передачи информации	14
2.1.13	Ф-л2. Классическая информация через квантовые каналы	14
2.1.14	Ф-л3. Пропускная способность в терминах «сжатия квантовой информации». Аддитивность классической пропускной способности для канала, разрушающего перепутанность.	14
2.1.15	Ф-л4 Взаимная информация, Сверхплотное кодирование, Пропускная способность с перепутанностью	14
2.1.16	Ф-л5 Невозможность клонирования квантовой информации, «телепортация», квантовая пропускная способность	14
2.1.17	General ways to compute something with cubits?	14
2.1.18	General ways to compute something with superconductors	14
2.2	О природе квантовой механике, информации и сути происходящего	14
2.2.1	О смысле измерений и коллапсе волновой функции	14
2.2.2	О проверках основ квантовой механики	15
2.3	О приложениях, особых квантовых схемах с вентелями	15
2.3.1	О квантовом поиске (?????)	15
2.4	Темы лекций Филиппова введения	15
3	Об другом	15
3.1	Темы Холево	15
3.1.1	Введение	15
3.1.2	X1. Стандартная статистическая модель квантовой механики	15
3.1.3	X2. Статистика квантовых измерений	16
3.1.4	X3. Эволюция открытой системы	16
3.1.5	X4. Последовательные и непрерывные процессы измерения	16
3.1.6	X5. Процессы в пространстве Фока	16

*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

II	— Special Topics in a Nutshell —	17
3.2	О тензорных сетях и другом	17
3.2.1	Об типичном квантовом шифровании и криптографии (?????)	17
3.2.2	Ф-л6. Квантовые тензорные сети.	17
3.2.3	Ф-л7. Состояния матричного произведения (MPS). Операторы в виде одномерной тензорной сети (MPO).	17
3.2.4	Ф-л8. Оптимизация тензорной сети MPS. Анзац многомасштабной перенормировки перепутанности (MERA).	17
3.2.5	Ф-л9. Бозоны и фермионы. Вторичное квантование	17
III	Основы квантовой информации	18
4	Понятия квантовой теории информации	18
4.1	Основные законы квантовой механики	18
4.2	Проверка законов квантовой механики	18
4.2.1	Эксперимент ЭПР	18
4.2.2	Опыт Аспе	18
4.3	Введение и обзор квантовой теории информации по Нельсону и Чангу	18
4.3.1	Квантовые биты	30
4.3.2	Несколько кубитов	32
4.4	Квантовые вычисления	33
4.4.1	Однокубитовые элементы	34
4.5	Квантовые вычисления	34
4.6	Введение в квантовую механику	34
4.7	Введение в информатику	35
4.8	Другие темы основ	35
4.8.1	Квантовые базы данных	35
IV	Квантовая теория информации	36
5	Квантовая информация по Холево	36
5.0.1	Введение	36
5.1	СТАНДАРТНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ	44
5.1.1	1. Основные понятия	44
5.1.2	2. Симметрии, кинематика, динамика	51
5.1.3	3. Составные системы	56
5.1.4	4. Проблема скрытых параметров	59
5.2	СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	64
5.2.1	1. Обобщенные наблюдаемые	64
5.2.2	2. Квантовая теория статистических решений	69
5.2.3	3. Ковариантные наблюдаемые	78
5.3	ЭВОЛЮЦИЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ	84
5.3.1	1. Преобразования квантовых состояний и наблюдаемых	84
5.3.2	2. Квантовые динамические полугруппы	88
5.4	ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ИЗМЕРЕНИЯ	97
5.4.1	1. Статистика последовательных измерений	97
5.4.2	2. Процессы непрерывного измерения	105
5.5	ПРОЦЕССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА	113
5.6	§1. Квантовое стохастическое исчисление	113
5.6.1	1.2 Стохастический интеграл.	115
5.6.2	1.3 Квантовая формула Ито.	117
5.6.3	2. Расширения в пространстве Фока	121

6	Квантовый шум и квантовые преобразования	131
7	Исправление квантовых ошибок	132
8	Энтропия и информация	132
9	Квантовая теория информации	132
V	Квантовые вычисления	133
10	Квантовые схемы	133
10.0.1	Моделирование квантового компьютера	133
11	Квантовое преобразование Фурье и его приложения	133
12	Квантовые алгоритмы поиска	133
13	О физической реализации квантовых компьютеров	133
VI	Problems	135
14	Типичные задачи	135
14.1	Общие вопросы	135
14.1.1	Задачи на проверку основ теории	135
14.2	Типичные задачи (!!)	135
14.2.1	Задачи на понимание состояний, запутанности, простейших преобразований	135
14.2.2	Задачи о кубитах	137
14.2.3	Задачи о кутритах и схожем	137
15	Другие задачи (????)	137
15.0.1	Разные задачи (????)	137
15.0.2	Об особенных квантовых каналах (?????)	138
VII	Другие темы	139
16	Другие темы	139
17	Topological phases and quantum computation	139
17.1	Introduction: The quest for protected qubits	139
17.2	Topological phenomena in 1D: boundary modes in the Majorana chain	140
17.2.1	Nature of topological degeneracy (spin language)	141
17.2.2	Reduction of TFIM to SPSC by the Jordan-Wigner transformation	141
17.2.3	Majorana operators	142
17.2.4	General properties of quadratic fermionic Hamiltonians	143
17.2.5	Why are the boundary modes robust?	144
17.3	The two-dimensional toric code	145
17.3.1	Ground states	146
17.3.2	Excitations	146
17.4	Abelian anyons and quasiparticle statistics	147
17.4.1	Superselection sectors and fusion rules	149
17.4.2	Mutual statistics implies degeneracy on the torus	150
17.4.3	The toric code in a field: perturbation analysis	150
17.4.4	Robustness of the topological degeneracy	150

17.4.5	Emergent symmetry: gauge formulation	151
17.5	The honeycomb lattice model	152
17.5.1	A (redundant) representation of a spin by 4 Majorana operators	153
17.5.2	Solving the Honeycomb Model using Majoranas	153
17.5.3	Fermionic spectrum in the honeycomb lattice model	155
17.5.4	Quasiparticle statistics in the gapped phase	156
17.5.5	Nonabelian phase	157
17.5.6	Robustness of chiral modes	158

VIII Appendix 160

A Введение 160

A.1	Общая мотивация	160
A.1.1	Множество приложений	160
A.1.2	Польза в плане развития как профессионала	160
A.1.3	Польза в плане саморазвития	160
A.1.4	Удивительные факты	160
A.2	Мотивация к разделам	160
A.3	Мышление профессионала в	160
A.3.1	Актуальнейшие приложения	160
A.3.2	Построение с нуля	160
A.3.3	Способы догадаться до всех главных идей	160
A.4	Мышление для эффективного изучения	160
A.4.1	Способы изучения предмета	161
A.4.2	Необходимые темы для	161
A.4.3	Дополнительные темы для	161
A.5	Literature	161
A.5.1	Основная	161
A.5.2	Дополнительная	162
A.6	Обзор	162
A.6.1	предмет в двух словах	162
A.6.2	Итоговые формулы и закономерности	163
A.6.3	обзор теоретических подходов	163
A.6.4	Результаты	163
A.6.5	Преимущества квантовой информации	163
A.6.6	Обзор дальнейших развитий	163
A.7	Связи с другими науками	163
A.8	Описание записи	163
A.8.1	Общее описание записи	163
A.8.2	Особенности глав и разделов	163
A.8.3	Обозначения и константы	164
A.9	Головоломки квантовой информации	164
A.9.1	Бытовые головоломки	164
A.9.2	Типичные вопросы	164
A.9.3	Вопросы о квантовых схемах	164
A.9.4	Принципиальные головоломки	164
A.9.5	Головоломки о деталях	164
A.10	Короткий исторический обзор	164

B Математические дополнения 164

B.1	Некоторые методы линейной алгебры	164
-----	---	-----

С	Некоторые методы программирования	165
С.1	Некоторые сведения из теории вероятностей	165
С.2	Теория групп	165
С.3	Теорема Соловея—Китаева	166
С.4	Теория чисел	166

1 Preface and main motivation



Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Квантовая теория информации очень четко говорит об одном из самого важного в квантовой и фундаментального в механике: о состояниях, измерениях, их преобразованиях

(напишу тут подробно, что это на самом деле крутейший предмет. Спустя 1.5 года как на физтехе прошел понял, что это очень очень стоит того, чтобы очень много в нем просиживать, и все-таки пройти вдоль и поперек его!)

Квантовая теория информации в 2023 году многое может дать для устройства на работу, для приложений квантовой механики

(раскрою, что это один из самых прикладных предметов, один из самых востребованных. Чисто можно начать зарабатывать только за счет того, что 1 этот предмет и поймешь! Так что он один из самых важных, по крайней мере в 2023 году. Проверю потом еще эти утверждения, но пока очень в это верю.)

Одни из лучших идейных головоломок

Одни из лучших технических головоломок

Part I

Typical Quantum Inform Theory in a Nutshell

2 Об основных методах и концепциях

2.1 Основные методы квантовой информации

2.1.1 Определения и смысл состояний, запутанности и измерений

Типичные состояния

Состояния Белла для двух кубитов:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\varphi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\varphi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Это О.Н.Б. из перепутанных состояний

Чистые / факторизованные

Чистые могут быть перепутанными или не перепутанными.

Чистые не перепутанные:

$$\psi_{AB} = \psi_A \otimes \psi_B$$

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle \langle\psi| = |\varphi\rangle \langle\varphi| \otimes |\xi\rangle \langle\xi|$$

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

Чистые перепутанные:

$$\psi_{AB} \neq \psi_A \otimes \psi_B$$

$$\psi_{AB} = |\psi\rangle \langle\psi| \neq |\varphi\rangle \langle\varphi| \otimes |\xi\rangle \langle\xi|$$

здесь нет вообще корреляций.

(???!!! примеры???)

Смешанные состояния

Смешанные не перепутанные:

$$\rho_{AB} \neq |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\rho^{AB} = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B,$$

где p_k - коэффициенты в выпуклой сумме.

(???!!! примеры???!!!)

сепарабельные / распутанные / не запутанные / состояния

Физический смысл незапутанных состояний в том, что если у нас есть физическая величина, состоящая из тензорного произведения величины одной части системы F и величины второй части системы G есть произведение их средних значений

$$\langle F \otimes G \rangle = \langle F \rangle \cdot \langle G \rangle.$$

Кстати, если было бы перепутанное, то $\langle F \otimes G \rangle \neq \langle F \rangle \cdot \langle G \rangle$, то ест были бы корреляции.

Другими словами, можно брать произведение результатов.

(там что я измеряю X , коллега измеряет Y , мы перемножаем их и считаем матожидание)

Проверка сепарабельности делается следующими способами.

Критерий Переса-Городецких:

$$\rho_{AB}^{T_B} \geq 0 \implies \text{сепарабельно}$$

$$\rho_{AB}^{T_B} \geq 0 \quad \underbrace{\iff}_{\dim H_A \cdot \dim H_B \leq 6} \text{сепарабельно}$$

В частности для двух кубитов, критерий Переса-Городецких утверждает, что их матрица плотности является сепарабельной тогда и только тогда, когда она остается матрицей плотности при частичном транспонировании.

(ниже где-то он доказан)

Коррелированные (классическим и квантовым образом) состояния

Коррелированные состояния - это состояния, у которых $\rho_{AB} \neq \rho_A \otimes \rho_B$.

(?? только так определяются, никак иначе?)

Есть классическая корреляция, когда можно представить в виде выпуклой суммы

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$$

Есть квантовая корреляция, когда

$$\rho_{AB} \neq \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$$

это же запутанность.

Свойства:

множество всех сепарабельных состояний для данной системы выпукло.

Запутанные состояния

Запутанность, это когда

$$\rho_{AB} \neq \sum_k p_k \rho_A^k \otimes \rho_B^k$$

Критерии:

ранг Шмидта больше 2.

(по определению его, см. разложение Шмидта.)

(?? примеры !!!)

Свойства:

множество всех квантово перепутанных состояний для данной системы не выпукло.

(?? энтропия перепутанности???)

Также есть:

максимально перепутанное состояние:

(напишу потом)

(???? как получить запутанное состояние? типичный вопрос)

Квантовый инструмент

POVM - мера, соответствующая измерению

POVM - это мера E , которая сопоставляется каждому исходу,

удовлетворяющая $E = E^+ \geq 0$, и вероятность каждого исхода вычисляется по

$$p(i) = \text{tr}(\rho E_i)$$

Теорема Озавы утверждает, что для любого инструмента \mathcal{M} и любого состояния S существует семейство апостериорных состояний $\{S_x; x \in \mathcal{Q}\}$, т. е. операторов плотности S_x , таких что:

1. функция $x \rightarrow \text{Tr } S_x Y$ μ_s -измерима для любого $Y \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$;
2. $\text{Tr } \mathcal{M}(B)[S]Y = \int_B (\text{Tr } S_x Y) \mu_s(dx)$.

Теорема Озавы имеет принципиальное значение, поскольку демонстрирует согласованность понятия (вполне положительного) инструмента со стандартным формализмом квантовой механики.

Взаимно несмещенный базис (??!!)

Квантовый канал

Квантовый канал - это линейное, вполне положительное отображение, сохраняющее след.

(тут пояснение про вполне положительность, что за определение)

2.1.2 Преобразования состояний, простейших квантовых вентелях

(по идее тут и хватит для простых вентелей)

О разложении Шмидта

Разложение Шмидта

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle &\in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \quad \dim \mathcal{H}^A = d \leq D = \dim \mathcal{H}^B \\ |\psi^{AB}\rangle &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^D c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle \\ c_{ij} &= \sum_{k=1}^d U_{ik} \lambda_k V_{kj} \end{aligned}$$

Разложение Шмидта

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle &\in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \quad \dim \mathcal{H}^A = d \leq D = \dim \mathcal{H}^B \\ |\psi^{AB}\rangle &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^D \sum_{k=1}^d U_{ik} \lambda_k V_{kj} |i\rangle \otimes |j\rangle \\ |\psi^{AB}\rangle &= \sum_{k=1}^d \lambda_k \left(\sum_{i=1}^d U_{ik} |i\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^D V_{kj} |j\rangle \right) \\ |\psi^{AB}\rangle &= \sum_{k=1}^d \lambda_k |f_k\rangle \otimes |g_k^*\rangle, \quad \langle f_k | f_l \rangle = \langle g_k | g_l \rangle = \delta_{kl} \end{aligned}$$

Пример: Запишите разложение Шмидта для состояния

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |H\rangle \otimes |V\rangle + |V\rangle \otimes |H\rangle - |V\rangle \otimes |V\rangle) \\ &\frac{1}{2}(|H\rangle \otimes |H\rangle + |H\rangle \otimes |V\rangle + |V\rangle \otimes |H\rangle - |V\rangle \otimes |V\rangle) = \\ &= \frac{1}{2}|H\rangle \otimes (|H\rangle + |V\rangle) + \frac{1}{2}|V\rangle \otimes (|H\rangle - |V\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|H\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) + |V\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Разложение Шмидта

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle &\in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \quad \dim \mathcal{H}^A = d \leq D = \dim \mathcal{H}^B \\ |\psi^{AB}\rangle &= \sum_{k=1}^d \lambda_k |f_k\rangle \otimes |g_k\rangle, \quad \langle f_k | f_l \rangle = \langle g_k | g_l \rangle = \delta_{kl} \\ &\lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

Ранг Шмидта r - число ненулевых λ_k

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{k=1}^r \lambda_k |f_k\rangle \otimes |g_k\rangle$$

Для факторизованных состояний $r = 1$, для перепутанных $r > 1$

Обозначения для стандартного базиса кубитных состояний

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbb{C}^2 \\ |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle & \mathbb{C}^{2^2} \end{aligned}$$

(ладно, я скоро пойму, но еще подумать нужно)

Принципиальная схема квантового компьютера

(картинку от Филиппова вставлю, там и обсуждение короткое этого.)

2.1.3 Определения операторов и отображений

(подробно обсужу определения, укажу критерии и места применения)

Положительность оператора

Матрица плотности подсистем

Блочная положительность оператора

Положительное отображение / оператор

(тут укажу следствия и где оно нужно)

Вполне положительное отображение (?!)

Вполне положительное отображение - это линейное отображение Φ_t , для которого отображение $\Phi_t \otimes \text{Id}_k$ является положительным для всех $\text{Id}_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_k) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2, \dots$

пример вполне положительного отображения: $\Phi[\varrho] = A\varrho A^\dagger$ ($\Phi \otimes \text{Id}$)[X] = $A \otimes I \cdot X \cdot A^\dagger \otimes I$
 $X = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \geq 0$ ($\Phi \otimes \text{Id}$)[X] = $\sum_i \lambda_i \underbrace{A \otimes I |\psi_i\rangle}_{|\varphi_i\rangle} \underbrace{\langle \psi_i| A^\dagger \otimes I}_{\langle \varphi_i|} \geq 0$

Пример вполне положительного отображения: $\Phi[\varrho] = \sum_k A_k \varrho A_k^\dagger$ представление крауса

Пример не вполне положительного отображения: транспонирование $(\Phi \otimes \text{Id})[\varrho_{AB}] \equiv \varrho_{AB}^\top \not\geq 0$

Матрица Чоя

Деполяризующее отображение (????!!)

2.1.4 Основные свойства матриц плотности систем

Свидетель перепутанности

Выпуклость матриц плотности

(опишу, что про это известно)

Критерий Переса-Городецких

Критерий Переса-Городецких: Матрица плотности двух кубитов является сепарабельной тогда и только тогда, когда она остается матрицей плотности при частичном транспонировании.

(пример, что над большей чем 6 размерностью крит П-Г не работает??)

2.1.5 Теоремы о свойствах состояний, операторов и измерений

Критерий Переса-Городецких

Критерий Переса-Городецких:

$$\rho_{AB}^{T_B} \geq 0 \implies \text{сепарабельно}$$

$$\rho_{AB}^{T_B} \geq 0 \iff \text{сепарабельно}$$

$$\dim H_A \cdot \dim H_B \leq 6$$

(тут указание на доказательство)

Изоморфизм Чоя-Ямолковского - критерий квантового канала

Согласно изоморфизму Чоя-Ямолковского, линейное отображение Φ является квантовым каналом тогда и только тогда, когда соответствующая матрица Чоя Ω_Φ является матрицей плотности, удовлетворяющей условию $\text{tr}_1 \Omega_\Phi = \frac{1}{d} I$.

Необходимость следует тривиально из определений.

(??? как???)

для доказательства достаточности рассмотрим формулу обращения:

$$\begin{aligned} \Phi[X] &= d \text{tr}_2 [\Omega_\Phi \cdot I \otimes X^\top] \\ d \text{tr}_2 [\Omega_\Phi \cdot I \otimes X^\top] &= \text{tr}_2 \left[\sum_{i,j=1}^d \Phi[|i\rangle\langle j|] \otimes |i\rangle\langle j| \cdot I \otimes X^\top \right] = \\ &= \text{tr}_2 \left[\sum_{i,j=1}^d \Phi[|i\rangle\langle j|] \otimes |i\rangle\langle j| X^\top \right] = \sum_{i,j=1}^d \Phi[|i\rangle\langle j|] \langle j | X^\top | i \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^d \Phi[|i\rangle\langle j|] \langle i | X | j \rangle = \Phi \left[\sum_{i,j=1}^d |i\rangle\langle i | X | j \rangle \langle j| \right] = \Phi[X] \end{aligned}$$

$$\Phi[X] = d \text{tr}_2 [\Omega_\Phi \cdot I \otimes X^\top] \quad \text{tr}_1 \Omega_\Phi = \frac{1}{d} I \quad \text{tr}[\Phi[X]] = d \text{tr} [\Omega_\Phi \cdot I \otimes X^\top] = d \text{tr} [\text{tr}_1 [\Omega_\Phi] X^\top] = \text{tr} [I \cdot X^\top] = \text{tr}[X]$$

$$\Omega_\Phi = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad - \text{спектральное разложение} \quad \lambda_k \geq 0, \quad |\psi_k\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

$$|\psi_k\rangle = \sum_i \mu_i^{(k)} |f_i^{(k)}\rangle \otimes |g_i^{(k)}\rangle \quad - \text{разложение шмидта для каждого вектора}$$

$$\Omega_\Phi = \sum_{k,i,j} \lambda_k \mu_i^{(k)} \mu_j^{(k)} |f_i^{(k)}\rangle \langle f_j^{(k)}| \otimes |g_i^{(k)}\rangle \langle g_j^{(k)}|$$

$$\begin{aligned} \Phi[X] &= d \text{tr}_2 \left[\sum_{k,i,j} \lambda_k \mu_i^{(k)} \mu_j^{(k)} |f_i^{(k)}\rangle \langle f_j^{(k)}| \otimes |g_i^{(k)}\rangle \langle g_j^{(k)}| \cdot I \otimes X^\top \right] = \\ &= d \sum_{k,i,j} \lambda_k \mu_i^{(k)} \mu_j^{(k)} |f_i^{(k)}\rangle \langle f_j^{(k)}| \langle \overline{g_i^{(k)}} | X | \overline{g_j^{(k)}} \rangle \end{aligned}$$

(тут пример применения и указание случаев)

2.1.6 Об квантовых энтропиях

Обзор энтропий

неравенство Араки-Либя

2.1.7 О квантовой информации

О границе Холево (??!!!)

(интересно, потом напишу)

2.1.8 О квантовых каналах

Суть

(!!!! тут определение!!!!)

О пропускной способности канала

$p(y | x)$ -стохастическая матрица вероятностей переходов

$$p(y | x) \geq 0, \quad \sum_y p(y | x) = 1$$

Унистационарность канала

(?? для задачи актуально понять определение??)

О канале Ландау-Стритера

2.1.9 Описание многочастичных систем

(?? потом мб перекину в раздел квантмеха про них же, ибо что-то уже про это создавал раньше)

2.1.10 Об энтропии

(очень важный раздел, додумаю скоро!!!)

Основные формулы

Смысл энтропии

2.1.11 О словах

δ -типичные слова

δ -типичное слово - слово w длины n , имеющее вероятность p_w , если

$$2^{-n(H(X)+\delta)} < p_w < 2^{-n(H(X)-\delta)}$$

Для записи $N \approx 2^{nH(X)}$ типичных слов требуется $\log_2 N \approx nH(X)$ бит, т.е. $H(X)$ бит на символ!

Утверждение. Любой код, использующий битовые строки длины $n(H(X) - \delta)$, имеет асимптотически исчезающую вероятность ошибки, стремящуюся к единице при $n \rightarrow \infty$.

Схема сжатия в $1/R$ раз:

$\mathcal{E}^{(n)} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$ битовая строка длины nR

Схема развертывания:

$\mathcal{D}^{(n)} : \text{битовая строка длины } nR \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Схема сжатия-развертывания надежна, если

$$\mathbb{P} \{ \mathcal{D}^{(n)} (\mathcal{E}^{(n)} (x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Шеннона: для надежной схемы $R \geq H(X)$.

2.1.12 Ф-л1. Классическая теория передачи информации

(общие концепции тут)

2.1.13 Ф-л2. Классическая информация через квантовые каналы

2.1.14 Ф-л3. Пропускная способность в терминах «сжатия квантовой информации». Аддитивность классической пропускной способности для канала, разрушающего перепутанность.

(я хз, о чем тут, скорее всего какие-то общие умные слова)

2.1.15 Ф-л4 Взаимная информация, Сверхплотное кодирование, Пропускная способность с перепутанностью

2.1.16 Ф-л5 Невозможность клонирования квантовой информации, «телепортация», квантовая пропускная способность

2.1.17 General ways to compute something with cubits?

(в духе, допустим есть кубит, как с помощью этого можно было бы сделать квантовый компьютер? Важный идейный вопрос)

2.1.18 General ways to compute something with superconductors

(в духе, допустим что-то есть в сверхпроводимости, как с помощью этого можно было бы сделать квантовый компьютер? Важный идейный вопрос)

2.2 О природе квантовой механике, информации и сути происходящего

(пока идея в том, чтобы отдельно вопросы эти тут обсудить, потому что до этого подход "используем формулы, помним их ключевые". Тут - серьезные вопросы)

2.2.1 О смысле измерений и коллапсе волновой функции

(подробно ответ на этот вопрос, как это делается?)

2.2.2 О проверках основ квантовой механики

Об экспериментах Аспе

(см. Филлипов, пока не актуально. в теории сперва напишу, большая тема.)

2.3 О приложениях, особых квантовых схемах с вентелями

(такого много можно увидеть, здесь подробно про них и типичные схемы и алгоритмы напишу)

2.3.1 О квантовом поиске (?????)

Основные формулы (????)

Ускорение в сравнении с классикой \sqrt{N} .

2.4 Темы лекций Филиппова введения

(мб это выше уже будет написано, пока на всякий случай раздел для них.)

3 Об другом

3.1 Темы Холево

(надо все это выгружать, потому что иначе я ничего не пойму.)

3.1.1 Введение

0.1. Конечномерные системы 9 0.2. Общие постулаты статистического описания 11
0.3. Классические и квантовые системы 1- 0.4. Рандомизация в классической и квантовой статистике.. 14 0.5. Выпуклая геометрия разложений единицы и фундаментальные пределы точности 15 0.6. Проблема соответствия 16 0.7. Повторные и непрерывные измерения 16 0.8. Необратимая динамика.. 1В 0.9. Квантовые случайные процессы 18

3.1.2 X1. Стандартная статистическая модель квантовой механики

§ 1. Основные понятия Ш 1.1. Операторы в Гильбертовом пространстве Ш 2. Оператор плотности 21 1.3. Спектральная мера 22 1.4. Статистический постулат 22 1.5. Совместимые наблюдаемые 23 1.6. Простейший пример 25 § 2. Симметрии, кинематика, динамика 27 2.1. Группы симметрии 27 2.2. Однопараметрические группы 2 2.3. Соотношения Г. Вейля „.... 29 2.4. Гауссовские состояния. 32 § 3. Составные системы 33 3.1. Тензорное произведение гильбертовых пространств... 33 3.2. Произведение квантовых состояний 34 3.3. Независимость и предельные теоремы..... 35 § 4. Проблема скрытых параметров 37 4.1. Скрытые параметры и квантовая дополнительность... 37 4.2. Скрытые параметры и квантовая целостность.... 39 4.3. Структура множества квантовых корреляций..... 42

3.1.3 X2. Статистика квантовых измерений

§ 1. Обобщенные наблюдаемые 43 1.1. Разложения единицы 43 1.2. Обобщенная статистическая модель квантовой механики.. 45 1.3. Геометрия множества обобщенных наблюдаемых... 47 § 2. Квантовая теория статистических решений 49 2.1. Проверка гипотез 49 2.2. Байесовская задача 50 2.3. Пропускная способность квантового канала связи... 53 2.4. Общая формулировка 55 2.5. Квантовые неравенства Рао—Крамера 57 § 3. Ковариантные наблюдаемые 60 3.1. Формулировка проблемы 60 3.2. Структура ковариантного разложения единицы.... 61 3.3. Обобщенные системы импримитивности 62 3.4. Случай абелевой группы 63 3.5. Каноническая сопряженность в квантовой механике... 65 3.6. Локализуемость 68

3.1.4 X3. Эволюция открытой системы

§ 1. Преобразования квантовых состояний и наблюдаемых... 69 1.1. Вполне положительные отображения 69 1.2 Операции, динамические отображения 71 1.3. Условные ожидания 73 § 2. Квантовые динамические полугруппы 74 2.1. Определение и примеры 74 2.2. Инфинитезимальный оператор 75 2.3. Свойство консервативности 77 2.4. Ковариантные эволюции 79 2.5. Эргодические свойства 80 2.6. Расширения динамических полугрупп 81

3.1.5 X4. Последовательные и непрерывные процессы измерения

§ 1. Статистика последовательных измерений 85 1.1. Понятие инструмента 85 1.2. Представление вполне положительного инструмента... 87 1.3. Три уровня описания квантовых измерений 89 1.4. Воспроизводимость 90 1.5. Измерения непрерывных наблюдаемых 91 § 2. Процессы непрерывного измерения 93 2.1. Неразрушающие измерения 93 2.2. «Квантовый парадокс Зенона» 95 2.3. Предельная теорема для сверток инструментов.... 96 2.4. Сверточные полугруппы инструментов -98 2.5. Инструментальные процессы *00

3.1.6 X5. Процессы в пространстве Фока

§ 1. Квантовое стохастическое исчисление '03 1.1. Основные определения -03 1.2. Стохастический интеграл 105 1.3. Квантовая формула Ито 108 1.4. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения. ПО § 2. Расширения в пространстве Фока. 113 2.1 Винеровский и пуассоновский процессы в пространстве Фока 114 2.2. Стохастические эволюции и расширения динамических полугрупп 116 2.3. Расширения инструментальных процессов 119 2.4. Стохастические представления процессов непрерывного измерения 121 2.5. Нелинейные стохастические уравнения апостериорной динамики

Part II

Special Topics in a Nutshell

(доп. тем очень много, хоть всю жизнь в них можно сидеть)

3.2 О тензорных сетях и другом

3.2.1 Об типичном квантовом шифровании и криптографии (?????)

Основные формулы (????)

(простые модели, объем - 2-3 вводных лекций тут.)

3.2.2 Ф-л6. Квантовые тензорные сети.

3.2.3 Ф-л7. Состояния матричного произведения (MPS). Операторы в виде одномерной тензорной сети (MPO).

3.2.4 Ф-л8. Оптимизация тензорной сети MPS. Анзац многомасштабной перенормировки перепутанности (MERA).

(детали какие-то супер глубокие)

3.2.5 Ф-л9. Бозоны и фермионы. Вторичное квантование

(хз, мб удалю, мб это и не нужно, посмотрим)

Part III

Основы квантовой информации

4 Понятия квантовой теории информации

(!! суть этого в запись про квантмех и 1ю часть перенесу, пока плохо понимаю, что тут главное, а что нет)

4.1 Основные законы квантовой механики

4.2 Проверка законов квантовой механики

4.2.1 Эксперимент ЭПР

(подробно о нем, пока не думал особо)

4.2.2 Опыт Аспе

(подробно о нем, пока не думал особо)

4.3 Введение и обзор квантовой теории информации по Нельсону и Чангу

(пошли выгрузки, в 1ю часть добавлю потом их)

Глобальные перспективы

В области квантовых вычислений и квантовой информации изучаются задачи по обработке информации, которые могут быть выполнены с использованием квантовомеханических систем. Просто и очевидно, не так ли? Подобно тому, как было со многими простыми, но глубокими идеями, прошло довольно много времени, прежде чем кто-либо стал думать об обработке информации при помощи квантовомеханических систем. Чтобы понять, почему это произошло, мы должны вернуться в прошлое и последовательно рассмотреть каждую из областей, внесших фундаментальный вклад в квантовые вычисления и квантовую информацию, квантовую механику, информатику, теорию информации и криптографию. Чтобы получить некоторое представление о существенно различных направлениях, слившихся воедино в квантовых вычислениях и квантовой информации, вы должны на протяжении нашего короткого исторического обзора перечисленных областей последовательно представлять себя физиком, специалистом по информатике, по теории информации, и, наконец, криптографом.

История квантовых вычислений и квантовой информации

На рубеже девятнадцатого и двадцатого веков в науке назревала революция.

В физике разразилась серия кризисов. Проблема состояла в том, что физические теории того времени (называемые сейчас классической физикой) предсказывали абсурдные результаты, например, существование «ультрафиолетовой катастрофы» с бесконечными энергиями, или неизбежность постепенного падения электронов на атомные ядра. Сначала такие проблемы разрешались путем введения в классическую

физику специальных гипотез, но по мере того, как улучшалось понимание свойств атомов и излучения, выдвигаемые объяснения все более и более усложнялись. В начале 20-х гг. XX в. после четвертьвекового смятения кризис достиг своего пика и вылился в создание современной теории квантовой механики. С этого времени квантовая механика стала неотъемлемой частью науки и с невероятным успехом применялась ко всему, что находится под солнцем и внутри него, включая структуру атома, термоядерные реакции в звездах, сверхпроводники, структуру ДНК и элементарные частицы. Что представляет собой квантовая механика? Квантовая механика — это математическая платформа, или совокупность правил, предназначенная для построения физических теорий. Например, существует физическая теория,

известная как квантовая электродинамика, с фантастической точностью описывающая взаимодействие атомов со светом. Квантовая электродинамика построена на основе квантовой механики, но содержит специфические правила, не определяемые квантовой механикой. Связь квантовой механики с конкретными физическими теориями, например, с квантовой электродинамикой, в чем-то похожа на связь операционной системы компьютера с конкретной прикладной программой — операционная система задает некоторые базовые параметры и режимы работы, но не определяет, каким образом прикладные программы будут выполнять свои специфические задачи.

Принципы квантовой механики просты, но даже специалисты находят их противоречащими интуиции, истоки квантовых вычислений и квантовой информации можно усмотреть в постоянном желании физиков лучше понять квантовую механику. Самый известный критик квантовой механики Альберт Эйнштейн до конца жизни так и не примирился с теорией, которую сам же помог создать. Поколения физиков боролись с трудностями квантовой механики, пытаясь приспособить ее предсказания к человеческой интуиции. Одной из задач области квантовых вычислений и квантовой информации является разработка инструментов, которые развивали бы наше интуитивное понимание квантовой механики и делали ее предсказания более доступными для человеческого разума. Например, в начале 80-х гг. ученых стало интересовать, можно ли использовать квантовые эффекты для передачи сигнала со скоростью, превышающей скорость света, что безоговорочно запрещено эйнштейновской теорией относительности. Решение этой проблемы свелось к выяснению того, можно ли копировать неизвестное квантовое состояние. Если бы копирование оказалось возможным, то при помощи квантовых эффектов можно было бы передавать сигнал со скоростью, превышающей скорость света. Однако копирование, столь легко выполнимое для классической информации, в общем случае оказывается невозможным в квантовой механике. Эта теорема о невозможности копирования (no-cloning theorem), сформулированная в начале 80-х гг., является одним из самых первых результатов в области квантовых вычислений и квантовой информации. С тех пор к ней было сделано много уточнений, и теперь у нас есть концептуальные инструменты, позволяющие понимать, насколько хорошо может работать устройство (всегда несовершенное) квантового копирования. Эти инструменты, в свою очередь, были применены для понимания других аспектов квантовой механики. Другое историческое направление, внесшее вклад в развитие квантовых вычислений и квантовой информации, зародилось в 70-х гг. в связи с интересом к получению полного контроля над одиночными квантовыми системами. В приложениях квантовой механики до 70-х гг. обычно осуществлялся общий контроль над объемным образцом, содержащим невообразимое количество квантовомеханических систем, ни одна из которых не была доступна напрямую. Например, квантовая механика замечательно объясняет сверхпроводимость. Но поскольку сверхпроводник представляет собой огромный (по сравнению с атомными масштабами) образец проводящего металла, мы можем

исследовать лишь немногие аспекты его квантовомеханической природы. При этом отдельные квантовые системы, составляющие сверхпроводник, остаются недоступными. Такие устройства, как ускорители частиц, позволяют получать ограниченный доступ к отдельным квантовым системам, но по-прежнему не дают полного контроля над элементарными системами.

Начиная с 70-х гг. было разработано много методов управления одиночными квантовыми системами. В качестве примера можно привести методы удержания одиночного атома в «атомной ловушке», обеспечивающие его изоляцию от всего остального мира и позволяющие с невероятной точностью исследовать различные аспекты его поведения. При помощи сканирующего туннельного микроскопа удастся перемещать отдельные атомы, составляя из них заданные массивы. Были продемонстрированы электронные устройства, работа которых основана на переносе единичных электронов.

К чему все эти усилия, направленные на достижение полного контроля над одиночными квантовыми системами? Если оставить в стороне многочисленные технологические причины и сосредоточиться только на чистой науке, то главный ответ будет таков: исследователи действовали из интуитивных соображений. В науке самые глубокие озарения часто приходят тогда, когда разрабатывается метод для исследования новой области Природы. Например,

появление радиоастрономии в 30-40-х гг. повлекло за собой ряд захватывающих открытий, в том числе ядра галактики Млечный Путь, пульсаров и квазаров.

В физике низких температур достигнуты поразительные успехи в результате поиска способов понижения температур различных систем. Точно также,

работая над проблемой получения полного контроля над одиночными квантовыми системами, мы исследуем нетронутую область Природы в надежде открыть новые, неожиданные явления. Сейчас мы делаем лишь первые шаги в этих направлениях и уже получили несколько интересных сюрпризов. Чего же можно ожидать, если мы добьемся более полного контроля над одиночными квантовыми системами и распространим его на более сложные системы? Квантовые вычисления и квантовая информация естественным образом вписываются в эту программу. Они ставят ряд практических задач разных уровней сложности для людей, ищущих способы лучшего манипулирования одиночными квантовыми системами, стимулируют развитие новых экспериментальных методик и показывают наиболее интересные направления, в которых нужно ставить эксперименты. И наоборот, возможность управления одиночными квантовыми системами играет существенную роль, если мы хотим воспользоваться мощностью квантовой механики применительно к квантовым вычислениям и квантовой информации.

Несмотря на большой интерес к рассматриваемой области, усилия по построению систем обработки квантовой информации дали на сегодняшний день скромные результаты. Современная техника для квантовых вычислений представлена маленькими квантовыми компьютерами, способными выполнять десятки операций над несколькими квантовыми битами (кубитами). Были продемонстрированы экспериментальные прототипы устройств для реализации квантовой криптографии — способа секретной связи на больших расстояниях — и даже на таком уровне, когда они могут быть полезны в некоторых реальных приложениях. Однако разработка технологий для реализации крупномасштабной обработки квантовой информации остается серьезной задачей для физиков и инженеров будущего. Давайте перейдем от квантовой механики к еще одному великому интеллектуальному триумфу двадцатого столетия — информатике (computer science).

Истоки информатики теряются в глубине веков. Например, клинописные таблички свидетельствуют, что ко времени правления Хаммурапи (около 1750 г.

до н. э.) вавилоняне разработали некоторые довольно сложные алгоритмы, и весьма вероятно, что многие идеи относятся к еще более ранним временам.

Начало современной информатики было положено великим математиком Аланом Тьюрингом в его выдающейся работе 1936 г. Тьюринг подробно описал абстрактное понятие, которое мы назвали бы сейчас программируемым компьютером, а именно, модель вычислений, впоследствии названную в его честь машиной Тьюринга. Он показал, что существует универсальная машина Тьюринга, которая может использоваться для моделирования любой другой машины Тьюринга. Более того, он утверждал, что его универсальная машина полностью отвечает на вопрос, что значит решать задачу алгоритмическими средствами. Иначе говоря, если алгоритм может быть выполнен на любом физическом устройстве, например, на современном персональном компьютере, то существует эквивалентный алгоритм для универсальной машины Тьюринга, который решает ту же самую задачу, что и алгоритм, выполняемый на персональном компьютере. Это утверждение, называемое тезисом Чёрча-Тьюринга (в честь Тьюринга и другого пионера информатики Алонцо Черча),

устанавливает эквивалентность между физическим понятием класса алгоритмов, выполнение которых возможно на некотором физическом устройстве,

и строгим математическим понятием универсальной машины Тьюринга.

Широкое признание этого тезиса положило начало развитию обширной теории информатики.

Вскоре после появления работы Тьюринга были построены первые компьютеры на электронных компонентах. Джон фон Нейман разработал простую теоретическую модель, объясняющую, как на практике собрать компьютер,

обладающий всеми свойствами универсальной машины Тьюринга. Тем не менее 1.1. Глобальные перспективы 23 нее, настоящая разработка аппаратного обеспечения началась только в 1947 г.,

когда Джон Бардин, Уолтер Браттейн и Уилл Шокли создали транзистор.

С этого момента мощь компьютерного «железа» стала расти поразительными темпами. В 1965 г. Гордон Мур даже сформулировал закон этого роста,

известный как закон Мура, согласно которому производительность компьютеров, обеспечиваемая при одной и той же цене, будет удваиваться примерно каждые два года.

Как это ни удивительно, закон Мура оставался приблизительно справедливым на протяжении десятилетий. Тем не менее, большинство наблюдателей ожидают, что этот сказочный рост прекратится где-то в районе первых двух десятилетий двадцать первого века. Традиционные подходы к разработке компьютерной технологии начинают упираться в фундаментальные трудности,

связанные с размерами. По мере того, как электронные устройства становятся все меньше и меньше, в их функционирование постепенно вмешиваются квантовые эффекты.

Одним из возможных решений проблемы, связанной с прекращением действия закона Мура, является переход к другой вычислительной парадигме.

Одна из таких парадигм предоставляется квантовой теорией вычислений, основанной на идее использования для выполнения вычислений квантовой механики, а не классической физики. Оказывается, что несмотря на возможность применения классического компьютера для моделирования квантового компьютера, эффективное осуществление такого моделирования невозможно.

Таким образом, квантовые компьютеры существенно превосходят по скорости классические компьютеры. Это преимущество в скорости настолько значительно, что по мнению многих исследователей никакой мыслимый прогресс в классических вычислениях не поможет преодолеть разрыв в производительности между классическим и квантовым компьютерами.

Что имеется в виду под «эффективным» или «неэффективным» моделированием) квантового компьютера? Многие ключевые понятия, необходимые для ответа на этот вопрос, фактически появились еще до того, как возникла идея квантового компьютера. В частности, понятия эффективного и неэффективного алгоритма обрели математическую точность в теории сложности вычислений. Грубо говоря, эффективным является алгоритм, время выполнения которого полиномиально зависит от объема решаемой задачи. Для выполнения неэффективного алгоритма, напротив, требуется сверхполиномиальное (обычно экспоненциальное) время. В конце 60-х и начале 70-х гг. было замечено,

что машина Тьюринга обладает как минимум такой же эффективностью, как и любая другая модель вычислений, в том смысле, что задача, которая может быть эффективно решена в рамках некоторой модели вычислений, может быть эффективно решена и на машине Тьюринга путем использования машины Тьюринга для моделирования другой модели вычислений. Это наблюдение было сформулировано в виде усиленной версии тезиса Чёрча-Тьюринга:

Любой алгоритмический процесс может быть эффективно смоделирован на машине Тьюринга.

Усиление этой версии тезиса Чёрча-Тьюринга заключено в слове «эффективно». Если сильный тезис Чёрча-Тьюринга верен, то из него следует, что независимо от типа машины, используемой для выполнения алгоритмов, эта машина может быть эффективно смоделирована при помощи стандартной машины Тьюринга. Это важное усиление, поскольку оно подразумевает, что для анализа возможности эффективного выполнения данной вычислительной задачи мы можем ограничиться анализом машины Тьюринга.

Некоторые аргументы против сильного тезиса Чёрча-Тьюринга нашлись в области аналоговых вычислений. Уже после Тьюринга различные группы исследователей обнаружили, что некоторые типы аналоговых компьютеров могут эффективно решать задачи, не имеющие, по всей видимости, эффективного решения на машине Тьюринга. На первый взгляд такие аналоговые компьютеры нарушают сильную форму тезиса Чёрча-Тьюринга. К сожалению, если сделать реалистичные предположения о наличии шума в аналоговых компьютерах, то они окажутся неэффективными во всех известных реализациях и не смогут решать задачи, не имеющие эффективного решения на машине Тьюринга. Этот урок, состоящий в том, что при оценке эффективности модели вычислений необходимо учитывать влияние реального шума, стал одним из первых крупных выводов, брошенных квантовым вычислениям и квантовой информации. Ответом на него стала разработка теории кодов, исправляющих квантовые ошибки, и устойчивых к ошибкам квантовых вычислений. Таким образом, в отличие от аналоговых вычислений квантовые вычисления в принципе допускают наличие конечного уровня шума, сохраняя свои вычислительные достоинства.

Первое серьезное возражение против сильного тезиса Чёрча-Тьюринга появилось в середине 70-х гг., когда Роберт Соловей и Волкер Штрассен показали, что проверить, является ли целое число простым или составным, можно с помощью вероятностного алгоритма. В тесте Соловея-Штрассена случайность использовалась как существенная часть алгоритма. Алгоритм не давал достоверного ответа на вопрос, является ли данное целое число простым или составным, определяя это лишь с некоторой вероятностью. Повторяя тест Соловея-Штрассена несколько раз, можно определить это почти наверняка.

Нужно особо отметить, что во время появления теста Соловея-Штрассена не было известно какого-либо эффективного детерминированного алгоритма для проверки целых чисел на простоту.¹ Получалось, что компьютеры, имеющие доступ к генератору случайных чисел, могли эффективно выполнять вычислительные задачи, для которых

не было эффективного решения на традиционной детерминированной машине Тьюринга. Это открытие послужило толчком к поиску других вероятностных алгоритмов, который полностью оправдал себя,

приведя к созданию успешно развивающейся области исследований.

Вероятностные алгоритмы поставили под сомнение тезис Чёрча-Тьюринга, показав, что существуют эффективно решаемые задачи, которые, тем не менее, не могут быть эффективно решены на детерминированной машине Тьюринга.

Впрочем, возникшее затруднение легко устраняется простой модификацией тезиса: Любой алгоритмический процесс может быть эффективно смоделирован на вероятностной машине Тьюринга.

Эта модификация сильного тезиса Чёрча-Тьюринга должна оставлять чувство неудовлетворенности. Не может ли оказаться так, что через некоторое время еще какая-нибудь модель вычислений позволит эффективно решать задачи,

не имеющие эффективного решения в рамках модели вычислений Тьюринга? Можно ли найти модель вычислений, которая бы эффективно моделировала любую другую модель вычислений? Заинтересовавшись этим вопросом, Дэвид Дойч в 1985 г. решил выяснить,

можно ли использовать законы физики для вывода еще более сильной версии тезиса Чёрча-Тьюринга. Вместо принятия специальных гипотез Дойч стал искать физическую теорию для обоснования тезиса Чёрча-Тьюринга, которое было бы столь же надежным, как и статус самой этой теории. В частности,

Дойч попытался описать вычислительное устройство, которое было бы способно эффективно моделировать произвольную физическую систему.

Поскольку законы физики в конечном счете являются квантовомеханическими, Дойч естественным образом пришел к рассмотрению вычислительных устройств,

основанных на принципах квантовой механики. От этих устройств — квантовых аналогов машин, описанных Тьюрингом полвека назад — ведет свое начало концепция современного квантового компьютера, используемая в этой книге.

На момент написания книги еще не было ясно, достаточно ли универсального квантового компьютера Дойча для эффективного моделирования произвольной физической системы. Доказательство или опровержение этой гипотезы представляет собой одну из больших проблем в области квантовых вычислений и квантовой информации. Возможно, например, что некоторый эффект из квантовой теории поля или даже более эзотерический эффект,

основанный на теории струн, квантовой гравитации или на какой-либо другой физической теории, может вывести нас за рамки универсального квантового компьютера Дойча, предоставив еще более мощную модель вычислений. На данном этапе мы этого просто не знаем.

Модель квантового компьютера Дойча позволила оспорить сильную форму тезиса Чёрча-Тьюринга. Дойч задался вопросом, может ли квантовый компьютер эффективно решать вычислительные задачи, не имеющие эффективного решения на классическом компьютере, даже если это вероятностная машина Тьюринга. Он построил простой пример, показывающий, что квантовые компьютеры действительно могут превосходить по вычислительной эффективности классические компьютеры.

Этот выдающийся первый шаг, сделанный Дойчем, в последующие десять лет был развит многими людьми. Кульминация этого развития пришлась на 1994 г., когда Питер Шор продемонстрировал, что две исключительно важные задачи — поиск простых сомножителей целого числа и так называемая задача вычисления дискретного логарифма — могут быть эффективно решены на 26 Глава 1. Введение и общий обзор квантовом компьютере. Это вызвало большой интерес, поскольку две указанные задачи

считались (и по-прежнему считаются) эффективно неразрешимыми на классическом компьютере. Результаты Шора убедительно показывали,

что квантовые компьютеры превосходят по производительности машины Тьюринга, включая их вероятностный вариант. Следующее доказательство эффективности квантовых компьютеров появилось в 1995 г., когда Лов Гровер показал, что выполнение другой важной задачи — проведения поиска в некотором неструктурированном поисковом пространстве — также может быть ускорено на квантовом компьютере. Правда, алгоритм Гровера не давал такого эффектного ускорения, как алгоритмы Шора, но ввиду широкого применения методологий, основанных на поиске, он вызвал значительный интерес.

Примерно в то же время, когда были открыты алгоритмы Шора и Гровера, многие разрабатывали идею Ричарда Фейнмана, высказанную им в 1982 г.

Фейнман указал, что моделирование квантовомеханических систем на классических компьютерах сопряжено с существенными трудностями, и предположил, что построение компьютеров на основе принципов квантовой механики позволило бы этих трудностей избежать. В 90-х гг. несколько групп исследователей начали развивать эту идею, показав несомненную возможность использования квантовых компьютеров для эффективного моделирования систем, не имеющих какой-либо известной эффективной модели на классическом компьютере. Вероятно, в будущем одним из главных применений квантовых компьютеров станет моделирование квантовомеханических систем, слишком сложных для моделирования на классическом компьютере. Решение этой задачи требует глубоких научных и технологических разработок.

Какие еще задачи квантовые компьютеры могут решать быстрее, чем классические? Краткий ответ таков: мы не знаем. Разработать хороший квантовый алгоритм трудно. Пессимист может усмотреть причину в том, что квантовые компьютеры подходят только для уже известных применений. Мы придерживаемся другой точки зрения. Разработка алгоритмов для квантовых компьютеров трудна потому, что здесь приходится сталкиваться с двумя непростыми проблемами, которых нет при разработке алгоритмов для классических компьютеров. Во-первых, наша интуиция имеет корни в классическом мире. Если мы прибегнем к помощи этой интуиции при разработке алгоритмов, то алгоритмические идеи, к которым придем, будут классическими. Для создания хороших квантовых алгоритмов необходимо «отключить» классическую интуицию хотя бы на каком-то этапе процесса разработки, используя для достижения желаемого результата чисто квантовые эффекты. Во-вторых, недостаточно разработать алгоритм, который просто является квантовомеханическим. Этот алгоритм должен быть лучше, чем любой из существующих классических алгоритмов! Ведь может случиться так, что кто-то найдет алгоритм,

использующий чисто квантовые аспекты квантовой механики, но этот алгоритм не будет представлять большого интереса из-за существования классических алгоритмов со сравнимой производительностью. Сочетание двух описанных проблем делает разработку новых квантовых алгоритмов многообещающей задачей для будущего.

1.1. Глобальные перспективы 27 Поставим вопрос еще шире: можно ли сделать какие-либо обобщения относительно производительности квантовых компьютеров по сравнению с классическими? Что именно делает квантовые компьютеры эффективнее классических, если, конечно, это на самом деле так? Задачи какого класса можно эффективно решать на квантовом компьютере и как этот класс соотносится с классом задач, эффективно решаемых на классическом компьютере? Одной из самых интригующих особенностей квантовых вычислений и квантовой информации является то, насколько мало известно об ответах на эти вопросы! Необходимость их лучшего понимания представляет собой великий вызов будущему.

Подойдя к переднему краю квантовых вычислений, давайте обратимся к истории другого направления мысли, внесшего вклад в квантовые вычисления и квантовую информацию: теории информации. В 40-х гг. одновременно со взрывным развитием информатики происходила революция в понимании связи (communication). В 1948 г. Клод Шеннон опубликовал пару выдающихся работ,

заложивших основы современной теории информации и связи.

Возможно, самый важный шаг, сделанный Шенноном, состоял в математическом определении понятия информации. Во многих математических науках существует значительная гибкость в выборе фундаментальных определений. Попробуйте несколько минут подумать, исходя из самых обычных соображений, над следующим вопросом: как бы вы подошли к математическому определению понятия «источник информации»? Широкое распространение получили сразу несколько решений этой проблемы; однако определение Шеннона оказалось гораздо более плодотворным в плане улучшения понимания.

Его использование привело к получению целого ряда серьезных результатов и созданию обширной теории, которая, по всей видимости, адекватно отражает многие (хотя и не все) реальные проблемы связи.

Шеннона интересовали два ключевых вопроса, относящихся к обмену информацией по каналу связи. Во-первых, какие ресурсы требуются для передачи информации по каналу связи? Например, телефонным компаниям нужно знать, сколько информации они могут надежно передать по данному телефонному кабелю. Во-вторых, может ли информация передаваться таким образом,

чтобы она была защищена от шумов в канале связи? Шеннон ответил на два этих вопроса, доказав две фундаментальные теоремы теории информации. Первая из них — теорема о кодировании для канала без шума — определяет, какое количество физических ресурсов требуется для хранения выходных данных источника информации. Вторая фундаментальная теорема Шеннона — теорема о кодировании для канала с шумом — определяет, какое количество информации можно надежно передать по каналу связи в присутствии шума. Шеннон показал, что для достижения надежной передачи в присутствии шума можно использовать коды, исправляющие ошибки.

Теорема Шеннона о кодировании для канала с шумом устанавливает верхний предел защиты информации, обеспечиваемой кодами, исправляющими ошибки. К сожалению, теорема не дает явного вида кодов, при помощи которых можно было бы достичь этого предела на практике. С момента опубликования

работ Шеннона и до настоящего времени исследователи разрабатывают все новые и лучшие классы кодов, исправляющих ошибки, пытаясь приблизиться к пределу, установленному теоремой Шеннона. Существует сложная теория кодов, исправляющих ошибки, которая предлагает пользователю, желающему разработать хороший код, множество вариантов выбора. Такие коды широко применяются; они используются, например, в проигрывателях компакт-дисков,

компьютерных модемах и спутниковых системах связи. Квантовая теория информации развивалась похожим образом. В 1995 г. Бен Шумахер доказал аналог теоремы Шеннона о кодировании в отсутствие шума,

по ходу дела определив «квантовый бит», или «кубит», как реальный физический ресурс. Однако до сих пор неизвестно никакого аналога теоремы Шеннона о кодировании для канала с шумом применительно к квантовой информации. Несмотря на это, по аналогии с классическими эквивалентами была разработана теория исправления квантовых ошибок, которая, как уже упоминалось,

позволяет квантовым компьютерам эффективно проводить вычисления в присутствии шума, а также осуществлять надежную связь по квантовым каналам с

шумом. Классические идеи исправления ошибок оказались очень важными для разработки и понимания кодов, исправляющих квантовые ошибки. В 1996 г. независимо работавшие Роберт Калдербанк с Питером Шором и Эндрю Стин открыли важный класс квантовых кодов, называемых сейчас CSS-кодами, по первым буквам их фамилий. Впоследствии эти коды были отнесены к категории симплектических (стабилизирующих) кодов, независимо разработанных Робертом Калдербанком, Эриком Рейнсом, Питером Шором и Нейлом Слоуном, а также Даниэлем Готтесманом. Эти открытия, опирающиеся на основные идеи классической теории линейного кодирования, в значительной степени способствовали быстрому пониманию кодов, исправляющих квантовые ошибки, и их применению в области квантовых вычислений и квантовой информации. Теория кодов, исправляющих квантовые ошибки, была разработана с целью защиты квантовых состояний от шума. А как насчет передачи обычной классической информации по квантовому каналу? Насколько эффективно это можно делать? В этой области было обнаружено несколько сюрпризов. В 1992 г. Чарльз Веннет и Стивен Уиснер объяснили, как передавать два классических бита информации путем передачи от отправителя к получателю только одного квантового бита. Это было названо сверхплотным кодированием. Еще больший интерес представляют результаты в области распределенных квантовых вычислений. Представьте, что у вас есть два соединенных в сеть компьютера, на которых решается некоторая задача. Сколько передач по сети требуется для решения этой задачи? Недавно было показано, что квантовые компьютеры могут потребовать экспоненциально меньшего количества передач для решения определенных задач по сравнению с классическими сетевыми компьютерами! К сожалению, эти задачи пока не представляют особого интереса в реальных условиях, и имеют некоторые нежелательные технические ограничения. Важным вопросом, которым нужно заняться в области кванто-

1.1. Глобальные перспективы

Вычислений и квантовой информации в будущем, является поиск практически важных задач, для которых распределенные квантовые вычисления имеют значительное преимущество над распределенными классическими вычислениями. Но вернемся к теории информации. Эта теория начинается с изучения свойств одиночного канала связи. В приложениях мы часто имеем дело не с одним каналом связи, а с сетью из многих каналов. Свойства таких сетей,

относящиеся к передаче информации, изучаются в сетевой теории информации,

которая развилась в обширную и сложную науку. Сетевая квантовая теория информации, напротив, во многом еще только зарождается. Мы очень мало знаем даже о возможностях передачи информации по сетям квантовых каналов. В последние несколько лет был получен ряд довольно ошеломляющих предварительных результатов; однако единой сетевой теории информации для квантовых каналов пока не существует. Одного примера из этой области должно хватить, чтобы убедить вас в значимости такой общей теории. Предположим, что мы пытаемся передавать информацию от Алисы к Бобу по квантовому каналу с шумом. Если этот канал имеет нулевую пропускную способность для квантовой информации, то по нему нельзя надежно передавать никакую информацию. Теперь допустим, что мы рассматриваем две копии канала, работающие синхронно. С интуитивной точки зрения очевидно (и это можно строго доказать), что для квантовой информации такой канал также имеет нулевую пропускную способность. Но если мы изменим направление одного из каналов на обратное, как показано на рис. 1.1, то оказывается, что иногда можно получить ненулевую пропускную способность для передачи информации от Алисы к Бобу! Противоречащие интуиции свойства наподобие только что описанного иллюстрируют странную природу квантовой информации. Лучшее понимание возможностей передачи информации по сетям квантовых каналов представляет собой большую проблему в

области квантовых вычислений и квантовой информации.

Рис. 1.1. Если в классическом случае мы имеем два канала с сильным шумом и нулевой пропускной способностью, работающих параллельно, то объединенный канал также имеет нулевую пропускную способность. Неудивительно, что если изменить направление одного из каналов на обратное, то мы по-прежнему будем иметь нулевую пропускную способность. В квантовомеханическом случае обращение одного из каналов с нулевой пропускной способностью может позволить нам передавать информацию!

Давайте сменим тему, обратившись к старому как мир искусству криптографии. Говоря в самых общих чертах, криптография решает проблему осуществления связи или вычислений с участием двух и более сторон, которые не могут доверять друг другу. Самая известная криптографическая проблема— это передача секретных сообщений. Предположим, что две стороны желают засекретить связь. Например, вы хотите передать продавцу номер своей кредитной карты в обмен на товары, причем так, чтобы этот номер не могла перехватить третья сторона. Это делается при помощи криптографического протокола. Далее в книге мы подробно опишем работу криптографических протоколов, а пока достаточно провести несколько простых разграничений. Наиболее важно понимать различие между криптосистемами с секретным ключом (private key) и криптосистемами с открытым ключом (public key).

Работа криптосистемы с секретным ключом основана на том, что две стороны, Алиса и Боб, используют для связи секретный ключ, известный только им. Точный формат ключа сейчас не имеет значения; представьте себе строку нулей и единиц. Главное в том, что этот ключ используется Алисой для шифрования информации, которую она хочет послать Бобу. Зашифрованную информацию Алиса посылает Бобу, который теперь должен восстановить исходную информацию. Как именно Алиса зашифрует сообщение—зависит от секретного ключа, поэтому для восстановления исходного сообщения Боб должен знать этот ключ, чтобы обратить примененное Алисой преобразование.

К сожалению, криптосистемы с секретным ключом имеют недостатки во многих отношениях. Наиболее фундаментальный вопрос —как распределять ключи? Проблема распределения ключей по своей сложности во многом аналогична исходной проблеме секретной связи —третья сторона может перехватить ключ, а затем использовать его для расшифровки передаваемых сообщений.

Одним из самых первых открытий в области квантовых вычислений и квантовой информации стал тот факт, что квантовая механика позволяет исключить нарушение конфиденциальности при распределении ключей.

Соответствующая процедура известна как квантовая криптография или квантовое распределение ключей. Основная идея заключается в том> чтобы использовать квантовомеханический принцип, согласно которому наблюдение в общем случае возмущает наблюдаемую систему. Если злоумышленник попытается вести подслушивание во время передачи ключа между Алисой и Бобом, то его присутствие будет проявляется в виде возмущения канала связи, используемого Алисой и Бобом для согласования ключа. В таком случае Алиса и Боб могут отбросить биты ключа, принятые во время подслушивания, и начать все заново. Принципы квантовой криптографии были впервые предложены Стивеном Уиснером в конце 60-х гг., но, к сожалению, его работу не приняли к печати! В 1984 г. Чарльз Беннет и Джиллз Брассар, опираясь на более раннюю работу Уиснера, предложили квантовомеханический протокол распределения ключей,

исключающий любую возможность их компрометации. С тех пор было предложено множество квантовых криптографических протоколов и разработано не меньшее количество их экспериментальных прототипов. На момент написания 1.1. Глобальные

перспективы 31 книги эти прототипы почти достигли такого состояния, когда они могут быть полезны в реальных приложениях ограниченного масштаба.

Вторым важным типом криптосистем являются криптосистемы с открытым ключом. Эти криптосистемы не опираются на предварительную передачу секретного ключа между Алисой и Бобом. Вместо этого Боб просто публикует свой «открытый ключ», делая его доступным всем желающим. Алиса может воспользоваться этим открытым ключом для шифрования сообщения,

посылаемого Бобу. Интересно, что при этом третья сторона не может использовать открытый ключ Боба для расшифровки сообщения! Точнее говоря,

шифрующее преобразование выбирается настолько хитроумным и нетривиальным способом, что его исключительно трудно (хотя в принципе возможно) обратить,

зная только открытый ключ. Чтобы обращение было простым для Боба, у него есть секретный ключ, соответствующий открытому ключу. Вместе эти ключи позволяют с легкостью выполнять расшифровку. Секретный ключ известен только Бобу, и это дает ему определенную степень уверенности, что никто другой не сможет прочесть сообщение Алисы. Действительно, вряд ли у кого-то окажется достаточно вычислительных ресурсов, чтобы обратить шифр только по открытому ключу. Таким образом, криптосистемы с открытым ключом решают проблему распределения ключей, делая ненужной передачу секретного ключа перед установлением связи.

Удивительно, что криптография с открытым ключом, которая произвела революцию в области криптографии, не получала широкого распространения до середины 70-х гг., когда она была независимо предложена Уитфилдом Диффи и Мартином Хеллманом, а также Ральфом Меркле. Немного позже Рональд Райвест, Ади Шамир и Леонард Эдельман разработали криптосистему RSA, которая на момент написания книги является наиболее распространенной криптосистемой рассматриваемого типа, превосходно сочетающей в себе безопасность и практичность. В 1997 г. выяснилось, что все это — криптография с открытым ключом, криптосистемы Диффи-Хеллмана и RSA — на самом деле было изобретено в конце 60-х и начале 70-х гг. исследователями из Британского разведывательного управления GCHQ.

Безопасность криптосистем с открытым ключом основана на том факте,

что обращение стадии шифрования только при наличии открытого ключа в общем случае должно быть затруднительным. Например, оказывается, что задача обращения стадии шифрования RSA тесно связана с задачей факторизации. Предположение о безопасности RSA во многом обусловлено верой в то,

что задачу факторизации трудно решить на классическом компьютере.

Однако быстрый алгоритм факторизации на квантовом компьютере, разработанный Шором, мог бы использоваться для взлома RSA! Другие криптосистемы с открытым ключом также могли бы быть взломаны, если бы был известен быстрый классический алгоритм решения задачи о вычислении дискретного логарифма, подобный шоровскому квантовому алгоритму вычисления дискретного логарифма. Именно это практическое применение квантовых компьютеров — взлом криптографических кодов — в значительной степени стимулировало интерес к квантовым вычислениям и квантовой информации.

32 Глава 1. Введение и общий обзор Выше мы рассматривали исторические корни квантовых вычислений и квантовой информации. Конечно, с ростом и развитием этой области из нее выделились самостоятельные подобласти исследований.

Возможно, наиболее поразительным из них является изучение квантовой запутанности. Запутанность — это уникальный квантовомеханический ресурс,

который играет ключевую роль во многих наиболее интересных применениях квантовых вычислений и квантовой информации; это своего рода железо в бронзовом

веке классического мира. Запутанность считается фундаментальным ресурсом Природы, сравнимым по важности с энергией, информацией,

энтропией или любым другим фундаментальным ресурсом. В последние годы предпринимаются огромные усилия, направленные на лучшее понимание ее свойств. Хотя законченной теорий запутанности пока нет, к настоящему времени удалось достичь некоторого прогресса в понимании этого странного понятия квантовой механики. Многие исследователи надеются, что дальнейшее изучение свойств запутанности даст сведения, которые будут способствовать разработке ее новых применений в области квантовых вычислений и квантовой информации.

1.1.2 Направления будущих исследований Мы немного познакомились с историей и современным состоянием квантовых вычислений и квантовой информации. Что ждет нас в будущем? Что могут предложить квантовые вычисления и квантовая информация науке, технике и всему человечеству? Что нового дает эта область по сравнению с ее родительскими дисциплинами — информатикой, теорией информации и физикой? Каковы основные нерешенные проблемы? Перед тем, как переходить к более подробному описанию вычислений и квантовой информации, мы сделаем несколько очень коротких замечаний по этим глобальным вопросам.

Квантовые вычисления и квантовая информация научили нас думать о вычислениях физически, и мы обнаружили, что этот подход открывает много новых возможностей в области связи и обработки информации. Специалисты по информатике и теории информации получили новую плодотворную парадигму для исследований. Более того, фактически мы поняли, что любая физическая теория, а не только квантовая механика, может служить базисом для теории обработки информации и теории связи. В результате этих исследований однажды могут быть созданы устройства обработки информации, намного превосходящие по своим возможностям современные вычислительные и коммуникационные системы, что будет иметь свои положительные и отрицательные последствия для всего общества.

Конечно, квантовые вычисления и квантовая информация ставят перед физиками массу задач, но при этом не совсем понятно, что та область предлагает физике в долгосрочной перспективе. Мы полагаем, что точно так же, как мы научились думать о вычислениях физически, мы можем научиться думать о физике в терминах вычислений. Физика традиционно является дисциплиной,

где основное внимание сосредоточено на понимании «элементарных» объектов и простых систем, однако многие интересные аспекты Природы проявляются лишь с ростом размеров и сложности. Такие явления отчасти исследуются в химии, и инженерных науках, но всякий раз довольно специфическим образом. Квантовые вычисления и квантовая информация предоставляют новые инструменты, позволяющие перебрасывать мост от простого к относительно сложному: в сфере вычислений и алгоритмов есть систематические средства для построения и изучения таких систем. Применение идей из этих областей уже начинает приводить к выработке новых взглядов на физику. Мы надеемся, что в последующие годы этот подход будет успешно применяться во всех ее разделах.

Выше были кратко рассмотрены некоторые ключевые мотивации и идеи,

лежащие в основе квантовых вычислений и квантовой информации. В остальной части этой главы будет дано более техническое, но по-прежнему доступное введение в эти мотивации и идеи в надежде сформировать у вас общее представление о рассматриваемой области в ее современном состоянии.

4.3.1 Квантовые биты

биты - это фундаментальное понятие в области классических вычислений и классической информации. Квантовые вычисления и квантовая информация построены вокруг аналогичного понятия квантового бита (quantum bit), или для краткости кубита (qubit). В этом разделе мы описываем свойства одиночных кубитов и систем, состоящих из нескольких кубитов, сопоставляя их со свойствами классических битов.

Что такое кубит? Мы намерены описывать кубиты как математические объекты с некоторыми заданными свойствами. «Но постойте, — скажете вы, — ведь кубиты являются физическими объектами!» Действительно, кубиты, подобно битам, реализуются как физические системы, и в разд. 1.5 (а также в гл. 7) мы подробно расскажем, как осуществляется переход от абстрактного математического представления к реальным системам. Однако по большей части мы будем рассматривать кубиты как абстрактные математические объекты. Такой подход удобен тем, что предоставляет нам свободу при построении общей теории квантовых вычислений и квантовой информации, не зависящей от конкретной системы, используемой для ее реализации.

Так что же такое кубит? Аналогично классическому биту, который может находиться в состоянии 0 или 1, кубит также имеет состояние. Двумя возможными состояниями кубита являются $|0\rangle$ и $|1\rangle$, соответствующие, как можно догадаться, состояниям 0 и 1 классического бита. Символ $|\rangle$ называется дираковским обозначением, и мы будем часто с ним встречаться, поскольку это стандартное обозначение состояний в квантовой механике. Различие между битами и кубитами в том, что кубит может находиться в состоянии, отличном от $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Можно составить линейную комбинацию состояний, часто называемую суперпозицией:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Числа α и β являются комплексными, хотя для многих целей их можно без особого ущерба считать действительными. Иначе говоря, состояние кубита представляет собой вектор в двумерном комплексном векторном пространстве. Специальные состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ называются состояниями вычислительного базиса и образуют ортонормированный базис этого векторного пространства. Мы можем измерить бит, чтобы определить, находится ли он в состоянии 0 или 1. Например, компьютеры делают это каждый раз, когда считывают содержимое своей памяти. Но мы не можем измерить кубит, чтобы определить его квантовое состояние, т. е. значения α и β . Из квантовой механики следует, что можно получить лишь гораздо более ограниченную информацию о квантовом состоянии. При измерении кубита мы получаем либо результат 0 с вероятностью $|\alpha|^2$, либо результат 1 с вероятностью $|\beta|^2$. Разумеется, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, так как $|\alpha|^2$, либо результат 1 с вероятностью $|\beta|^2$. Разумеется, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, поскольку сумма вероятностей должна быть равна единице. Геометрически мы можем интерпретировать это как условие, что состояние кубита должно иметь единичную длину. Таким образом, в общем случае состояние кубита представляет собой единичный вектор в двумерном комплексном векторном пространстве.

Этот разрыв между ненаблюдаемым состоянием кубита и доступными нам наблюдениями лежит в основе квантовых вычислений и квантовой информации. В большинстве наших абстрактных моделей мира существует прямое соответствие между элементами абстракции и реальностью, точно так же, как планы архитектора по постройке здания соответствуют конечному результату строительства. Отсутствие такого прямого соответствия в квантовой механике затрудняет интуитивное понимание поведения квантовых систем. Однако существует не прямое соответствие: состояния кубита можно менять тем или иным способом, в результате чего данные измерения

будут существенно зависеть от различных свойств состояния. Таким образом, наличие квантовых состояний приводит к реальным, экспериментально подтверждаемым следствиям, которые, как мы увидим, и определяют эффективность квантовых вычислений и квантовой информации. Способность кубита находиться в состоянии суперпозиции противоречит нашим обыденным представлениям об окружающем физическом мире. Классический бит подобен монете: либо орел, либо решка. Для несовершенных монет возможны промежуточные состояния, например, балансирование на ребре, но в идеальном случае их можно отбросить. Кубит, напротив, до момента наблюдения может находиться в целом континууме состояний между $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Подчеркнем еще раз, что измерение кубита всегда дает только 0 или 1 с некоторой вероятностью. Например, кубит может находиться в состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

измерение которого в половине случаев ($|1/\sqrt{2}|^2$) дает результат 0, а в другой половине случаев - результат 1. Мы будем часто возвращаться к этому состоянию, которое иногда обозначается как $|+\rangle$.

Несмотря на эту странность, реальность кубитов не вызывает сомнений. Их существование и свойства были подтверждены многочисленными экспериментами (обсуждаемыми в разд. 1.5 и гл. 7). Для реализации кубитов можно использовать много различных физических систем. Чтобы получить конкретное представление о том, как это может быть сделано, полезно перечислить некоторые из возможных способов такой реализации: две разных поляризации фотона; направление ядерного спина в однородном магнитном поле; два состояния электрона в одиночном атоме, как показано на рис. 1.2. В модели атом& электрон может существовать либо в так называемом основном, либо в возбужденном состояниях, которые мы будем обозначать как $|0\rangle$ и $|1\rangle$ соответственно. Облучая атом светом с подходящей энергией в течение некоторого времени, можно перевести электрон из состояния $|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$ и наоборот. Но более интересно то, что сокращая время облучения можно оставить электрон, первоначально находившийся в состоянии $|0\rangle$, на полпути между $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в состоянии $|+\rangle$.

Само собой разумеется, что интерпретации суперпозиции состояний, как и вероятностной природы наблюдений над квантовыми системами, уделялось много внимания. Однако в этой книге мы не будем касаться подобных дискуссий. Наша цель будет состоять в построении математических и концептуальных схем предикативного характера. Одной из схем, полезных при рассмотрении кубитов, является следующее геометрическое представление. Поскольку $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, можно переписать формулу (1.1) в виде

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)$$

где θ, φ и γ - действительные числа. В гл. 2 будет показано, что множитель $e^{i\gamma}$ можно игнорировать, поскольку он не приводит к наблюдаемым объектам, и по этой причине формула (1.3) фактически сводится к

$$|\psi\rangle = \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right).$$

Числа θ и φ задают точку на единичной трехмерной сфере, как показано на рис. 1.3. Эта сфера часто называется сферой Блоха; она позволяет наглядно представлять состояние одиночного кубита и часто служит в качестве превосходного «испытательного стенда» для идей из области квантовых вычислений и квантовой информации. Многие

операции над одиночными кубитами, рассматриваемые далее в этой главе, изящно описываются с использованием сферы Блоха. Однако, нужно иметь в виду, что возможности этого представления ограничены, так как не известно простого обобщения сферы Блоха на случай нескольких кубитов.

Сколько информации представляет кубит? Как ни парадоксально, на единичной сфере бесконечное количество точек, поэтому в принципе можно хранить все тексты Шекспира в бесконечном двоичном разложении θ . Однако этот вывод оказывается обманчивым из-за поведения кубита при наблюдении. Вспомните, что измерение кубита дает только 0 или 1. Более того, измерение меняет состояние кубита - он коллапсирует из суперпозиции $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в определенное состояние, соответствующее результату измерения. Например, если измерение $|+\rangle$ дает 0, то после измерения кубит останется в состоянии $|0\rangle$. Почему происходит этот коллапс - никто не знает. Как обсуждается в гл. 2, такое поведение является просто одним из фундаментальных постулатов квантовой механики. Для наших целей важно то, что одно измерение дает только один бит информации о состоянии кубита, разрешая тем самым кажущийся парадокс. Определить же коэффициенты α и β для состояния кубита, заданного формулой (1.1), можно только путем измерения бесконечного множества одинаково приготовленных кубитов.

Еще более интересным может быть следующий вопрос: сколько информации представляет кубит, если мы не измеряем его? Ответить на него не так

просто, поскольку нельзя определить количество информации, не выполняя соответствующего измерения. Тем не менее, здесь есть принципиально важный момент. Когда Природа реализует эволюцию замкнутой квантовой системы, не выполняя никаких «измерений», она, по-видимому, следит за всеми непрерывными переменными, описывающими состояние (такими, как α и β). Можно сказать, что в состоянии кубита Природа прячет массу скрытой информации. Еще более интересно то, что потенциальный объем этой дополнительной информации, как мы скоро увидим, экспоненциально растет с увеличением числа кубитов. Понимание этой скрытой квантовой информации является той задачей, которую мы пытаемся решать на протяжении значительной части книги; это ключевой момент в вопросе о том, что же именно делает квантовую механику столь эффективным инструментом обработки информации.

4.3.2 Несколько кубитов

Предположим, что у нас есть два кубита. Будь это классические биты, для них существовало бы четыре возможных состояния: 00, 01, 10 и 11. Подобно этому, система двух кубитов имеет четыре состояния вычислительного базиса, обозначаемых как $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ и $|11\rangle$. Пара кубитов также может находиться в суперпозициях этих четырех состояний, поэтому для описания квантового состояния такой системы требуется сопоставить каждому состоянию вычислительного базиса комплексный коэффициент, иногда называемый амплитудой. В итоге вектор состояния, описывающий два кубита, имеет вид

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

Подобно случаю одиночного кубита, результат измерения x ($= 00, 01, 10$ или 11) встречается с вероятностью $|\alpha_x|^2$ и после измерения кубиты остаются в состоянии $|x\rangle$. Требование, чтобы сумма вероятностей равнялась единице, выражается условием нормировки $\sum_{x \in [0,1]^2} |\alpha_x|^2 = 1$, где $[0,1]^2$ обозначает множество строк из двух символов, где каждый символ является либо нулем, либо единицей. Для системы двух кубитов мы

могли бы измерять только подмножество кубитов, скажем, первый кубит. Возможно, вы догадались, как это работает: при измерении только первого кубита получается 0 с вероятностью $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$, а система переходит в состояние

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}}$$

Обратите внимание, что состояние после измерения перенормировано на коэффициент $\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}$, поэтому оно по-прежнему удовлетворяет условию нормировки, как и следует ожидать для допустимого квантового состояния. 38 Глава 1. Введение и общий обзор Важным частным случаем состояния двух кубитов является состояние Белла, или ЭПР-пара,

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Это безобидное на первый взгляд состояние ответственно за многие сюрпризы в области квантовых вычислений и квантовой информации. Оно играет ключевую роль в квантовой телепортации и сверхплотном кодировании, которые обсуждаются в подразд. 1.3.7 и разд. 2.3 соответственно, и является прототипом многих других интересных квантовых состояний. Для состояния Белла характерно то, что при измерении первого кубита возможны два результата: 0 с вероятностью $1/2$ и конечным состоянием $|\varphi'\rangle = |00\rangle$, и 1 с вероятностью $1/2$ и конечным состоянием $|\varphi'\rangle = |11\rangle$. Как следствие, измерение второго кубита всегда дает тот же результат, что и измерение первого кубита, т. е. данные измерений оказываются коррелированными. Над состоянием Белла можно выполнять измерения и других типов, применяя сначала некоторые операции к

первому или второму кубиту, и эта любопытная корреляция между результатами измерения первого и второго кубитов по-прежнему будет существовать. Эти корреляции вызывают большой интерес с момента появления известной работы Эйнштейна, Подольского и Розена (ЭПР), в которой было впервые указано на странные свойства состояний наподобие белловского. Идеи ЭПР были подхвачены и значительно развиты Джоном Беллом, доказавшим потрясающий факт: корреляция измерений в состоянии Белла сильнее любой корреляции, которая может существовать между какими-либо классическими системами. Эти результаты, подробно описанные в разд. 2.6, были первым указанием на то, что квантовая механика позволяет обрабатывать информацию принципиально иначе, чем в классическом мире.

В более общем случае мы можем рассмотреть систему из n кубитов. Состояния вычислительного базиса этой системы имеют вид $|x_1 x_2 \dots x_n\rangle$, а ее квантовое состояние характеризуется 2^n амплитудами. Для $n = 500$ это больше, чем оцениваемое количество атомов во вселенной! Ни на каком мыслимом классическом компьютере невозможно сохранить все эти комплексные числа. В гильбертовом пространстве поистине много места. Однако Природа в принципе манипулирует такими невообразимыми объемами данных даже для систем, содержащих лишь несколько сотен атомов. Она как бы держит у себя 2^{500} скрытых черновиков, на которых выполняет вычисления по мере эволюции системы. Было бы очень хорошо воспользоваться этой потенциально огромной вычислительной мощностью. Но как состыковать квантовую механику и вычисления?

4.4 Квантовые вычисления

Изменения, происходящие с квантовым состоянием, можно описать на языке квантовых вычислений. Аналогично тому, как классический компьютер строится из электрических схем, содержащих провода и логические элементы,

квантовый компьютер строится из квантовых схем, которые состоят из проводов и 1.3. Квантовые вычисления 39 элементарных квантовых элементов, позволяющих передавать квантовую информацию и манипулировать ею. В этом разделе мы опишем некоторые простейшие квантовые элементы и приведем несколько примеров схем, иллюстрирующих их применение, включая схему для телепортации кубитов!

4.4.1 Однокубитовые элементы

Схемы классических компьютеров состоят из проводов (wires) и логических элементов (gates). Провода используются для передачи информации, тогда как логические элементы выполняют манипуляции с этой информацией, преобразуя ее из одного вида в другой. Рассмотрим, например, классические однобитовые логические элементы. Единственным нетривиальным членом этого класса является элемент NOT. Его функционирование определяется таблицей значений (truth table), в которой $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$, т. е. состояния 0 и 1 обмениваются.

Можно ли определить для кубитов аналогичный квантовый элемент NOT? Допустим, что у нас есть некоторый процесс, который переводит состояние $|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$ и наоборот. Очевидно, что такой процесс был бы хорошим кандидатом на роль квантового аналога элемента NOT. Однако указание действия элемента на состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ ничего не говорит о том, что происходит с суперпозициями этих состояний. Нужны дополнительные сведения о свойствах квантовых элементов. На самом деле квантовый элемент NOT действует линейно, т. е. переводит состояние

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

в соответствующее состояние, где $|0\rangle$ и $|1\rangle$ поменялись ролями:

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

4.5 Квантовые вычисления

Однокубитовые элементы Многокубитовые элементы Измерения в базисах, отличных от вычислительного Квантовые схемы Схема копирования кубита? Пример: состояния Белла Пример: квантовая телепортация Квантовые алгоритмы Классические вычисления на квантовом компьютере Квантовый параллелизм Алгоритм Дойча | Алгоритм Дойча-Йожа Классификация квантовых алгоритмов Экспериментальная обработка квантовой информации Эксперимент Штерна-Герлаха Перспективы практической обработки квантовой информации Квантовая информация Квантовая теория информации: примеры задач Квантовая информация в более широком контексте

4.6 Введение в квантовую механику

Линейная алгебра Базисы и линейная независимость Линейные операторы и матрицы Матрицы Паули Скалярное произведение Собственные векторы и собственные значения Сопряженные и эрмитовы операторы Q Тензорное произведение Операторные функции Коммутатор и антикоммутатор Полярное разложение и разложение по сингулярным числам Постулаты квантовой механики Пространство состояний Эволюция Квантовые измерения Различение квантовых состояний Проективные измерения POVM-измерения Фаза Составные системы • Квантовая механика: общий взгляд Сверхплотное кодирование Оператор плотности Ансамбли квантовых состояний Общие свойства операторов плотности Редуцированный оператор плотности Разложение Шмидта и

расширения до чистого состояния Парадокс Эйнштейна - Подольского - Розена и неравенство Белла

4.7 Введение в информатику

Вычислительные модели Машины Тьюринга Схемы Анализ вычислительных задач
Как количественно оценивать компьютерные ресурсы Сложность вычислений Задачи
разрешения и классы сложности P и NP Другие классы сложности Вычисления и
энергия Перспективы информатики

4.8 Другие темы основ

(тут менее полезные темы, но тем не менее, нам их говорили)

4.8.1 Квантовые базы данных

Алгоритм поиска Гровера

(пока не пишу, ибо не до него)

(тут укажу применения. но особо не до него, так-то нужно особенно его много
проходить, чтобы понять.)

Part IV

Квантовая теория информации

5 Квантовая информация по Холево

5.0.1 Введение

0.1. Конечномерные системы. Изложение теории вероятностей принято начинать с конечной схемы. Следуя этой традиции, рассмотрим конечное вероятностное пространство Ω . Имеют место три тесно связанных между собой факта, которые по-разному выражают классичность вероятностной схемы:

1. множество событий $A \subset \Omega$ образует булеву алгебру;
2. множество распределений вероятностей $[p_1, \dots, p_N]$ на Ω является симплексом, т. е. выпуклым множеством, в котором каждая точка однозначно представляется в виде смеси (выпуклой комбинации) крайних точек;
3. множество случайных величин $[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$ на Ω образует коммутативную алгебру (относительно поточечного умножения).

Квантовым аналогом этой схемы является модель N -уровневой системы. Аналог распределения вероятностей - состояние такой системы описывается матрицей плотности эрмитовой $N \times N$ -матрицей S , удовлетворяющей условиям положительной определенности и единичности следа

$$S \geq 0, \text{Tr } S = 1;$$

аналог случайной величины - наблюдаемая описывается произвольной эрмитовой $N \times N$ -матрицей X . Пусть

$$X = \sum_{j=1}^n x_j E_j$$

- спектральное разложение эрмитовой матрицы X , где $x_1 < x_2 < \dots$ - собственные числа, E_1, E_2, \dots - проекторы на соответствующие собственные подпространства. Набор $\mathbf{E} = \{E_j\}$ образует ортогональное разложение единицы:

$$E_j E_k = \delta_{jk} E_j; \quad \sum_{j=1}^n E_j = I$$

где I - единичная матрица. Из свойств (0.1), (0.3) следует, что соотношение

$$\mu_S^X(x_j) = \text{Tr } S E_j; \quad j = 1, \dots, n$$

задает распределение вероятностей на спектре $\text{Sp} X = \{x_1, x_2, \dots\}$ наблюдаемой X ; в квантовой механике постулируется, что это есть распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S .

В частности, среднее значение X в состоянии S есть

$$E_S(X) = \text{Tr } SX$$

Если в этой модели ограничиться рассмотрением только диагональных матриц

$$S = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix},$$

то мы возвращаемся к классической схеме с N элементарными событиями, где, в частности, (0.5) сводится к $E_S(X) = \sum_{j=1}^N p_j \lambda_j$. То же самое мы получили бы, рассматривая только одновременно диагонализуемые, т. е. коммутирующие (перестановочные между собой) матрицы. Поскольку имеются наблюдаемые, описываемые некоммутирующими матрицами, модель N -уровневой системы не сводится к классической схеме.

Роль индикаторов событий в квантовом случае играют наблюдаемые, принимающие значения 0 или 1, т. е. эрмитовы идемпотентные матрицы: $E^2 = E$. Вводя унитарное координатное пространство $\mathcal{H} = \mathbf{C}^N$, в котором действуют $N \times N$ -матрицы, такую матрицу E можно рассматривать как ортогональный проектор на подпространство \mathcal{E} в \mathcal{H} . Таким образом, квантовые события можно отождествить с подпространствами унитарного пространства. Множество квантовых событий, называемое квантовой логикой, частично упорядочено (по включению) и наделено операциями $\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2$ (линейная оболочка подпространств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$), $\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2$ (пересечение подпространств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$), \mathcal{E}' (ортогональное дополнение) с известными свойствами. Неклассичность модели N -уровневой системы можно выразить тремя различными утверждениями:

1. квантовая логика событий не является булевой алгеброй, поскольку в ней не выполнено тождество дистрибутивности

$$\mathcal{E}_1 \wedge (\mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2) \vee (\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_3)$$

Вследствие этого, нет «элементарных событий», на которые однозначно распадалось бы любое квантовое событие;

2. выпуклое множество состояний не является симплексом, т. е. представление матрицы плотности в виде смеси крайних точек неоднозначно;
3. комплексная оболочка множества наблюдаемых является некоммутативной (ассоциативной) алгеброй.

В бесконечномерном случае вместо матриц приходится рассматривать операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Математически корректное изложение основных понятий квантовой механики в гильбертовом пространстве было впервые дано Дж. фон Нейманом [26]. Он, в частности, подчеркнул существенное различие между эрмитовыми (симметричными) и самосопряженными операторами, которое, конечно, не проводилось в предшествовавших физических работах и указал, что именно условие самосопряженности обеспечивает в случае $\dim \mathcal{H} = \infty$ аналог спектрального разложения (0.2). Другой круг вопросов в случае $\dim \mathcal{H} = \infty$ связан с уточнением понятия следа и соответствующего класса операторов с конечным следом. Математическая схема, называемая стандартной формулировкой квантовой механики в гильбертовом пространстве, рассматривается в гл. 1.

0.2. Общие постулаты статистического описания. Каждая из математических структур - квантовая логика событий, выпуклое множество состояний и алгебра квантовых наблюдаемых - может быть охарактеризована определенной системой аксиом, но возникающие при этом характеристические проблемы оказываются совсем не

тривиальными и по существу составляют отдельные направления исследований, обзор которых выходит за рамки настоящей статьи (см., в частности, Сигал [32], Макки [23], Варадараян [160], Людвиг [125], Гаддер [95]). Имея дело с конкретным объектом - квантовой теорией вероятностей в гильбертовом пространстве, не приходится прибегать к тем или иным системам аксиом; более того, именно знание структурных особенностей этого объекта и дает основание для мотивировки той или иной аксиомы. Одним из полезных уроков аксиоматического подхода является, однако, указание на плодотворный параллелизм в описании классических и квантовых систем. Формулируемые ниже положения являются модификацией первых четырех аксиом Макки, одинаково применимых как к классическим, так и квантовым системам.

(I) Заданы множество \mathcal{S} , элементы которого называются состояниями и множество D , элементы которого называются (вещественными) наблюдаемыми. Для любой пары $S, X \in \mathcal{S}$ задано распределение вероятностей $\mu_S^X(dx)$ на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой \mathbb{R} , называемое распределением вероятностей наблюдаемой X в состоянии S .

Состояние S интерпретируется как более или менее детальное описание приготовления статистического ансамбля независимых индивидуальных представителей рассматриваемой системы, а наблюдаемая X - как величина, измеряемая определенным прибором для каждого представителя в данном ансамбле. Аксиома (I), таким образом, предполагает воспроизводимость индивидуальных экспериментов и устойчивость частот при их независимых повторениях. Следующая аксиома выражает возможность смешивания ансамблей.

(II) Для любых $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ и любого числа $p, 0 < p < 1$, существует $S \in \mathcal{S}$, такое, что

$$\mu_S^X = p\mu_{S_1}^X + (1-p)\mu_{S_2}^X.$$

для всех $X \in \mathcal{D}$; S называется смесью состояний S_1, S_2 в пропорции $p : (1-p)$.

Следующая аксиома говорит о возможности преобразования информации, полученной при измерении наблюдаемой. Пусть f борелевская функция из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Если $X_1, X_2 \in \mathcal{D}$ таковы, что для $\forall S \in \mathcal{S}$

$$\mu_S^{X_2}(B) = \mu_S^{X_1}(f^{-1}(B)); \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

где $f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$, то наблюдаемая X_2 функционально подчинена наблюдаемой X_1 . В этом случае будем писать $X_2 = f \circ X_1$.

(III) Для любой $X_1 \in \mathcal{S}'$ и любой борелевской функции f существует $X_2 \in \mathcal{D}$, такая что $X_2 = f \circ X_1$.

Пару непустых множеств $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$, удовлетворяющих аксиомам (I)-(III), назовем статистической моделью. Статистическая модель называется отделимой, если

(IV) Из того, что $\mu_S^{X_1} = \mu_S^{X_2}$ для всех $X \in \mathcal{D}$ следует $S_1 = S_2$; из того, что $\mu_S^{X_1} = \mu_S^{X_2}$ для всех $S \in \mathcal{S}$ следует $X_1 = X_2$.

Для отделимой модели операция смешивания в \mathcal{S} и отношение функциональной подчиненности в \mathcal{D} определены однозначно. Тем самым множество состояний \mathcal{S} наделяется выпуклой структурой, а множество наблюдаемых \mathcal{D} получает частичную упорядоченность.

Наблюдаемые X_1, \dots, X_m называются совместимыми, если они функционально подчинены некоторой наблюдаемой X , т. е. $X_j = f_j \circ X; j = 1, \dots, m$. Совместимые наблюдаемые могут быть измерены в одном эксперименте. Наблюдаемые, совместимые со

всеми наблюдаемыми $X \in \mathcal{D}$, образуют центр статистической мо-

дели. Запас элементов в центре определяет степень классичности модели.

0.3. Классические и квантовые системы. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ – измеримое пространство, $\text{Re}(\Omega)$ – выпуклое множество всех вероятностных мер на Ω , а $\Omega(\Omega)$ совокупность всех вещественных случайных величин с естественным отношением функциональной подчиненности. Пусть

$$\mu_P^X(B) = P(X^{-1}(B)) : B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

- распределение вероятностей $X \in D(\Omega)$ относительно $P \notin \text{Re}(\Omega)$. Пара $(\mathfrak{P}(\Omega), \mathcal{D}^-(\Omega))$ образует отделимую статистическую модель, которую можно назвать колмогоровской. В этой модели все наблюдаемые совместимы и центр совпадает с $\Omega(\Omega)$. Для простоты продемонстрируем совместимость наблюдаемых с конечным множеством значений. Всякая такая наблюдаемая имеет представление, аналогичное (0.2)

$$\therefore (\omega) = \sum_{j=1}^n x_j E_j(\omega)$$

где $E_j(\omega)$ есть индикатор множества $B_j = \{\omega_1 : X(\omega) = x_j\}$. Множества B_j образуют разбиение пространства Ω , а $\{E_j(\omega)\}$ являются аналогом ортогонального разложения единицы (0.3). Если X_1, \dots, X_m – произвольный набор таких наблюдаемых, то достаточно взять разбиение $\{B_j\}$ более мелкое, чем все разбиения, соответствующие наблюдаемым X_i , чтобы было возможно представить все X_i как функции наблюдаемой X , соответствующей такому разбиению $\{B_j\}$.

Статистическая модель N -уровневой квантовой системы фактически была описана в п. 1. Если наблюдаемая X имеет спектральное разложение (0.2), то наблюдаемая $f \circ X$ определяется как

$$f \circ X = \sum_{j=1}^n f(x_j) E_j$$

Квантовые наблюдаемые X_1, \dots, X_m совместимы тогда и только тогда, когда соответствующие матрицы перестановочны, т. е.

$$X_i X_j = X_j X_i; i, j = 1, \dots, m$$

Центр такой модели тривиален: он состоит из матриц, кратных единичной, т. е. только из постоянных наблюдаемых.

Для совместимых наблюдаемых естественно вводится совместное распределение вероятностей относительно любого состояния S . Если же X_1, \dots, X_m несовместимы, то совместное распределение относительно произвольного состояния не существует. Это обстоятельство отражает квантовый принцип дополнительности. Физические измерения над микрообъектами осуществляются макроскопическими экспериментальными установками, каждая из которых предполагает (ложную и специфичную организацию пространственно-временной среды. Разные способы такой организации, отвечающие разным наблюдаемым, могут быть взаимно исключающими (хотя и относятся к одному и тому же микрообъекту), т. е. дополнительными. Наличие обширного запаса несовместимых наблюдаемых – первое из основных отличий квантовой статистики от классической.

Один из наиболее спорных вопросов квантовой теории проблема скрытых параметров, т. е. вопрос о принципиальной возможности описания квантовой статистики в терминах классического вероятностного пространства. Первая попытка доказательства невозможности введения скрытых параметров была предпринята Дж. фон Нейманом в

[26] и долгое время его аргументы рассматривались как решающие. В 1966 г. Дж. Белл обратил внимание на их неполноту и указал на другое фундаментальное свойство квантовомеханического описания, которое можно обозначить как свойство целостности¹¹. Математически оно связано с принципом суперпозиции и с тем обстоятель-

1. Английский термин - pop-separability. ством, что составные квантовые системы описываются с помощью тензорного, а не декартова произведения, как в классической теории вероятностей. Свойства дополнительности и целостности лежат в основе негативных результатов в проблеме скрытых параметров, которые обсуждаются в конце гл. 1.

0.4. Рандомизация в классической и квантовой статистике. Вернемся к колмогоровой модели и рассмотрим случайную величину (0.6). В каждой точке $\omega \in \Omega$ она с вероятностью 1 принимает одно из значений x_j . В математической статистике, в частности в теории статистических решений полезно рассмотрение «рандомизованных» случайных величин, которые определяются указанием вероятностей $M_j(\omega)$, ($0 \leq M_j(\omega) \leq 1$) принятия значения x_j для любого элементарного события ω . Набор функций $\mathbf{M} = \{M_j(\omega)\}$ характеризуется условиями

$$M_j(\omega) \geq 0; \quad \sum_{j=1}^n M_j(\omega) = 1; \quad \omega \in \Omega$$

и описывает неточное измерение случайной величины X , т. е. измерение со случайными ошибками. Распределение вероятностей такого измерения относительно вероятностной меры P дается формулой

$$\mu_P^M(x_j) = \int_{\Omega} P(d\omega) M_j(\omega)$$

В частности, измерение является точным (безошибочным), если $M_j(\omega) = E_j(\omega)$. Таким образом возникает другая классическая статистическая модель, которую по имени создателя теории статистических решений можно назвать моделью Вальда.

Естественно рассмотреть квантовый аналог модели Вальда, в которой наблюдаемая с конечным множеством значений описывается конечным разложением единицы, т. е. семейством матриц (операторов) $\mathbf{M} = \{M_j\}$, удовлетворяющим условиям

$$M_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^n M_j = I$$

Вероятность j -го исхода в состоянии S определяется формулой, аналогичной (0.9)

$$\mu_S^M(x_j) = \text{Tr } SM_j$$

Эти определения естественно переносятся и на наблюдаемые с произвольным множеством значений. Так возникает обобщенная статистическая модель квантовой механики (см. §2.1).

Общие разложения единицы в квантовой теории появляются на рубеже 70-х годов. К этому независимо приводят исследования по квантовой аксиоматике (Г. Людвиг), по проблеме воспроизводимости, связанной с повторными измерениями (Э. Б. Дэвис и Дж. Льюис); по квантовой теории статистических решений (А. С. Холево) и другие работы. Обобщенная статистическая модель квантовой механики является логическим следствием ее вероятностной структуры и дает основу для рассмотрения ряда вопросов, не находящих удовлетворительного решения в рамках стандартной формулировки.

0.5. Выпуклая геометрия разложений единицы и фундаментальные пределы точности. Хотя описанное выше расширение понятия наблюдаемой формально аналогично введению рандомизованных величин в классической статистике, неортогональные разложения единицы имеют в квантовой теории принципиально более важное значение, нежели просто средство описания неточных измерений. Дело в том, что и с математической, и с физической точек зрения наибольший интерес представляют крайние точки выпуклого множества разложений единицы (0.10), описывающие статистику предельно точных и максимально информативных измерений. В классическом случае крайние точки множества (0.8) совпадают с нерандомизованными процедурами $\{E_j(\omega)\}$, соответствующими обычным случайным величинам. Однако в квантовом случае крайние точки множества (0.10) при $n > 2$ уже не исчерпываются ортогональными разложениями единицы. Следовательно, для описания предельно точных квантовых измерений требуются, в общем случае, неортогональные разложения единицы.

С другой стороны, как показал М. А. Наймарк (1940), произвольное разложение единицы расширяется до ортогонального в некотором объемлющем гильбертовом пространстве. Это позволяет истолковать неортогональное разложение единицы как обычную наблюдаемую в расширении исходной квантовой системы, содержащем независимую дополнительную систему. Таким образом, измерение над расширением может быть более точным и информативным, чем любое прямое квантовое измерение. Этот парадоксальный с точки зрения классической статистики факт связан с затронутым в п. 3 квантовым свойством целостности.

В 1940 -50 годы в работах Д. Габора и Л. Бриллюэна было высказано предположение, что квантово-механическая природа канала связи должна налагать фундаментальные ограничения на скорость передачи и точность воспроизведения информации. Этот вопрос приобрел актуальность в 60-е годы с появлением квантовых каналов связи - систем передачи информации, основанных на свойствах когерентного лазерного излучения. В 70-е годы была создана последовательная квантовая теория статистических решений, которая дает принципиальную основу для рассмотрения вопросов предельной точности и информативности измерений (см. К. Хелстром [37], А. С Холево [43]).

В этой теории решающие процедуры - измерения описываются разложениями единицы в гильбертовом пространстве системы и решаются задачи об отыскании экстремума некоторого функционала (меры точности, шенноновской информации) в классе квантовых решающих процедур, обычно подчиненных дополнительным ограничениям (несмещенности, ковариантности и т. п.) (см. гл. 2).

0.6. Проблема соответствия. Одна из трудностей в стандартной формулировке квантовой механики состоит в невозможности сопоставления некоторым величинам, таким как время, угол, фаза и т. п. самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве системы. Причина кроется в теореме единственности Стоуна-фон Неймана, которая налагает жесткие ограничения на спектры канонически сопряженных наблюдаемых.

К этому же кругу вопросов можно отнести и трудности с локализуемостью (т. е. введением ковариантных наблюдаемых положения) для релятивистских квантовых частиц с нулевой массой. Рассмотрение в качестве наблюдаемых неортогональных разложений единицы, подчиненных условиям ковариантности, аналогичных коммутационным соотношениям Вейля в теореме Стоуна-фон Неймана, позволяет в значительной степени избежать этих трудностей (см. гл. 2). В спектральной теории неортогональные разложения единицы возникают как обобщенные спектральные меры несамосопряженных операторов. В соответствии с этим, например, оператор,

отвечающий наблюдаемой времени, оказывается максимальным эрмитовым (но не самосопряженным). Можно сказать, что обобщенная статистическая модель квантовой механики на новом математическом уровне оправдывает «наивное» представление о вещественной наблюдаемой, как об эрмитовом, но не обязательно самосопряженным, операторе.

0.7. Повторные и непрерывные измерения. В колмогоровской модели преобразования состояний системы могут быть описаны с помощью условных вероятностей. Пусть в результате измерения случайной величины (0.6) получено значение x_j . При этом классическое состояние, т. е. вероятностная мера $P(d\omega)$ на Ω преобразуется по формуле

$$P(A) \rightarrow P(A | B_j) = \frac{\int_{\Omega} P(d\omega) E_j(\omega)}{\int_{\Omega} P(d\omega) E_j(\omega)}; \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

Очевидно, что если результат измерения не принимается во внимание, то состояние P вообще не изменяется:

$$P(A) \rightarrow \sum_{j=1}^n P(A | B_j) P(B_j) = P(A)$$

В квантовой статистике ситуация качественно более сложна. Аналогом преобразования (0.12) является знаменитый проекционный постулат Дж. фон Неймана

$$S \rightarrow S_j = \frac{E_j S E_j}{\text{Tr } S E_j}$$

где S оператор плотности состояния перед измерением, а S_j после измерения наблюдаемой (0.2), в результате которого получено значение x_j . Основанием для этого постулата служит феноменологическая гипотеза воспроизводимости, подразумевающая предельную точность и минимальность возмущения, вносимого измерением наблюдаемой X . Если результат измерения не принимается во внимание, то состояние S преобразуется по формуле, аналогичной (0.13):

$$S \rightarrow \sum_{j=1}^n S_j \mu_S^X(x_j) = \sum_{j=1}^n E_j S E_j$$

Однако в общем случае $\sum_j E_j S E_j \neq S$; это означает, что изменение состояния в ходе квантового измерения не сводится только к преобразованию информации и отражает также принципиально неустранимое и необратимое физическое воздействие измерительного прибора на наблюдаемую систему. С проекционным постулатом связан целый ряд проблем; не затрагивая вопросов философского характера, которые выходят за пределы вероятностной интерпретации, остановимся на конкретных проблемах, которые успешно решаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики.

Принципиальную трудность представляет формулировка проекционного постулата для наблюдаемых с непрерывным спектром. Для описания изменения состояния при произвольном квантовом измерении Э. Б. Дэвис и Дж. Льюис (1970) ввели понятие инструмента - меры со значениями в множестве преобразований квантовых состояний. Этим понятием охватываются и неточные измерения, не удовлетворяющие условию воспроизводимости, что позволяет включить и случай непрерывного спектра. С каждым инструментом связано разложение единицы, причем инструментам, возникающим из

проекционного постулата, отвечают ортогональные разложения единицы. Понятие инструмента открывает возможность описания статистики любой последовательности квантовых измерений.

Новое освещение получает вопрос о траекториях, восходящий к фейнмановской формулировке квантовой механики. Процесс непрерывного (во времени) измерения квантовой наблюдаемой можно представить как предел «серий» последовательных неточных измерений. Математическое описание такого предела обнаруживает замечательные аналогии с классической схемой суммирования случайных величин, функциональными предельными теоремами в теории вероятностей и представлением Леви-Хинчина для процессов с независимыми приращениями (см. гл. 4).

0.8. Необратимая динамика. Обратимая динамика изолированной квантовой системы описывается уравнением

$$S \rightarrow U_t S U_t^{-1}; \quad -\infty < t < \infty,$$

где $\{U_t\}$ -группа унитарных операторов. Если система является открытой, т. е. взаимодействует с окружением, то ее эволюция является, как правило, необратимой. Пример такого необратимого изменения состояния, обусловленного взаимодействием с измерительным прибором, дается соотношением (0.15). Наиболее общий вид динамического отображения, задающего конечную эволюцию открытой системы, включает как (0.16), так и (0.15):

$$S \rightarrow \sum_j V_j S V_j^*$$

где $\sum_j V_j^* V_j = I$. Среди всевозможных аффинных преобразований выпуклого множества состояний, отображения (0.17) выделяются специфически некоммутативным свойством полноты по ложительности, возникшим и играющим важную роль в современной теории операторных алгебр.

Непрерывная марковская эволюция открытой системы описывается динамической полугруппой динамических отображений, удовлетворяющей определенным условиям непрерывности (см. Э. Б. Дэвис [78]). Динамические полугруппы являются некоммутативным аналогом марковских полугрупп в теории вероятностей. В 1976 г. Г. Линдблад и независимо, в конечномерном случае, В. Горини, А. Коссаковский и Э. Сударшан получили полное описание инфинитезимального оператора непрерывной по норме динамической полугруппы. Этот результат, лежащий в основе многих фактов теории квантовых случайных процессов, рассматривается в гл. 3.

0.9. Квантовые случайные процессы. Одним из стимулов возникновения теории квантовых случайных процессов послужила проблема расширения динамической полугруппы до обратимой динамики «большой системы», включающей открытую систему и окружение. Возможность такого расширения означает, в частности, согласованность понятия динамической полугруппы с основным динамическим принципом квантовой механики, выраженным соотношением (0.16).

В теории вероятностей подобное расширение марковской полугруппы до группы временных сдвигов в пространстве траекторий, соответствующих марковскому случайному процессу, осуществляется известной конструкцией Колмогорова-Даниэля. Понятие квантового случайного процесса, играющее важную роль в проблеме расширения динамической полугруппы, было сформулировано Л. Аккарди, А. Фриджеро и Дж. Льюнсом (1980). Роль марковского свойства особенно подчеркивалась Л. Аккарди. В 80-е годы теория квантовых случайных процессов превратилась в обширное самостоятельное поле исследований (см., в частности, сборники [141]-[145]).

Аналитический аппарат квантового стохастического исчисления, позволяющий, в частности, строить нетривиальные классы квантовых случайных процессов и конкретные расширения динамических полугрупп, был предложен Р. Л. Хадсоном и К. Р. Партасарати (1982). Квантовое стохастическое исчисление возникает на пересечении двух концепций - временной фильтрации в смысле теории случайных процессов и вторичного квантования в пространстве Фока. В конце 60-х годов Р. Стритер и Х. Араки указали на структуру непрерывного тензорного произведения, которая лежит в основе связи между безграничной делимостью, процессами с независимыми приращениями и пространством Фока. Благодаря этому, пространство Фока оказывается носителем процессов «квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Квантовое стохастическое исчисление представляет интерес и с точки зрения классической теории случайных процессов. Оно перебрасывает мост между исчислением Ито и вторичным квантованием, открывает неожиданные связи между непрерывными и скачкообразными процессами, позволяет по-новому взглянуть на понятие стохастического интеграла. Наконец, на этой основе развиваются потенциально важные приложения, относящиеся к теории управления и фильтрации для квантовых случайных процессов (см. гл. 5).

5.1 СТАНДАРТНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

5.1.1 1. Основные понятия

1.1. Операторы в гильбертовом пространстве.

Изложению теории операторов в гильбертовом пространстве, в значительной мере стимулированной проблемами квантовой механики, посвящено много прекрасных книг (см., в частности, [2], [30]). Ниже мы лишь напоминаем некоторые факты и фиксируем обозначения.

Далее \mathcal{C} обозначает сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Для скалярного произведения в \mathcal{C} используется дираковское обозначение $\langle \varphi | \psi \rangle$, причем считается, что форма $\langle \varphi | \psi \rangle$ линейна по ψ и антилинейна по φ . Символ $|\psi\rangle\langle\varphi|$ обозначает оператор, действующий на вектор $\chi \in \mathcal{H}$ по формуле

$$|\psi\rangle\langle\varphi|\chi = \psi\langle\varphi|\chi\rangle.$$

В частности, если $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, то $|\psi\rangle\langle\psi|$ есть проектор на вектор $\psi \in \mathcal{H}$. Линейная оболочка множества операторов вида $|\psi\rangle\langle\varphi|$ совпадает с множеством операторов конечного ранга в \mathcal{H} .

Если X -ограниченный оператор в \mathcal{H} , то X^* обозначает сопряженный оператор, определяемый соотношением

$$\langle \varphi | X^* \psi \rangle = \langle X \varphi | \psi \rangle; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

$$\langle \varphi | X^* \psi \rangle = \langle X \varphi | \psi \rangle; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

Множество ограниченных операторов в \mathcal{C} является банаховой алгеброй с инволюцией $*$. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ эрмитов, если $X = X^*$. Унитарным оператором называется оператор U , такой что $U^*U = UU^* = I$, где I - единичный оператор. Проектором называется эрмитов оператор E , такой что $E^2 = E$. Эрмитов оператор X положителен ($X \geq 0$), если $\langle \psi | X \psi \rangle \geq 0$ для всех $\psi \in \mathcal{H}$. Для положительного оператора однозначно определен положительный квадратный корень.

Для всякого ограниченного положительного оператора T однозначно определен след

$$\mathrm{Tr} T = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i | T e_i \rangle \leq +\infty$$

где $\{e_i\}$ произвольный ортонормированный базис. Оператор T называется ядерным (оператором со следом), если он является линейной комбинацией положительных операторов с конечным следом. Для такого оператора след определяется однозначно, как сумма абсолютно сходящегося ряда вида (1.1). Множество ядерных операторов $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ является банаховым пространством относительно нормы $\|T\|_1 = \mathrm{Tr} \sqrt{T^*T}$, причем множество операторов конечного ранга плотно в $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$.

Множество $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$ образует двусторонний идеал в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Сопряженное к банахову пространству $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$ изоморфно $\mathfrak{B}(\mathcal{G})$, причем двойственность определяется билинейной формой

$$\langle T, X \rangle = \mathrm{Tr} TX; \quad T \in \mathfrak{I}(\mathcal{H}), \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Нижний индекс h в обозначении множества операторов означает, что рассматривается соответствующее подмножество эрмитовых операторов, например, $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ есть вещественное банахово пространство ограниченных эрмитовых операторов в \mathcal{C} . Отметим, что $\mathfrak{I}_h(\mathcal{H})^* = \mathfrak{B}_h(\mathcal{C})$, причем двойственность по-прежнему задается формой (1.2).

Кроме сходимости по операторной норме в $\mathcal{O}(\mathcal{H})$, часто используются более слабые понятия сходимости. Последовательность $\{X_n\}$ сходится к X сильно, если $\lim \|X_n\psi - X\psi\| = 0$ для всех $\psi \in \mathcal{H}$, слабо, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi | X_n \psi \rangle = \langle \varphi | X \psi \rangle$ для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{C}$, и w^* -слабо (ультраслабо), если $\lim \mathrm{Tr} TX_n = \mathrm{Tr} TX$ для всех $T \in \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$. Если $\{X_n\}$ ограниченная по норме последовательность операторов, такая что $X_n \leq X_{n+1}$, то X_n сходится сильно, слабо и w^* -слабо к ограниченному оператору X (обозначается $X_n \uparrow X$).

1.2 Оператор плотности.

Так называется всякий положительный оператор S с единичным следом:

$$S \geq 0; \quad \mathrm{Tr} S = 1.$$

Множество операторов плотности $\subseteq (\mathcal{H})$ является выпуклым подмножеством вещественного линейного пространства $\mathfrak{B}_h(\mathcal{C})$; более того, оно является основанием конуса положительных элементов, порождающего $\mathfrak{I}_h(\mathcal{C})$. Точка S выпуклого множества \odot называется крайней, если из того, что $S = pS_1 + (1-p)S_2$, где $S_1, S_2 \in \mathcal{G}$, $0 < p < 1$, следует $S_1 = S_2 = S$. Крайними точками множества $\odot(\mathcal{H})$ являются одномерные проекторы

$$S_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

где $\psi \in \mathcal{H}$, $\langle\psi | \psi\rangle = 1$. Всякий оператор плотности представим в виде счетной выпуклой комбинации

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

где $\langle\psi_j | \psi_j\rangle = 1$, $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Одно из таких представлений дается спектральным разложением оператора S , когда ψ_j являются его собственными векторами, а p_j соответствующими собственными числами.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ проекторов в \mathcal{H} , изоморфное квантовой логике событий (замкнутых линейных подпрост-

ранств \mathcal{H}). Вероятностной мерой на $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ называется вещест-

венная функция μ со свойствами: 1) $0 \leq \mu(E) \leq 1, E \in (\mathcal{H})$; 2) если $\{E_j\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{H})$, причем $E_j E_k = 0$ при $j \neq k$ и $\sum_j E_j = I$, то

$$\sum_j \mu(E_j) = 1$$

Отвечая на вопрос Макки, Глисон (1957) доказал следующую теорему.

Т е о р е м а. Пусть $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Тогда всякая вероятностная мера на $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ имеет вид

$$\mu(E) = \text{Tr } S E$$

где S - однозначно определяемый оператор плотности.

Случай $\dim \mathcal{H} = 2$ является особым - для него легко указать меры, не представимые в виде (1.4), однако они не используются в квантовой теории. Доказательство теоремы Глисона совершенно нетривиально и породило целое направление в некоммутативной теории меры, посвященное всевозможным обобщениям и упрощениям этой теоремы (см. обзор Кручиньского в [141]).

По поводу некоммутативной теории меры и интегрирования см. обзоры Ш. А. Аюпова и А. Н. Шерстнева и другие статьи в сборниках [18], [34].

1.3 Спектральная мера.

Пусть \mathcal{L} множество с σ -алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{L})$. Ортогональным разложением единиц в \mathcal{H} называется проекторно-значная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{L})$,

т. е. функция множеств $E: \mathcal{B}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H})$, удовлетворяющая

условиям:

1. если $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ и $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то $E(B_1) E(B_2) = 0$;

2) если $\{B_j\}$ - конечное или счетное разбиение \mathcal{L} на попарно-непересекающиеся измеримые подмножества, то

где ряд сходится сильно.

$$\sum_j E(B_j) = I$$

Пусть X -оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{H}$. Обозначим $\mathcal{D}(X^*)$ множество векторов φ таких, что существует $\chi \in \mathcal{H}$, для которого

$$\langle \varphi | X \psi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle; \psi \in \mathcal{D}(X)$$

Определим оператор X^* с областью определения $\mathcal{D}(X^*)$, полагая $X^* \varphi = \chi$. Оператор X называется эрмитовым (симметрическим), если $X \subseteq X^*$, и самосопряженным, если $X = X^*$.

Спектральная теорема (фон Нейман, Стоун, Рисс, 1929-1932) устанавливает взаимно однозначное соответствие между ортогональными разложениями единицы E на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ борелевских подмножеств вещественной прямой \mathbf{R} и самосопряженными операторами в \mathcal{H} по формуле

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x E(dx)$$

где интеграл понимается в подходящем смысле (см. [30]). Разложение единицы E называется спектральной мерой оператора X . Для любой борелевской функции f определен самосопряженный оператор

$$f \circ X = \int_{-\infty}^{\infty} x E(dx)$$

спектральная мера \mathbf{F} которого связана со спектральной мерой оператора X соотношением

$$F(B) = E(f^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

Совокупность всех самосопряженных операторов в \mathcal{H} обозначим $D(\mathcal{H})$.

1.4. Статистический постулат. С каждой квантовомеханической системой связывается сепарабельное комплексное гильбертово пространство \mathcal{H} . Состояния системы описываются операторами плотности в \mathcal{H} . Вещественной наблюдаемой называется любой самосопряженный оператор в \mathcal{C} . Распределение вероятностей наблюдаемой X в состоянии S задается соотношением

$$\mu_S^X(B) = \text{Tr } SE(B), B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

где \mathbf{E} - спектральная мера X . Определенную таким образом отделимую статистическую модель $((\mathcal{H}), \mathcal{D}(\mathcal{C}))$ будем называть стандартной статистической моделью квантовой механики.

Из (1.5), (1.6) вытекает, что среднее значение наблюдаемой X в состоянии S ,

$$E_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \mu_S^X(dx)$$

равно

$$\mathbf{E}_s(X) = \text{Tr } SX$$

(по крайней мере, для ограниченных наблюдаемых).

Крайние точки множества $\subseteq (\mathcal{C})$, описываемые операторами плотности (1.3), называются чистыми состояниями, а вектор ψ называется вектором состояния. Среднее значение наблюдаемой X в таком состоянии равно

$$\mathbf{E}_{s_\psi}(X) = \langle \psi | X \psi \rangle.$$

Допуская вольность речи, ограниченной наблюдаемой иногда называют произвольный $X \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Соотношение (1.7) определяет линейный положительный нормированный ($E_s(\mathbf{I}) = 1$) функционал на алгебре $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, т. е. состоян и е в смысле теории алгебр (предыдущие рассуждения поясняют происхождение этого математического термина). Состояние на $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, определяемое оператором плотности по формуле (1.7), является нормальным в том смысле, что если $X_n \uparrow X$, то $\mathbf{E}_s(X_n) \rightarrow \mathbf{E}_s(X)$.

Алгеброй фон Неймана называется всякая алгебра ограниченных операторов в \mathcal{C} , содержащая единичный оператор, замкнутая относительно инволюции и предельного перехода в сильной (слабой) операторной топологии. С любой алгеброй фон Неймана \mathcal{P} , как и с $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, ассоциируется статистическая модель, в которой состояниями являются нормальные состояния на \mathcal{P} , а наблюдаемыми - самосопряженные операторы, присоединенные к \mathcal{B} . Такие модели занимают промежуточное положение между квантовой и классическими (соответствующими коммутативным алгебрам \mathfrak{B}), и играют

важную роль в теории квантовых систем с бесконечно большим числом степеней свободы - полей и сред (см. [7], [9], [51]).

1.5. Совместимые наблюдаемые. Коммутатором ограниченных операторов X, Y называется оператор

$$[X, Y] = XY - YX$$

Операторы $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ - перестановочны (коммутируют), если $[X, Y] = 0$. Самосопряженные операторы X, Y называются перестановочными, если перестановочны их спектральные меры. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Наблюдаемые X_1, \dots, X_n совместимы, т. е. существует наблюдаемая X и борелевские функции f_1, \dots, f_n такие, что $X_j = f_j \circ X; j = 1, \dots, n$.
2. Операторы X_1, \dots, X_n перестановочны.

Если E_1, \dots, E_n - спектральные меры совместимых наблюдаемых X_1, \dots, X_n , то соотношение

$$E(B_1 \times \dots \times B_n) = E_1(B_1) \cdot \dots \cdot E_n(B_n); B_j \in \mathcal{B}$$

однозначно определяет ортогональное разложение единицы \mathbf{E} на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, называемое совместной спектральной мерой операторов X_1, \dots, X_n . Для любого оператора плотности S определено совместное распределение вероятностей наблюдаемых X_1, \dots, X_n

$$\mu_S^{X_1, \dots, X_n(B)} = \text{Tr } SE(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Для любой борелевской функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определена наблюдаемая

$$f(x_1, \dots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) E(dx_1 \dots dx_n)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S(f(\dot{x}_1, \dots, x_n)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \times \\ &\times \mu_{is}^{X_1, \dots, X_n(dx_1 \dots dx_n)}. \end{aligned}$$

Существование несовместимых наблюдаемых отражает квантовый принцип дополнительности. Количественное выражение этого принципа дает соотношение неопределенностей. Для наблюдаемых X, Y , имеющих конечный второй момент относительно состояния S , корректно определяются билинейные формы

$$\langle X, Y \rangle_S = \text{Re Tr } YSX, [X, Y]_S = 2 \text{Im Tr } YSX$$

(см. [43, гл. II]). Пусть $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]$ - набор произвольных наблюдаемых с конечным вторым моментом. Введем вещественные матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_S(\mathbf{X}) &= [\langle X_i - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_S(X_i), X_j - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_S(X_j) \rangle_S]_{i,j=1, \dots, n} \\ \mathbf{C}_S(\mathbf{X}) &= [[X_i, X_j]_S]_{i,j=1, \dots, n} \end{aligned}$$

Из положительной определенности полуторалинейных форм $X, Y \rightarrow \text{Tr } Y^*SX, \text{Tr } XSY^*$ вытекает неравенство ¹⁾

$$\mathbf{D}_S(\mathbf{X}) \geq \pm \frac{i}{2} \mathbf{C}_S(\mathbf{X})$$

1. Впервые такое неравенство было указано Робертсоном (1934); впоследствии оно неоднократно переоткрывалось (см. [17]). где левая и правая части рассматриваются как комплексные эрмитовы матрицы. Для двух наблюдаемых $X = X_1, Y = X_2$ неравенство (1.8) равносильно соотношению неопределенностей Шрёдингера-Робертсона

$$\mathbf{D}_s(X) \cdot \mathbf{D}_s(Y) \geq \langle \langle X - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_s(X), Y - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_s(Y) \rangle \rangle^2 + \frac{1}{4}[X, Y]_s^2,$$

где

$$\mathbf{D}_s(\dot{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}_s(X))^2 \mu_s^X(dx)$$

- дисперсия наблюдаемой X в состоянии S . Если X, Y -совместимые наблюдаемые, то величина

$$\begin{aligned} & \langle X - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_S(X), Y - \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}_s(Y) \rangle_s = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}_S(X))(y - \mathbf{E}_s(Y)) \mu_S^{X,Y}(dxdy) \end{aligned}$$

представляет собой ковариацию X, Y в состоянии S ; при этом $[X, Y]_S = 0$ и (1.9) превращается в неравенство Коши-Шварца для ковариации случайных величин.

Детальный обзор многообразных вариантов и обобщений соотношения неопределенностей см. в [17].

Заметим, что если X, Y - произвольные (ограниченные) операторы, то

$$\langle X, Y \rangle_S = \text{Tr } SX \circ Y$$

где

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

- йорданово (симметризованное) произведение операторов X, Y . Величина вида (1.10) в квантовой статистической механике называется корреляцией, хотя если наблюдаемые X, Y не совместимы, она не связана каким-либо простым образом с измерениями X, Y .

1.6. Простейший пример. Пусть $\dim \mathcal{H} = 2$. Базис в $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ образован матрицами

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

где σ_i -матрицы Паули. Полагая $X(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, имеем

$$X(\mathbf{a}) \cdot X(\mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{I} + iX(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

\mathbf{a}, \mathbf{b} . Отсюда

$$\text{Tr } X(\mathbf{a})X(\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Всякая матрица плотности однозначно записывается в виде

$$S(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + X(\mathbf{a}))$$

где $|a| \leq 1$. Таким образом, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ как выпуклое множество изоморфно единичному шару в \mathbf{R}^3 , причем чистые состояния соответствуют точкам сферы $|\mathbf{a}| = 1$. В этом случае

$$S(\mathbf{a}) = |\psi(\mathbf{a})\rangle\langle\psi(\mathbf{a})|$$

где $\psi(a)$ -единичный вектор состояния. Поскольку $\langle\psi(a) | \psi(-a)\rangle = 0$, то соотношение

$$X(a) = |\psi(a)\rangle\langle\psi(a)| - |\psi(-a)\rangle\langle\psi(-a)|, (|a| = 1)$$

дает спектральное разложение наблюдаемой $X(\mathbf{a})$. Итак, наблюдаемая $X(\mathbf{a})$ принимает значения ± 1 , причем вероятность значения ± 1 в состоянии $S(\mathbf{b})$ ($|\mathbf{b}| \leq 1$) есть

$$\text{Tr } S(\mathbf{b})S(\pm\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

так что $X(a)$ имеет распределение Бернулли.

В физике конечномерное гильбертово пространство обычно описывает внутренние (спиновые) степени свободы квантовой системы. Случай $\dim \mathcal{H} = 2$ отвечает минимальному спину $1/2$. Матрица $\frac{1}{2}X(\mathbf{a})$ описывает наблюдаемую спина в направлении \mathbf{a} , а оператор плотности $S(\mathbf{a})$ ($|\mathbf{a}| = 1$) - «полностью поляризованное состояние», в котором спин в направлении \mathbf{a} имеет точное значение $\frac{1}{2}$. Операторы плотности с $|\mathbf{a}| < 1$, представляющие собой смеси полностью поляризованных состояний, описывают «частично поляризованные» состояния, в частности, $\mathbf{a} = 0$ соответствует хаотическому состоянию $S(0) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$.

Из соотношения (1.11) следует, что наблюдаемые $X(\mathbf{a})$, $X(\mathbf{b})$ совместимы тогда и только тогда, когда \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. С другой стороны, для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$

$$X(\mathbf{a})X(\mathbf{b}) + X(\mathbf{b})X(\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{I}$$

Фиксируем некоторое состояние и рассмотрим соотношение

$$X(\mathbf{a}) + X(\mathbf{b}) = X(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Оно показывает, что распределение Бернулли устойчиво по отношению к сложению наблюдаемых, подчиненных соотношению антикоммутации (1.14), и что в квантовой теории вероятностей существует векторное пространство бернуллиевских случайных величин размерности, большей единицы (в обычной теории вероятностей таким свойством обладают только гауссовские случайные величины).

На самом деле такое пространство существует для любой конечной размерности n . Пусть $\mathcal{C}(n)$ - конкретная алгебра Клиффорда, т. е. комплексная алгебра матриц, порождаемая эрмитовыми образующими X_1, \dots, X_n , удовлетворяющими соотношениям

$$X_j^2 = \mathbf{I}, \lambda_j \bar{\lambda}_k + X_k X_j = 0; k \neq j; k, j = 1, \dots, n$$

Более точное определение и дальнейшие сведения об алгебрах Клиффорда см., например, в [160]. Полагая $X(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ для $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, соотношения (1.16)

можно записать в форме (1.14). При этом, конечно, выполняется (1.15). Наблюдаемые $X(\mathbf{a}), \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, принимают только значения $\pm|\mathbf{a}|$ и поэтому имеют распределение Бернулли относительно любого состояния на алгебре $\mathcal{C}(n)$.

На алгебре Клиффорда естественно определяется «бернуллиевское состояние», подобное многомерному гауссовскому распределению в обычной теории вероятностей (т. н. квазисвободное состояние канонических антикоммутирующих соотношений [58], [150]).

5.1.2 2. Симметрии, кинематика, динамика

2.1. Группы симметрий. Рассмотрим отделимую статистиче-

скую модель $(\mathcal{S}, \mathfrak{D})$. Пусть задана пара взаимно однозначных

преобразований: Ψ , отображающее \mathcal{S} на \mathfrak{D} и Φ , отображающее \mathfrak{D} на \mathcal{S} , причем

$$\mu_{\Psi(S)}^{\Phi(X)}(B) = \mu_S^X(B); B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

для всех $S \in \mathcal{S}, X \in \mathfrak{D}$. Отсюда следует, что Ψ является аффинным отображением, т. е.

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^n p_i S_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i \Psi(S_i)$$

если $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Преобразование Ψ назовем симметрией в пространстве состояний.

Теорема (Вигнер, 1931). Всякая симметрия пространства квантовых состояний имеет вид

$$\Psi(S) = USU^*$$

где U унитарный или антиунитарный оператор в \mathcal{G} .

Для средних значений наблюдаемых имеем

$$\text{Tr } \Psi(S)X = \text{Tr } S\Psi^*(X)$$

где

$$\Psi^*(X) = U^*XU$$

С точки зрения наблюдаемой статистики преобразование (2.1) состояний эквивалентно преобразованию (2.2) наблюдаемых. В первом случае говорят о картине Шрёдингера, а во втором о картине Гейзенберга.

Пусть G - группа и $g \rightarrow \Psi_g$ - представление G в группу симметрий $\odot(\mathcal{H})$, так что

$$\Psi_{g_1 \cdot g_2} = \Psi_{g_1} \cdot \Psi_{g_2}; g_1, g_2 \in G$$

Если G -связная топологическая группа, а представление $g \rightarrow \Psi_g$ непрерывно, то Ψ_g представляется в виде

$$\Psi_g(S) = U_g S U_g^*$$

где $g \rightarrow U_g$ - проективное унитарное представление группы G в пространстве \mathcal{C} , т. е. операторы U_g унитарны и удовлетворяют уравнению

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1 \cdot g_2}$$

где $\omega(g_1, g_2)$ - множитель представления - комплексная функция, удовлетворяющая определенным алгебраическим соотношениям (см., например, Варадараян [160]).

2.2. Однопараметрические группы. В случае $G = \mathbf{R}$, как показали Вигнер и Баргманн, всегда можно выбрать $\omega(g_1, g_2) = 1$, так что однопараметрическая группа симметрий определяется унитарным представлением \mathbf{R} в \mathcal{C} .

Т е о р е м а (Стоун, 1932). Пусть $t \rightarrow U_t, t \in \mathbf{R}$ - сильно непрерывная группа унитарных операторов в \mathcal{H} , так что

$$U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1+t_2}; t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Тогда существует самосопряженный оператор A в \mathcal{H} , такой что $U_t = e^{itA}$. Обратно, для любого самосопряженного оператора A семейство $e^{itA}, t \in \mathbf{R}$, образует сильно непрерывную однопараметрическую группу.

Итак, предположив, например, что статистическое описание изолированной квантовой системы инвариантно относительно выбора начала отсчета времени, мы приходим к выводу, что в \mathcal{H} существует самосопряженный оператор H такой, что состояние системы в момент времени t описывается формулой

$$S_t = e^{-iHt} S_0 e^{iHt}$$

Оператор H называется гамильтонианом (или наблюдаемой энергии) системы. Из (2.4) следует уравнение эволюции (в картине Шрёдингера)

$$i \frac{dS_t}{dt} = [H, S_t]$$

Если $S_0 = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$ - чистое состояние, то $S_t = |\psi_t\rangle \langle \psi_t|$, где $\{\psi_t\}$ - семейство векторов в \mathcal{H} , удовлетворяющее уравнению шрёдингера

$$i \frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t$$

Как правило, H - неограниченный оператор (полуограниченный снизу), так что в соотношениях (2.5), (2.6) следует позаботиться об областях определения.

Уравнение эволюции в картине Гейзенберга имеет вид

$$X_t = e^{iHt} \check{X}_0 e^{-iHt}; i \frac{dX_t}{dt} = [X_t, H]$$

Аналогично, из предположения о пространственной однородности вытекает существование самосопряженного оператора P , такого что состояние квантовой системы в системе отсчета, сдвинутой на расстояние x вдоль данной координатной оси, определяется уравнением

$$S_x = e^{-iPx} S_0 e^{iPx}$$

Оператор P называется оператором импульса вдоль этой оси. Вообще, всякой однопараметрической группе симметрий геометрического или кинематического характера отвечает самосопряженный оператор, порождающий по формулам типа (2.4), (2.7) преобразования квантовых состояний.

2.3. Соотношения Г. Вейля. инематика нерелятивистских систем как классических, так и квантовых, основана на прин. ципе относительности Галилея, согласно которому описание изолированной системы одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Пусть $W_{\alpha, \nu}$ - унитарный оператор, порождающий преобразование состояний при переходе в систему отсчета, сдвинутую на расстояние x и движущуюся относительно исходной со скоростью v вдоль выделенной координатной оси. Тогда $(x, v) \rightarrow W_{x, v}$ есть проективное представление группы $G = \mathbf{R}^2$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Можно доказать, что соотношение (2.3) приводится к виду

$$W_{x_1, v_1} W_{x_2, v_2} = \exp \left[-\frac{im}{2} (x_1 v_2 - x_2 v_1) \right] W_{x_1+x_2, v_1+v_2}$$

где m - вещественный параметр (связанный с массой частицы) и далее строго положительный. Выделяя однопараметрические подгруппы - группу пространственных сдвигов $V_x = W_{x, 0}$ и группу «галилеевых бустов» $U_v = W_{0, v}$, соотношение (2.8) можно переписать в виде

$$U_v V_x = e^{imxv} V_x U_v; \quad x, v \in \mathbf{R},$$

причем $W_{x, v} = e^{imxv/2} V_x U_v$. Соотношение (2.9) называется каноническим коммутационным соотношением (ККС) Г. Вейля [10].

Согласно теореме Стоуна,

$$U_v = e^{imvQ}, \quad V_x = e^{-ixP},$$

где Q, P - самосопряженные операторы в \mathcal{H} . Рассматривая Q как вещественную наблюдаемую, заметим, что соотношение

$$V_x^* E(B+x) V_x = E(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

для спектральной меры E оператора Q . Это же равносильно тому, что распределение вероятностей наблюдаемой преобразуется ковариантно при пространственных сдвигах (2.7):

$$\mu_{s_x}^Q(B+x) = \mu_{s_0}^Q(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

для любого состояния S_0 . Это дает основание назвать Q наблюдаемой координаты вдоль выделенной оси. Симметричное рассуждение показывает, что P/m есть наблюдаемая скорости изолированной квантовой системы.

Представлением ККС считается любая конкретная пара (V, U) , удовлетворяющая соотношениям (2.9). Представление называется неприводимым, если в \mathcal{C} нет замкнутого подпространства, инвариантного относительно V_x, U_v . Неприводимым является представление Шрёдингера в $\mathcal{C} = L^2(\mathbf{R})$

$$V_x \psi(\xi) = \psi(\xi - x), \quad U_v \psi(\xi) = e^{imv\xi} \psi(\xi)$$

В этом представлении Q задается оператором умножения на ξ , а P - оператором $i^{-1} \frac{d}{d\xi}$.

Операторы P, Q имеют общую плотную инвариантную область определения и удовлетворяют на ней ККС Гейзенберга ¹⁾:

$$[P, Q] = iI$$

Операторы P, Q называются каноническими наблюдаемыми. Обратный переход от соотношения Гейзенберга к соотношению Вейля (экспоненцирование) имеет ряд аналитических тонкостей, связанных с неограниченностью операторов P, Q и породил обширную математическую литературу (см. Йоргенсен, Мур [112]).

Принципиальное значение для квантовой механики имеет тот факт, что ККС определяют канонические наблюдаемые P, Q практически однозначно.

Теорем а (Стоун-фон Нейман, 1931). Всякое сильно непрерывное представление ККС— водимых представлений, каждое из которых унитарно эквивалентно представлению Шрёдингера.

В частности, в любом представлении ККСР, Q , как и в представлении Шрёдингера, неограничены и имеют лебегов спектр, простирающийся на всю вещественную прямую. С этим связана известная трудность с установлением разумного принципа соответствия в квантовой механике. Вопрос состоит в определении канонически сопряженных квантовых наблюдаемых, аналогичным обобщенным координатам и импульсам в

1. Соотношение (2.111) впервые было рассмотрено в 50-х годах прошлого века ирландским математиком Грейвсом, который развил соответствующее символическое исчисление. гамильтоновом формализме квантовой механики, и связан с: проблемой квантования классических систем. Так, в классической механике время и энергия, подобно координате и импульсу, являются канонически сопряженными величинами. Однако наблюдаемая энергии H имеет ограниченный снизу спектр, поэтому из теоремы Стоуна-фон Неймана вытекает, что не существует самосопряженного оператора времени T , которым был бы связан с H каноническим коммутационным соотношением. Эти трудности, возникающие и для других канонических пар, разрешаются в рамках обобщенной статистической модели квантовой механики (см. гл. 2, §3).

Аналогично формулируются ККС для систем с произвольным числом степеней свободы. Пусть $\{Z, \Delta\}$ -симплектическое пространство, т. е. вещественное линейное пространство с билинейной кососимметричной формой $\Delta(z, z'); z, z' \in Z$. Представлением ККС называется семейство $z \rightarrow W(z)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , удовлетворяющее ККС Вейля-Сигала

$$W(z)W(z') = \exp \frac{i}{2} \Delta(z, z') W(z + z')$$

Если форма Δ невырождена, а Z конечномерно, то оно имеет четную размерность d , и существует базис, в котором

$$\Delta(z, z') = \sum_{j=1}^d (x_j y'_j - x'_j y_j)$$

При этом операторы сильно непрерывного представления Вейля записываются в виде

$$W(z) = \exp i \sum_{j=1}^d (x_j P_j + y_j Q_j)$$

где самосопряженные операторы P_j, Q_j удовлетворяют многомерному аналогу ККС Гейзенберга (2.11)

$$[P_j, Q_k] = i\delta_{jk}I; [P_j, P_k] = 0, [Q_j, Q_k] = 0$$

В этом случае теорема единственности Стоуна-фон Неймана сохраняет силу.

Для систем с бесконечным числом степеней свободы единственность нарушается и существует континуальное множество неэквивалентных представлений, что является причиной «инфракрасных расхождений» в квантовой теории поля (см. [7], [32], [51]).

Неединственность представлений ККС тесно связана с неэквивалентностью вероятностных мер в бесконечномерных пространствах и послужила одним из

первоначальных стимулов для изучения этого вопроса, занимающего большое место в классической теории случайных процессов.

2.4. Гауссовские состояния. Неравенство (1.9) и ККС (2.11) влекут соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\mathbf{D}_s(P)\mathbf{D}_s(Q) \geq 1/4$$

из которого видно, что не существует состояний S , в котором P и Q одновременно принимали бы некоторые точные значения с вероятностью 1. Состояния, для которых в (2.14) достигается равенство, называются состояниями минимальной неопределенности. Это чистые состояния $S_{x,v}$, определяемые векторами

$$\psi_{x,v} = W_{x,v}\psi_{0,0}; (x, v) \in \mathbf{R}^2$$

где $\psi_{0,0}$ - вектор основного состояния, в представлении Шрёдингера имеющий вид

$$\psi_{0,0}(\xi) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp(-\xi^2/4\sigma^2)$$

Состояния $S_{x,v}$ характеризуются тремя параметрами

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{E}_{S_{x,v}}(Q), \quad v = \mathbf{E}_{S_{x,v}}(P), \\ \sigma^2 &= \mathbf{D}_{S_{x,v}}(Q) = [4\mathbf{D}_{S_{x,v}}(P)]^{-1}. \end{aligned}$$

При фиксированном σ^2 векторы $\psi_{x,v}$ образуют семейство, известное в квантовой оптике как семейство когерентных состояний [12], [21]. Для этих состояний

$$\langle Q - \mathbf{E}_{S_{x,v}}(Q) \cdot \mathbf{I}, \quad P - \mathbf{E}_{S_{x,v}}(P) \cdot \mathbf{I} \rangle_{S_{x,v}} = 0.$$

Более широкий класс образуют чистые состояния, для которых достигается равенство в соотношении неопределенностей (1.9) (для P и Q), но условие (2.16) не обязано выполняться. Эти состояния широко обсуждались в физической литературе под именем сжатых (squeezed) состояний (см., например, [140]). С математической точки зрения все эти состояния входят в класс состояний, являющихся естественным квантовым аналогом гауссовских распределений в теории вероятностей.

Пусть $\{Z, \Delta\}$ - конечномерное симплектическое пространство с невырожденной кососимметричной формой Δ и $z \rightarrow W(z)$ - неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Характеристическая функция оператора плотности S в \mathcal{H} определяется соотношением

$$\varphi(z) = \text{Tr } SW(z); \quad z \in Z$$

и обладает рядом свойств, аналогичных свойствам характеристических функций в теории вероятностей [43, гл. V]. В частности, аналог условия положительной определенности имеет вид

$$\sum_{j,k} \bar{c}_j c_k \varphi(z_j - z_k) \exp \frac{i}{2} \Delta(z_j, z_k) \geq 0$$

для всех конечных наборов $\{c_j\} \subset \mathbf{C}$, $\{z_j\} \subset Z$. Состояние S называется гауссовским, если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(z) = \exp \left[im(z) - \frac{1}{2} \alpha(z, z) \right]$$

где $m(z)$ - линейная, а $\alpha(z, z')$ - билинейная формы на Z . Это соотношение задает характеристическую функцию тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\alpha(z, z)\alpha(z', z') \geq \frac{1}{4}\Delta(z, z')^2; \quad z, z' \in Z$$

непосредственно связанное с (2.18). Общее определение для бесконечномерного Z было дано в [127]. В квантовой теории поля такие состояния описывают квазисвободные (обобщенносвободные) поля и носят такое же название. В статистической механике они возникают как равновесные состояния бозе-систем с квадратичным гамильтонианом (см., например, [70], [51]).

5.1.3 3. Составные системы

3.1. Тензорное произведение гильбертовых пространств.

Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{H}_2$ - гильбертовые пространства со скалярными произведениями $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$. В множестве \mathcal{L} формальных линейных комбинаций элементов $\psi_1 \times \psi_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{H}_2$ введем положительно определенную эрмитову форму, полагая

$$\langle \varphi_1 | \langle \varphi_2 | \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle_1 \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle_2$$

и продолжая ее на \mathcal{L} по линейности. Пополнение (факторизованного по нулевому подпространству формы) пространства \mathcal{L} является гильбертовым пространством, которое называется тензорным произведением $\mathcal{H}_1, \mathcal{C}_2$ и обозначается $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Вектор пространства $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, соответствующий классу эквивалентности векторов $\psi_1 | \psi_2 \in \mathcal{L}$, обозначается $\psi_1 \otimes \psi_2$.

Если $\mathcal{H}_j = L^2(\Omega_j, \mu_j); j = 1, 2$, то пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ состоит из всех функций $\psi(\omega_1, \omega_2)$, квадратично интегрируемых по мере $\mu_1 \times \mu_2$, причем вектор $\psi_1 \otimes \psi_2$ определяется функцией $\psi_1(\omega_1)\psi_2(\omega_2)$.

Тензорное произведение операторов $X_1 \otimes X_2$, где X_j - оператор в \mathcal{H}_j , определяется формулой

$$(X_1 \otimes X_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = X_1\psi_1 \otimes X_2\psi_2$$

Если \mathcal{C}_j - конечномерные (комплексные) гильбертовы пространства, то

$$\dim \odot (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim \curvearrowright (\mathcal{H}_1) \dim \odot (\mathcal{H}_2).$$

Если же \mathcal{C}_j - вещественные гильбертовы пространства, то здесь имеет место знак $>$, а для кватернионных гильбертовых пространств (при некотором разумном определении $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$), знак $<$. Это обстоятельство рассматривается как косвенный аргумент в пользу поля комплексных чисел в аксиоматической квантовой механике.

Аналогично определяется тензорное произведение любого конечного числа гильбертовых пространств $\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$. В квантовой механике $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ описывает систему из n различных частиц. В статистической механике приходится рассматривать системы неразличимых частиц - бозонов или фермионов. В n -кратном тензорном произведении $\mathcal{H}^{\otimes n}$ выделяются два подпространства: симметричное тензорное произведение \mathcal{H}^{sn} , описывающее бозоны, и антисимметричное тензорное произведение \mathcal{H}^{an} , описывающее фермионы (в случае $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ первое состоит из симметричных, а второе - из антисимметричных функций $\psi(\omega_1, \dots, \omega_n)$ аргументов $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$). Системы из переменного (неограниченного) числа частиц описываются пространствами Фока: симметричным пространством $\Gamma_a(\mathcal{C}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus \mathcal{H}^{sn}$ в случае

бозонов и антисимметричным пространством $\Gamma_a(\mathcal{G}) = \sum_{n=0} \oplus \mathcal{H}^{an}$ в случае фермионов. В этих пространствах действует специальное представление канонических коммутационных (соответственно, антикоммутационных) соотношений, связанное с процедурой вторичного квантования (см. [6], [51], [70]).

3.2. Произведение квантовых состояний. Если S_j - операторы плотности в \mathcal{C}_j , то $S_1 \otimes S_2$ - оператор плотности в $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, причем

$$\text{Tr} (S_1 \otimes S_2) (X_1 \otimes X_2) = \text{Tr} S_1 X_1 \cdot \text{Tr} S_2 X_2; X_j \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_j)$$

Операторы вида $X \otimes I_2$, где $X \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_1)$, а I_2 - единичный оператор в \mathcal{C}_2 , образуют подалгебру $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}(\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$, изоморфную $\mathfrak{B}(\mathcal{C}_1)$. Формула

$$\mathcal{E}(X_1 \otimes X_2) = X_1 \otimes (\text{Tr} S_2 X_2) I_2$$

определяет отображение \mathcal{E} из $\mathcal{P}(\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ на $\mathcal{P}(\mathcal{H}\mathcal{C}_1)$, обладающее свойством условного ожидания

$$\mathbf{E}_s(XY) = \mathbf{E}_B(\mathcal{E}(X)Y); X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), Y \in \mathcal{B}_1,$$

относительно состояния $S = S_1 \otimes S_2$. В квантовой теории вероятностей условные ожидания играют меньшую роль, чем в классической, поскольку в общем случае условное ожидание на данную подалгебру \mathcal{B} относительно данного состояния S существует лишь при весьма ограничительном соотношении между \mathcal{B} и S , в определенной мере, сводящем ситуацию к классической; точнее см. п. 3.1.3.

Если S - произвольный оператор плотности в $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, то в \mathcal{G}_1 найдется единственный оператор плотности S_1 , такой что

$$\text{Tr} S_1 X = \text{Tr} S (X \otimes I_2); X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1).$$

Это же верно для любой линейной комбинации операторов плотности, т. е. для любого ядерного оператора T в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Отображение $T \rightarrow T_1$ называется частичным следом оператора T (обозначается $T_1 = \text{Tr} \mathcal{H}_2 T$). Операция частичного следа аналогична нахождению маргинального распределения в теории вероятностей.

3.3. Независимость и предельные теоремы. Рассмотрим сначала ситуацию, соответствующую одномерной центральной предельной теореме в теории вероятностей. Пусть S - фиксированное состояние. Вещественные наблюдаемые X_1, \dots, X_n, \dots называются независимыми, если

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\varphi_1(X_{i_1})^* \dots \varphi_m(X_{j_m})) = \\ = \mathbf{E}_s(\varphi_1(X_{j_1})) \dots \mathbf{E}_s(\varphi_m(X_{j_m})) \end{aligned}$$

для любых $m = 1, 2, \dots$, любых ограниченных борелевских функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ и любых номеров j_1, \dots, j_m , таких что $j_k \neq j_l$ при $k \neq l$. Предполагается, что X_j одинаково распределены и имеют второй момент, причем $\mathbf{E}_s(X_j) = 0, \mathbf{D}_s(X_j) = 1$. Что можно сказать о предельном распределении нормированных сумм

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j^\times$$

Если X_1, \dots, X_n, \dots -попарно перестановочны, то

$$\exp it(X_1 + \dots + X_n) = \exp it X_1 \dots \exp it X_n; t \in \mathbb{R}$$

и применение характеристических функций сводит вопрос к классической центральной предельной теореме, со стандартным нормальным распределением в качестве предельного. В общем случае (3.3) не выполняется и предельное поведение сумм существенно зависит от алгебраических свойств последовательности слагаемых. Пусть, например, X_1, \dots, X_n, \dots - антиперестановочны в том смысле, что

$$X_j X_k = -X_k X_j \text{ при } j \neq k.$$

Тогда прямой подсчет (в предположении конечности 4-го момента X_j) показывает, что

$$\mathbf{E}_B(S_n^4) - (\mathbf{E}_B(S_n^2))^2 \rightarrow 0$$

откуда следует, что $S_n^2 \rightarrow 1$ по вероятности. Поскольку $\mathbf{E}_s(S_n) = 0$, то распределение S_n стремится к симметричному распределению Бернулли, сосредоточенному в точках ± 1 ¹¹. Это согласуется с наблюдением, что распределение Бернулли устойчиво относительно сложения антиперестановочных наблюдаемых (п. 1.6).

Богатство новых возможностей, открывающихся в некоммутативной теории, демонстрируют понятие свободной независимо-

1. Это рассуждение сообщено автору В. фон Вальденфельсом. сти и соответствующая предельная теорема, открытые Войкулеску [162] (см. также Шпайхер [151]). Вещественные наблюдаемые X_1, \dots, X_n, \dots называются свободно независимыми, если соотношения (3.2) выполняются для всех номеров j_1, \dots, j_m , та. ких что $j_k \neq j_{k+1}, k = 1, \dots, m-1$.

Те орема. Пусть X_j - свободно независимые наблюдаемые, $\|X_j\| \leq c; j = 1, \dots, n, \dots$. Пусть X_j одинаково распределены и $\mathbf{E}_s(X_j) = 0, \mathbf{D}_s(X_j) = 1/4$. Тогда распределение нормированных сумм S_n сходится при $n \rightarrow \infty$ к полукруговому закону Вигнера с. Плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы методом моментов требует довольно сложных комбинаторных подсчетов. Другой метод доказательства - использование преобразования Коши, которое играет роль логарифма характеристической функции для сво'бодно независимых' величин [163].

При переходе к многомерной предельной теореме возникает принципиально новая ситуация, обусловленная возможностью различных алгебраических соотношений между компонентами каждого из слагаемых. В работе Кашена, Хадсона [77] (соответственно, Хадсона [106]) предполагается, что компоненты слагаемых подчинены каноническим коммутационным (антикоммутационным) соотношениям и доказывается; что состояния, описывающие нормированную сумму, сходятся к квазисвободному состоянию канонических коммутационных (антикоммутационных) соотношений, т. е. к квантовому гауссовскому (бернуллиевскому) состоянию. При этом в случае антикоммутационных соотношений вместо обычного тензорного произведения алгебр, порожденных компонентами каждого слагаемого, необходимо использовать так называемое градуированное тензорное произведение, обобщающее понятие антиперестановочности. Более интересны результаты работ Гири, фон Вальденфельса [90] и Вальденфельса [164], в которых показано, что квазисвободное состояние на алгебре канонических коммутационных (соответственно, антикоммутационных) соотношений возникает в квантовой центральной предельной теореме без априорных предположений об

алгебраической природе слагаемых, а лишь в зависимости от выбора обычного (или градуированного) тензорного произведения. Однако метод доказательства в этих работах, основанный на вычислении моментов, предполагает ограничительное в аналитическом плане условие существование моментов всех порядков.

В ряде работ рассматривался случай слабо зависимых наблюдаемых. М. Ш. Гольдштейн доказал сходимости к нормальному распределению в случае последовательности вещественных наблюдаемых X_1, \dots, X_n, \dots , удовлетворяющей условиям слабой зависимости и асимптотической перестановочности типа условия Розенблатта (см. обзор В. В. Аншелевича и М. Ш. Гольдштейна в сборнике [34] и книгу Т. А. Сарымсакова [31]). Обобщение результатов фон Вальденфельса об асимптотической квазисвободности на случай слабо зависимых слагаемых даны в работе Аккарди и Баха [53] (алгебру \mathcal{B} в этой работе следует считать коммутативной). Наиболее полный результат для слабо зависимых (перестановочных) слагаемых получен Годерисом, Вербером, Ветсом [92]. Следует отметить, что истоком работ [90], [92] послужили известные работы Хеппа и Либа о флуктуациях в лазере Дикке, которые дают некоторую физическую мотивацию квантовой центральной предельной теоремы для перестановочных слагаемых.

Различные алгебраические обобщения центральной предельной теоремы (связанные, в частности, с понятием безграничной, делимости) рассматривались также Хегерфельдом [97], Партасарати и Шмидтом [138], Фаннесом и Куагебером (статья в сборнике [142]).

5.1.4 4. Проблема скрытых параметров

Проблема скрытых параметров - это вопрос о принципиальной возможности описания квантовой механики в терминах классического фазового пространства. Несмотря на устоявшееся среди физиков мнение о невозможности такого описания, конструирование теорий со скрытыми параметрами не прекращается (одной из недавних и наиболее интересных попыток является стохастическая механика [132]). Этой проблеме посвящена обширная литература (см., например, [14]). Здесь мы ограничимся обсуждением наиболее существенных логических аргументов против «скрытых параметров».

4.1. Скрытые параметры и квантовая дополнительность. С математической точки зрения в проблеме скрытых параметров речь идет о возможности установления соответствий $S(dw) \rightarrow \hat{S}, X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ между классическими состояниями, т. е. распределениями вероятностей $S(dw)$ на измеримом «фазовом пространстве» $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ и операторами плотности \hat{S} в гильбертовом пространстве \mathcal{H} квантовой системы, и между случайными величинами $X(\omega)$ и наблюдаемыми \hat{X} в \mathcal{H} , которые воспроизводили бы статистические предсказания квантовой теории и удовлетворяли некоторым физически мотивированным условиям. Такими условиями, естественно возникающими из общего понятия статистической модели (п. 0.2), в первую очередь являются сохранение функциональной подчиненности в пространстве наблюдаемых, а также выпуклой структуры в множестве состояний. Обзор с этой точки зрения основных «доказательств невозможности» скрытых параметров дан в [45]. Так, результаты

Белла [66] и Кошена, Шпеккера [115] равносильны следующему утверждению.

Предложение. Пусть $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Не существует однозначного отображения $X \rightarrow X(\omega)$ множества наблюдаемых $X \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ в множество случайных величин на каком-либо измеримом пространстве Ω , удовлетворяющего условию:

1. если $X \rightarrow X(\omega)$, то $f \circ X \rightarrow f(X(\omega))$ для любой борелевской функции f .

Доказательство. Можно считать, что $\dim \mathcal{H} < \infty$. Пусть такое отображение существует, тогда из 1) выводятся следующие свойства

2. $X(\omega) \in \text{Sp } X$ для любого $\omega \in \Omega$;

3. Если \hat{X}_j – совместимые наблюдаемые и $\hat{X}_j \rightarrow X_j(\omega)$, то $\sum_j \hat{X}_j \rightarrow \sum_j X_j(\omega)$.

Фиксируем $\omega \in \Omega$ и рассмотрим функцию проекторов $\mu(E) = E(\omega)$, где $E \rightarrow E(\omega)$. Из 2), 3) вытекает, что μ является вероятностной мерой на $\mathbb{E}(\mathcal{H})$, принимающей только значения 0,1. По теореме Глисона $\mu(E) = \text{Tr } \hat{S}E$, где \hat{S} – оператор плотности, но такая функция не может быть двузначной мерой.

Недостаток аргументации фон Неймана [26] состоит в том, что он требовал выполнения свойства 3) для произвольных \mathbf{x} , а не только совместимых наблюдаемых \mathbf{X}_j . Рассуждение с аддитивностью средних значений, которое он привел для обоснования этого требования, по существу, заранее исключает теории со скрытыми параметрами [45], [14].

Приведенное выше доказательство означает невозможность введения скрытых параметров по схеме частичной наблюдаемости, реализуемой, например, в классической статистической механике, где имеется взаимно однозначное соответствие между «макроскопическими» наблюдаемыми и некоторыми функциями на фазовом пространстве. Однако оно не исключает более сложных конструкций, в которых одна и та же квантовая наблюдаемая \mathbf{X} может быть измерена множеством разных способов и соответствие $X(\omega) \rightarrow X$, таким образом, не взаимно однозначно. На самом деле в квантовой механике имеется по крайней мере столько различных способов измерения наблюдаемой \bar{X} , сколько есть представлений $\bar{X} = f \circ \bar{Y}$ в виде функций от других наблюдаемых \bar{P} . Если \mathbb{X} имеет кратное собственное значение, то заведомо найдутся несовместимые наблюдаемые \vec{P}_1 и \vec{P}_2 такие, что $\mathbb{X} = f_1 \circ \vec{P}_1 = f_2 \circ \vec{P}_2$. Требование взаимной однозначности входит тогда в прямое противоречие с квантовым свойством дополненности¹⁾. Отсюда вытекает, что в теориях

1). Если $\dim \mathcal{H} = 2$, то наблюдаемые с кратным спектром – это постоянные величины; тогда такого противоречия не возникает, и теория со скрытыми параметрами, удовлетворяющая условиям доказанного предложения, строится явным образом [66]. со скрытыми параметрами следует оставить возможность для различных классических представлений одной и той же квантовой наблюдаемой (такого рода теории Дж. Белл назвал ко н текстуальным и). Аналогичное замечание можно отнести и представление квантовых состояний. А. С. Холево дал явное описание такой формальной конструкции, сохраняющей структуры статистической модели [45], [101].

Предложение. Пусть \mathcal{H} – гильбертово пространство. Существует измеримое пространство Ω и отображения $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ некоторого множества случайных величин на $\mathfrak{D}(\mathcal{C})$ и $S(d\omega) \rightarrow S$ некоторого множества вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ такие, что

1. Если $S_j(d\omega) \rightarrow \hat{S}_j$ и $\{p_j\}$ -конечное распределение вероят. ностей, то $\sum_j p_j S_j(d\omega) \rightarrow \sum_j p_j \hat{S}_j$;

2. Если $\dot{X}(\omega) \rightarrow \hat{\lambda}^*$ и f -борелевская функция, то $f(X(\omega)) \rightarrow f \circ \hat{X}$

3. Если $\ddot{X}(\omega) \rightarrow \hat{\lambda}$ и $S(d\omega) \rightarrow \hat{S}$, то

$$\int_{\Omega} X(\omega) S(d\omega) = \text{Tr } \hat{S} \hat{X}$$

В случае $\dim \mathcal{H} \geq 3$ отображения $X(\omega) \rightarrow X, S(d\omega) \rightarrow \hat{S}$ с необходимостью не являются взаимно однозначными. Этот результат показывает, что принцип

дополнительности препятствует классическому описанию квантовой статистики лишь при дополнительном требовании взаимной однозначности (неконтекстуальности).

4.2. Скрытые параметры и квантовая целостность. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух компонент $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Чистые состояния такой системы задаются единичными векторами $\psi \in \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, которые являются линейными комбинациями (суперпозициями) факторизуемых векторов $\psi_1 \otimes \psi_2$. Если $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$, то обе компоненты системы находятся в однозначно определенных чистых состояниях; если же ψ нефакторизуемо, то между компонентами обнаруживаются специфические корреляции, которые невозможно смоделировать никаким классическим механизмом случайности. На это обратил внимание Белл, показавший, что даже в контекстуальной теории со скрытыми параметрами нельзя удовлетворить естественному требованию, названному им «эйнштейновской локальностью» [66]¹¹. Обсудим близкое, но более общее условие разделимости [45].

1. В этой связи см. также статью Э. Вигнера «Скрытые параметры и квантовомеханические вероятности» в сб. [11].

Рассмотрим наблюдаемые

$$\begin{aligned}\hat{X}_j &= \hat{X}_j^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)}, j_k = 1, \dots, n \\ \hat{Y}_k &= \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{Y}_k^{(2)}, k = 1, \dots, m\end{aligned}$$

где $\hat{I}^{(j)}$ -единичный оператор в \mathcal{H}_j , так что

$$[\hat{X}_j, \hat{Y}_k] = 0$$

т. е. каждая наблюдаемая \hat{X}_j совместима с каждой \hat{Y}_k . Поэтому для любого состояния \hat{S} в $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ определены квантовые корреляции $\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}}$. Матрица $\mathbf{C} = \left[\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}} \right]_{j=1, \dots, n, k=1, \dots, m}$ описывает статистические результаты nm различных экспериментов, вообще говоря, несовместимых между собой.

Предположение. Пусть $n, m \geq 2$. Не существует измеримого пространства Ω и отображений $S(d\omega) \rightarrow \hat{S}, X(\omega) \rightarrow \hat{X}$ таких, что:

1. если $X(\omega) \rightarrow \hat{X}$, то $X(\omega) \in \text{Sp } \hat{X}$;
2. для любого \hat{S} и любых $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; \hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m$ вида найдутся $X_j(\omega), Y_k(\omega)$ такие, что $X_j(\omega) \rightarrow \hat{X}_j, Y_k(\omega) \rightarrow \hat{Y}_k$ и $\langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{S}} = \int_{\Omega} X_j(\omega) Y_k(\omega) S(d\omega); \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m$, для какого-либо $S(d\omega) \rightarrow \hat{S}$.

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $n = m = 2$. Рассмотрим наблюдаемые $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ вида (4.1) и такие, что

$$\|\hat{X}_j\| \leq 1, \|\hat{Y}_k\| \leq 1$$

Предположим, что указанные отображения существуют и пусть. X_j, Y_k - соответствующие случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), S(d\omega))$. В силу условия 1), $|X_i(\omega)| \leq 1, |Y_n(\omega)| \leq 1$, откуда

$$X_1(\omega)Y_1(\omega) + X_1(\omega)Y_2(\omega) + X_2(\omega)Y_1(\omega) - X_2(\omega)Y_2(\omega) \leq 2, \quad \omega \in \Omega$$

Усредняя по $S(d\omega)$ и используя условие 2), получаем неравенство Белла-Клаузера-Хорна-Шимони (БКХШ)

$$\langle \hat{\lambda}_1, \hat{Y}_1 \rangle_{\hat{s}} + \langle \hat{X}_1, \hat{Y}_2 \rangle_{\hat{s}} + \langle \hat{X}_2, \hat{Y}_1 \rangle_{\hat{s}} - \langle \hat{\Lambda}_2, \hat{Y}_2 \rangle_{\hat{s}} \leq 2.$$

Остается указать квантовые наблюдаемые \hat{X}_j, \hat{Y}_k и состояние \hat{S} , для которых неравенство (4.4) нарушается. Рассмотрим систему из двух частиц со спином $1/2$, так что $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 2$. (см. п. 1.6). Пусть \hat{S} -чистое состояние составной системы с вектором

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(e) \otimes \psi_2(-e) - \psi_1(-e) \otimes \psi_2(e)]$$

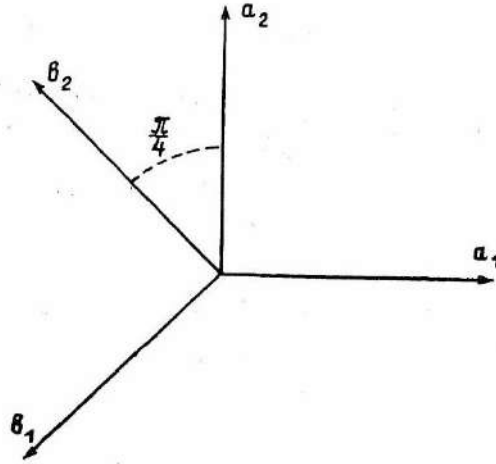
где $\psi_j(e)$ -единичный вектор j -й компоненты, описывающий полностью поляризованное состояние с направлением спина e . Положим

$$\hat{\lambda}'(a) = \hat{X}^{(1)}(a) \otimes \hat{I}^{(2)}, \quad \hat{Y}(b) = \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{\lambda}^{*(2)}(b)$$

где $\hat{\Lambda}^{(j)}(a)$ - наблюдаемые спина в \mathcal{H}_j (см. П. 1.6). Корреляции между компонентами имеют вид

$$\langle \hat{X}(a), \hat{Y}(b) \rangle_{\hat{s}} = \langle \psi | \hat{\Lambda}^{(1)}(a) \otimes \hat{X}^{(2)}(b) \psi \rangle = -a \cdot b.$$

Пусть векторы a_j, b_k образуют конфигурацию, обозначенную на рисунке, тогда значение левой части неравенства (4.4) для наблюдаемых $\hat{X}_j = \hat{X}(a_j), \hat{Y}_k = \hat{Y}(b_k)$ равно $2\sqrt{2}$, что противоречит неравенству и доказывает предложение ¹.



В [114] указано общее неравенство

$$\left(\hat{X}_1 \hat{Y}_1 + \hat{X}_1 \hat{Y}_2 + \hat{X}_2 \hat{Y}_1 - \hat{X}_2 \hat{Y}_2 \right)^2 \leq 4\hat{I} - [\hat{X}_1, \hat{\lambda}_2] \cdot [\hat{Y}_1, \hat{Y}_2]$$

справедливое для любых операторов, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3). Из него вытекает как неравенство БКХШ (при $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = [\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = 0$), так и граница

$$\left\| \hat{X}_1 \hat{Y}_1 + \hat{X}_1 \hat{Y}_2 + \hat{X}_2 \hat{Y}_1 - \hat{X}_2 \hat{Y}_2 \right\| \leq 2\sqrt{2}$$

из которой видно, что в построенном примере неравенство БКХШ нарушается максимальным образом.

1. Работы Дж. Белла стимулировали ряд экспериментов, в которых нарушение неравенства БКХШ получило подтверждение (см., например, [14]).

Поскольку компоненты составной системы могут представлять собой частицы, пространственно отделенные друг от друга макроскопическим расстоянием, то описывающая их теория со скрытыми параметрами должна быть существенно нелокальной¹⁾. В работе Саммерса и Вернера [156] показано, что положение не спасает и переход к локальной квантовой теории поля, где неравенство БКХШ также нарушается максимальным образом.

4.3. Структура множества квантовых корреляций. В работе Б. С. Цирельсона [48] было изучено выпуклое множество $\text{Cor}(n, m)$ квантовопредставимых матриц $\mathbf{C} = [c_{jk}]_{k=1, \dots, n, m}^{j=1, \dots, n}$, элементы которых представимы как корреляции $c_{jk} = \langle \hat{X}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{s}}$ каких-либо квантовых наблюдаемых \mathcal{X}_j, P_k , удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3). Оказывается, что формально более сильное, чем (4.2). (и физически содержательное), условие (4.1) приводит к тому же множеству корреляционных матриц \mathbf{C} . Это видно из доказательства следующей теоремы, которая дает прозрачное геометрическое описание множества $\text{Cor}(n, m)$.

Т е о р е м а. Матрица \mathbf{C} принадлежит множеству $\text{Cor}(n, m)$ тогда и только тогда, когда в евклидовом пространстве размерности $\min(n, m)$ существуют векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ такие, что $\|\mathbf{a}_j\| \leq 1, \|\mathbf{b}_k\| \leq 1$ и $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_k = c_{jk}$ для всех j, k .

Дадим набросок конструкции, существенной для доказательства. Пусть $\mathcal{C}(n)$ - комплексная алгебра Клиффорда с n эрмитовыми образующими X_1, \dots, X_n , удовлетворяющими соотношениям

$$X_j^2 = 1, \quad X_j X_k + X_k X_j = 0; \quad j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k$$

Поскольку элементы $X_j \otimes X_j$ алгебры $\mathcal{B}(n) \otimes \mathcal{B}(n)$ перестановочны и их спектр состоит из \sqrt{n} 1, то 1 является точкой спектра элемента

$$A = \frac{1}{n} (X_1 \otimes X_1 + \dots + X_n \otimes X_n)$$

(кратности 1). Пусть π - неприводимое представление алгебры $\mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(n)$, тогда в пространстве представления существует единственный с ' точностью до множителя вектор ψ , такой что $\pi(A)\psi = \psi$. Доказывается, что

$$\langle \psi | \pi(X(a) \otimes X(b))\psi \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n.$$

Вектор ψ определяет состояние \hat{S} в точном представлении алгебры $\mathcal{B}(n) \otimes \mathcal{B}(n)$ такое, что

$$\langle \hat{\lambda}_j, \hat{Y}_k \rangle_{\hat{s}} = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_k$$

1. По поводу нелокальности в стохастической, механике см. статью Э. Нельсона [132]. где $\hat{X}_j = X(\mathbf{a}_j) \otimes I, \hat{Y}_k = I \otimes X(\mathbf{b}_k)$ удовлетворяют условию (4.1) а значит, и (4.2).

Из этой теоремы в [48] получено описание крайних точек множества $\text{Cor}(n, m)$, а также указаны неравенства, задающие множество $\text{Cor}(2, 2)$.

Обозначая $\text{Cor}_1(n, m)$ множество классически-представимых матриц \mathbf{C} , таких что

$$c_{jk} = \int X_j(\omega) Y_k(\omega) S(d\omega),$$

где X_j, Y_k - случайные величины, такие что $|X_j(\omega)| \leq 1, |Y_k(\omega)| \leq 1$, имеем, очевидно,

$$\text{Cor}_1(n, m) \subsetneq \text{Cor}(n, m).$$

Несовпадение этих множеств математически выражает свойство квантовой целостности. Неравенство БХШ задает граничную гиперплоскость, отделяющую многогранник $\text{Cor}_1(2, 2)$ от квантово-реализуемой матрицы $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \text{Cor}(2, 2)$. Естественно поставить вопрос, насколько $\text{Cor}(n, m)$ превосходит $\text{Cor}_1(n, m)$. Пусть $K(n, m)$ - наименьшее число, обладающее свойством

$$\text{Cor}(n, m) \subset K(n, m) \text{Cor}_1(n, m)$$

Последовательность $K(n, m)$ возрастает с ростом n, m . Как отмечается в [48], из геометрического описания множества $\text{Cor}(n, m)$ вытекает, что $K = \lim K(n, m)$ совпадает с известной в теории нормированных пространств константой Гротендика $K_G \leq \frac{\pi}{2 \ln(1+\sqrt{2})} \approx 1,782$.

5.2 СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

5.2.1 1. Обобщенные наблюдаемые

1.1. Разложения единицы. Пусть $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ - измеримое пространство. В дальнейшем часто \mathcal{L} с танд артно е измеримое пространство, т. е. борелевское подмножество полного сепарабельного метрического пространства. Стандартные измеримые пространства одинаковой мощности изоморфны (см., например, [160, гл. V]), поэтому с точки зрения теории меры они эквивалентны борелевским подмножествам вещественной прямой \mathbf{R} .

Разложением единицы в гильбертовом пространстве \mathcal{H} называется нормированная положительная операторнозначная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, т. е. функция множеств $\mathbf{M} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C})$, удовлетворяющая условиям:

1. $M(B)$ - положительный оператор в \mathcal{H} для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;
2. Если $\{B_j\}$ - конечное или счетное разбиение \mathcal{X} на попарно-непересекающиеся измеримые подмножества, то

$$\sum_j M(B_j) = \mathbf{I}$$

где ряд сходится сильно.

Если $M(B)^2 = M(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, то \mathbf{M} - ортогональное разложение единицы (см. п. 1.1.3). Неортогональные разложения единицы (на \mathbf{R}) появились в работе арлемана (1923), в связи с проблемой спектрального разложения несамосопряженных операторов и были детально изучены в 1940-60-е годы (см., например, [2], [30], [68]).

Т е о р е м а (М. А. Наймарк, 1940). Всякое разложение единицы в \mathcal{C} может быть расширено до ортогонального разложения единицы, т. е. существует гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ и ортогональное разложение единицы $E : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \rightarrow (E)(\tilde{\mathcal{C}})$ в $\tilde{\mathcal{H}}$ такое, что

$$M(B) = PE(B)P; \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

где P -проектор из $\tilde{\mathcal{H}}$ на \mathcal{H} . Если \mathcal{H} - сепарабельно, а \mathcal{X} — стандартно, то \mathcal{H} можно выбрать сепарабельным. Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное расширение, характеризующееся тем свойством, что множество $\{E(B)P\psi; B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \psi \in \mathcal{C}\}$ плотно в $\tilde{\mathcal{H}}$.

Если существует σ -конечная мера μ , такая что $\|M(B)\| \leq C\mu(B)$, то

$$M(B) = \int_B P(x)\mu(dx); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

где $P(x)$ - измеримая ограниченная функция со значениями в $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, называемая плотностью **М** относительно меры μ (интеграл сходится в сильной операторной топологии). Если $\dim \mathcal{H} = \infty$, то ортогональное разложение единицы не может иметь плотности относительно какой-либо σ -конечной меры.

Пример. Переполненной системой [21], [6] в \mathcal{C} называется семейство $\{e_x; x \in \mathcal{Q}\} \subset \mathcal{H}$, удовлетворяющее условию

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathcal{Q}} |\langle e_x | \psi \rangle|^2 \mu(dx); \quad \psi \in \mathcal{C}$$

где μ - некоторая σ -конечная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$, т. е.

$$\int_{\mathcal{X}} |e_x\rangle \langle e_x| \mu(dx) = 1$$

Частным случаем пополненной системы является полная ортогональная система в \mathcal{C} , однако в общем случае векторы e_x могут быть не ортогональны и линейно зависимы. Всякий вектор $\psi \in \mathcal{H}$ имеет разложение

$$\psi = \int_{\mathcal{Q}} \langle e_x | \psi \rangle e_{x\mu}(dx)$$

по векторам пополненной системы. Соотношение

$$M(B) = \int_B |e_x\rangle \langle e_x| \mu(dx)$$

определяет разложение единицы с плотностью $P(x) = |e_x\rangle \langle e_x|$. Дадим для него явную конструкцию минимального расширения Наймарка (см. [78, гл. 8]). Определим ортогональное разложение единицы **Е** в $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{X}, \mu)$ соотношением

$$E(B)f(x) = 1_B(x)f(x); x \in \mathcal{B},$$

где $1_B(\cdot)$ - индикатор множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. В (1.2), (1.3) следует, что соотношение

$$(V\psi)(x) = \langle e_x | \psi \rangle$$

задает изометрическое вложение \mathcal{H} в \mathcal{C} , причем

$$M(B) = V^*E(B)V$$

Образ $V\mathcal{H}$ пространства \mathcal{H} в $L^2(\mathcal{L}, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $\mathcal{K}(x, y) = \langle e_x | e_y \rangle$, т. е. проектор P из $L^2(\mathcal{Q}, \mu)$ на $V\mathcal{H}$ является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}(x, y)$.

1.2

Обобщенная статистическая модель квантовой механики. Это отделимая статистическая модель (см. п. 0.2), в которой состояния описываются операторами плотности, а вещественные наблюдаемые - разложениями единицы на $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ в гильбертовом пространстве \mathcal{C} . Функциональная подчиненность наблюдаемых определяется соотношением $(f \circ M)(B) = M(f^{-1}(B))$. Если \mathcal{X} - измеримое пространство, то обобщенной наблюдаемой (наблюдаемой) со значениями в \mathcal{X} называется произвольное (ортогональное) разложение единицы \mathbf{M} на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Распределение вероятностей обобщенной наблюдаемой \mathbf{M} в состоянии S определяется формулой

$$\mu_S^M(B) = \text{Tr } SM(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Основанием для этих определений служит

Предложение ([143, гл. 2]). Соответствие $S \rightarrow \mu_S^M$ является аффинным отображением выпуклого множества квантовых состояний $\subseteq (\mathcal{C})$ в множество вероятностных мер $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Обратно, всякое аффинное отображение из (\mathcal{H}) в $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ имеет вид $S \rightarrow \mu_S^M$, где \mathbf{M} - однозначно определенное разложение единицы на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Аффинность означает, что смесь состояний переходит в соответствующую смесь распределений

$$\mu_{\sum p_j s_j}^M = \sum_j p_j \mu_{s_j}^M$$

для любых $S_j \in \text{Im}(\mathcal{H}); p_j \geq 0, \sum_j p_j = 1$, и имеет прямое истолкование в терминах статистических ансамблей. Можно сказать, что разложение единицы дает наиболее общее описание статистики исходов квантового измерения, совместимое с вероятностной интерпретацией квантовой механики.

Опираясь на теорему Наймарка, можно доказать, что для любого разложения единицы \mathbf{M} в \mathcal{C} найдутся гильбертово пространство \mathcal{C}_0 , оператор плотности S_0 в \mathcal{C}_0 и ортогональное разложение единицы \mathbf{E} в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, такие что

$$\mu_S^M(B_3) = \text{Tr } (S \otimes S_0) E(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$$

для всех $S \in (\mathcal{H})$ или $M(B) = \mathcal{E}_0(E(B))$, где \mathcal{E}_0 - условное ожидание относительно состояния S_0 , определяемое аналогично формуле (1.3.1). Таким образом, разложение единицы описывает статистику измерения обычной наблюдаемой в некотором расширении исходной системы, содержащем вспомогательную независимую систему в состоянии S_0 , что говорит о согласованности понятия обобщенной наблюдаемой со стандартной формулировкой квантовой механики.

Примечание. Векторы состояний минимальной определенности (1.2.15) образуют переполненную систему в $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$,

$$\frac{m}{2\pi} \int \int_{\mathbf{R}^2} |\psi_x\rangle \langle \psi_{x,v}| dx dv = \mathbf{I}$$

([12], [21]), что позволяет определить обобщенную наблюдаемую со значениями в \mathbf{R}^2

$$M(B) = \frac{m}{2\pi} \iint_B |\psi_{x,v}\rangle \langle \psi_{x,v}| dx dv$$

Укажем конструкцию, которая связывает \mathbf{M} с приближенным совместным измерением координаты и скорости квантовой частицы. Пусть $\mathcal{C}_0 = L^2(\mathbf{R})$, P_0, Q_0 - канонические

наблюдаемые в \mathcal{C}_0 и $S_0 = |\psi_{0,0}\rangle \langle \psi_{0,0}|$ - основное состояние в \mathcal{C}_0 . Самосопряженные операторы

$$\tilde{Q} = Q \otimes I_0 - I \otimes Q_0, \quad \frac{1}{m} \tilde{P} = \frac{1}{m} [P \otimes I_0 + I \otimes P_0]$$

в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ перестановочны ¹⁾, а значит, имеют совместную спектральную меру $E(dxdv)$. Используя аппарат характеристических

1. На это указал Н. Бор в статье «О понятиях причинности и дополнителности» (1948) (см. Избранные научные труды.- М.: Наука, 1971.- 2.С. 391 – 398). функций из п. 1.2.4, можно доказать, что для любого состояния: распределение вероятностей обобщенной наблюдаемой (1.6)

$$\mu_S^M(B) = \frac{m}{2\pi} \int_B \int_{x,v} \langle \psi_x \psi_{x,v} \rangle dx dv$$

удовлетворяет соотношению (1.5), т. е. совпадает с совместным распределением вероятностей наблюдаемых $\tilde{Q}, \tilde{P}/m$ в состоянии $S \otimes S_0$ (см. [43, гл. 3]). Относительно приближенных измерений Q, P см. также [78], [37], [159] и цитированные там работы.

1.3

Геометрия множества обобщенных наблюдаемых. Аналогом обобщенной наблюдаемой в классической статистике является рандомизованная случайная величина, т. е. переходная вероятность $\Pi(B | \omega)$ из пространства элементарных событий Ω в пространстве значений \mathcal{X} . Будем далее предполагать, что \mathcal{X} – стандартное пространство. Тогда соотношение

$$\Pi(B | \omega) = 1_B(f(\omega)); \quad \omega \in \Omega$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между случайными величинами f со значениями в \mathcal{X} и детерминированными переходными вероятностями, такими что $\Pi(B | \omega) = 0$ или 1, т. е. $\Pi(B | \omega)^2 = \Pi(B | \omega)$. Переходные вероятности из Ω в \mathcal{L} образуют выпуклое множество, крайними точками которого являются детерминированные переходные вероятности и только они (см., например, [41, гл. II]).

Соотношение между наблюдаемыми и обобщенными наблюдаемыми в квантовом случае значительно сложнее и интереснее. Обозначим $\mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ выпуклое множество обобщенных наблюдаемых со значениями в \mathcal{Q} , $\text{Ext} \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ множество его крайних точек, $\text{Conv} \mathfrak{M}$ выпуклую оболочку подмножества $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$. В $\mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ вводится естественная топология: последовательность $\{\mathbf{M}^{(n)}\} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ сходится к \mathbf{M} , если для любого состояния S последовательность вероятностных мер $\mu_s^{(n)}(B) = \text{Tr} S \mathbf{M}^{(n)}(B)$ сходится по вариациям к $\mu_s(B) = \text{Tr} S \mathbf{M}(B)$; $\overline{\mathfrak{M}}$ означает замыкание подмножества \mathfrak{M} в этой топологии. Пусть $\mathfrak{M}_0(\mathcal{Q})$ - подмножество обычных наблюдаемых и $\mathfrak{R}_1(\mathcal{Q})$ - подмножество обобщенных наблюдаемых \mathbf{M} , таких что $[M(B_1), M(B_2)] = 0$ для всех $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. В работе А. С. Холево [38] показано, что $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}_1(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда

$$M(B) = \int_{\mathcal{X}_1} \Pi(B | x_1) E(dx_1)$$

где \mathbf{E} - наблюдаемая со значениями в некотором пространстве \mathcal{Q}_1 , $\Pi(B | x_1)$ - переходная вероятность из \mathcal{X}_1 в \mathcal{X} . По аналогии с классической статистикой,

наблюдаемые, описываемые ортогональными разложениями единицы $\mathbf{E} (E(B)^2 = E(B))$, можно рассматривать как де-терминированные (более точное обсуждение см. в [101]). Наблюдаемые из $\mathfrak{R}_1(\mathcal{Q})$, которые задаются перестановочными разложениями единицы, являются классически-рандомизованными в том смысле, что $M \in \mathbb{R}_1(\mathcal{Q})$ получается из обычной наблюдаемой путем преобразования (1.8), содержащего внешний классический источник неопределенности. Всякую обобщенную наблюдаемую $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ можно рассматривать как квантово-рандомизованную в смысле представления (1.5): она эквивалентна обычной наблюдаемой в расширении исходной системы, включающем независимую квантовую систему. Наконец, точки из $\text{Extr} \mathfrak{R}(\mathcal{Q})$ представляют собой обобщенные наблюдаемые, в которых неопределенность, обусловленная процедурой измерения, сведена к минимуму.

Обозначим m мощность множества значений \mathcal{X} .

Теорема. Если $m = 2$, то $\mathfrak{R}_0(\mathcal{Q}) = \text{Extr} \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ и $\mathfrak{M}_1(\mathcal{Q}) = \overline{\text{Conv} \mathfrak{R}_0(\mathcal{Q})} = \mathfrak{R}(\mathcal{Q})$. Если $m > 2$, то $\mathfrak{R}_0(\mathcal{Q}) \subsetneq \text{Extr} \mathfrak{R}(\mathcal{Q})$ и

$$\mathfrak{M}_1(\mathcal{Q}) \subsetneq \overline{\text{Conv} \mathfrak{R}_0(\mathcal{Q})} \subsetneq \mathfrak{M}(\mathcal{Q}), \quad \text{причем если } \dim \mathcal{H} < \infty, \text{ то}$$

последнее включение точн. Если же $\dim \mathcal{H} = \infty$, то $\overline{\mathfrak{M}_0(\mathcal{Q})} = \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$.

Таким образом, ситуация аналогична классической лишь в случае обобщенных наблюдаемых с двумя значениями¹⁾. В этом случае $M = \{M_0, M_1\}$, где $M_1 = I - M_0$ и $\mathfrak{R}(\mathcal{Q})$ как выпуклое подмножество изоморфно порядковому интервалу $\{M_0 : M_0 \mathfrak{L}_h(\mathcal{H}), 0 \leq M_0 \leq I\}$, крайние точки которого совпадают с проекторами в \mathcal{H} (см., например, [78, гл. 2]).

Чтобы доказать, что $\mathfrak{D}_0(\mathcal{Q}) \neq \text{Extr} \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ при $m > 2$, достаточно сделать это в случае $m = 3$ и $\dim \mathcal{H} = 2$ (см. [43, §1.6]). Рассмотрим неортогональное разложение единицы

$$M_k = \frac{1}{3} |\psi(e_k)\rangle \langle \psi(e_k)|; k = 1, 2, 3$$

где $\psi(e_k)$ - векторы состояний системы со спином 1/2 (см. п. 1.1.6), причем $e_k, k = 1, 2, 3$, образуют правильный треугольник. Тот факт, что (1.9) является крайней точкой, можно установить непосредственно, либо воспользовавшись критерием из статьи Штермера в [85]: конечное разложение единицы $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ является крайней точкой тогда и только тогда, когда для любых $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ из $\sum_{i=1}^m E_i X_i E_i = 0$ следует $E_i X_i E_i = 0$, где E_i - носитель M_i , т. е. проектор на ортогональное дополнение к нулевому подпространству M_i . Если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то из наличия крайних точек, не попадающих в $\mathfrak{D}_0(\mathcal{Q})$, следует, что $\overline{\text{Conv} \mathfrak{M}_0(\mathcal{Q})} \neq \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$.

Интересный пример крайней точки дает неортогональное разложение единицы (1.6).

1. Такие наблюдаемые, называемые «эффектами», играют центральную роль в аксиоматическом подходе Людвига [125], [118].

Доказательство того, что $\overline{\mathfrak{R}_0(\mathcal{Q})} = \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ в случае $\dim \mathcal{H} = \infty$, основывается на теореме М. А. Наймарка. Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{Q})$ и $\{P^{(n)}\}$ - последовательность конечномерных проекторов в \mathcal{H} , сильно сходящаяся к I . Тогда $M^{(n)}(B) = P^{(n)} M(B) P^{(n)}$ - разложение единицы в конечномерном пространстве $\mathcal{C}^{(n)} = P^{(n)} \mathcal{H}$, которое можно расширить до ортогонального разложения единицы $\mathbf{E}^{(n)}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{G}^{(n)} \supset \supset \mathcal{H}^{(n)}$. Поскольку $\dim \mathcal{H} = \infty$, можно считать, что $\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H}$. Имеет место оценка

$$\text{var} \left(\mu_B^{(n)} - \mu_B \right) \leq 6 \| (I - P^{(n)}) S \|_1,$$

где $\mu_s^{(n)}(B) = \text{Tr } SE^{(n)}(B)$, $\mu_s(B) = \text{Tr } SM(B)$ [44], доказывающая утверждение. Итак, в случае $\dim \mathcal{H} = \infty$, все обобщенные наблюдаемые являются предельными точками множества наблюдаемых.

5.2.2 2. Квантовая теория статистических решений

2.1. Проверка гипотез.

В гильбертовом пространстве \mathcal{H} наблюдаемой квантовой системы заданы операторы плотности S_θ ; $\theta = 1, \dots, m$, описывающие одно из возможных состояний системы. Выбор одной из гипотез $\theta = 1, \dots, m$ осуществляется на основе решающего правила, задаваемого разложением единицы $\mathbf{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$. При этом вероятность принятия гипотезы $u = 1, \dots, m$, если система находится в состоянии S_θ , равна

$$\xi_{\theta\theta}^M(u) = \text{Tr } S_\theta M_u.$$

Как и в классической статистике, задается некоторый функционал от вероятностей (2.1) и вопрос состоит в нахождении экстремума этого функционала в том или ином классе решающих правил. В физических задачах квантовая система является носителем информации, состояния которого S_θ зависят от «передаваемого сигнала» θ . «Приемник» осуществляет квантовое измерение, статистика которого описывается разложением единицы M в \mathcal{C} . Речь идет об отыскании квантовых ограничений на качество измерения и о его оптимизации.

При байесовском подходе задаются априорные вероятности гипотез π_θ и функция отклонения $W_\theta(u)$; $\theta, u = 1, \dots, m$. Байесовский риск определяется обычной формулой

$$\mathcal{R}\{M\} = \sum_{\theta=1}^m \pi_\theta \sum_{u=1}^m W_\theta(u) \mu_\theta^M(u)$$

Решающее правило, минимизирующее $\mathcal{R}\{M\}$, называется байесовским. Часто рассматривают случай $W_\theta(u) = 1 - \delta_{\theta u}$ и $\pi_\theta = 1/m$. Тогда речь идет о максимизации средней вероятности правильного решения

$$\mathcal{P}\{M\} = \frac{1}{m} \sum_{\theta=1}^m \mu_\theta^M(\theta)$$

что является дискретным аналогом метода максимального правдоподобия. Наконец, важной мерой качества решающего правила является шенноновская информация

$$\mathcal{I}\{M\} = \sum_{\theta=1}^m \pi_\theta \sum_{u=1}^m \mu_\theta^M(u) \ln \frac{\mu_\theta^M(u)}{\sum_{\lambda=1}^m \pi_\lambda \mu_\lambda^M(u)}.$$

Первоначальная постановка квантовой задачи различения гипотез (Хелстром, 1967) основывалась на стандартном квантово-механическом формализме, в соответствии с которым решающие правила описывались ортогональными разложениями единицы. Формулировка квантовой теории статистических решений, основанная на обобщенных наблюдаемых, была предложена А. С. Холево (1972). Обозначим \mathfrak{P} класс всех решающих правил $\mathbf{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$, \mathfrak{D}_1 - класс классически-рандомизированных правил (т. е. таких, что $M_j M_k = M_k M_j$) и \mathfrak{D}_0 - класс детерминированных решающих правил ($M_j M_k = \delta_{jk} M_j$).

П р и м е р ([38]). Рассмотрим задачу различения равновероятных гипотез

$$S_\theta = |\psi(e_\theta)\rangle \langle \psi(e_\theta)|; \quad \theta = 1, 2, 3$$

где $\psi(e_\theta)$ - векторы состояний системы со спином $1/2$, возникающие в (1.9). Тогда

$$\max_{\mathfrak{N}_0} \mathcal{P}\{M\} = \max_{\mathfrak{N}_1} \mathcal{P}\{M\} = \frac{1}{6}(2 + \sqrt{3}) < \frac{2}{3} = \max_{\mathcal{N}} \mathcal{P}\{M\}$$

причем максимум достигается на решающем правиле (1.9). Более того,

$$\max_{\mathfrak{M}_0} \mathcal{F}\{M\} = \max_{\mathfrak{M}_1} \mathcal{F}\{M\} < \max_{\mathcal{N}} \mathcal{F}\{M\}$$

Этот и другие подобные примеры (см. [80]) демонстрируют неожиданный с классической точки зрения факт: квантовая рандомизация может увеличивать информацию о состоянии системы. Хотя этот эффект проявляется только в конечномерных гильбертовых пространствах (см. предыдущий пункт), он ясно указывает на необходимость использования обобщенных наблюдаемых.

2.2. Байесовская задача. Байесовский риск (2.2) представляется в виде

$$\mathcal{R}\{M\} = \text{Tr} \sum_{u=1}^m \hat{W}_u M_u$$

где $\hat{W}_u = \sum_{\theta=1}^m \pi_\theta W_\theta(u) S_\theta$ -операторная апостериорная функция отклонения. Поскольку $\mathcal{R}\{M\}$ - аффинный функционал на выпуклом множестве \mathfrak{M} , задача о его минимизации может быть рассмотрена с помощью методов линейного программирования.

Т е о р е м а (А. С. Холево, Юн). Имеет место соотношение двойственности

$$\min_{\mathfrak{M}} \mathcal{R}\{M\} = \max \left\{ \text{Tr} \Lambda : \Lambda \in \mathfrak{T}(\mathcal{C}), \Lambda \leq \hat{W}_u; u = 1, \dots, m \right\}$$

Следующие утверждения эквивалентны:

0. $M^0 = \{M_u^0\}$ - байесовское решающее правило;

1. существует $\Lambda^0 \in \mathfrak{E}(\mathcal{H})$, такой что

$$\Lambda^0 \leq \hat{W}_u; \quad (\hat{W}_u - \Lambda^0) M_u^0 = 0; \quad u = 1, \dots, m$$

2. оператор $\Lambda^0 = \sum_{u=1}^m \hat{W}_u M_u^0$ эрмитов и $\Lambda^0 \leq \hat{W}_u; u = 1, \dots, m$.

Задача в правой части (2.5) имеет единственное решение, которым является оператор Λ^0 , входящий в условия 1), 2).

Наиболее часто используется достаточность условия 1), которая доказывается элементарно: для любого $M = \{M_u\}$

$$\mathcal{R}\{M\} = \text{Tr} \sum_{u=1}^m \hat{W}_u M_u \geq \text{Tr} \Lambda \sum_{u=1}^m M_u^0 = \text{Tr} \sum_{u=1}^m \hat{W}_u M_u^0 = \mathcal{R}\{M^0\}$$

С помощью этого условия легко проверяется оптимальность решающего правила (1.9) в примере предыдущего пункта,

П р и м е р 1. Пусть операторы $\hat{W}_u - \hat{W}_v; u, v = 1, \dots, m$, перестановочны, т. е. $\hat{W}_u = C + \hat{W}_u^0$, где \hat{W}_u^0 - перестановочные операторы. Тогда существует самосопряженный оператор Λ и функции $\hat{W}_u^0(x)$ на \mathbb{R} , такие что

$$\hat{W}_u^0 = \hat{W}_k^0()$$

Пусть $\{\mathcal{X}_k\}$ -разбиение R , такое что $\hat{W}_k^0(x) \leq \hat{W}_j^0(x)$ при $x \in \mathcal{X}_k$, $j \neq k$, и положим $\Lambda^0 = C + \min_k \hat{W}_k^0(X)$, $M_k^0 = 1_{\mathcal{X}_k}(X)$. Тогда условия 1) выполнены. Если $C^k = 0$, то это соответствует вычислению байесовского решающего правила в классической статистике: правило является детерминированным и для каждого x предписывает выбирать решение u , для которого апостериорное отклонение $\hat{W}_u(x)$ минимально [37, гл. IV].

Пример 2. Условия предыдущего примера автоматически выполняются в случае двух гипотез S_0, S_1 . Для простоты рассмотрим функцию потерь $W_\theta(u) = 1 - \delta_{\theta u}$, так что речь идет минимизации средней ошибки. Байесовское решающее правило имеет вид

$$M_0^0 = 1_{(0, \infty)}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1), \quad M_1^0 = 1_{(-\infty, 0]}(\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1)$$

и минимальная ошибка

$$\mathcal{R}\{M^0\} = \frac{1}{2}(1 - \|\pi_0 S_0 - \pi_1 S_1\|_1)$$

Если S_0, S_1 -чистые состояния с векторами ψ_0, ψ_1 , то

$$\mathcal{R}\{M^0\} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\pi_0\pi_1 |\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle|^2} \right).$$

В общем случае уравнения оптимальности сводятся к сложной нелинейной задаче, часто геометрического характера. Много интересных явно решаемых случаев, в которых условия примера 1 не выполняются, рассмотрено Хелстромом [37], Р. Л. Стратоновичем [155] и В. П. Белавкиным [63]. Остановимся на задаче различения m чистых состояний с линейно независимыми векторами ψ_θ и априорными вероятностями $\pi_\theta > 0$. Можно считать, что \mathcal{H} порождается векторами $\psi_\theta; \theta = 1, \dots, m$. Кеннеди показал, что в этом случае байесовское решающее правило имеет вид

$$M_u = |e_u\rangle \langle e_u|; u = 1, \dots, m$$

где $\{e_u\}$ - некоторый ортонормированный базис в \mathcal{H} (см. [37, гл. IV]). Таким образом, задача сводится к нахождению ортонормированного базиса, наилучшим образом приближающего систему $\{\psi_u\}$ в смысле критерия

$$\mathcal{R}\{M\} = \sum_{\theta=1}^m \pi_\theta (1 - |\langle \psi_\theta | e_\theta \rangle|^2)$$

В [63] из общих условий оптимальности 1), 2) получено нелинейное уравнение для базиса $\{e_u\}$ и указан случай, когда оно решается явно. Пусть диагональные элементы матрицы $Q^{1/2}$, где $Q = [\sqrt{\pi_j \pi_k} \langle \psi_j | \psi_k \rangle]_{j,k=1, \dots, m}$, совпадают и равны \sqrt{q} . Тогда оптимальный базис

$$e_k = \sum_{j=1}^m \sqrt{\pi_j} \lambda_{jk} \psi_j$$

где $[\lambda_{jk}] = Q^{1/2}$, причем минимальная ошибка

$$\min \mathcal{R}\{M\} = 1 - mq$$

В частности, в «равноугольном» случае, когда $\langle \psi_j | \psi_k \rangle \equiv \gamma$ при $j \neq k$, а $\pi_\theta = 1/m$, получается формула Юна-Лэкса

$$\min \mathcal{R}\{\mathbf{M}\} = \frac{m-1}{m^2} (\sqrt{1+(m-1)\gamma} - \sqrt{1-\gamma})^2$$

А. С. Холево заметил [42], что в случае равномерности X чистых состояний имеет место оценка

$$\mathcal{R}\{M\} \leq \frac{1}{m} \sum_{\theta=1}^m \|\psi_{\theta} - e_{\theta}\|^2$$

Базис, минимизирующий правую часть, имеет вид

$$e_k = \sum_{j=1}^m a_{kj} \psi_j$$

где $[a_{yk}] = \Gamma^{-1/2}$ и $\Gamma = [\langle \psi_j | \psi_k \rangle]$, причем

$$\min_{\{e_{\theta}\}} \sum_{\theta=1}^m \|\psi_{\theta} - e_{\theta}\|^2 = \text{Tr} (I - \Gamma^{1/2})^2 = 2 \text{Tr} (I - \Gamma^{1/2})$$

(теорема М. Г. Крейна). Отсюда.

$$\min \mathcal{R}\{M\} \leq \frac{1}{m} \text{Tr} (I - \Gamma^{1/2})^2$$

Решающее правило, отвечающее базису (2.8), асимптотически оптимально в пределе почти ортогональных состояний, $\Gamma \rightarrow I_3$ причем правая часть в (2.9) дает первый член асимптотики. В «равноугольном» случае (2.9) обращается в равенство.

2.3. Пропускная способность квантового канала связи. Набор операторов плотности $\{S_{\theta}\}$ определяет простейшую модель квантового канала связи (см. [39], [98]), для которого θ играет роль «сигнала», пробегающего входной алфавит $1, \dots, m$. Кодирование задается распределением вероятностей $\pi = \{\pi_{\theta}\}$: на входном алфавите, а декодирование-разложением единицы $\mathbf{M} = \{M_u\}$, где u пробегает выходной алфавит $1, \dots, p$. Вероятность получить на выходе символ u при условии, что на входе сигнал θ , дается формулой (2.1). Таким образом, квантовый канал связи можно рассматривать как обычный канал со специфическими ограничениями на переходные вероятности, неявно выраженными формулой (2.1). Чему равна пропускная способность такого канала связи?

Рассмотрим информационное количество $\mathcal{I}_1(\pi, \mathbf{M})$, определяемое формулой типа (2.4) (где u пробегает от 1 до p) и величину $C_1 = \sup \mathcal{I}_1(\pi, M)$, где супремум берется по всевозможным кодированиям и декодированиям. В ранних работах для оценки пропускной способности использовалась величина

$$\bar{C} = \sup_{\pi} \left[H \left(\sum_{\theta=1}^m \pi_{\theta} S_{\theta} \right) - \sum_{\theta=1}^m \pi_{\theta} H(S_{\theta}) \right]$$

где $H(S) = -\text{Tr} S \ln S$ -энтропия фон Неймана квантового состояния S . В [40], [121] показано, что для любого кодирования π и декодирования M

$$\mathcal{I}_1(\pi, M) \leq H \left(\sum_{\theta=1}^m \pi_{\theta} S_{\theta} \right) - \sum_{\theta=1}^m \pi_{\theta} H(S_{\theta})$$

причем если операторы S_{θ} неперестановочны, то неравенство строгое ¹⁾. По-видимому, при том же условии $C_1 < \bar{C}$, хотя в полной общности это не было установлено. Однако как

показывают следующие рассуждения, величина C_1 также не может рассматриваться как пропускная способность.

Правильное определение пропускной способности должно быть связано с предельной скоростью асимптотически безошибочной передачи информации. Рассмотрим n -ю степень канала в пространстве $\mathcal{H}_n = \mathcal{C}^{\otimes n}$, определяемую состояниями $S_v = S_{\theta_1} \otimes \dots \otimes S_{\theta_n}$, где $v = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ - всевозможные слова входного алфавита длины n . Пусть $\mathcal{I}_n(\pi, \mathbf{M})$ и $C_n = \sup_{\pi, \mathbf{M}} \mathcal{I}_n(\pi, \mathbf{M})$ -

величины, определяемые для n -й степени канала аналогично $\mathcal{I}_1(\pi, \mathbf{M})$ и C_1 . Информационное количество $\mathcal{I}_n(\pi, \mathbf{M})$ обладает свойством аддитивности [40]

$$\begin{aligned} & \sup_{M^{(n)}, M^{(m)}} \mathcal{I}_{n+m}(\pi^{(n)} \times \pi^{(m)}, M^{(n)} \otimes M^{(m)}) = \\ & = \sup_{M^{(n)}} \mathcal{I}_n(\pi^{(n)}, M^{(n)}) + \sup_{M^{(m)}} \mathcal{I}_m(\pi^{(m)}, M^{(m)}), \end{aligned}$$

откуда следует, что последовательность $\{C_n\}$ субаддитивна, $C_n + C_m \leq C_{n+m}$, а следовательно, существует

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n/n = \sup_n C_n/n.$$

Основываясь на классической теореме кодирования, можно доказать, что при $R < C$ существуют такие кодирования и декодирования объема $N = \lceil 2^{nR} \rceil$, что средняя ошибка

$$\bar{\lambda}(n, N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \text{Tr } S_{v_j} M_j)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, тогда как при $R > C$ она не стремится к нулю при любом выборе кодирования и декодирования [42]. Это дает основание назвать величину C пропускной способностью данного квантового канала связи.

Следует отметить, что для соответствующего классического канала «без памяти» последовательность $\{C_n\}$ аддитивна и поэтому $C \equiv C_n/n = C_1$. Оказывается, что в квантовом случае возможно строгое неравенство

$$C_1 < C$$

1. Это утверждение было высказано Л. Б. Левитиным в 1969 г. что соответствует парадоксальному с классической точки зрения наличию «памяти» в произведении независимых каналов. Измерение в таком произведении может нести больше информации, чем сумма информации, получаемых в каждой компоненте. Этот факт, разумеется, обусловлен необычными статистическими свойствами составных квантовых систем и является еще одним проявлением квантовой целостности.

Доказательство этого факта, данное в работе А. С. Холево [42], использует следующую оценку пропускной способности C для канала с чистыми состояниями $S_\theta = |\psi_\theta\rangle \langle \psi_\theta|$:

$$C \geq \tilde{C} \equiv -\ln \min_{\pi} \left[\sum_{j,k=1}^m \pi_j \pi_k |\langle \psi_j | \psi_k \rangle|^2 \right]$$

в основе которой лежит неравенство (2.9) для средней ошибки и модификация метода случайных кодов, предложенная Р. Л. Стратоновичем и А. Г. Ванцяном в [36]. Для двоичного канала ($m = 2$)

$$\tilde{C} = 1 - \ln(1 + \varepsilon^2) > 1 - \varepsilon^2 / \ln 2,$$

где $\varepsilon = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$. В случае «почти ортогональных состояний»

$$C_1 \leq 1 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \ln \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2 \ln \varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0$$

откуда следует (2.13) для достаточно малых ε .

В этой области остается ряд трудных нерешенных вопросов [98]. Определенная формулой (2.12) пропускная способность не вычислена в точном виде даже для двоичного канала. Ввиду серьезных аналитических трудностей, представляют большой интерес всевозможные оценки и приближенные результаты (см. Бенджбаллах и Чарбит [67], В. П. Белавкин [63], Ингарден [110], Линдبلاد [121], Чемберс [74]). В общем случае $C \leq \bar{C}$, однако неизвестно, достигается ли здесь равенство для непостоянных операторов плотности S_θ .

2.4. Общая формулировка. Как и в классической теории статистических решений [50], задается множество значений Θ неизвестного параметра θ , множество \mathcal{X} решений x (часто $\mathcal{X} = \Theta$) и функция отклонения $W_\theta(x)$, определяющая качество решения x при данном значении параметра θ . Множество \mathcal{X} измеримо (обычно стандартное) пространство и $W_\theta(x)$ ограничена снизу и измерима по x при фиксированном $\theta \in \Theta$.

Каждому значению θ соответствует оператор плотности S_θ в гильбертовом пространстве рассматриваемой квантовой системы, а решающее правило задается разложением единицы $\mathbf{M} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ в \mathcal{H} . Ортогональные разложения единицы описывают детерминированные решающие правила. При данном значении параметра θ и данном решающем правиле \mathbf{M} решение выбирается в соответствии с распределением вероятностей

$$\mu_\theta^M(B) = \text{Tr } S_\theta M(B); B \in \mathcal{B}(\mathcal{Q}).$$

Среднее отклонение, определяемое формулой

$$\mathcal{R}_\theta\{\mathbf{M}\} = \int_{\mathcal{Q}} W_\theta(x) \mu_\theta^M(dx)$$

является для каждого $\theta \in \Theta$ аффинным функционалом на выпуклом множестве решающих правил $\mathfrak{R}(\mathcal{Q})$.

Решающее правило называется байесовским, если оно минимизирует байесовский риск

$$\mathcal{R}_\pi\{\mathbf{M}\} = \int_{\Theta} \mathcal{R}_\theta\{\mathbf{M}\} \pi(d\theta)$$

для данного априорного распределения π на Θ , и минимаксный, если оно минимизирует максимальное среднее отклонение $\max_\theta \mathcal{R}_\theta\{\mathbf{M}\}$. Как классическая, так и квантовая теории статистических решений включаются в общую схему, в которой состояния описываются точками произвольного выпуклого множества \mathcal{S} , причем значительная часть результатов классической теории Вальда переносится на эту схему, достигая естественных границ общности (А. С. Холево [41]). При минимальных требованиях на функцию отклонений установлены общие условия существования байесовского (Озава [133]) и минимаксного решающих правил, полнота класса байесовских решающих правил (Н. А. Богомолов [8]), аналог теоремы Ханта-Стейна [43], [8]. Обобщения понятия достаточности изучали Умегаки [158], А. С. Холево [41], Петц [139]. В силу ограниченности понятия условного ожидания, в квантовой теории статистических решений достаточность играет гораздо меньшую роль, чем в классической, зато на первый план выходят свойства инвариантности относительно подходящих групп симметрий (см. 3).

На основе соответствующего аппарата интегрирования в [41] получены необходимые и достаточные условия оптимальности и соотношение двойственности в байесовской задаче с произвольными Θ, \mathcal{X} , обобщающие теорему из п. 2.2. Эти условия позволяют, в частности; дать исчерпывающее решение многомерной байесовской задачи оценивания среднего значения гауссовских состояний (В. П. Белавкин, Б. А. Гришанин [5], А. С. Холево [41]), которое иллюстрируется здесь одним примером.

В задаче оценивания $\Theta = \mathcal{Q}$ является конечномерным многообразием, в частности, областью в \mathbf{R}^n . В этом случае детерминированное решающее правило может быть задано набором совместимых вещественных наблюдаемых X_1, \dots, X_n в \mathcal{H} . Согласно п. 1.2, произвольное решающее правило задается набором совместимых наблюдаемых X_1, \dots, X_n в расширении \mathcal{H} вида $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, где \mathcal{H}_0 - вспомогательное гильбертово пространство с оператором плотности S_0 . При таком способе задания решающее правило называется оценкой многомерного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. В квантовой задаче оценивания, в отличие от классической, байесовские оценки могут оказаться существенно недетерминированными.

Пр и м е р. Пусть $\{S_{\alpha, \beta}; (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}$ - семейство гауссовских состояний (см. п. 1.2.4) с характеристической функцией

где P, Q - канонические наблюдаемые, $\sigma^2 \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим байесовскую задачу оценивания параметра $\theta = (\alpha, \beta)$ с функцией отклонения

$$W_{\alpha, \beta}(\alpha', \beta') = g_1(\alpha - \alpha')^2 + g_2(\beta - \beta')^2$$

и гауссовским априорным распределением вероятностей с плотностью $(2\pi)^{-1} \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right)$. Решение этой задачи качественно зависит от величины g_1/g_2 . Если $g_1/g_2 \leq (2s^2)^{-2}$ или $g_1/g_2 \geq (2s^2)^2$, где $s^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2$, то байесовские оценки детерминированы, т. е. задаются парой перестановочных самосопряженных операторов A, B в \mathcal{C} . В первом случае $A = \left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2 P, B = 0$, а во втором $A = 0, B = \left(\frac{\sigma_0}{s}\right)^2 Q$. Если же $(2s^2)^{-2} \leq g_1/g_2 \leq (2s^2)^2$, то оценки задаются перестановочными операторами

$$A = k_1(P \otimes I_0) + k_2(I \otimes P_0), B = k_2(Q \otimes I) - k_1(I \otimes Q_0)$$

в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ (ср. (1.7)), где k_1, k_2 -коэффициенты, нелинейно зависящие от s^2, g_1, g_2 , а оператор плотности S_0 в \mathcal{H}_0 гауссовский и имеет характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \text{Tr } S_0 \exp[i(P_0 x + Q_0 y)] &= \\ &= \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \frac{k_1}{k_2} x^2 + \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \frac{k_2}{k_1} y^2\right)\right] \end{aligned}$$

Соответствующее разложение единицы в \mathcal{H} отличается от (1.7) линейной заменой переменных. В отличие от аналогичной классической задачи, зависимость байесовского риска от весов g_1, g_2 также имеет существенно нелинейный характер.

2.5. Квантовые неравенства Рао-Крамера. Рассмотрим задачу оценивания в семействе состояний $\{S_\theta\}$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathbf{R}^k$. Решающее правило **М** назовем несмещенным, если для всех $\theta \in \Theta$

$$\int \dots \int x_j \mu_\theta^M(dx_1 \dots dx_k) = \theta_j; \quad j = 1, \dots, k.$$

В предположении конечности вторых моментов определена матрица ковариации

$$\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\} = \left[\int \dots \int (x_i - \theta_i)(x_j - \theta_j) \mu_\theta^M(dx_1 \dots dx_k)\right]; i, j = 1, \dots, k.$$

В классической статистике хорошо известно неравенство Рао-Крамера, ограничивающее снизу матрицу ковариации несмещенных оценок. Входящая в эту

границу информационная матрица Фишера однозначно определяется метрической геометрией симплекса «классических состояний», т. е. распределений вероятностей на пространстве элементарных событий Ω [50]. В квантовой статистике имеется много неэквивалентных неравенств типа Рао-Крамера, что связано с существенно более сложной геометрией множества состояний.

Поскольку неравенство Рао-Крамера имеет локальный характер, достаточно предполагать, что семейство состояний определено в окрестности фиксированной точки θ . Введем вещественное гильбертово пространство $L^2(S_\theta)$, определяемое как пополнение множества $\mathfrak{B}_h(\mathcal{C})$ ограниченных вещественных наблюдаемых относительно скалярного произведения

$$\langle X, Y \rangle_\theta = \text{Re Tr } Y S_\theta X \equiv \text{Tr } S_\theta X \circ Y,$$

где $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ - йорданово произведение X, Y . Предположим, что

1. семейство $\{S_\theta\}$ сильно дифференцируемо в точке θ как функция со значениями в $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$;
2. линейные функционалы $X \rightarrow \text{Tr } \frac{dS_\theta}{d\theta} X$ непрерывны относительно скалярного произведения (2.15).

При этих условиях по теореме Ф. Рисса существуют симметризованные логарифмические производные $L_\theta^j \in L^2(S_\theta)$, определяемые из условий

$$\text{Tr } \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} X = \langle L_\theta^j, X \rangle, \quad \overline{X} \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$$

Формально,

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_{\theta \circ L_\theta^j}$$

Тогда для любого решающего правила \mathbf{M} , имеющего конечные вторые моменты и удовлетворяющего условию локальной несмещенности

$$\int \dots \int x_i \frac{\partial \mu_\theta^M}{\partial \theta_j} (dx_1 \dots dx_k) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, k$$

где $\frac{\partial \mu_\theta^M}{\partial \theta_j}(B) = \text{Tr } \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} M(B)$, имеет место неравенство

$$\mathbf{D}_e\{\mathbf{M}\} \geq \mathbf{J}_\theta^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{J}_\theta = [\langle L_\theta^i, L_\theta^j \rangle_\theta]_{i,j=1,\dots,k}$ - вещественная симметричная матрица - аналог информационной матрицы Фишера для симметризованной логарифмической производной.

С другой стороны, введем комплексные гильбертовы пространства $L_\pm^2(S_\theta)$ как пополнения $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ относительно скалярных произведений

$$\langle X, Y \rangle_\theta^+ = \text{Tr } X^* S_\theta Y, \quad \langle X, Y \rangle_\theta^- = \text{Tr } Y S_\theta X^*$$

и определим правую и левую логарифмические производные $L_\theta^{\pm j}$ как решения уравнений

$$\text{Tr } \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} X = \langle L_\theta^{\pm j}, X \rangle_\theta^\pm, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

(существующие при тех же условиях 1), 2)). Формально

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = S_\theta L_\theta^{+j} = L_\theta^{-j} S_\theta$$

Тогда, при условии (2.18)

$$\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\} \geq (\mathbf{J}_\theta^\pm)^{-1}$$

где $\mathbf{J}_\theta^\pm = \left[\langle L_\theta^{\pm i}, L_\theta^{\pm j} \rangle_\theta \right]_{i,j=1,\dots,k}$ - комплексные эрмитовы матрицы, и (2.20) рассматривается как неравенство для эрмитовых матриц.

Формальное определение (2.17), симметризованной логарифмической производной и неравенство (2.19) принадлежит Хелстрому, а неравенство (2.20) - Юну и Лэксу (см. [37, гл. VIII]). Другие неравенства были получены Р. Л. Стратоновичем [155]. Математически корректные определения логарифмических производных и вывод соответствующих неравенств дан в книге [43, гл. VI]. Пространства L^2 , ассоциированные с квантовым состоянием, полезны и в других вопросах. Элементы этих пространств могут быть интерпретированы как (классы эквивалентности) неограниченных операторов в \mathcal{C} ([43, гл. II]).

Неравенства (2.19), (2.20) дают существенно различные, несравнимые границы для $\mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\}$. В случае одномерного параметра ($k = 1$) всегда $J_\theta \leq J_\theta^\pm$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $[S_\theta, \frac{dS_\theta}{d\theta}] = 0$. В этом случае неравенство, основанное на симметризованной логарифмической производной, оказывается наилучшим [37, гл. VIII]. С другой стороны; для двухпараметрического семейства гауссовских состояний (2.14) неравенство (2.19) дает $\text{Tr } \mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\} \geq 2\sigma^2$, тогда как из (2.20) вытекает $\text{Tr } \mathbf{D}_\theta\{\mathbf{M}\} \geq 2\sigma^2 + 1$. Последняя граница достигается для несмещенных оценок, определяемых операторами типа (1.7). Неравенство (2.20), основанное на правой (или левой) логарифмической производной, вообще лучше приспособлено к задачам оценивания, в которых параметр допускает естественную комплексификацию (в последнем примере $\theta = \alpha + i\beta$).

Выражение

$$d(S_1, S_2) = \sqrt{2 \left(1 - \left\| \sqrt{S_1} \sqrt{S_2} \right\|_1 \right)}$$

определяет метрику в множестве операторов плотности $\subseteq (\mathcal{H})$. В более широком контексте алгебр фон Неймана эта метрика, известная как расстояние Бюреса, подробно изучалась Араки, Ульманом и др. (см. обзор Раджио в [141]). Если $\{S_\theta\}$ -семейство, удовлетворяющее условиям 1), 2), то при $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$d(S_\theta, S_{\theta+\Delta\theta})^2 \approx \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^k \langle L_\theta^i, L_\theta^j \rangle_\theta \Delta\theta_i \Delta\theta_j$$

Таким образом, расстояние Бюреса эквивалентно в малом римановой метрике, определяемой квантовым аналогом информационной матрицы Фишера. Е. А. Морозова и И. Н. Ченцов в [35] описали всевозможные римановы метрики в $\subseteq (\mathcal{G})$ ($\dim \mathcal{H} < \infty$), монотонно инвариантные в категории марков-

ских морфизмов (аффинных отображений $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в себя). Минимальной в этом классе является риманова метрика в правой части (2.21).

5.2.3 3. Ковариантные наблюдаемые

3.1. Формулировка проблемы.

Пусть G - локально компактная группа, действующая непрерывно на транзитивном G -пространстве \mathcal{X} и $\mathbf{V} : g \rightarrow V_g, g \in G$, - непрерывное (проективное) унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Разложение единицы $M : B \rightarrow M(B), B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ в \mathcal{H} ковариантно по отношению к \mathbf{V} , если

$$V_g * M(B) V_g = M(g^{-1}B); g \in G, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

В квантовой механике \mathcal{L} является пространством значений физического параметра (обобщенной координаты) x , обладающего группой симметрий (движений) G . Фиксируем $x_0 \in \mathcal{X}$ и оператор плотности S_0 . Соотношение

$$S_x = V_g S_0 V_g^*, \quad \text{где} \quad x = g x_0$$

описывает преобразование квантового состояния, отвечающее движению g . Рассмотрим обобщенную наблюдаемую M , удовлетворяющую условию ковариантности (3.1), и пусть $\mu_{x_0}^M(B) = \text{Tr } S_0 M(B)$ - ее распределение вероятностей в состоянии S_0 . Тогда условие (3.1) равносильно следующему:

$$\mu_{g x_0}^M(gB) = \mu_{x_0}^M(B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), g \in G$$

для любого состояния S_0 . Это означает, что статистика наблюдаемой M преобразуется согласно движениям g в пространстве обобщенной координаты \mathcal{X} (см. пример в п. 1.2.3). Условие ковариантности, таким образом, дает правило для установления соответствия между классическими параметрами и квантовыми наблюдаемыми.

Такое соответствие является, конечно, далеко не однозначным. Среди множества ковариантных обобщенных наблюдаемых основной интерес представляют те, которые описывают предельно точные измерения соответствующего параметра. Рассмотрим задачу оценивания параметра $x \in \mathcal{X}$ в семействе состояний (3.2). Пусть на множестве $\mathcal{X} = \Theta$ задана функция отклонения $W_\theta(x)$, такая что $W_{g\theta}(gx) = W_\theta(x)$. Среднее отклонение

$$\mathcal{R}_\theta\{M\} = \int_{\mathcal{X}} W_\theta(x) \mu_\theta^M(dx)$$

при условии (3.1) не зависит от θ . Минимум аффинного функционала (3.4) достигается в крайней точке выпуклого множества $\mathfrak{M}^{G,V}(\mathcal{P})$ ковариантных обобщенных наблюдаемых. Обозначим $\mathfrak{R}_0^{G,V}(\mathcal{Q})$ подмножество ковариантных наблюдаемых, задаваемых ортогональными разложениями единицы. Проблема соответствия в математическом плане сводится к изучению запаса элементов и структуры множеств $\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{L}), \mathfrak{R}^{G,V}(\mathcal{X})$. В общем случае

$$\mathfrak{M}_0^{G,v}(\mathcal{X}) \subsetneq \text{Extr } \mathfrak{M}^{G,v}(\mathcal{X})$$

Целый ряд парадоксов в стандартной формулировке квантовой механики обусловлен тем, что множество $\mathfrak{M}_0^{G,V}(\mathcal{X})$ оказывается пустым. С другой стороны, $\text{Extr } \mathfrak{R}^{G,V}(\mathcal{X})$ имеет значительно более обширный запас элементов, среди которых и находится обобщенная квантовая наблюдаемая, отвечающая данному классическому параметру.

3.2. Структура ковариантного разложения единицы. При специальных предположениях относительно G, \mathcal{X}, V можно дать прямое решение уравнения ковариантности (3.1), проливающее свет и на общий случай.

Пусть G - унимодулярна, а $G_0 = G/\mathcal{X}$ компактна, тогда на G существует σ -конечная инвариантная мера μ , а на \mathcal{X} конечная инвариантная мера v , такая что $v(B) = \mu(\lambda^{-1}(B))$, где $\lambda : g \rightarrow gx_0$.

Т е о р е м а ([78], [43]). Пусть \mathbf{V} - конечномерное представление группы G . Для любого ковариантного разложения единицы M найдется положительный оператор P_0 , такой что $[P_0, V_g] = 0, g \in G_0$ и

$$M(B) = \int_B P(x) v(dx)$$

где плотность $P(x)$ определяется соотношением

$$P(gx_0) = V_g P_0 V_g^*$$

Дока з а т е л и с т в о. Из тождества

$$\int_G \text{Tr } V_g S V_g^* M(B) \mu(dg) = v(B), \quad S \in \mathcal{H}$$

(см. [43, гл. IV]), полагая $S = (\dim \mathcal{H})^{-1} I$, получаем $\text{Tr } M(B) = (\dim \mathcal{H})^{-1} v(B)$. Поэтому существует плотность $P(x)$ со значениями в $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$. Соотношение (3.5) вытекает из условия ковариантности.

Ограничение на P_0 , вытекающее из условия нормировки $M(\mathcal{X}) = I$, иногда удается выразить явно. Очень просто устроено множество $\mathfrak{R}^{G,V}(\mathcal{X})$ в случае, когда V есть неприводимое квадратично-интегрируемое представление ($\dim \mathcal{H} \leq +\infty$) унимодулярной группы $G = \mathcal{Q}$. Из соотношений ортогональности для V (см. [126]) следует, что при надлежащей нормировке μ

$$\int_G V_g S_0 V_{g\mu}^* (dg) = I$$

для любого оператора плотности S_0 . Таким образом, формула

$$M(B) = \int_B V_g S_0 V_{g\mu}^* (dg)$$

устанавливает взаимно однозначное аффинное соответствие между $\mathfrak{R}^G, V(G)$ и $\mathcal{S}(\mathcal{C})$. В частности, крайние точки множества $\mathfrak{R}^{G,V}(G)$ описываются формулой

$$M(B) = \int_B |\psi(g)\rangle \langle \psi(g)| \mu(dg)$$

где $\psi(g) = V_g \psi_0$, а ψ_0 - произвольный единичный вектор в \mathcal{H} . Семейство $\{\psi(g); g \in G\}$ образует переполненную систему, называемую в физике обобщенными когерентными состояниями (обычные когерентные состояния отвечают неприводимому представлению ККС и специальному выбору вектора ψ_0 , см. п. 1.2.4).

3.3. Обобщенные системы импримитивности. Если M в соотношении (3.1) ортогональное разложение единицы, то пара (V, M) называется системой импримитивности. Это понятие, введенное Дж. Макки (см. [126]), играет важную роль в теории представлений групп: представление V продолжается до системы импримитивности тогда и только тогда, когда оно индуцировано с подгруппы G/\mathcal{X} . Если же M - произвольное ковариантное разложение единицы, то (V, M) называется

обобщенной системой импримитивности. Имеет место следующее обобщение теоремы М. А. Наймарка о расширении.

Те о р е м а ([72], [148]). Пусть G - локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $(\mathcal{X}, \mathcal{R}(\mathcal{D}))$ - стандартное измеримое пространство. Пусть (\mathbf{V}, \mathbf{M}) - обобщенная система импримитивности в \mathcal{H} , тогда существуют изометрическое вложение W пространства \mathcal{C} в некоторое гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ и система импримитивности $(\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{E}})$ в \mathcal{H} , такие что

$$V_g = W^* \widetilde{V}_g W; \quad M(B) = W^* E(B) W$$

Если множество $\{E(B)W\psi \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \psi \in \mathcal{H}\}$ плотно в $\widetilde{\mathcal{H}}$, то $(\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{E}})$ унитарно эквивалентно системе импримитивности, продолжающей представление в $\mathcal{H} = L^2_{\mathcal{F}}(\mathcal{X}, \mathfrak{C})$, индуцированное с подгруппы \mathbf{G}/\mathcal{Q}^1 .

Для иллюстрации рассмотрим пару (\mathbf{V}, \mathbf{M}) , где \mathbf{V} - неприводимое квадратично интегрируемое представление, \mathbf{M} дается формулой (3.6). Искомое расширение в $\mathcal{C} = L^2(G, \mu)$ является модификацией конструкции для произвольной переполненной системы (см. п. 2.1.1), именно

$$\widetilde{V}_g f(x) = f(gx); \quad E(B)f(x) = 1_B(x)f(x),$$

причем вложение W действует по формуле $W\psi(g) = \langle \psi(g) \mid \psi \rangle$. Подпространство $W\mathcal{H} \subset L^2(G, \mu)$ связано с воспроизводящим ядром $\mathcal{K}(g, g') = \langle \psi(g) \mid \psi(g') \rangle = \langle \psi_0 \mid V(g^{-1}g')\psi_0 \rangle$. Связь между обобщенными когерентными состояниями и индуцированными представлениями подробно исследовал Скутару [148]. В общем случае Каттанео [73] показал, что \mathbf{M} имеет ограниченную плотность $P(x)$ относительно квазинвариантной меры μ на \mathcal{X} тогда и только тогда, когда подпространство $W\mathcal{H} \subset L^2_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром (со значениями в $\mathcal{Y}(\mathcal{K})$).

3.4. Случай абелевой группы. Случай, когда $G = \mathcal{X}$ - абелева локально компактная группа, представляет интерес, в частности, в связи с проблемой канонической сопряженности в квантовой механике. Полное описание ковариантных разложений единицы для произвольного (непрерывного) представления \mathbf{V} дается в терминах преобразования Фурье; при этом значения «плотности» $P(x)$ оказываются, вообще говоря, неограниченны-

1. $L^2\mathcal{K}(\mathcal{L}, \mu)$ обозначает гильбертово пространство функций на \mathcal{L} со значениями в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{K} , квадратично интегрируемых по мере μ . ми положительно-определенными формами. Излагаемые далее результаты могут быть получены как прямыми методами гармонического анализа, так и с помощью теоремы о расширении из предыдущего пункта (см. статью А. С. Холево в [141]). Обобщение на неабелевы группы типа I дано в работе [46].

Пусть \hat{G} -двойственная группа, $d\hat{g}$ - мера Хадра в \hat{G} .

Предложение 1. $\mathfrak{M}^{\sigma, \mathbf{V}}(G) \neq \emptyset$ тогда и только тогда,

когда спектр \mathbf{V} абсолютно непрерывен относительно $d\hat{g}$.

Если это выполнено, то \mathbf{V} разлагается в прямой интеграл факторных представлений, именно

$$\mathcal{H} = \int_{\Lambda} \oplus \mathcal{H}(\lambda) d\lambda$$

где Λ -измеримое подмножество \hat{G} , $\{\mathcal{G}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ -измеримое семейство гильбертовых пространств с $\dim \mathcal{H}(\lambda) > 0$ для п. в. $\lambda \in \Lambda$, причем

$$V_g \psi = \int_{\Lambda} \oplus \overline{\lambda(g)} \psi(\lambda) d\lambda, \text{ если } \psi = \int_{\Lambda} \oplus \psi(-\lambda) d\lambda.$$

Здесь $\lambda(g)$ — значение характера $\lambda \in \hat{G}$ на элементе $g \in G$. Следующее утверждение вытекает из теоремы импримитивности Макки, которая обобщает теорему единственности Стоуна фон Неймана (п. 1.2.3).

Предложение 2. $\mathfrak{m}_0^{G,V}(G) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \hat{O}$ с точностью до множества нулевой меры и $\dim \mathcal{H}(\lambda) = \text{const}$ для п. в. $\lambda \in \hat{G}$.

Ядром будем называть семейство $\{P(\lambda, \lambda'); \lambda, \lambda' \in \Lambda\}$, где $P(\lambda, \lambda')$ — сжимающие операторы из $\mathcal{H}(\lambda')$ в $\mathcal{H}(\lambda)$, причем комплексная функция $\langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda') \psi(\lambda') \rangle_{\lambda}$ измерима по мере $d\lambda \times d\lambda'$ для любых $\varphi = \int \oplus \varphi(\lambda) d\lambda, \psi = \int \oplus \psi(\lambda) d\lambda \in \mathcal{H}(\langle \cdot | \cdot \rangle_{\lambda})$ обозначает скалярное произведение в $\mathcal{H}(\lambda)$. Ядро положительно определено, если

$$\int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda') \varphi(\lambda') \rangle_{\lambda} d\lambda d\lambda' \geq 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{C}_1 = \left\{ \varphi : \int_{\Lambda} \|\varphi(\lambda)\|_{\lambda} d\lambda < \infty \right\}$. Для таких ядер однозначно с точностью до эквивалентности определяется диагональное значение $P(\lambda, \lambda)$ (см. [141]). Обозначим $1_B(\lambda) = \int_B \lambda(g) dg$, где dg -мера Хаара в G .

Т е о р е м а. Соотношение

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \langle \varphi(\lambda) | P(\lambda, \lambda') \varphi(\lambda') \rangle_{\lambda} \hat{1}_B(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda',$$

где B пробегает компактные подмножества в G , $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между ковариантными разложениями единицы в \mathcal{H} и классами эквивалентности положительно определенных ядер $\{P(\lambda, \lambda')\}$, таких что $P(\lambda, \lambda) = I_{\lambda}$ (единичный оператор в $\mathcal{H}(\lambda)$).

Эта теорема сводит вопрос об описании множества $\text{Extr } \mathfrak{R}^{G,V}(G)$ к нахождению крайних точек выпуклого множества положительно определенных ядер $\{P(\lambda, \lambda')\}$, удовлетворяющих условию $P(\lambda, \lambda) = I_{\lambda}$. В полном объеме эта задача не решена даже для конечного Λ . Можно, однако, выделить подкласс множества $\text{Extr } \mathfrak{R}^{G,V}(G)$, существенный для квантовомеханических приложений.

Для простоты ограничимся далее случаем, когда $\dim \mathcal{H}(\lambda) = \text{const}$, $\lambda \in \Lambda$. Обозначим $\mathfrak{R}_c^{G,v}(G)$ класс ковариантных разложений единицы, ядра которых удовлетворяют соотношению

$$P(\lambda, \lambda') P(\lambda', \lambda'') = P(\lambda, \lambda''); \lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$$

Если $\Lambda = G$, то этот класс совпадает с $\mathfrak{M}_0^{G,v}(G)$, с другой стороны, $\mathfrak{M}_c^{G,v}(G) \subset \text{Extr } \mathfrak{M}^{G,v}(G)$, причем совпадение имеет место только, если Λ состоит из двух точек. Все элементы $\mathfrak{M}_c^{G,v}(G)$ получаются друг из друга калибровочными преобразованиями

$$M'(B) = U^* M(B) U$$

где $U = \int_{\Lambda} \oplus U(\lambda) d\lambda$ — разложимый унитарный оператор в $\mathcal{H} = \int_{\Lambda} \oplus \mathcal{H}(\lambda) d\lambda$.

Если реализовать \mathcal{H} как $L^2_{\mathcal{H}}(\Lambda, d\lambda)$, где $\mathcal{H}(\lambda) \equiv \mathcal{H}, \lambda \in \Lambda$, то в классе $\mathfrak{R}_c^{G,v}(G)$ выделяется разложение единицы M_c , определяемое ядром $P(\lambda, \lambda') \equiv I_{\mathcal{H}}$ (единичный оператор в \mathcal{H}^2), для которого

$$\langle \psi | M_c(B) \varphi \rangle = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \langle \psi(\lambda) | \varphi(\lambda') \rangle \mathcal{K}^{\hat{1}_B}(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda'$$

Всякое $M \in \mathfrak{R}_c^{G,v}(G)$ имеет ядро вида $U(\lambda)^* U(\lambda')$, где $\{U(\lambda)\}$ -измеримое семейство унитарных операторов в \mathcal{H} .

3.5. Каноническая сопряженность в квантовой механике. Пусть x -одномерный параметр, так что $G = \mathcal{D}$ является вещественной прямой \mathbf{R} (случай параметра сдвига), или единичной окружностью \mathbf{T} (случай параметра поворота), и пусть $x \rightarrow V_x = e^{-ixA}$ — унитарное представление группы G в \mathcal{H} . Спектр Λ оператора A содержится в двойственной группе \hat{G} , которая совпадает с \mathbf{R} в случае $G = \mathbf{R}$ и с множеством целых чисел \mathbf{Z} в случае $G = \mathbf{T}$.

Условие ковариантности обобщенной наблюдаемой \mathbf{M} имеет вид

$$V_x^* M(B) V_x = M(B - x); \quad B \in \mathcal{B}(G), x \in G$$

где $B - x = \{y : y + x \in B\}$, причем в случае $G = \mathbf{T}$ имеется в виду сложение по модулю 2π . Вводя операторы

$$U_y = \int_G e^{iyx} M(dx), \quad y \in \hat{G}$$

получаем, что (3.9) равносильно соотношению Вейля (см. п. 1.2.3)

$$U_y V_x = e^{ixy} V_x U_y; \quad x \in G, y \in \hat{G}$$

в котором, однако, операторы U_y , вообще говоря, неунитарны. В этом смысле обобщенная наблюдаемая \mathbf{M} является канонически сопряженной к наблюдаемой A .

Для обобщенной канонической пары (A, \mathbf{M}) имеет место соотношение неопределенностей [100]

$$\Delta_S^M(y) \cdot \mathbf{D}_S(A) \geq 1/4; \quad y \in \hat{G}$$

где $\Delta_S^M(y) = y^{-2} \{ |\text{Tr } S U_y|^{-2} - 1 \}$, $y \neq 0$, есть некоторая функциональная мера неопределенности ковариантной обобщенной наблюдаемой M в состоянии S - (см. [43, & IV.7]). Если $G = \mathbf{R}$ и \mathbf{M} имеет конечную дисперсию $\mathbf{D}_S(\mathbf{M})$, то $\lim_{y \rightarrow 0} \Delta_S^M(y) = \mathbf{D}_S(\mathbf{M})$, так что из (3.11) следует обобщение соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\mathbf{D}_S(\mathbf{M}) \mathbf{D}_S(A) \geq 1/4$$

Для параметра поворота ($G = \mathbf{T}$) дисперсия не является адекватной мерой неопределенности, и неравенство (3.11) следует рассматривать как окончательное. Различные формы соотношения неопределенностей для угловых переменных обсуждались в обзорах [19], [17]. Следует отметить, что обобщенная наблюдаемая угла поворота существует всегда, поскольку условия предложения 1 из предыдущего пункта выполняются автоматически ($\hat{G} = \mathbf{Z}$). С другой стороны, условия предложения 2 не могут быть выполнены, если $\dim \mathcal{H} < \infty$ (как для систем с конечным спином), и в этих случаях обычной наблюдаемой угла поворота не существует.

Наибольший интерес представляют ковариантные обобщенные наблюдаемые, имеющие минимальную неопределенность.

Теорема ([100]). Пусть $S = |\psi\rangle\langle\psi|$ - чистое состояние, тогда

$$\min_{M \in \mathbb{M}^{G, V(G)}} \Delta_S^M(y) = y^{-2} \left[\left(\int_{\hat{\sigma}} \|\psi(y')\| \|\psi(y' + y)\| dy' \right)^{-2} - 1 \right]$$

В частности, для $G := \mathbf{R}$

$$\min_{M \in \mathbb{N}^{\mathbf{R}, V(\mathbf{R})}} D_s(M) = \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{d}{dy} \|\psi(y)\| \right)^2 dy$$

где $\psi(y)$ - компоненты вектора ψ в представлении, диагонализующем оператор A . Минимум достигается на ковариантной наблюдаемой M^* класса $\mathfrak{R}_c^{G,v}$, которая задается ядром $P^*(y, y')$ таким, что $P^*(y, y') \psi(y') / \|\psi(y')\| = \psi(y) / \|\psi(y)\|$; $y, y' \in \Lambda$.

Величины (3.12), (3.13) дают внутреннюю меру неопределенности параметра x в состоянии S .

Таким образом, требования ковариантности и минимальной неопределенности (относительно чистых состояний) определяют канонически сопряженную обобщенную наблюдаемую однозначно с точностью до калибровочного преобразования (3.7). Следует отметить, что аналогичная степень произвола остается и в стандартной формулировке квантовой механики, поскольку в случае $\Lambda = \hat{G}$ класс $\mathfrak{P}_c^{G,V}(G)$ совпадает с классом ковариантных наблюдаемых $\mathfrak{R}_0^{G,v}(G)$.

Пример. Рассмотрим квантовую систему с положительным гамильтонианом H . Представление $t \rightarrow V_t = e^{-iHt}$ группы временных сдвигов не удовлетворяет условиям предложения 2 предыдущего пункта, поскольку $\Lambda \subset \mathbf{R}_+$. Поэтому ковариантной наблюдаемой временного сдвига не существует¹⁾. Предположим для простоты, что $\Lambda = \mathbf{R}_+$ и что спектр H однороден (т. е. имеет постоянную кратность для п. в. $\lambda \in \Lambda$). Тогда H унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в гильбертовом пространстве $\mathcal{C} = L^2_{\mathcal{H}}(\mathbf{R}_+)$ квадратично-интегрируемых функций $\psi = [\psi(\lambda)]$ на \mathbf{R}_+ со значениями в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Ковариантные обобщенные наблюдаемые класса $\mathfrak{M}_c^{\mathbf{R},V}(\mathbf{R})$ с точностью до калибровочного преобразования (3.7) эквивалентны наблюдаемой M_c , определяемой соотношением (3.8), т. е.

$$\langle \psi | M_c(B) \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}_+} \langle \psi(\lambda) | \varphi(\lambda') \rangle \mathcal{F} \int_B e^{i(\lambda' - \lambda)\tau} \frac{d\tau}{2\pi}.$$

Разложение единицы M_c является обобщенной спектральной мерой в смысле [2] максимального симметричного (но не самосо-

1. На трудности с определением наблюдаемой времени в квантовой механике указывал Паули (см. Handbuch der Physik.-1958.-5/1.-С. 60-63). (прямой) оператор

$$T = i \frac{d}{d\lambda}, \quad \mathcal{D}(T) = \{ \psi : \psi \text{ абсолютно непрерывна, } \psi(0) = 0,$$

$$\int_{\mathbf{R}_+} \left\| \frac{d}{d\lambda} \psi(\lambda) \right\|_{\mathcal{H}}^2 d\lambda < \infty \}.$$

Минимальное расширение Наймарка разложения единицы M_c в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = L^2_{\mathcal{H}}(\mathbf{R})$ дается формулой, аналогичной (3.14), с заменой \mathbf{R}_+ на \mathbf{R} , и является спектральной мерой самосопряженного оператора $i \frac{d}{d\lambda} L^2_{\mathcal{H}}(\mathbf{R})$.

3.6. Локализуемость. Пусть \mathbf{W} —унитарное представление группы, описывающей кинематику данной квантовой системы (универсальной накрывающей группы Галилея в нерелятивистском или группы Пуанкаре в релятивистском случае), в гильбертовом пространстве \mathcal{C} и пусть \mathbf{U} - ограничение \mathbf{W} на универсальную накрывающую G группы евклидовых преобразований $g : x \rightarrow Ax + b, x \in \mathbf{R}^3$. Система называется локализуемой по Вайтману, если в \mathcal{H} существует ортогональное разложение единицы \mathbf{E} на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{R}^3)$ борелевских подмножеств координатного пространства \mathbf{R}^3 , удовлетворяющее условию евклидовой ковариантности

$$U_g^* E(B) U_g = E(g^{-1}B); g \in G, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^3)$$

При этом условии для любой области $B \subset \mathbf{R}^3$ найдется вектор состояния ψ такой, что $\langle \psi | E(B) \psi \rangle = 1$, т. е. вероятность обнаружения системы в области B равна 1. Для локализуемой системы определены совместимые наблюдаемые координат

$$Q_j = \iiint x_j E(dx_1 dx_2 dx_3); j = 1, 2, 3$$

ковариантные относительно евклидовых преобразований.

Используя то обстоятельство, что (\mathbf{U}, \mathbf{E}) - система импримитивности, можно доказать, что локализуемыми по Вайтману являются все массивные частицы и релятивистские безмассовые частицы с нулевой спиральностью. Безмассовые частицы с ненулевой спиральностью (фотон, нейтрино) оказываются нелокализуемыми (Ньютон, Вигнер, 1949, Вайтман, 1962). Такой вывод не согласуется с экспериментальной локализуемостью фотона; более того, как показал Хегерфельдт, такое понятие локализуемости приводит к противоречию с требованием причинности в релятивистской динамике (см., например, [55]). Эти трудности снимаются, если в определении локализуемости допускаются произвольные разложения единицы. Неортогональное разложение единицы \mathbf{M} , описывающее локализацию фотона, было -указано, в частности, в работах Крауса (в сб. [159]), А. С. Холево [99]. Полная классификация соответствующих обобщенных систем импримитивности, при дополнительном условии ковариантности относительно преобразований подобия, включающая характеристику крайних точек, дана Кастрижяно [71]. Релятивистские безмассовые частицы оказываются п и б л л ж е н н о локализуемыми в том смысле, что $\sup_{\|\psi\|=1} \langle \psi | M(B) \psi \rangle = 1$ для любой области $B \subset \mathbf{R}^3$. Наблюдаемые координаты, определенные соотношением (3.15), являются самосопряженными, но неперестановочными операторами и поэтому не имеют совместной спектральной меры.

В ряде работ, обзор которых имеется в статьях Али, Пруговечки [55], развивалась идея стохастической локализуемости в фазовом пространстве. Результаты этих работ также указывают на то, что обобщенная статистическая модель квантовой механики дает возможность, по крайней мере, смягчить известные противоречия между релятивистской инвариантностью и нелокальностью квантовомеханического описания.

5.3 ЭВОЛЮЦИЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

5.3.1 1. Преобразования квантовых состояний и наблюдаемых

Динамика изолированной квантовой системы, описываемая однопараметрической группой унитарных операторов, обратима во времени. Эволюция открытой системы, подверженной внешним воздействиям, будь то процесс установления равновесия с окружением или взаимодействие с измерительным прибором, обнаруживает черты

необратимости. В математическом плане такие необратимые изменения описываются вполне положительными отображениями.

1.1. Вполне положительные отображения. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — некоторая C^* -алгебра операторов, т. е. подпространство $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, замкнутое относительно алгебраических операций, инволюции и перехода к пределу по операторной норме (см., например, [32], [9]). Обозначим \mathfrak{P}_n алгебру комплексных $n \times n$ -матриц. Линейное отображение Φ из \mathcal{A} в $\mathfrak{P}(\mathcal{H})$ (где \mathcal{H} гильбертово пространство) называется положительным, если из $X \in \mathcal{A}, X \geq 0$ следует $\Phi[X] \geq 0$, и вполне положительным, если для любого $n \geq 1$ отображение Φ_n C^* -алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathfrak{M}_n$ в C^* -алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathfrak{M}_n$, определяемое формулой $\Phi_n(X \otimes Y) = \Phi_n(X) \otimes Y$, является положительным. Другими словами, для любой матрицы $[X_{jk}]_{j,k=1,\dots,n}$ с элементами $X_{jh} \in \mathcal{A}$, положительно определенной в том смысле, что $\sum_{k=1}^n \langle \varphi_j | X_{jk} \varphi_k \rangle \geq 0$ для любого набора $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{H}$, матрица

$$[\Phi(X_{jk})]_{j,k=1,\dots,n} \text{ также является положительно определенной.}$$

Еще одно эквивалентное определение: для любых конечных наборов $\{X_i\} \subset \mathcal{A}$ и $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi[X_j^* X_k] \psi_k \rangle \geq 0$$

Для положительного отображения имеет место неравенство Кэдисона-Шварца

$$\Phi[X]^* \Phi[X] \leq \|\Phi\| \Phi[X^* X]$$

для всех X таких, что $X^* X = X X^*$. Если Φ вполне положительно, то это неравенство выполняется для всех X . Пример положительного, но не вполне положительного отображения — транспонирование в \mathfrak{D}_n . Если Φ положительно и \mathcal{A} , либо $\Phi(\text{Re})$ коммутативны, то Φ вполне положительно. Таким образом, свойство полной положительности проявляется лишь в некоммутативной ситуации.

Отображение $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ называется $*$ -гомоморфизмом (представлением), если оно сохраняет алгебраические операции и инволюцию.

Т е о р е м а (Стاینспринг, 1955). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — C^* -алгебра с единицей и $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ -линейное отображение. Φ вполне положительно тогда и только тогда, когда оно допускает представление

$$\Phi[\lambda] = V^* \pi[X] V$$

где V -ограниченное линейное отображение из \mathcal{H} в некоторое гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}$, π — гомоморфизм \mathcal{A} в $\mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{H}})$.

Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности минимальное представление (1.3), характеризующееся свойством: подпространство $\{\pi[\tilde{\lambda}] V \psi : X \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{K}\}$ плотно в $\tilde{\mathcal{K}}$.

Доказательство прямого утверждения представляет собой обобщение конструкции Гельфанда-Найма-Сигала (ГНС), которая соответствует случаю положительного линейного функционала на \mathcal{A} ($\dim \mathcal{H} = 1$) [32], [9]. На алгебраическом тензорном произведении $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ определяется (псевдо-) скалярное произведение, такое что

$$\langle X \otimes \varphi | Y \otimes \psi \rangle = \langle \varphi | \Phi[X^* Y] \psi \rangle_{\mathcal{H}}; \quad X, Y \in \mathcal{A}; \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Неотрицательность скалярного квадрата следует из (1.1). Пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ гильбертово пространство, получающееся в результате факторизации и пополнения $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ по этому скалярному произведению. Соотношения

$$\begin{aligned}\pi[X](Y \otimes \psi) &= XY \otimes \psi \\ V_\varphi &= I \otimes \varphi\end{aligned}$$

определяют переходом в $\tilde{\mathcal{K}}$ объекты V , л, удовлетворяющие соотношению (1.3).

З а м е ч а н и е. Если \mathcal{X} - метризуемый компакт и \mathbf{M} - разложение единицы в \mathcal{K} на σ -алгебре борелевских подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, то отображение

$$f \rightarrow \int_{\mathcal{X}} f(x) M(dx); \quad f \in C(\mathcal{Q})$$

C^* -алгебры $C(\mathcal{X})$ непрерывных комплексных функций на \mathcal{X} в $\mathcal{Y}(\mathcal{K})$ является (вполне) положительным. Теорема Стайнспринга в этом случае дает расширение Наймарка для \mathbf{M} , поскольку $*$ -гомоморфизм $C(\mathcal{X})$ задается ортогональным разложением единицы.

Всякая алгебра фон Неймана \mathcal{B} является C^* -алгеброй с единицей. Положительное отображение Φ алгебры \mathcal{B} называется нормальным, если из $X_\alpha \uparrow X$ в \mathcal{B} следует $\Phi[X_\alpha] \uparrow \Phi[X]$.

С л е д с т в и е ([117]). Всякое нормальное вполне положительное отображение $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$ имеет вид

$$\Phi[\ddot{\Lambda}] = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^* \bar{\Lambda}_n$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* V_n$ сходится сильно в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство. Если Φ нормально, то представление π в формуле (1.3) также можно считать нормальным. Известно, что всякое нормальное представление алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в пространстве $\tilde{\mathcal{K}}$ кратно единичному, т. е. $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ и $\pi[\lambda] = X \otimes I_0$, где \mathcal{H}_0 - некоторое гильбертово пространство, I_0 -единичный оператор в \mathcal{H}_0 (см., например, [78, гл. 9]). Пусть $\{e_j\}$ -ортонормированный базис в \mathcal{H}_0 , тогда $V\psi = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \psi \otimes e_n$, а соотношение (1.3) переходит в (1.4).

Обзор свойств вполне положительных отображений имеется в статье Штермера в сборнике [85]. Андо и Чой [57] рассмотрели н е л и н е й н ы е вполне положительные отображения и установили для них обобщение теоремы Стайнспринга.

1.2 Операции, динамические отображения.

Алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ как банахово пространство является сопряженным к пространству ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{E})$ (см. П. 1.1.1). Если Ψ - линейное отображение в $\mathfrak{T}(\mathcal{E})$, положительное в том смысле, что $\Psi[T] \geq 0$, если $T \geq 0$, то Ψ ограничено (см., например, [78, гл. 2]) и поэтому имеет сопряженное отображение $\Phi = \Psi^* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E})$, которое является линейным положительным нормальным отображением; более того, всякое Φ с такими свойствами является сопряженным к некоторому Ψ . Если Ψ положительно и, кроме того, $\text{Tr } \Psi[T] \leq \text{Tr } T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{E}), T \geq 0$, то Ψ называется операцией (в пространстве состояний). Это равносильно тому, что $\Phi[I] \leq I$. Отображение Φ также называется операцией (в алгебре наблюдаемых).

В квантовой статистике операции описывают изменения состояний (наблюдаемых) открытой системы в результате эволюции или макроскопического воздействия, включая отбор по какому-либо признаку (например, по результату измерения) в соответствующем статистическом ансамбле. Если S -оператор плотности исходного состояния, то число

$\text{Tr } \Psi[S]$ интерпретируется как доля отобранных представителей ансамбля, а $\Psi[S]/\text{Tr } \Psi[S]$ как оператор плотности, описывающей новое состояние отобранного ансамбля. Термин «операция» был введен в известной работе Хаага и Кастлера (1964), посвященной обоснованию квантовой теории поля. Базирующийся на понятии операции аксиоматический подход к квантовой механике был развит Дэвисом и Льюисом, Людвигом и другими авторами (см., например, [78], [125], [116], [85]).

В динамической теории особенно важны операции, переводящие состояние в состояние. Это равносильно тому, что $\text{Tr } \Psi[T] = \text{Tr } T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{C})$ или же $\Phi[I] = I$, где $\Phi = \Psi^*$. Если, кроме того, Φ - вполне положительно, то Ψ (или Φ) называется динамическим отображением¹⁾. Из теоремы Вигнера (п. 1.2.1) следует, что обратимые динамические отображения описываются формулами

$$\Psi[T] = UTU^*, \quad \Phi[X] = U^*XU$$

где U - унитарный оператор в \mathcal{C} (если U антиунитарный, то Φ не может быть линейным отображением). В общем случае динамические отображения описывают необратимые эволюции и являются некоммутативным аналогом марковских отображений в теории вероятностей. Мерой необратимости может служить относительная энтропия квантовых состояний

$$H(S_2 | S_1) = \text{Tr } S_1 (\ln S_1 - \ln S_2)$$

О свойствах относительной энтропии см. Линдблад [122], Верль. [166], Петц [139]). Важнейшим является следующее утверждение: для любого динамического отображения Ψ :

$$H(\Psi[S_2] | \Psi[S_1]) \geq H(S_2 | S_1)$$

Согласно следствию из п. 1.1, динамическое отображение допускает представление

$$\Psi[T] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n T V_n^*, \quad \Phi[X] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^* \tilde{\lambda} V_n$$

где $\sum_{n=0}^{\infty} V_n^* V_n = I$. Отсюда нетрудно получить

1. На свойство полной положительности эволюции открытой системы. было указано, в частности в работах [117], [39].

С л е д с т в и е ([123]). Отображение $\Psi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ является динамическим тогда и только тогда, когда существуют гильбертово пространство \mathcal{H}_0 , состояние S_0 в \mathcal{H}_0 и унитарный оператор U в $\mathcal{B} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}\mathcal{C}_0$, такие что

$$\Psi[S] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} U (S \otimes S_0) U^*$$

где $\text{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ - частичный след в \mathcal{H}_0 .

Таким образом, динамическое отображение расширяется до обратимой эволюции составной системы, включающей исходную открытую систему и «окружение», причем возможность такого расширения обусловлена свойством полной положительности.

1.3 Условные ожидания.

Так называются отображения $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$, являющиеся идемпотентами ($\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}$) с единичной нормой. \mathcal{E} отображает $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ на C^* -подалгебру $\mathcal{A} = \{X : X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{E}[X] = X\}$. Если \mathcal{E} нормально, то \mathcal{A} -алгебра фон Неймана. Условное ожидание согласовано с состоянием S , если $\text{Tr } S\mathcal{E}[X] = \text{Tr } SX; X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Томияма показал, что условное ожидание является положительным отображением и обладает свойством

$$\mathcal{E}(XYZ) = X\mathcal{E}(Y)Z; \quad Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \quad X, Z \in \mathcal{A},$$

которое включалось в первоначальное определение, данное Умегаки [158]. На самом деле всякое условное ожидание вполне положительно.

Общий критерий существования нормального условного ожидания в алгебрах фон Неймана дал Такесаки [157]. В случае $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ этот критерий имеет следующую формулировку. Пусть S - невырожденный оператор плотности, тогда с ним связана модулярная группа автоморфизмов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\alpha_t[X] = S^{it} X S^{-it}; \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Условное ожидание \mathcal{E} на подалгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, согласованное с состоянием S , существует тогда и только тогда, когда \mathcal{A} инвариантна относительно α_t . В частности, это выполняется, если $[S, X] = 0$ для всех $X \in \mathcal{A}$.

Пример нормального условного ожидания (усреднение по подсистеме составной системы) был дан в п. 1.3.1. Приведем другой важный пример. Пусть $\{E_n\}$ - ортогональное разложение единицы в \mathcal{H} . Тогда

$$\mathcal{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n X E_n$$

является нормальным условным ожиданием на подалгебру \mathfrak{A} операторов вида (1.5), согласованным с любым состоянием, оператор плотности которого принадлежит \mathcal{A} . Алгебру \mathfrak{A} можно описать также соотношением $\mathcal{V} = \{E_n; n = 1, 2, \dots\}'$, где \mathfrak{M}' обозначает коммутант подмножества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}(\mathcal{H})$, т. е. совокупность всех ограниченных операторов, коммутирующих с операторами из \mathfrak{M} .

Обзор результатов об условных ожиданиях в алгебрах фон Неймана имеется в статьях Чеккини в сб. [141] и Петца в сб. [143]. В них же излагается некоторое обобщение понятия условного ожидания, принадлежащее Аккарди и Чеккини.

5.3.2 2. Квантовые динамические полугруппы

2.1. Определение и примеры.

Динамическая полугруппа является некоммутативным обобщением полугруппы переходных - операторов в теории марковских случайных процессов. Возможны два эквивалентных способа задания динамической полугруппы в пространстве состояний и в алгебре наблюдаемых системы. Квантовой динамической полугруппой в пространстве состояний называется семейство динамических отображений $\{\Psi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ банахова пространства ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, такое что

1. $\Psi_t \cdot \Psi_s = \Psi_{t+s}; t, s \in \mathbf{R}_+;$
2. $\Psi_0 = \text{Id}$ (тождественное отображение);

3. $\{\Psi_t\}$ сильно непрерывна, т. е. $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Psi_t[T] - T\|_1 = 0$ для любого $T \in \mathfrak{E}(\mathcal{H})$.

Из общей теории полугрупп в банаховом пространстве (см., например, [9, гл. 3]) вытекает, что существует плотно определенный инфинитезимальный оператор

$$\mathcal{K}[T] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t[T] - T}{t}$$

Если Ψ_t непрерывна по норже, т. е. $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Psi_t - \text{Id}\| = 0$, то \mathcal{K} — всюду определенное, ограниченное отображение $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Если S_0 начальное состояние, то функция $S_t = \Psi_t[S_0]$ удовлетворяет квантовому марковскому управляющему уравнению ¹⁾

$$\frac{dS_t}{dt} = \mathcal{K}[S_t]$$

которое является некоммутативным аналогом уравнения Колмогорова-Чепмена. В физических приложениях динамические полугруппы и возникают как решения марковских управляющих уравнений.

Динамическая полугруппа в алгебре наблюдаемых — это полугруппа динамических отображений $\{\Phi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$,

$$\text{такая что } \Phi_0 = \text{Id} \text{ и } \omega^* - \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t[X] = X^* \text{ для любого } X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

1. Английский термин — master equation.

Мы будем в основном рассматривать полугруппы, непрерывные по норме, т. е. такие, что $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Phi_t - \text{Id}\| = 0$.

Пусть ${}^{t \rightarrow 0}G$ — сепарабельная локально компактная группа, $g \rightarrow V_g$ — непрерывное унитарное представление G в \mathcal{G} и $\{\mu_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ — непрерывная сверточная полугруппа вероятностных мер на G (см., например, [13]). Соотношения

$$\Psi_t[S] = \int_G V_g S V_g^* \mu_t(dg); \Phi_t[X] = \int_G V_g^* X V_g \mu_t(dg)$$

задают квантовые динамические полугруппы, соответственно, в $\mathfrak{E}(\mathcal{H})$ и в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

В частности, пусть A — эрмитов оператор в \mathcal{H} , тогда выражение

$$\Psi_t[S] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-iAx} S e^{iAx}$$

соответствующее гауссовской сверточной полугруппе на \mathbf{R} , определяет динамическую полугруппу с инфинитезимальным оператором

$$\mathcal{K}[S] = ASA - A^2 \circ S.$$

Если U — унитарный оператор, $\lambda > 0$, то

$$\Psi_t[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} U^n S U^{*n}$$

является динамической полугруппой, отвечающей пуассоновской сверточной полугруппе на \mathbf{Z} , с инфинитезимальным оператором

$$\mathcal{K}[S] = \lambda [USU^* - S]$$

Понятие динамической полугруппы было предложено Коссаковским [116] (см. также Дэвис [78]), однако без условия полной положительности, которое позднее было введено Линдбладом [123]. Многие физические примеры укладываются в общую схему квазисвободных динамических полугрупп, которые являются квантовым аналогом гауссовских марковских полугрупп. В случае ККС такие полугруппы характеризуются условием, что они переводят гауссовские состояния в гауссовские (см. п. 1.2.4). В статистической механике они описывают необратимую динамику открытых Бозе- или Ферми-систем с квадратичным взаимодействием (см. обзоры [27], [56]).

2.2. Инфинитезимальный оператор.

Требование полной положительности налагает нетривиальные ограничения на инфинитезимальный оператор полугруппы. Описание инфинитезимального оператора непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы было получено Линдбладом и, независимо в случае $\dim \mathcal{C} < \infty$, Горини, Коссаковским и Сударшаном.

Теорема ([123]). Для того чтобы ограниченное отображение \mathcal{K} пространства $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ было инфинитезимальным оператором непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{K}[S] = -i[H, S] + \sum_{j=1}^{\infty} (L_j S L_j^* - L_j^* L_j \circ S)$$

где $H, L_j \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $H = H^*$ и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ сходится сильно.

Первое слагаемое в (2.4) отвечает обратимой эволюции с гамильтонианом H , а второе задает диссипативные члены. Оператор $\sum_{j=1}^{\infty} L_j^* L_j$ связан со скоростью диссипации. Переходя к формулировке в алгебре наблюдаемых, имеем для инфинитезимального оператора $\mathcal{L} = \mathcal{K}^*$ полугруппы $\Phi_t = \Psi_t^*$

$$\mathcal{L}[X] = i[H, X] + \sum_{j=1}^{\infty} (L_j^* \dot{L}_j - L_j^* L_j \circ X)$$

В основе доказательства теоремы лежат следующие два факта [123], [84].

Предположим е. Пусть \mathcal{L} - ограниченное отображение $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя, такое что $\mathcal{L}[I] = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exp t\mathcal{L}$ вполне положительно для всех $t \in \mathbf{R}_+$;
2. \mathcal{L} вполне диссипативно, т. е. $\mathcal{L}[X^*] = \mathcal{L}[X]^*$ и

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | (\mathcal{L}[X_j^* X_k] - X_j^{**} \mathcal{L}[X_k] - \mathcal{L}[X_j]^* X_k) \psi_k \rangle \geq 0$$

для любых конечных наборов $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$, $\{X_j\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$;

3. $\mathcal{L}[X^*] = \mathcal{L}[X]^*$ и \mathcal{L} условно вполне положительно т. е. из $\sum_j X_j \psi_j = 0$ следует

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \mathcal{L}[X_j^* \ddot{X}_k] \psi_k \rangle \geq 0$$

Это утверждение родственно теореме Шенберга в теории условно положительно определенных функций (см., например, [138], а также п. 4.2.4).

Теорема а. Пусть \mathcal{L} - ограниченное отображение $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в себя, такое что $\mathcal{L}[I] = 0$. Для того чтобы \mathcal{L} было вполне диссипативным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{L}[X] = \Phi[X] + K^*X + XK$$

где Φ -вполне положительное отображение, $\mathcal{V}(\mathcal{H})$.

Соотношение (2.5) получается тогда из формулы (1.3) для нормального вполне положительного отображения.

Доказательство формулы (2.6) может быть связано с когомологиями алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Конструкция типа ГНС сопоставляет вполне диссипативному отображению \mathcal{L} линейное отображение B алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ в пространство ограниченных операторов из \mathcal{H} в \mathcal{H} (другое гильбертово пространство), так что

$$\mathcal{L}[X^*Y] - X^*\mathcal{L}[Y] - \mathcal{L}[X]^*Y = B[X]^*B[Y]$$

Более того, отображение B оказывается к о и к лом некоторого представления (*-гомоморфизма) π алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$B[XY] = \pi[X]B[Y] + B[X]Y; X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Основную трудность представляет доказательство того, что всякий коцикл тривиален, т. е. имеет вид $B[X] = \pi[X]R - RX$, где R -ограниченный оператор из \mathcal{H} в \mathcal{H} . Кристенсен и Эванс [76] обобщили этот подход и получили аналог представления (2.6) для произвольной C^* -алгебры операторов.

2.3. Свойство консервативности.

Проблема характеристики инфинитезимального оператора динамической полугруппы без требования непрерывности по норме трудна и остается открытой. Нетривиальной является и задача построения динамической полугруппы по формальному выражению типа (2.5), где H, L_j — неограниченные операторы. Дэвис [79] указал довольно общие условия, при которых с формальным выражением (2.4) ассоциируется сильно непрерывная полугруппа вполне положительных отображений $\{\Phi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$, такая что

$$\Phi_t[I] \leq I$$

и являющаяся аналогом феллеровского минимального решения в классической теории марковских процессов. Если минимальная полугруппа консервативна в том смысле, что $\Phi_t[I] = I$, то она является единственной динамической полугруппой, инфинитезимальный оператор которой является замыканием оператора (2.5). Неконсервативность, как и в классической теории, связана с возможностью «ухода на бесконечность» за конечное время.

Пример 1 ([79]). Пусть $\mathcal{H} = l^2$ - гильбертово пространство последовательностей $\{\psi_n; n \geq 0\}$ и «операторы рождения-уничтожения» a^*, a определены соотношениями $(a^*\psi)_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$, $(a\psi)_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$. Рассмотрим управляющее уравнение

$$\frac{dS_t}{dt} = LS_tL^* - L^*L_0S_t$$

где $L = a^{*2}$, $L^* = a^2$, а S_t - диагональный оператор плотности в l^2 . Диагональные элементы $p_n(t); n = 0, 1, \dots$, оператора S_t удовлетворяют уравнению чистого рождения

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(n+2)(n+1)p_n(t) \pm n(n-1)p_{n-2}(t)$$

минимальное решение которого неконсервативно, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) < 1$ при $t > 0$.

Дэвис дал достаточные условия консервативности, пригодные для класса моделей квантовой диффузии. Оригинальные общие условия консервативности, основанные на аналогиях с классической теорией марковских процессов, предложил А. М. Чеботарев в [49], [35]. Рассмотрим для простоты случай формального инфинитезимального оператора

$$\mathcal{L}[X] = L^*XL + K^*X + XK$$

где L, L^*, K, K^* - операторы, имеющие плотную общую инвариантную область определения \mathcal{D} . Предполагается, что \mathcal{D} - существенная область определения для операторов K, K^* , которые являются инфинитезимальными операторами сильно непрерывных сжимающих полугрупп в \mathcal{H} , и что $K = -\frac{1}{2}L^*L + iH$, где H - самосопряженный оператор. Условия консервативности имеют вид

$$[L, L^*] \geq -cI, i[L^*L, H] \geq -cL^*L,$$

где $c > 0$ и неравенства понимаются как неравенства для соответствующих форм, определенных на \mathcal{D} . Представление о диапазоне применимости этих условий дают два примера.

Пример 2. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$, Q -оператор умножения на x ; $P = i^{-1} \frac{d}{dx}$, $a(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим формальное выражение

$$\mathcal{L}[\tilde{X}] = Pa(Q)Xa(Q)P - Pa(Q)^2P \circ X$$

Если X -оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f(x)$, то $\mathcal{L}[X]$ есть оператор умножения на $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (a(x)^2 \frac{df}{dx})$, т. е. совпадает с инфинитезимальным оператором симметричной диффузии на коммутативной подалгебре $L^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathfrak{B}(L^2(\mathbf{R}))$.

Условия А. М. Чеботарева выполняются, если

$$\sup_x a(x)a''(x) < \infty.$$

Пример 3. В обозначениях предыдущего примера рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[X] = & \int_{-\infty}^{\infty} m(d\xi) c(Q, \xi)^* V_\xi^* X^* V_\xi c(Q, \xi) - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} m(d\xi) |c(Q, \xi)|^{2\circ} \tilde{K}, \end{aligned}$$

где $V_x = \exp(-ixP)$, m - вероятностная мера на \mathbf{R} , c -комплексная измеримая функция, такая что $x(x) \equiv \int m(d\xi) |c(x, \xi)|^2 < \infty$ для всех x . На коммутативной подалгебре $L^\infty(\mathbf{R})$ (2.8) совпадает с инфинитезимальным оператором скачкообразного марковского процесса в \mathbf{R} с интенсивностью скачков $x(x)$. Достаточные условия консервативности выполняются, если

$$\sup_x \int m(x | d\xi) [\kappa_1(x + \xi) - \kappa_i(x)] < \infty,$$

где $m(x | d\xi) = m(d\xi) |c(x, \xi)|^2 / x(x)$ - условные вероятности скачков.

Полученные в [49] условия консервативности позволяют рас. смотреть также суммы выражений типа (2.7), (2.8) и гамильтоновых членов вида $i[H, X]$ с неограниченным H .

2.4. Ковариантные эволюции.

Пусть $g \rightarrow V_g$ — представление в \mathcal{C} группы G , описывающей симметрии окружения открытой квантовой системы. Динамическая полугруппа $\{\Psi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ называется ковариантной, если

$$\Psi_t [V_g S V_g^*] = V_g \Psi_t [S] V_g^*$$

для всех $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), g \in G, t \in \mathbb{R}_+$. Структура ковариантных вполне положительных отображений рассмотрена в [149]. В конечномерном случае получена достаточно полная классификация инфинитезимальных операторов динамических полугрупп, ковариантных относительно групп пространственных симметрий [93], [1].

П р и м е р. Рассмотрим эволюцию (2.1) открытой системы со спином $1/2$ ($\dim \mathcal{H} = 2$; см. п. 1.1.6), ковариантную относительно действия группы $SO(2)$, соответствующей аксиально симметричному окружению. Представление имеет вид $\varphi \rightarrow e^{iq\sigma_3}$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$. Общий вид инфинитезимального оператора ковариантной динамической полугруппы

$$\mathcal{L}[S] = -i[H, S] + \sum_{j=-1}^1 c_j (L_j S L_j^* - L_j^* S L_j)$$

где $c_j \geq 0$, $H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_3, L_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - i\sigma_2), L_0 = \sigma_3, L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + i\sigma_2)$. Полагая $S_t = S(a_t)$, для вектора a_t имеем уравнение Блоха

$$\frac{da_t}{dt} = \begin{bmatrix} -T_{\perp}^{-1} & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -T_{\perp}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & T_{\parallel}^{-1} \end{bmatrix} a_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\infty}/T_{\parallel} \end{bmatrix}$$

где $T_{\perp}^{-1} = 2c_0 + (c_1 + c_{-1}), T_{\parallel}^{-1} = 2(c_1 + c_{-1}), c_{\infty} = 2T_{\parallel}(c_1 - c_{-1})$. Уравнение (2.10) описывает релаксацию спина в аксиально симметричном магнитном поле. Параметр $T_{\parallel}(T_{\perp})$ имеет смысл времени продольной (поперечной) релаксации. При $t \rightarrow +\infty$

$a_t \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{\infty} \end{bmatrix}$, так что S_t стремится к предельному состоянию

$$S_{\infty} = \frac{1}{2}(I + c_{\infty}\sigma_3)$$

Инфинитезимальный оператор (2.9) вполне диссипативен, что налагает нетривиальные ограничения на физические параметры эволюции. Именно, $2T_{\perp}^{-1} - T_{\parallel}^{-1} = 2c_0 \geq 0$, откуда $2T_{\parallel} \geq T_{\perp}$ [93].

В серии работ, обзор которых имеется в [83], описаны инфинитезимальные операторы инвариантных динамических полугрупп (не обязательно непрерывных по норме), действующих тождественно на алгебре инвариантных элементов.

2.5. Эргодические свойства.

Если Φ -динамическое отображение, то семейство $\{\Phi^k; k = 0, 1, \dots\}$ можно рассматривать как динамическую полугруппу с дискретным временем. Асимптотические свойства таких полугрупп при $k \rightarrow \infty$ являются нетривиальным обобщением эргодической теории для классических цепей Маркова. Свойство полной положительности используется при этом лишь постольку, поскольку оно влечет

неравенство Кэдисона-Шварца (1.2), а эргодические теоремы для средних верны для положительных отображений.

В большинстве работ в той или иной форме присутствует предположение, что Φ имеет точное нормальное инвариантное состояние, т. е. состояние с невырожденным оператором плотности S_∞ , такое, что $\text{Tr } S_\infty \Phi[X] = \text{Tr } S_\infty X$ для всех $X \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Имеет место эргодическая теорема для средних

$$w^* - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \Phi^j[\bar{X}] = \mathcal{E}_\infty[X]$$

где \mathcal{E}_∞ — условное ожидание на подалгебру \mathcal{N}_∞ инвариантных элементов Φ . В разной степени общности этот результат был получен Я. Г. Синаем, Е. А. Морозовой и Н. Н. Ченцовым, Кюммерером и другими авторами (см. обзор [27]). Соотношение (2.11) можно рассматривать как обобщение закона больших чисел. Много внимания было уделено распространению теорем типа (2.11) на неограниченные операторы и изучению некоммутативного аналога сходимости почти наверное в алгебрах фон Неймана. Подробный обзор этих результатов дан В. В. Аншелевичем и М. Ш. Гольдштейном в [34], Петцем в [141], Яйте [111]. Отображение Φ неприводимо (Дэвис, Эванс), если не существует проектора $P \neq 0, I$, такого что $\Phi[P] = P$. Последнее равенство равносильно тому, что подалгебра операторов вида PXP ; $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ инвариантна относительно Φ . Неприводимость эквивалентна единственности инвариантного состояния S_∞ и одномерности подалгебры \mathcal{N}_∞ . При этом в формуле (2.11) $\mathcal{E}_\infty[X] = (\text{Tr } S_\infty X) \cdot I$. Для неприводимости отображения Φ , записанного в виде (1.4), необходимо и достаточно, чтобы $\{V_n; n = 1, 2, \dots\}' = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A})'$. Для неприводимого отображения имеет место аналог теоремы Перрона-Фробениуса, отвечающий разложению замкнутого класса состояний цепи Маркова на подклассы (Эванс, Хег-Крон, Альбеверию; см. обзор [27]). Случай $\dim \mathcal{H} < \infty$ детально рассмотрен также в книге Т. А. Сарымсакова [31].

Пусть теперь $\{\Phi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ -квантовая динамическая полугруппа, имеющая точное нормальное инвариантное состояние S_∞ . Для нее также имеет место эргодическая теорема для средних (см. обзоры [27], [94]). Неприводимые полугруппы изучал Дэвис, Эванс, Шпон, Фриджеро (см. [78], [152]). Необходимое и достаточное условие неприводимости динамической полугруппы с инфинитезимальным оператором (2.5) состоит в том, что

$$\{H, L_j, L_j^*; j = 1, 2, \dots\}' = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

Для неприводимых квантовых динамических полугрупп с непрерывным временем имеет место существенное усиление эргодической теоремы (см. [94])

$$w^* - \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t[X] = (\text{Tr } S_\infty X) \cdot I$$

Этот факт не переносится на динамические полугруппы в произвольных алгебрах фон Неймана. Обобщения на этот случай других асимптотических свойств, спектральной теории и теоремы Перрона-Фробениуса подробно рассмотрены в обзоре Гроха [94].

Основные физические примеры эргодических динамических полугрупп относятся к классу квазисвободных полугрупп, для которых эргодичность устанавливается непосредственно (см. обзор [27]).

2.6. Расширения динамических полугрупп.

С точки зрения статистической механики закономерен вопрос — насколько по-

тальным законом обратимой эволюции для изолированной системы. В физических приложениях управляющее уравнение (2.1) получается при рассмотрении взаимодействия квантовой системы с окружением в марковском приближении (пределы слабого или сингулярного взаимодействия). Строгое обоснование такого приближения требует достаточно громоздких оценок даже для простых моделей. Имеется ряд обзоров [152], [56], [93], [27], [52], в которых эта проблема квантовой статистической механики получила всестороннее освещение, и лучшее, что здесь можно предложить - это обратиться к одному из этих обзоров.

В принципиальном плане представляет интерес также постановка обратной задачи о расширении динамической полугруппы до группы автоморфизмов, т. е. представление марковской динамики через обратимую динамику открытой системы, взаимодействующей с окружением. Возможность такого расширения обусловлена, главным образом, свойством полной положительности (Дэвис; Эванс, Льюис; см. [84]).

Т е о р е м а. Пусть $\{\Psi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ - непрерывная по норме дина-

мическая полугруппа в пространстве состояний $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$. Найдутся

гильбертово пространство \mathcal{H}_0 , состояние S_0 в \mathcal{H}_0 и сильно непрерывная группа унитарных операторов $\{U_t; t \in \mathbf{R}\}$ в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$. такие что

для всех $t \in \mathbf{R}_+$.

$$\Psi_t[S] = \text{Tr } \mathcal{H}_0 U_t (S \otimes S_0) U_t^*; S \in S(\mathcal{H})$$

В п. 5.2.2 будет приведена явная конструкция расширения, допускающая прозрачное динамико-статистическое истолкование. Следует отметить, что одна и та же динамическая полугруппа может иметь много неэквивалентных расширений (даже если требовать минимальность расширения). Дополнительный свет на структуру возможных расширений проливает понятие квантового случайного процесса. Согласно определению Аккарди, Фриджеро и Льюиса (1980), квантовый случайный процесс задается тройкой $(\mathfrak{A}, (j_t), \varphi)$, где \mathfrak{A} - C^* -алгебра, $(j_t)_{t \in \mathbf{R}}$ - семейство $*$ -гомоморфизмов некоторой фиксированной C^* -алгебры в \mathfrak{A} , φ - состояние на \mathfrak{A} . При определенных условиях регулярности квантовый случайный процесс однозначно с точностью до эквивалентности восстанавливается по корреляционным ядрам

$$\begin{aligned} w_1^t, \dots, t_n (X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n) = \\ = \varphi \left(j_{t_1} (X_1)^* \dots j_{t_n} (X_n)^* j_{t_n} (Y_n) \dots j_{t_1} (Y_1) \right) \end{aligned}$$

(некоммутативный аналог теоремы А. Н. Колмогорова о продолжении системы конечномерных распределений) (см. сборник [20]). В классическом случае \mathcal{A} и \mathfrak{B} коммутативные алгебры измеримых ограниченных функций, соответственно, на пространстве элементарных исходов Ω и на фазовом пространстве системы E , (j_t) определяется семейством случайных величин на Ω со значениями в E , а φ - функционал математического ожидания, соответствующий вероятностной мере на Ω .

С квантовым случайным процессом связываются семейства подалгебр «прошлого», «настоящего» и «будущего»

$$\mathfrak{A}_t] = \bigvee_{s \leq t} j_s(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}_t = j_t(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}_{[t} = \bigvee_{s \geq t} j_s(\mathfrak{B})$$

Процесс называется жарковским, если существует согласо-

ванное с φ семейство условных ожиданий $(\mathcal{E}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ из \mathfrak{A} на $\mathfrak{A}_{[t}$, такая что

такое что

$$\mathcal{E}_t[\mathfrak{A}_t] \subseteq \mathcal{A}_t$$

ковариантным марковским, если дополнительно существует группа *-автоморфизмов $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ алгебры \mathcal{A} , такая что $\alpha_t(\text{Re}_s) = \text{Re}_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}$, и $\alpha_t \cdot \mathcal{E}_s \cdot \alpha_{-t} = \mathcal{E}_{t+s}$, и стационарным марковским, если φ инвариантно относительно (α_t) . Для ковариантного марковского процесса соотношение

$$\Phi_t[X] = j_t^{-1} \mathcal{E}_t j_t[X]$$

при выполнении некоторых условий непрерывности определяет динамическую полугруппу в \mathcal{Y} . Обратно, всякая непрерывная по норме квантовая динамическая полугруппа $\{\Phi_t\}$ расширяется до ковариантного марковского процесса, удовлетворяющего соотношению (2.12). Если же динамическая полугруппа удовлетворяет условию детального равновесия, то она расширяется до стационарного марковского квантового случайного процесса (Горини, Фриджеро). Условие детального равновесия относительно состояния S для полугруппы $\{\Phi_t\}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ означает, что существует другая динамическая полугруппа $\{\Phi_t^+\}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такая что

$$\text{Tr } S\Phi_t + [X]Y = \text{Tr } S\Phi_t[Y]; \quad X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

с инфинитезимальным оператором \mathcal{L}^+ , удовлетворяющим соотношению

$$\mathcal{L}[X] - \mathcal{L} + [X] = 2i[H, X]$$

где $H \in \mathcal{P}_h(\mathcal{H})$ (состояние S с необходимостью оказывается стационарным для Φ_t и Φ_t^+). До сих пор отсутствует полное описание динамических полугрупп, допускающих стационарные марковские расширения.

Фриджеро и Маассен [87] указали широкий класс полугрупп, не удовлетворяющих условию детального равновесия, но допускающих расширение с помощью «квантового пуассоновского процесса». Систематическое исследование стационарных марковских расширений предпринял Кюммерер [119]. Он установил прямую связь между эргодическими свойствами динамического отображения (неприводимость, слабое, сильное перемешивание) и его минимального стационарного марковского расширения. Кюммерер и Маассен [120] показали, что квантовая динамическая полугруппа в конечномерном гильбертовом пространстве допускает стационарное марковское расширение с помощью классического случайного процесса тогда и только тогда, когда ее

инфинитезимальный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[X] = & i[H, X] + \sum_{s=1}^k (A_s X A_s - A_s^2 \circ X) + \\ & + \sum_{r=1}^l \lambda_r (U_r^* X U_r - X) \end{aligned}$$

где A_s — эрмитовы, U_r — унитарные операторы, $\lambda_r > 0$. Оператор (2.13) является суммой выражений (2.2), (2.3), соответствующих гауссовским и пуассоновским полугруппам, а расширение получается с помощью случайного блуждания на группе автоморфизмов алгебры \mathfrak{M}_n .

Неоднозначность расширения динамической полугруппы до случайного процесса связана с тем, что знание полугруппы $\{\Phi_t\}$ позволяет восстановить лишь хронологически-упорядоченные корреляционные ядра

$$w_{t_1, \dots, t_n}(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n) = \\ = \varphi_0 \left(\Phi_{t_1} \left[X_1^* \Phi_{t_2 - t_1} \left[\dots \Phi_{t_n - t_{n-1}} \left[X_n^* Y_n \right] \dots \right] Y_1 \right] \right),$$

-для которых $0 < t_1 < \dots < t_n$ (здесь $\varphi_0 = \varphi \mid \mathcal{A}_0$ - начальное состояние). В классической теории вероятностей корреляционные ядра зависят от времен t_1, \dots, t_n симметричным образом; известная конструкция Колмогорова-Даниэля однозначно сопоставляет полугруппе переходных вероятностей марковский процесс, являющийся ее минимальным расширением до группы временных сдвигов в пространстве траекторий. Определение квантового случайного процесса, основанное только на хронологически-упорядоченных ядрах, было предложено Линдбладом [124], некоммутативные обобщения конструкции Колмогорова-Даниэля рассматривались Винсент-Смитом [161], В. П. Белавкиным [3], Соважо [146].

Алипки и Мессер установили существование и единственность решения класса нелинейных кинетических уравнений, в частности, квантового уравнения Больцмана:

$$\frac{dS_t}{dt} = \text{Tr}_{(2)} W (S_t \otimes S_t) W^* - (\text{Tr} S_t) \cdot S_t$$

где W - унитарный «оператор парных столкновений» в $\mathcal{C} \otimes \mathcal{H}$, $\text{Tr}_{(2)}$ - частичный след по второму множителю в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Отвечая на вопрос, поставленный Стритером в [143], Фриджеро и Аратари построили расширение «нелинейной квантовой динамической полугруппы», определенной уравнением (2.14) по унитарной эволюции в квантовой системе, состоящей из бесконечного числа частиц с парными взаимодействиями (квантовое обобщение «карикатуры Мак-Кина» классического уравнения Больцмана). В. П. Белавкин [4] дал конструкцию квантового ветвящегося процесса, в котором одночастичная динамика описывается полугруппой нелинейных вполне положительных отображений общего вида.

5.4 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ИЗМЕРЕНИЯ

5.4.1 1. Статистика последовательных измерений

1.1. Понятие инструмента.

Рассмотрим последовательное измерение двух величин X, Y , принимающих значения, соответ-

ственно, в множествах \mathcal{X} и \mathcal{Y} , которое осуществляется над си-

стемой в состоянии S . Совместная вероятность того, что исход первого измерения x попадает в множество A , а исход второго y попадает в B (где $A \subset \mathcal{X}, B \subset \mathcal{Y}$) есть

$$\mu_S(A; B) = \mu_S(A) \mu_S(B \mid A)$$

где $\mu_S(A) = \mu_B(A; \dagger)$ - вероятность того, что $x \in A$, а $\mu_S(B \mid A)$ - соответствующая условная вероятность. Обозначим S_A состояние системы после первого измерения (оно зависит также от S , но не зависит от B). Тогда, согласно (2.1.4),

$$\mu_S(B \mid A) = \text{Tr} S_A M(B)$$

где M - разложение единицы, отвечающее величине Y . Из (1.1), (1.2) видно, что функция множеств

$$\mathcal{M}(A)[S] = \mu_S(A) S_A$$

должна быть σ -аддитивна по A . Это мотивирует следующее определение (Дэвис и Льюис, 1970).

Пусть \mathcal{X} – множество с σ -алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$. Инструментом (в пространстве состояний) со значениями в \mathcal{X} называется функция множеств \mathcal{M} , заданная на $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ и удовлетворяющая условиям:

1. $\mathcal{M}(B)$ - операция для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$;
2. $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ - динамическое отображение, т. е. $\text{Tr } \mathcal{M}(\mathcal{X})[T] = \text{Tr } T$ для всех $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{C})$;
3. если $\{B_j\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ - конечное или счетное разбиение множества $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ на попарно непересекающиеся подмножеств-; ва, то

$$\mathcal{M}(B)[T] = \sum_j \mathcal{M}(B_j)[T]; T \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$$

где ряд сходится по норме $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Постулируется, что если S - оператор плотности, описывающий состояние системы перед измерением, то вероятность события, что исход измерения попадает в множество $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, равна

$$\mu_s(B) = \text{Tr } \mathcal{A}(B)[S]$$

а состояние доли статистического ансамбля, в которой зарегистрировано это событие, дается оператором плотности

$$S_B = \mathcal{M}(B)[S] / \text{Tr } \mathcal{M}(B)[S]$$

(при условии, что $\mu_s(B) > 0$). В частности, изменение состояния всего статистического ансамбля задается динамическим отображением $S \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X})[S]$.

Переходя к сопряженным отображениям $\mathcal{P}(B) = \mathcal{M}(B)^*$, получаем формулировку в алгебре наблюдаемых: инструмент это функция множеств \mathcal{P} на $\mathcal{B}(\mathcal{D})$, такая что

1. $\mathcal{P}(B)$ - положительное нормальное отображение $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в себя для любого $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$;
2. $\mathcal{P}(\mathcal{X})[\mathbf{I}] = \mathbf{I}$;
3. если $\{B_i\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ – разбиение множества B , то

$$\mathcal{P}(B)[X] = \sum_j \mathcal{P}(B_j)[X]; X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

где ряд сходится *-слабо.

Каждому инструменту отвечает обобщенная наблюдаемая

$$M(B) = \mathcal{P}(B)[\mathbf{I}]; \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

такая, что

$$\mu_B(B) = \text{Tr } SM(B)$$

Озава [135] показал, что для любого инструмента \mathcal{M} и любого состояния S существует семейство апостериорных состояний $\{S_x; x \in \mathcal{Q}\}$, т. е. операторов плотности S_x , таких что:

1. функция $x \rightarrow \text{Tr } S_x Y$ μ_s -измерима для любого $Y \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$;
2. $\text{Tr } \mathcal{M}(B)[S]Y = \int_B (\text{Tr } S_x Y) \mu_s(dx)$.

Оператор плотности S_x описывает состояние доли статистического ансамбля, в которой исход измерения равен x , а величина $\text{Tr } S_x Y = \mathbf{E}_s(Y \mid x)$ есть апостериорное среднее наблюдаемой Y при условии, что исход предыдущего измерения равен x .

Инструмент \mathcal{M} (или \mathcal{P}) называется вполне положительным, если отображения $\mathcal{P}(B); B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, вполне положительны.

Пример 1. Пусть $A = \sum_i x_i E_i$ - вещественная наблюдаемая с чисто точечным спектром. Соотношение

$$\mathcal{M}(B)[S] = \sum_{i: x_i \in B} E_i S E_i$$

определяет вполне положительный инструмент со значениями в \mathbf{R} , соответствующий проекционному постулату фон Неймана, который описывает предельно точное измерение наблюдаемой A .

Распределение вероятностей в состоянии S есть

$$\mu_S(B) = \sum_{i: x_i \in B} \text{Tr } S E_i$$

а апостериорные состояния даются формулой

$$S_i = E_i S E_i / \text{Tr } S E_i$$

Пример 2. Пусть A - вещественная наблюдаемая и $p(x)$ - плотность распределения вероятностей на \mathbf{R} , такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2 < \infty$$

Вполне положительный инструмент

$$\mathcal{M}(B)[S] = \int_B \sqrt{p(xI - A)} S \sqrt{p(xI - A)} dx$$

описывает неточное измерение наблюдаемой A со случайной ошибкой, распределенной с плотностью $p(x)$. В самом деле

$$\begin{aligned} \mu_S(B) &= \int_B \text{Tr } S p(xI - A) dx = \\ &= \int_B \int_B p(x - y) \mu_S^A(dy) dx, \end{aligned}$$

где μ_s^A - распределение вероятностей наблюдаемой A в состоянии S . Апостериорные состояния суть

$$S_x = \frac{\sqrt{p(xI - A)} S \sqrt{p(xI - A)}}{\text{Tr } S p(xI - A)}$$

Чем меньше σ^2 , т. е. чем ближе $p(x)$ к δ -функции, тем точнее измерение наблюдаемой A . Для наблюдаемой A с чисто точечным спектром случай $\sigma^2 = 0$ соответствует примеру 1 ; для наблюдаемой с непрерывным спектром возникают принципиальные трудности, не позволяющие непосредственно обобщить проекционный постулат на этот случай (см. далее п. 1.3).

1.2 Представление вполне положительного инструмента.

Многие реальные процессы укладываются в следующую схему косвенного измерения: рассматриваемая система взаимодействует с «пробной» системой, после чего над пробной системой производится прямое измерение некоторой квантовой наблюдаемой. Пусть \mathcal{C}_0 - гильбертово пространство пробной системы, S_0 - оператор плотности, описывающий ее исходное состояние, U - унитарный оператор в $\mathcal{C} \otimes \mathcal{H}_0$, задающий взаимодействие и E_0 - ортогональное разложение единицы в \mathcal{C}_0 , соответствующее измеряемой величине. Распределение вероятностей такого измерения дается формулой

$$\mu_S(B) = \text{Tr } U (S \otimes S_0) U^* (I \otimes E_0(B)); B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

где S - оператор плотности системы перед измерением. Оно может быть записано в виде (1.3), где

$$\mathcal{M}(B)[S] = \text{Tr}_{\mathcal{C}_0} U (S \otimes S_0) U^* (I_{\otimes} E_0(B))$$

- вполне положительный инструмент в пространстве состояний системы \mathcal{H} (здесь $\text{Tr } \mathcal{H}_0$ - частичный след по \mathcal{H}_0). Верно и обратное.

Т е о р е м а (Озава, [134]). Пусть \mathcal{M} - вполне положительный инструмент со значениями в \mathcal{X} . Найдется гильбертово пространство \mathcal{C}_0 , оператор плотности S_0 в \mathcal{C}_0 , унитарный оператор U в $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}_0$ и ортогональное разложение единицы E_0 в \mathcal{C} , такие что для любого оператора плотности S в \mathcal{H} имеет место формула (1.10).

В основе этой теоремы лежит следующая комбинация теоремы Наймарка и теоремы Стайнспринга: если \mathcal{P} - вполне положительный инструмент (в алгебре наблюдаемых), то существует гильбертово пространство \mathcal{K} , изометрический оператор V из \mathcal{H} в \mathcal{K} , ортогональное разложение единицы E в \mathcal{K} и нормальный *-гомоморфизм π из $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ в $\mathfrak{F}(\mathcal{X})$, такие что $[E(B), \pi[X]] = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}), X \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ и

$$\mathcal{P}(B)[X] = V^* E(B) \pi[X] V$$

Пространство \mathcal{K} превращается в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ с помощью рассуждений, которые были использованы при доказательстве формулы (3.1.4).

Из (1.11) выводится аналог представления (3.1.4) для вполне положительного инструмента

$$\mathcal{P}(B)[X] = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)^* X V_n(x) \mu(dx)$$

где μ - σ -конечная мера на \mathcal{R} , а $V_n(x)$ - μ -измеримые функции на \mathcal{X} со значениями в $\mathcal{O}(\mathcal{H})$, такие что

$$\int_{\mathcal{Q}} \sum_{k=1}^{\infty} V_n(x)^* V_n(x) \mu(dx) = I$$

Соответствующий инструмент в пространстве состояний имеет вид

$$\mathcal{K}(B)[S] = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) S V_n(x)^* \mu(dx)$$

При этом распределение вероятностей в состоянии S дается формулой

$$\mu_S(B) = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr } S V_n(x)^* V_n(x) \mu(dx)$$

$$S_x = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) S V_n(x)^* \mid \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr } S V_n(x)^* V_n(x)$$

1.3 Три уровня описания квантовых измерений.

Теорема Озава имеет принципиальное значение, поскольку демонстрирует согласованность понятия (вполне положительного) инструмента со стандартным формализмом квантовой механики. Описание измерения в обобщенной статистической модели квантовой механики может быть осуществлено с различной степенью подробности. Имеется три основных уровня описания, каждому из которых отвечает определенный математический объект в гильбертовом пространстве системы:

1. Задана только статистика исходов измерения. Как показано в п. 2.1.2, это эквивалентно заданию обобщенной наблюдаемой, т. е. некоторого разложения единицы в \mathcal{H} .
2. Кроме статистики, задан закон преобразования состояний в зависимости от исхода измерения. На этом уровне адекватное описание измерения дается понятием инструмента. Каждому инструменту по формуле (1.5) отвечает обобщенная наблюдаемая, однако это соответствие не взаимно однозначно, поскольку инструмент дает более подробное описание измерения, нежели наблюдаемая.
3. Задано динамическое описание взаимодействия системы с пробной системой. Этот уровень является еще более подробным: каждому инструменту по формуле (1.10) может соответствовать множество различных процедур косвенного измерения. Детальность схемы косвенного измерения зависит от того, где в измерительном приборе проводится черта между «пробной системой» и «детектором», осуществляющим прямое измерение.

С точки зрения физических приложений представляет большой интерес вопрос о реализуемости той или иной теоретической схемы квантового измерения. Высказывалась мысль (см., например, статью «Проблема измерения» в сборнике [11]), что хотя квантовая механика правильно отражает некоторые черты микромира, далеко не все, что содержится в ее математической модели, может иметь свой прототип в реальности. Известны общие ограничения типа правил суперотбора (см., например, [23]), которые постулируют измеримость только наблюдаемых, совместимых с некоторой выделенной величиной типа заряда. В связи со схемой косвенного измерения возникают следующие вопросы:

1. Соответствует ли данному унитарному оператору U реальное квантовомеханическое взаимодействие?

2. Соответствует ли данной наблюдаемой A реально измеримая физическая величина?

Подробное обсуждение таких вопросов выходит за рамки настоящего обзора, но некоторые комментарии здесь все же необходимы. В работах Ваневского [165] и Мельника [129] показано, что всякий унитарный оператор может быть получен из шрёдингеровской эволюции с некоторым потенциалом, зависящим от времени. Таким образом, первый вопрос сводится к реализуемости потенциалов в квантовой механике. С другой стороны, в п. 1.5 будет показано, что второй вопрос сводится к первому для взаимодействий специального вида. Практически, конечно, эти вопросы могут быть совсем не просты и требуют отдельного рассмотрения в каждой конкретной задаче измерения (см. в этой связи поучительное обсуждение «приемника Долинара» в [37, гл. VI] и в [18]).

1.4. Воспроизводимость. Пусть S -оператор плотности, $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ - последовательность инструментов со значениями в измеримых пространствах $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. Из постулатов (1.3), (1.4) следует, что величина

$$\begin{aligned} \mu_{S, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n} (B_1 \times \dots \times B_n) &= \\ &= \text{Tr } \mathcal{M}_n (B_n) [\dots \mathcal{M}_1 (B_1) [S] \dots] \end{aligned}$$

где $B_j \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ есть вероятность того, что в последовательности измерений, задаваемых инструментами $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$, над системой, первоначально находившейся в состоянии S , будут получены исходы $x_j \in B_j; j = 1, \dots, n$. Если $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ - стандартные измеримые пространства, то функция множеств (1.12), заданная на параллелепипедах $B_1 \times \dots \times B_n$, однозначно продолжается до вероятностной меры на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{R}\mathcal{X}_1) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathcal{X}_n)$ (см. [78, 4.2]). Соотношение (1.15) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \mu_S^{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n} (B_1 \times \dots \times B_n) &= \\ &= \text{Tr } S \mathcal{P}_1 (B_1) [\dots \mathcal{P}_n (B_n) [1] \dots] \end{aligned}$$

В случае инструментов, соответствующих проекционному постулату (1.6), соотношение (1.15) переходит в формулу Вигнера (см. статью «Проблема измерения» в сборнике [11]).

Рассмотрим повторное измерение, описываемое инструментом \mathcal{M} . Инструмент \mathcal{M} называется воспроизводимым, если

$$\mathcal{M} (B_1) [\mathcal{M} (B_2) [S]] = \mathcal{M} (B_1 \cap B_2) [S]; B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

для любого оператора плотности S . Это свойство является математическим выражением гипотезы воспроизводимости, гласящей, что «если физическая величина дважды измеряется на системе \mathcal{P} , причем измерения следуют непосредственно одно за другим, то в обоих случаях получается одно и то же значение» (см. [26, гл. IV, п. 3]).

Рассмотрим инструмент со счетным множеством исходов $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ и положим $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}(\{x_i\})$.

Предложение ([134], [78]). Всякий инструмент вида (1.6) обладает свойствами:

1. $\mathcal{M}_i [\mathcal{M}_j [S]] = \delta_{ij} \mathcal{M}_i [S]$ (воспроизводимость);
2. если $\text{Tr } \mathcal{M}_i [S] = 1$, то $\mathcal{M}_i [S] = S$ (минимальность возмущения);
3. если $X \geq 0$ и $\mathcal{M}_i^* [X] = 0$ для $i = 1, 2, \dots$, то $X = 0$ (невыврожденность). (1.6).

Обратно, всякий инструмент с этими свойствами имеет вид

Таким образом, проекционный постулат (1.6) можно рассматривать как следствие ряда физически содержательных свойств соответствующего инструмента, включающих воспроизводимость. Как уже отмечалось, в случае непрерывного спектра возникают принципиальные трудности, которые в наиболее ясной форме выражаются следующей теоремой

Т е о р е м а (Озава [134]). Пусть \mathcal{X} - стандартное измеримое пространство. Всякий инструмент со значениями в \mathcal{X} , обладающий свойством воспроизводимости (1.17), с необходимостью является дискретным, т. е. существует счетное подмножество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, такое что $\mathcal{M}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0)[S] = 0$ для всех S .

Доказательство. Рассмотрим точное состояние, задаваемое невырожденным оператором плотности S . Согласно п. 1.1, существует семейство апостериорных состояний $\{S_x\}$. Пусть $\{B_n\}$ - счетная подалгебра, порождающая $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Обозначая $M(B) = \mathcal{M}(B) * [I]$ и используя воспроизводимость, имеем

$$\begin{aligned} \int_B \text{Tr } S_x M(B_n) \mu_S(dx) &= \text{Tr } \mathcal{M}(B)[S] M(B_n) = \\ &= \text{Tr } \mathcal{N}(B \cap B_n)[S] = \int_B 1_{B_n}(x) \mu_S(dx), \end{aligned}$$

откуда $\text{Tr } S_x M(B_n) = 1_{B_n}(x)$ для μ_S -почти всех $x \in \mathcal{X}$. Поэтому найдется подмножество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, такое что $\mathcal{M}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0)[S] = 0$ и

$$\text{Tr } S_x M(B) = 1_B(x); x \in \mathcal{X}_0, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

Но тогда $\text{Tr } S_x M(\{x\}) = 1, x \in \mathcal{X}_0$, т. е. $M(\{x\}) \neq 0$ и $\mu_S(\{x\}) \neq 0$, откуда следует, что \mathcal{X}_0 счетно.

В примере 1 апостериорные состояния (1.7) таковы, что в этих состояниях (дискретная) наблюдаемая A с вероятностью 1 имеет определенное значение x_j . Причина трудностей с непрерывным спектром связана с тем, что (алгебраическое) состояние, в котором непрерывная наблюдаемая A имеет определенное значение, не может быть нормальным (т. е. задаваться каким-либо оператором плотности).

1.5. Измерения непрерывных наблюдаемых. В работах Шриниваза [153] и Озава [136] указана возможность описания воспроизводимых измерений непрерывных наблюдаемых, использующая состояния и инструменты, не удовлетворяющие условию нормальности.

Пусть $A = \int_{-\infty}^{\infty} x E_A(dx)$ - вещественная наблюдаемая и пусть η -какое-либо инвариантное среднее ¹⁾ на пространстве $C(\mathbf{R})$ ограниченных непрерывных функций на \mathbf{R} . Следуя [153], рассмотрим отображение \mathcal{E}_η^A алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в себя, определяемое формулой

$$\text{Tr } S \mathcal{E}_\eta^A[X] = \eta_y(\text{Tr } S e^{iyA} X e^{-iyA})$$

где индекс y означает, что усреднение происходит по переменной y , и функцию множеств

$$\mathcal{S}_A(B)[X] = E_A(B) \mathcal{E}_\eta^A[X]; \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

Отображение \mathcal{E}_η^A является условным ожиданием на коммутативную подалгебру $\{E_A(B); B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}' = \mathcal{P}_A$, порожденную; наблюдаемой A . Если A имеет чисто точечный спектр, то \mathcal{E}_η^A есть нормальное условное ожидание, задаваемое формулой (3.1.5), а соотношение (1.18) совпадает с проекционным постулатом (1.6). В общем

случае отображение \mathcal{E}_η^A не нормальное, а функция множеств (1.18) обладает всеми свойствами воспроизводимого инструмента, кроме нормальности.

Вероятности последовательного измерения наблюдаемых A_1, \dots, A_n даются обобщением формулы (1.16)

$$\begin{aligned} \mu_S^{A_1, \dots, A_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \\ = \text{Tr } S \mathcal{P}_{A_1}(B_1) [\dots \mathcal{P}_{A_n}(B_n) [I] \dots]. \end{aligned}$$

Если A_1, \dots, A_n совместимы, то $\mathcal{E}_\eta^{A_j}[E_{A_k}(B)] = E_{A_k}(B)$, откуда

$$\mu_S^{A_1, \dots, A_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = \text{Tr } S E_{A_1}(B_1) \dots E_{A_n}(B_n)$$

т. е. распределение вероятностей последовательных точных измерений совместимых наблюдаемых совпадает с распределением точного совместного измерения этих наблюдаемых (см. п. 1.1.5) - результат, который подтверждает правомерность «обобщенного проекционного постулата» (1.18).

С другой стороны, если A_j несовместимы, то из-за не нормальности отображений $\mathcal{E}_\eta^{A_j}$, функция множеств (1.18) может оказаться лишь конечно аддитивной на (\mathbf{R}) . Для того чтобы восстановить σ -аддитивность, необходимо рассматривать распределение на компактификации вещественной прямой $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Например, после точного измерения наблюдаемой координаты Q система переходит в не нормальное состояние, в котором импульс P с положительными вероятностями принимает значения $\pm\infty$ [153].

1. См. Ф. Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения.- М.: Мир, 1973.

Озава [136] построил процесс косвенного измерения, отвечающий обобщенному проекционному постулату (1.18) и разъяснил роль инвариантного среднего η . Рассмотрим наблюдаемые Q, P во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R})$, которое будет описывать «пробную систему». Пользуясь теоремой Банаха о продолжении, можно показать, что для любого η на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ существует (не нормальное) состояние E_n , такое, что

$$E_\eta(f(Q)) = f(Q), E_\eta(f(P)) = \eta(f)$$

для любой $f \in C(\mathbf{R})$. Пусть $U_t = \exp(-itH_{\text{Int}})$ - унитарная эволюция в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, где

$$H_{\text{Int}} = \lambda(A \otimes P)$$

причем λ может быть выбрано произвольно большим, чтобы пренебречь свободной динамикой системы и прибора. В [136] показано, что для любого (нормального) состояния S и любого $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\text{Tr } S \mathcal{P}_A(B)[X] = (E_S \otimes E_\eta)(U_{1/\lambda}^*(X \otimes E_Q(B))U_{1/\lambda}); \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

Таким образом, пробная система, находящаяся в состоянии E_η с точно определенной координатой, в течение времени $1/\lambda$ взаимодействует с наблюдаемой системой согласно (1.21), после чего производится точное измерение координаты пробной системы.

Такая схема является обобщением процедуры косвенного измерения, рассмотренной фон Нейманом в случае чисто точечного спектра ([26, гл. VI, п. 3]). В принципиальном плане она сводит измерение произвольной квантовой наблюдаемой к измерению координаты пробной системы, при условии реализуемости гамильтониана взаимодействия (1.21).

5.4.2 2. Процессы непрерывного измерения

2.1. Неразрушающие измерения.

Рассмотрим изолированную квантовую систему, эволюция которой описывается группой унитарных операторов $\{U_t; t \in \mathbf{R}\}$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Пусть $\{A_{jt}; j = 1, \dots, m; t \in T\}$, где $T \subset \mathbf{R}$ - семейство вещественных наблюдаемых. Обозначим

$$A_j(t) = U_t^* A_{jt} U_t; \quad t \in T$$

и предположим, что для любых моментов времени $t_1 < \dots < t_n$ и любых j_1, \dots, j_n наблюдаемые $A_{j_1}(t_1), \dots, A_{j_n}(t_n)$ со в м стимы. Согласно формуле (1.20), последовательное точное измерение наблюдаемых $A_{j_1}(t_1), \dots, A_{j_n}(t_n)$ ($j_k = 1, \dots, m$) имеет распределение вероятностей

$$\mu_S(B_1 \times \dots \times \bar{D}_n) = \text{Tr} S E_{(t_1)}(B_1) \dots E_{(t_n)}(B_n)$$

где $B_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ и $E_{(t_k)}$ -совместная спектральная мера наблюдаемых $A_j(t_k); j = 1, \dots, m$.

Семейство вероятностных мер (2.2) при всевозможных $n = 1, 2, \dots; t_1, \dots, t_n$ является согласованным. Используя теорему А. Н. Колмогорова о продолжении, можно доказать, что существует единственное ортогональное разложение единицы \mathbf{E} на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^T)$, где $\mathcal{B}(\mathbf{R}^T)$ — σ -алгебра цилиндрических множеств на пространстве траекторий \mathbf{R}^T такое, что

$$E(x(\cdot) : x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n) = E_{(t_1)}(B_1) \dots E_{(t_n)}(B_n)$$

Оно описывает статистику непрерывного (во времени) точного измерения семейства совместимых наблюдаемых (2.1), в том смысле, что вероятность подмножества B в пространстве траекторий есть

$$\mu_S(x(\cdot) \in B) = \text{Tr} S E(B)$$

В физике подобные измерения получили название неразрушающих и привлекли внимание, в связи с задачей обнаружения слабой силы (гравитационной волны), действующей на пробную систему [69], [140].

П р и м е р. Квантовомеханический осциллятор массы m и с частотой ω , возбуждаемый скалярной силой $\varphi(t)$, описывается уравнениями

$$\dot{Q}(t) = m^{-1}P(t), \quad \dot{P}(t) = -m\omega^2 Q(t) + \varphi(t)\mathbf{I},$$

где $Q(0) = Q$, $P(0) = P$ -канонические наблюдаемые, т. е. $[P, Q] = i$. Положим $A_{1t} = Q \cos \omega t - (P/m\omega) \sin \omega t$, так что

$$A_1(t) = Q(t) \cos \omega t - (P(t)/m\omega) \sin \omega t.$$

Из уравнений (2.3)

$$\dot{A}_1(t) = -(\varphi(t)/m\omega) \sin \omega t \mathbf{I}$$

поэтому наблюдаемые $A_1(t)$ совместимы при разных t и возможно непрерывное неразрушающее измерение семейства $\{A_1(t)\}$. Сила $\varphi(t)$ может быть определена по любой траектории из соотношения (2.4).

Аналогично, для $A_{2t} = P \cos \omega t + m\omega Q \sin \omega t$ получаем семейство совместимых наблюдаемых

$$A_2(t) = P(t) \cos \omega t + m\omega Q(t) \sin \omega t$$

для которого $\dot{A}_2(t) = \varphi(t) \cos \omega t$. Заметим, что $A_1(t)$ и $A_2(t)$ несовместимы, поскольку $[A_2(t), A_1(t)] = iI$. Действуя в духе п. 2.1.3, рассмотрим семейство совместимых наблюдаемых

$$\tilde{A}_1(t) = A_1(t) \otimes I_0 - I \otimes Q_0; \quad \tilde{A}_2(t) = A_2(t) \otimes I_0 + I \otimes P_0$$

в пространстве $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$ (см. [103]). Сила $\varphi(t)$ определяется тогда из соотношения

$$\varphi(t) = \cos \omega t \dot{\tilde{A}}_2(t) - m\omega \sin \omega t \dot{\tilde{A}}_1(t).$$

2.2. «Квантовый парадокс Зенона». Попытки рассмотрения непрерывных измерений несовместимых наблюдаемых, опирающиеся на проекционный постулат, приводят к парадоксальным выводам, в основе которых лежит следующий математический факт. Пусть H - самосопряженный оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, E — проектор, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E \exp(itH/n) E)^n = E \exp(itEHE)$$

Это следует из того, что $\|\exp(itH/n) - I - itH/n\| = o(1/n)$ и $E^2 = E$. Обобщение этого результата на случай неограниченного H является непростой задачей; некоторые условия были получены Фридманом [86]. Его результаты включают случай, когда $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$, $H = -\Delta/2m$ - гамильтониан свободной частицы в \mathbf{R}^n , а $E = 1_{\mathcal{D}}(\cdot)$ - индикатор ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей.

Рассмотрим свободную частицу, эволюционирующую на временном интервале $[0, t]$, и предположим, что в каждый момент времени $tk/n, k = 0, 1, \dots, n$, производится точное измерение наблюдаемой E , описываемое проекционным постулатом (1.6). Если исход измерения равен 1, то это означает, что частица находится в области \mathcal{D} . Вероятность того, что во всех $n + 1$ измерениях получен исход 1, есть

$$\mu_B(1, \dots, 1) = \text{Tr}(E \exp(itH/n) E)^n S(E \exp(itH/n) E)^n$$

и при $n \rightarrow \infty$ в силу (2.6) стремится к

$$\text{Tr} E \exp(itEHE) S_0 \exp(-itEHE) E = \text{Tr} S_0 E$$

где S_0 - начальное состояние. Если в начальный момент частица находится в области \mathcal{D} , то вероятность (2.7) равна 1 независимо от эволюции, т. е. при непрерывном точном измерении местоположения частица никогда не покидает область \mathcal{D} (см. также Дэвис [78, п. 7.4]). Необычные физические следствия соотношения (2.6) были подробно рассмотрены в работе Мисры и Сударшана [130], где для них было предложено общее название «квантовый парадокс Зенона».

Причина парадокса состоит в том, что измерение, описываемое проекционным постулатом, переводя состояние системы в состояние, отвечающее точно определенному значению наблюдаемой, производит конечное изменение, на фоне которого эффект эволюции за время t/n является пренебрежимо малым при $n \rightarrow \infty$. Чтобы избежать этого и получить нетривиальный предельный процесс непрерывного измерения, включающий эволюцию, Баркиелли, Ланц и Проспери [59], [60], предложили рассматривать последовательность неточных измерений, точность которых убывает пропорционально числу измерений n . Первоначально описание предельного процесса в частных случаях связывалось с фейнмановским интегралом по траекториям (ср. в этой связи также Менский [25]), однако общая картина прямо основывается на идеях,

изложенных в §1, в частности на понятии инструмента. В работах А. С. Холево [47], [102] было указано на параллель такого подхода с классическими предельными теоремами в схеме серий, причем предельный процесс непрерывного измерения оказывается некоммутативным аналогом процесса с независимыми приращениями. Подобно классическому случаю, все такие процессы описываются некоторой формулой типа Леви-Хинчина [102], [35]. Квантовые случайные процессы в смысле Дэвиса [78] с этой точки зрения соответствуют сложному пуассоновскому процессу. Далее кратко излагаются результаты этих работ.

2.3. Предельная теорема для сверток инструментов. Для простоты ограничимся измерениями со значениями в \mathbf{R} (существенно лишь, что пространство значений является абелевой локально компактной группой; см. [102], [35]). Пусть $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_n$ — инструменты (в алгебре наблюдаемых) со значениями в \mathbb{R} . Существует единственный инструмент \mathcal{P} со значениями в \mathbf{R}^n , такой что

$$\mathcal{P}(B_1 \times \dots \times B_n)[X] = \mathcal{P}_1(B_1)[\dots \mathcal{P}_n(B_n)[X] \dots]; B_j \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

Свертка инструментов $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{N}_n$ определяется соотношением $\mathcal{N}_1 * \dots * \mathcal{N}_n(B)[X] = \mathcal{P}((x^1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n \in B); B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$

и, согласно формуле (1.13), описывает статистику суммы исходов n последовательных измерений, отвечающих инструментам $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{N}_n$. Инструмент \mathcal{N} со значениями в \mathbf{R} называется безгранично-делимым, если для любого $n = 1, 2, \dots$ найдется инструмент $\mathcal{N}_{(n)}$ такой, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{(n)} * \dots * \mathcal{N}_{(n)} \equiv \mathcal{N}_{(n)}^{*n}$. Проблема непрерывного измерения оказывается тесно связанной с пределами n -кратных сверток вида $\mathcal{P}_{(n)}^{*n}$ при $n \rightarrow \infty$ и структурой безгранично-делимых инструментов. Решение этих вопросов опирается на некоторое обобщение метода характеристических функций в теории вероятностей.

Обозначим \mathfrak{F}_σ банахову алгебру w^* -непрерывных линейных отображений $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в себя с произведением $\Phi \cdot \Psi[X] = \Phi[\Psi[X]]$. Единицей в этой алгебре является тождественное отображение, обозначаемое Id . В алгебре \mathfrak{F}_σ вводится топология τ , определяемая семейством полунорм

$$\|\Phi\|_S = \sup_{\|X\| < 1} |\text{Tr } S\Phi[X]|, \quad S \in \subseteq(\mathcal{C})$$

Характеристическая функция инструмента определяется соотношением

$$\Phi(\lambda)[\ddot{\Lambda}] = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} \mathcal{P}(d\lambda)[\tilde{X}]$$

где интеграл сходится в топологии τ . Функция $\Phi(\lambda)$ со значениями в \mathfrak{F}_σ является характеристической функцией вполне положительного инструмента тогда и только тогда, когда

1. $\Phi(0)[I] = I$;
2. $\Phi(\lambda)\tau$ -непрерывна в точке $\lambda = 0$;
3. $\Phi(\lambda)$ положительно определена в следующем смысле: для любых конечных наборов $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}, \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}, \{X_j\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{B})$

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \Phi(\lambda_k - \lambda_j) [\lambda_j^* X_k^*] \psi_k \rangle \geq 0$$

(аналог теоремы Бохнера-Хинчина, сводящийся к ней в случае $\dim \mathcal{H} = 1$).

Характеристическая функция свертки $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_n$ есть поточечное произведение соответствующих характеристических функций $\Phi_1(\lambda) \cdot \dots \Phi_n(\lambda)$, поэтому n -кратная свертка $\mathcal{P}_{(n)}^{*n}$ имеет характеристическую функцию $\Phi_{(n)}(\lambda)^n$, где $\Phi_{(n)}(\lambda)$ — характеристическая функция инструмента $\mathcal{P}_{(n)}$. Распределение вероятностей $\mu_s^{(n)}$ суммы n повторных измерений, описываемых инструментом $\mathcal{P}_{(n)}$, определяется формулой

$$\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x_{\mu}^{(n)}}(dx) = \text{Tr } S\Phi_{(n)}(\lambda)^n [1]$$

Следующее утверждение является аналогом центральной предельной теоремы в схеме серий.

Предложение. Пусть $\{\mathcal{P}_{(n)}\}$ — последовательность вполне положительных инструментов и пусть существует τ — непрерывный предел

$$\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} n(\Phi_{(n)}(\lambda) - \text{Id}) = \mathcal{L}(\lambda)$$

Тогда свертки $\mathcal{P}_{(n)}^{*n}$ слабо сходятся к безгранично делимому инструменту \mathcal{P} с характеристической функцией $\exp \mathcal{L}(\lambda)$ ¹¹ в том смысле, что

$$\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f(x) \mathcal{P}_{(n)}(dx) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \mathcal{N}^P(dx)$$

для всех непрерывных ограниченных функций $f(x)$.

Заметим, что аналог классического условия асимптотической пренебрегаемости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{(n)}(\lambda) - \text{Id}\| = 0$$

1. Имеется в виду экспонента в банаховой алгебре σ . в общем случае не влечет (2.9). Вопрос об описании возможных пределов $\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{(n)}(\lambda)$ при одном этом условии остается открытым.

Пример. Пусть A, H — (ограниченные) вещественные наблюдаемые, $p(x)$ — плотность распределения вероятностей на \mathbf{R} , удовлетворяющая условиям (1.8). Рассмотрим вполне положительный инструмент

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(n)}(B)[X] &= e^{itH/n} \sqrt{n} \int_B \sqrt{p\left(\sqrt{n}x\text{I} - \frac{1}{\sqrt{n}}A\right)} \times \\ &\times x \sqrt{p\left(\sqrt{n} \times \text{I} - \frac{1}{\sqrt{n}}A\right)} dx e^{-itH/n} \end{aligned}$$

Свертка $\mathcal{P}_{(n)}^{*n}$ имеет следующую статистическую интерпретацию. Рассмотрим квантовую систему, динамика которой на интервале $[0, t]$ описывается гамильтонианом H . В моменты времени $t_j = jt/n; j = 0, 1, \dots, n-1$, производится приближенное измерение наблюдаемой A с дисперсией $n\sigma^2 = n \int x^2 p(x) dx$, а затем берется среднее $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha(t_j^{(n)})$ полученных результатов $\alpha(t_j^{(n)})$ (которое имеет дисперсию σ^2). Предел при

$n \rightarrow \infty$ соответствует среднему $\frac{1}{t} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$ результатов $\alpha(\tau)$ некоторого «непрерывного измерения» наблюдаемой A . Вычисления показывают, что для достаточно гладкой плотности $p(x)$ предел (2.9) равен

$$\mathcal{L}(\lambda)[X] = it[H, X] + \\ + \frac{1}{4}J(AXA - A^2 \circ X) + i\lambda A \circ X - \frac{1}{2}\sigma^2 \lambda 2X$$

где $J = \int p'(x)^2 p(x)^{-1} dx$ - информационное количество Фишера для семейства плотностей $\{p(x + \theta)\}$ с параметром сдвига $\theta \in \mathbb{R}$, так что $\sigma^2 J \geq 1$.

2.4. Сверточные полугруппы инструментов. Следующий результат типа теоремы Шенберга (см., например, [96], [138]) перебрасывает мост между скалярными условно положительно определенными функциями и вполне диссипативными отображениями (п. 3.2.2). В F_σ .

Предложение. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ - функция со значениями. Следующие условия эквивалентны:

1. $\exp t\mathcal{L}(\lambda)$ положительно определена для всех $t \geq 0$;
2. функция $\mathcal{L}(\lambda)$ эрмитова, т. е. $\mathcal{L}(-\lambda)[X^*] = \mathcal{L}(\lambda)[X]^*$ и условно положительно определенная, т. е. для любых конечных наборов $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$, $\{X_j\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ таких, что $\sum_j X_j \psi_j = 0$ выполняется

$$\sum_{j,k} \langle \psi_j | \mathcal{L}(\lambda_k - \lambda_j) [\lambda_j^* X_k] \psi_k \rangle \geq 0$$

Для того чтобы функция $\mathcal{L}(\lambda)$ представлялась в виде предела (2.9), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному из условий этого предложения, была τ -непрерывна и $\mathcal{L}(0)[1] = 0$. Такие функции будем называть квазихарактеристическими.

Семейство инструментов $\{\mathcal{S}_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ образует свертоиную полугруппу, если $\mathcal{P}_t * \mathcal{P}_s = \mathcal{P}_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}_+$. Очевидно, что все инструменты \mathcal{P}_t безгранично делимы. Пусть $\Phi_t(\lambda)$ - характеристическая функция инструмента \mathcal{P}_t . Соотношение

$$\Phi_t(\lambda) = \exp t\mathcal{L}(\lambda); t \in \mathbb{R}_+$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между квазихарактеристическими функциями $\mathcal{L}(\lambda)$ и сверточными полугруппами вполне положительных инструментов, удовлетворяющими условию непрерывности

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_t(U_0) - \text{Id}\| = 0$$

для любой окрестности нуля U_0 .

Следующий результат можно рассматривать как обобщение представления Леви-Хинчина для логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения.

Т е о р е м а. Для того чтобы функция $\mathcal{L}(\lambda)$ со значениями в F_Δ была квазихарактеристической, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1(\lambda) + \mathcal{L}_2(\lambda),$$

где \mathcal{L}_0 - вполне диссипативное отображение вида (3.2.5), $\mathcal{L}_1(\lambda)[\lambda^*] = \sigma^2 [(L^* X L - L^* L_0 X) + i\lambda (L^* X + X L) - \frac{1}{2}\lambda_2 X]$, (2.15) причем $\sigma^2 \geq 0$, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; т. е. функция типа (2.11);

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\lambda)[X] = & \sum_{r,s=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R} \setminus 0} (V_s^* X V_r e^{i\lambda x} - V_s^* V_{r \circ} X) \mu_{rs}(dx) + \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} V_s^* X \int_{\mathbf{R} \setminus 0} (e^{i\lambda x} - 1) \mu_{0s}(dx) + \\
& + \sum_{r=1}^{\infty} X V_r \int_{\mathbf{R} \setminus 0} (e^{i\lambda x} - 1) \mu_{r0}(dx) + \\
& + \left[\int_{\mathbf{R}} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) \mu_{00}(dx) + i\alpha\lambda \right] \pi
\end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $V_s \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $[\mu_r, s]_{r,s=1,2,\dots}$ -положительно определенная матрица комплексных мер на $\mathbf{R} \setminus 0$, такая, что ряд

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} \mu_{rs}(\mathbf{R} \setminus 0) V_s^* V_r \text{ сходится } w^*\text{-слабо, и}$$

$$\int_{\mathbf{R} \setminus 0} \frac{x^2}{1+x^2} \mu_{00}(dx) < \infty.$$

Доказательство формулы (2.14) использует разновидность конструкции ГНС, которая сопоставляет условно положительно определенной функции $\mathcal{L}(\lambda)$ пару коммутирующих коциклов алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и группы \mathbf{R} , а также сведения о структуре этих коциклов [96], [84], [76] (доказательство проходит для любой алгебры фон Неймана и абелевой локально-компактной группы). Перенесение вероятностного метода, основанного на понятии сопровождающего закона, представляется в некоммутативной ситуации затруднительным.

Вероятностный смысл каждого из слагаемых в формуле (2.12) выясняется в связи с процессами непрерывного измерения.

2.5. Инструментальные процессы. Пусть \mathcal{Y} - пространство всех вещественных функций на \mathbf{R} , $\mathcal{B}_{a,b}$ - σ -алгебра, порождаемая приращениями $y(s) - y(t); a \leq t < s \leq b$. Инструментальным процессом с независимыми приращениями (и. -процессом) называется семейство $\{\mathcal{P}_{a,b}; a, b \in \mathbf{R}, a \leq b\}$, где $\mathcal{P}_{a,b}$ - инструмент (в алгебре наблюдаемых) со значениями в $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}_{a,b})$, причем

$$\mathcal{P}_{a,b}(E) \cdot \mathcal{P}_{b,c}(F) = \mathcal{P}_{a,c}(E \cap F)$$

если $a \leq b \leq c$ и $E \in \mathcal{B}_{a,b}, F \in \mathcal{B}_{b,c}$. Если все инструменты $\mathcal{P}_{a,b}$ вполне положительны, то и. -процесс называется вполне положительным. Для любого оператора плотности S и временного промежутка $[a, b]$ и. -процесс определяет распределение вероятностей

$$\mu_s(E) = \text{Tr } S \mathcal{P}_{a,b}(E)[I]; E \in \mathcal{B}_{a,b}$$

на пространстве траекторий $y(t); t \in [a, b]$. С физической точки зрения, исходом непрерывного измерения является производная $\dot{y}(t)$, однако оказывается, что распределение (2.18) сосредоточено на недифференцируемых функциях. Это определение, данное в [102], является модификацией определения Дэвиса [78], использовавшего лишь пространство скачкообразных функций и более общего

определения Баркиелли, Ланца, Проспери [59], основанного на пространстве обобщенных функций. В случае $\dim \mathcal{H} = 1$ и.-процессы - это обычные вещественные процессы с независимыми приращениями. Всякий и.-процесс однозначно определяется набором своих конечномерных распределений, которые в силу (2.17) имеют следующую структуру

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\tau_0, \tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1, \dots, y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p) = \\ = \mathcal{P}_{\tau_0, \tau_1}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1) \dots \\ \dots \mathcal{P}_{\tau_{p-1}, \tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p), \end{aligned}$$

где $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_p$; $B_1, \dots, B_p \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

И.-процесс называется однородным, если для любых $a, b, \tau \in \mathbf{R}$ выполняется

$$\mathcal{P}_{a+\tau, b+\tau}(T_\tau(E)) = \mathcal{P}_{a,b}(E), \quad E \in \mathcal{B}_{a,b},$$

где $(T_\tau y)(t) = y(t + \tau)$. Соотношение

$$\mathcal{N}_t(B) = \mathcal{N}_{a,a+t}(y(\cdot) : y(a+t) - y(a) \in B); \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

определяет тогда сверточную полугруппу инструментов, через которую конечномерные распределения выражаются по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\tau_0, \tau_p}(y(\cdot) : y(\tau_1) - y(\tau_0) \in B_1, \dots, y(\tau_p) - y(\tau_{p-1}) \in B_p) = \\ = \mathcal{P}_{\tau_1 - \tau_0}(B_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_{\tau_p - \tau_{p-1}}(B_p). \end{aligned}$$

Если и.-процесс непрерывен в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_{a,a+t}(y(\cdot) : |y(a+t) - y(a)| \geq \varepsilon) - \text{Id}\| = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, то соответствующая сверточная полугруппа непрерывна в смысле (2.13), и, следовательно, ее характеристики: ческие функций имеют вид (2.12), где $\mathcal{L}(\lambda)$ - некоторая квази: характеристическая функция. Обратно пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ - квазихарактеристическая функция, $\{\mathcal{P}_t\}$ - соответствующая сверточная полугруппа, тогда соотношение (2.20) определяет конечномерные распределения, продолжающиеся до однородного, непрерывного, вполне положительного и.-процесса $\{\mathcal{P}_{a,b}\}$. Более того, модифицируя технику продолжения теории случайных процессов¹¹, можно доказать, что и.-процесс $\{\mathcal{P}_{a,b}\}$ сосредоточен на подпространстве $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$, состоящем из функций без разрывов второго рода. Функция $\mathcal{L}(\lambda)$ называется генератором н.-процесса $\{\mathcal{N}_{a,b}\}$.

Слагаемое \mathcal{L}_0 в формуле (2.14) описывает эволюцию (в общем случае необратимую) рассматриваемой квантовой системы, происходящую независимо от процесса измерения. В классическом случае ($\dim \mathcal{H} = 1$) это слагаемое вообще отсутствует. Второе слагаемое $\mathcal{L}_1(\lambda)$ описывает процесс непрерывного приближенного измерения наблюдаемой $A = \sigma^2(L + L^*)$. Соответствующий и.-процесс сосредоточен на непрерывных траекториях и отвечает классическому внеровскому процессу. Многомерное обобщение - сумма слагаемых вида (2.11) с разными операторами L_1, \dots, L_m - задает процесс непрерывного приближенного

1. См. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Теория случайных процессов.- М.: Наука, 1973.- 2. измерения нескольких (вообще говоря, несовместимых) наблюдаемых [60]. Наконец, слагаемое $\mathcal{L}_2(\lambda)$ описывает скачкообразную компоненту процесса измерения.

Пр и м е р (ср. [78, гл. 5]). Пусть $B \rightarrow \mathcal{P}(B)$; $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus 0)$ – функция множеств, удовлетворяющая определению (вполне положительного) инструмента (см. п. 1.1), за исключением условия нормировки 2). Таким образом, $C = \mathcal{P}(\mathbf{R} \setminus 0)[I]$ – некоторый положительный оператор. Соотношение

$$\mathcal{L}(\lambda)[X] = \int_{\mathbf{R} \setminus 0} e^{i\lambda x \mathcal{P}}(dx)[X] - C \circ X + i[H, X]$$

определяет квазихарактеристическую функцию, представляющую собой первое слагаемое в формуле (2.16). Однородный и.-процесс $\{\mathcal{P}_{a,b}\}$ с генератором (2.22) имеет кусочно-постоянные траектории; пусть, например, $F \subset \mathcal{D}$ – подмножество траекторий, имеющих ровно m скачков на отрезке $[a, b]$, причем j -й скачок происходит на интервале $\Delta_j \subset [a, b]$ и имеет величину $h_j \in B_j$, где $B_j \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \setminus 0)$. Если интервалы $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ следуют друг за другом без пересечений, то

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a,b}(F) = & \int_{\Delta_1} \dots \int_{\Delta_m} e^{(t_1-a)\mathcal{L}_0 \cdot \mathcal{P}}(B_1) \cdot \dots \mathcal{P}(B_m) \times \\ & \times e^{(b-t_m)\mathcal{L}_0} dt_1 \dots dt_m, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_0[X] = -C \cdot X + i[H, X]$. Особенно просто устроен аналог пуассоновского процесса с генератором

$$\mathcal{L}(\lambda)[X] = \mu(e^{i\lambda h} U^* X U - X) + i[H, X]$$

где U – изометрический оператор. Это считающий процесс [154], для которого скачки траектории фиксированной величины h происходят в случайные моменты времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметром $\mu > 0$. В момент скачка состояние преобразуется по формуле $S \rightarrow USU^*$, а между скачками эволюционирует согласно закону

$$S \rightarrow e^{-\mu t} e^{-iHt} S e^{i\#t}.$$

Рассмотрим вкратце вопрос о сходимости повторных измерений к процессу непрерывного измерения. Пусть временная ось \mathbf{R} разбита на промежутки $[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]$ длины $1/n$, и каждому моменту времени отвечает измерение, описываемое вполне положительным инструментом $\mathcal{P}_{(n)}$ с характеристической функцией $\Phi_{(n)}(\lambda)$. Серия таких повторных измерений естественным образом определяет и.-процесс $\{\mathcal{P}_{a,b}\}$, траекториями которого являются кусочно-постоянные функции (см. [102]). Обозначим

$$\mu_{S,X}^{(n)}(B) = \text{Tr } S \mathcal{P}_{a,b}^{(n)}(E)[X]; \quad E \in \mathcal{B}_{a,b}$$

где $X \geq 0$.

Т е о р е м а. Пусть существует τ -непрерывный предел

$$\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} n(\Phi_{(n)}(\lambda) - \text{Id}) = \mathcal{L}(\lambda)$$

причем $\sup_n \sup_{|\lambda| \leq 1} n \|\Phi_{(n)}(\lambda) - \text{Id}\| < \infty$. Тогда последовательность мер $\{\mu_{S,x}^{(n)}\}^n$ сходится в топологии Скорохода к мерам

$$\mu_{S,X}(E) = \text{Tr } S \mathcal{P}_{a,b}(E)[X^-]$$

где $\{\mathcal{P}_{a,b}\}$ – однородный вполне положительный и.-процесс с генератором $\mathcal{L}(\lambda)$.

В частности, последовательность повторных приближенных измерений наблюдаемой A из примера п. 2.3 сходится к процессу непрерывного измерения с генератором (2.11).

В случае $\dim \mathcal{H} = 1$ этот результат переходит в теорему А. В. Скорохода о сходимости сумм независимых случайных величин к процессу с независимыми приращениями.

Знание генератора и.-процесса позволяет в принципе определить основные вероятностные характеристики распределения (2.18) в пространстве траекторий, в частности, произвольные смешанные моменты [60]. На этом основаны квантово-статистические приложения рассматриваемой теории. В работе [103] проведено сравнение оценок неизвестной силы, действующей на открытую квантовую систему, построенных на основе различных процессов непрерывного измерения. Статистика считающих процессов рассматривалась в работах [154], [18].

5.5 ПРОЦЕССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА

5.6 §1. Квантовое стохастическое исчисление

1.1. Основные определения. Пусть \mathfrak{h} -гильбертово пространство. Симметричное пространство Фока, ассоциированное с \mathfrak{h} , -определяется как

$$\Gamma(\mathfrak{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \Gamma_n(\mathfrak{h})$$

где $\Gamma_0(\mathfrak{h}) = \mathbf{C}$, $\Gamma_n(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^{sn}$ - симметризованная n -я тензорная степень пространства \mathfrak{h} (см. п. 1.3.1). $\Gamma_n(\mathfrak{h})$ называется n -частичным подпространством, $\Gamma_0(\mathfrak{h})$ - вакуумным подпространством. В квантовой физике $\Gamma(\mathfrak{h})$ описывает систему из переменного (неограниченного) числа частиц (бозонов [6], [7]).

В интересующем нас случае, когда $\mathfrak{h} = L^2(\mathbf{R}_+)$, пространство Фока $\Gamma(\mathfrak{h})$ состоит из бесконечных последовательностей

$$\psi = [f_0, f_1(t), \dots, f_n(t_1, \dots, t_n), \dots]$$

где $f_0 \in \mathbf{C}$, $f_n(t_1, \dots, t_n)$ -комплексная симметричная квадратично-интегрируемая функция от $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}_+$, причем

$$\langle \psi | \psi \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} |f_n(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n < \infty.$$

Удобная модификация этого представления была предложена Маассеном в [142]. Пусть $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$ -цепь в \mathbf{R}_+ , т. е. подмножество \mathbf{R}_+ конечной мощности $|\tau| = n$, упорядоченное так, что $t_1 < \dots < t_n$. Обозначая \mathfrak{P} множество всех цепей, \mathfrak{P}_n - множество цепей мощности n , имеем $\mathfrak{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n$, где $\mathfrak{P}_0 = \{\emptyset\}$. Определим на σ -конечную меру $\mu(d\tau)$, которая совпадает с мерой $dt_1 \dots dt_n$ на \mathfrak{P}_n , $n > 0$, и $\mu(\emptyset) = 1$. Для $\psi \in \Gamma()$ положим $\psi(\tau) = f_n(t_1, \dots, t_n)$, если $|\tau| = n > 0$ и $\psi(\emptyset) = f_0$. Симметричная функция f_n однозначно определяется своим ограничением на \mathfrak{P}_n , причем $\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} |f_n(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n = \int_{\mathfrak{P}_n} |\psi(\tau)|^2 \mu(d\tau)$, так что

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{P}_n} |\psi(\tau)|^2 \mu(d\tau) = \int_{\mathfrak{P}} |\psi(\tau)|^2 \mu(d\tau).$$

Для любого $t \geq 0$ определим операторы $A(t)$, $A^+(t)$, $\Lambda(t)$ соотношениями

$$\begin{aligned}
(A(t)\psi)(\tau) &= \int_0^t \psi(\tau \cup \{s\}) ds \\
(A^+(t)\psi)(\tau) &= \sum_{s \in \tau} 1_{[0,t]}(s) \psi(\tau \setminus \{s\}) \\
(\Lambda(t)\psi)(\tau) &= \sum_{s \in \tau} 1_{[0,t]}(s) \psi(\tau)
\end{aligned}$$

Оператор $A(t)$ переводит $\Gamma_n \equiv \Gamma_n(L^2(\mathbf{R}_+))$ в Γ_{n-1} , $A^+(t)$ переводит Γ_n в Γ_{n+1} , и $\Lambda(t)$ переводит Γ_n в Γ_n . В квантовой физике $A(t)$ является оператором уничтожения (бозона на временном отрезке $[0, t]$), $A^+(t)$ - оператором рождения, $\Lambda(t)$ - оператором числа частиц (бозонов). Общей инвариантной областью определения является подпространство Γ_∞ , состоящее из векторов $\psi \in \Gamma(\mathfrak{h})$ таких, что

$$\int_{\mathfrak{F}} \lambda^{|\tau|} |\psi(\tau)|^2 \mu(d\tau) < \infty$$

для всех $\lambda > 0$. Операторы $A(t), A^+(t)$ однозначно продолжаются до замкнутых взаимно сопряженных операторов (для которых сохраняются прежние обозначения). Операторы $\Lambda(t)$, а также

$$Q(t) = A(t) + A^+(t), P(t) = i(A^+(t) - A(t))$$

являются существенно самосопряженными на Γ_∞ (см., например, [6], [29]).

Из определений (1.2) вытекают следующие коммутационные соотношения на Γ_∞

$$[A(t), A(s)] = 0, \quad [A^+(t), A^+(s)] = 0$$

$$[A(t), A^+(s)] = (t \wedge s)I$$

$$[\Lambda(t), \Lambda(s)] = 0$$

$$[\Lambda(t), A(s)] = -A(t \wedge s), \quad [\Lambda(t), A^+(s)] = A^+(t \wedge s)$$

где $t \wedge s = \min(t, s)$. Отсюда следует, что

$$[Q(t), Q(s)] = 0, \quad [P(t), P(s)] = 0$$

$$[Q(t), P(s)] = 2i(t \wedge s)I$$

$$[\Lambda(t), Q(s)] = -iP(t \wedge s), \quad [\Lambda(t), P(s)] = iQ(t \wedge s)$$

Пусть $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Экспоненциальным вектором называется вектор $\psi_f \in \Gamma(\mathfrak{h})$ такой, что $\psi_f(\emptyset) = 1, \psi_f(\tau) = \prod_{t \in \tau} f(t)$. Скалярное произведение двух экспоненциальных векторов

$$\langle \psi_f | \psi_g \rangle = \exp \int_0^\infty \overline{f(t)} g(t) dt$$

Из (1.2) следует, что $A(t)\psi_f = \left(\int_0^t f(s) ds \right) \cdot \psi_f$.

Вектор ψ_0 , соответствующий $f \equiv 0$, называется вакуумным вектором. Для него

$$A(t)\psi_0 = 0, \Lambda(t)\psi_0 = 0$$

Линейную оболочку семейства экспоненциальных векторов обозначим Γ_e . Она плотна в $\Gamma(\mathfrak{h})$ (см., например, [96]).

5.6.1 1.2 Стохастический интеграл.

Одно из основных свойств пространства Фока - Функториальное свойство

$$\Gamma(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) = \Gamma(\mathfrak{h}_1) \otimes \Gamma(\mathfrak{h}_2),$$

в частности, для любого $t \in \mathbf{R}_+$

$$\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+)) = \Gamma(L^2(0, t)) \otimes \Gamma(L^2(t, \infty))$$

При этом экспоненциальные векторы, включая вакуумный, также факторизуются

$$\psi_f = \psi_f^{(0,t)} \otimes \psi_f^{(t,\infty)}$$

Поскольку $L^2(\mathbf{R}_+)$ можно рассматривать как непрерывную прямую сумму (прямой интеграл) одномерных гильбертовых пространств, пространство $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ является, в определенном смысле, непрерывным тензорным произведением. Эта структура лежит в основе связи между пространством Фока, безграничной делимостью и процессами с независимыми приращениями (см., например, [96], [138]).

Далее $\mathfrak{F} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, где \mathcal{H} - некоторое «начальное» пространство. Элементы \mathfrak{F} можно рассматривать как функции $\downarrow(\tau)$, $\tau \in \text{Re}$, со значениями в \mathcal{H} . Будет удобно не различать в написании операторы, действующие в \mathcal{H} , или в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, и их поднятия в \mathfrak{F} ; например, $A(t)$ обозначает как оператор в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, так и оператор $I \otimes A(t)$ в \mathfrak{F} (в \mathcal{H}). Обозначим $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$ алгебраическое тензорное произведение \mathcal{H} и Γ_e . Семейство (вообще говоря, неограниченных) операторов $\{M(t); t \in \mathbf{R}_+\}$, определенных на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$, будет называться процессом в \mathfrak{F} .

Соотношения (1.8), (1.9) задают естественную фильтрацию в пространстве \mathfrak{g} . Процесс $\{M(t); t \in \mathbf{R}_+\}$ в \mathfrak{g} называется согласованным (с данной фильтрацией), если для любого $t \in \mathbf{R}_+$

$$M(t) = M_t \otimes I_t$$

где M_t - оператор, действующий в $\mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(0, t))$, а I_t - единичный оператор в $\Gamma(L^2(t, \infty))$. Благодаря (1.8), (1.9), определено отображение условного ожидания \mathcal{E}_t в алгебру операторов вида (1.10), согласованное с вакуумным состоянием $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Согласованный процесс называется жартингалом, если $\mathcal{E}_t[M(s)] = M(t)$ при $s > t$. Основные процессы $\{A(t)\}$, $\{A^+(t)\}$, $\{\Lambda(t)\}$ являются мартингалами.

Партасарати и Хадсон [108], [20] построили стохастический интеграл от согласованных процессов по основным мартингалам $A(t)$, $A^+(t)$, $\Lambda(t)$. Далее излагается модификация этой конструкции (см. статью А. С. Холево в [145]). Процесс $\{M(t); t \in [0, T]\}$ называется простыск, если существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, такое что $M(t) = M(t_{j-1})$ для $t \in [t_{j-1}, t_j)$. Для четверки простых согласованных процессов $\{M_\alpha(t)\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, стохастический интеграл определяется соотношением

$$\begin{aligned} I(T) &\equiv \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt) = \\ &= \sum_{j=1}^N \{M_0(t_{j-1}) [\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})] + \\ &+ M_1(t_{j-1}) [A(t_j) - A(t_{j-1})] + M_2(t_{j-1}) [A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})] + \\ &+ M_3(t_{j-1}) (t_j - t_{j-1})\} \end{aligned}$$

Из неравенств Журне (см. [128, п. V.1.4]) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq T} \|I(t)\psi \otimes \bar{\psi}_f\|_-^2 &\leq C(\|f\|) \cdot \left\{ \int_0^T |f(t)|^2 \times \right. \\ &\times \|M_0(t)\psi \otimes \psi_f\|^2 dt + \int_0^T [\|M_1(t)\psi \otimes \psi_f\|^2 + \\ &\left. + \|M_2(t)\psi \otimes \psi_f\|^2] dt + \left[\int_0^T \|M_3(t)\psi \otimes \psi_f\| dt \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где $\psi \in \mathcal{H}, f \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Назовем $\{M_\alpha(t)\}$ допустимой четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\{\tilde{M}_\alpha(t)\}$ простых согласованных процессов, такая что

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \left\| [M_0(t) - \tilde{M}_0(t)] \psi \otimes \psi_f \right\| &< \varepsilon \\ \int_0^T \left\| [M_{1,2}(t) - \tilde{M}_{1,2}(t)] \psi \otimes \psi_f \right\|^2 dt &< \varepsilon \\ \int_0^T \left\| [M_3(t) - \tilde{M}_3(t)] \psi \otimes \psi_f \right\| dt &< \varepsilon \end{aligned}$$

и сильно допустимой четверкой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется четверка $\{\widetilde{M}_\alpha\}$ простых согласованных процессов со значениями в $\mathfrak{B}()$, такая что

$$\begin{aligned} \text{ess sup}_{0 < t \leq T} \|M_0(t) - \tilde{M}_0(t)\| &< \varepsilon, \\ \int_0^T \|M_{1,2}(t) - \tilde{M}_{1,2}(t)\|^2 dt &< \varepsilon, \\ \int_0^T \|M_3(t) - \tilde{M}_3(t)\| dt &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Из неравенства (1.12) вытекает, что для любой допустимо четверки стохастический интеграл

$$I(T) = \int_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt)$$

определен на $\mathcal{C} \otimes \Gamma_e$ как сильный предел стохастических интегралов вида (1.11) от простых процессов $\{\tilde{M}_\alpha\}$ и является согласованным процессом. Если $M_3 \equiv 0$, то $I(t)$ является мартингалом; доказано, что достаточно произвольный ограниченный мартингал в пространстве Фока является стохастическим интегралом (Партасарати и Синха). Пример неограниченного мартингала, не представимого в виде стохастического интеграла по основным процессам, содержится в работе Журне [113].

Из определений (1.2) основных мартингалов вытекает явная формула (В. П. Белавкин [35])

$$(I(t)\psi)(\tau) = \int_0^t [M_3(s)\psi + M_1(s)\psi^{(s)}](\tau)ds + \\ + \sum_{\substack{s \in \tau \\ s \leq t}} [M_2(s)\psi + M_0(s)\psi^{(s)}](\tau \setminus \{s\}),$$

где $\psi^{(s)}(\tau) = \psi(\tau \cup \{s\})$, которая может служить для альтернативного определения стохастического интеграла, имеющего смысл для более широких классов процессов (включая несогласованные процессы).

Стохастический интеграл по процессам в антисимметричном пространстве Фока рассматривался Барнетом, Стритером, Уайлдом [62], [141], Хадсоном и Эплбаумом [107].

5.6.2 1.3 Квантовая формула Ито.

Соотношение (1.14) принято записывать в дифференциальной форме

$$dI = M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt$$

Пусть $J(t)$ - другой стохастический интеграл, так что $dJ = N_0 d\Lambda + N_1 dA + N_2 dA^+ + N_3 dt$.

Т е о р е м а. Если четверки $\{M_\alpha\}, \{N_\alpha\}$ сильно допустимы, то произведение $I(t)J(t)$ является стохастическим интегралом, причем

$$d(IJ) = I(dJ) + (dI)J + (dI)(dJ)$$

где произведение вычисляется по следующим формальным правилам: значения любого согласованного процесса в момент t коммутируют со стохастическими дифференциалами основных процессов $d\Lambda(t), dA(t), dA^+(t), dt$, а в слагаемом $(dI)(dJ)$ произведения стохастических дифференциалов основных процессов находятся согласно таблице умножения

	dA^+	$d\Lambda$	dA	dt
dA	dt	dA	0	0
$d\Lambda$	dA^+	$d\Lambda$	0	0
dA^+	0	0	0	0
dt	0	0	0	0

Алгебра стохастических дифференциалов (1.15) с таблицей умножения (1.16) изоморфна некоторой алгебре 3×3 -матриц. Особенно удобна реализация, предложенная В. П. Белавкиным в [35]: соответствие

$$dI = M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt \leftrightarrow$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

оказывается инволютивным алгебраическим изоморфизмом, переводящим инволюцию $(dI)^* = M_0^* d\Lambda + M_2^* dA + M_1^* dA^+ + M_3^* dt$ в инволюцию

$$\begin{bmatrix} 0 & M_1 & M_3 \\ 0 & M_0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & M_2^* & M_3^* \\ 0 & M_0^* & M_1^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

П р и м е р. Рассмотрим стохастические интегралы

$$B(t) = \int_0^t J(s) dA(s), B^+(t) = \int_0^t J(s) dA^+(s)$$

где $J(t) = (-1)^{\Lambda(t)}$ - сильно допустимый процесс. Из формулы (1.24) следующего пункта вытекает, что $J(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dJ = -2Jd\Lambda$$

Пользуясь таблицей (1.16), находим

$$d(BJ + JB) = -2(BJ + JB)d\Lambda$$

Поскольку $B(0) = 0$, то из теоремы следующего пункта вытекает, что $B(t)J(t) + J(t)B(t) \equiv 0$. Снова пользуясь таблицей (1.16), находим $d(BB^+ + B^+B) = dt$, откуда

$$B(t)B^+(t) + B^+(t)B(t) = t,$$

т. е. операторы $B(t), B^+(t)$ удовлетворяют каноническому антикоммутиационному соотношению для фермионных операторов рождения-уничтожения. Этот факт лежит в основе изоморфизма между симметричным (бозонным) и антисимметричным (фермионным) пространствами Фока, установленного Хадсоном и Партасарати [109].

Квантовый стохастический интеграл и формула Ито имеют естественное обобщение на случай многих степеней свободы, когда основные процессы $A_j(t), A_k^+(t), \Lambda_{jk}(t)$ многомерны и действуют в пространстве Фока $\Gamma(L_{\mathcal{H}}^2(\mathbf{R}_+))$, где \mathcal{H} - гильбертово пространство, размерность которого равна числу степеней свободы (Хадсон, М. П. Эванс [143], В. П. Белавкин [35]), а также в нефоковских пространствах, связанных с гауссовскими состояниями канонических коммутационных соотношений (Хадсон, Линдсей [142]).

1.4. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения. Рассмотрим линейное однородное квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dV = [L_0 d\Lambda + L_1 dA + L_2 dA^+ + L_3 dt] V, t \geq 0$$

с начальным условием $V(0) = I$, которое является краткой записью интегрального уравнения

$$V(t) = I + \int_0^t [L_0(s) d\Lambda(s) + L_1(s) dA(s) + L_2(s) dA^+(s) + L_3(s) ds] V(s).$$

Модифицируя рассуждение Хадсона и Партасарати [108], основанные на методе последовательных приближений, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а. Если $\{L_\alpha\}$ - сильно допустимая четверка, то решение $\{V(t); t \in \mathbf{R}_+\}$ уравнения (1.18) существует, единственно и является сильно непрерывным согласованным процессом.

Обозначим \mathcal{P}_t оператор временного сдвига в : $\mathcal{P}_t \psi(\tau) = \psi(\tau_t)$, где $\tau_t = \{t_1 + t, \dots, t_n + t\}$, если $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$. Решение $V(t)$ удовлетворяет уравнению ко ц и к л а

$$V(t+u) = (\mathcal{S}_u^* V(t) \mathcal{S}_u) V(u); t, u \in \mathbf{R}_+$$

Особый интерес представляет случай, когда $V(t), t \in \mathbf{R}_+$, являются унитарными операторами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.18) имело вид

$$dV = \left[(W - I)d\Lambda + LdA^+ - L^*WdA - \left(iH + \frac{1}{2}L^*L \right) dt \right] V,$$

где W -унитарный, а H -самосопряженный операторы из $\mathcal{B}(\mathcal{C})$.

Весьма важной является задача обобщения теоремы существования и единственности решения уравнения (1.18) на случай неограниченных коэффициентов $L_\alpha(t)$. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работах Хадсона и Партасарати [108], Журне [113], Фриджеро, Фаньолы, А. М. Чеботарева [75]. В работе [113] частично решена задача описания силь- но непрерывных унитарных решений уравнения (1.19). Этот вопрос тесно связан с проблемой консервативности, обсуждавшейся в п. 3.2.3.

Уравнения типа (1.18) связаны с линейными стохастическими дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве (см., в частности, А. В. Скороход [33]), и можно надеяться, что эти два направления взаимно обогатят друг друга. Решения уравнения (1.20) являются некоммутативным аналогом мультипликативного процесса с независимыми стационарными приращениями в группе унитарных операторов. Общая теория таких процессов развита Аккарди, фон Вальденфельсом и Шурманом [54]. Последний показал [144], [147], что всякий такой процесс, удовлетворяющий условию равномерной непрерывности, является решением уравнения типа (1.20). Используя аналогию с квантовыми процессами, А. С. Холево указал стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет произвольный классический мультипликативный процесс с независимыми стационарными приращениями в группе Ли (мультипликативный аналог разложения Ито) [104].

Наглядное представление решений уравнения (1.18) дают хронологически упорядоченные экспоненты, родственные мультипликативному стохастическому интегралу в классической теории случайных процессов (по поводу последнего см. Эмери [82]). Пусть $\{\tilde{M}_\alpha(t)\}$ - четверка простых согласованных процессов на $[0, T]$ со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{C})$. Положим

$$V_j = \exp \left[\tilde{M}_0(t_{j-1})(\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})) + \right. \\ \left. + \tilde{M}_1(t_{j-1})(A(t_j) - A(t_{j-1})) + \tilde{M}_2(t_{j-1})(A^+(t_j) - A^+(t_{j-1})) + \right. \\ \left. + \tilde{M}_3(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \right]$$

и обозначим

$$\leftarrow \overleftarrow{\exp} \int_0^T \left(\tilde{M}_0 d\Lambda + \tilde{M}_1 dA + \tilde{M}_2 dA^+ + \tilde{M}_3 dt \right) = \\ = V_N \cdot \dots \cdot V_1.$$

Оператор (1.21) определен на $\mathcal{H} \otimes \Gamma_e$. В работе А. С. Холево (см. [145]) доказано, что если $\{M_\alpha\}$ -сильно допустимая четверка согласованных процессов со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\{\tilde{M}_\alpha^{(N)}\}$ - последовательность четверок простых процессов, аппроксимирующая $\{M_\alpha\}$ в смысле (1.13), то существует сильный предел на $\mathcal{C} \otimes \Gamma_e$ выражений вида (1.21), который называется хронологически упорядоченной экспонентой. При этом семейство хронологически упорядоченных экспонент

$$V(t) = \leftarrow \exp_0^T (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt), \quad t \in \mathbf{R}_+$$

является сильно непрерывным на $\mathcal{C} \otimes \Gamma_e$, согласованным процессом, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1.18), где $\{L_\alpha\}$ и $\{M_\alpha\}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} L_0 &= a(M_0), L_1 = M_1 b(M_0), L_2 = b(M_0) M_2 \\ L_3 &= M_3 + M_1 c(M_0) M_2 \end{aligned}$$

Здесь a, b, c -целые функции

$$a(z) = e^z - 1, \quad b(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad c(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad z \neq 0$$

Используя изоморфизм (1.17), эти соотношения можно объединить в одно матричное равенство

$$\mathbf{L} = e^{\mathbf{M}} - \mathbf{I}$$

Если коэффициенты $M_\alpha(t)$ коммутируют между собой при всевозможных значениях временных аргументов, то хронологически упорядоченная экспонента превращается в обычную

$$V(t) = \exp \int_0^t (M_0 d\Lambda + M_1 dA + M_2 dA^+ + M_3 dt)$$

и дает, таким образом, явное решение уравнения (1.18).

П р и м е р. Решение уравнения

$$dJ_z = z J_z d\Lambda; \quad J_z(0) = \mathbf{I}$$

при $z \neq -1$ записывается в виде

$$J_z(t) = (z + 1)^{\Lambda(t)}, \quad t \in \mathbf{R}_+$$

Если $z = -1$, то решение уравнения (1.24) имеет вид

$$J_{-1}(t) = \delta_{0, \Lambda(t)}$$

где $\delta_{i,j}$ -символ Кронекера. Поскольку $J_{-1}(t)$ обращается в нуль, оно не может быть записано в виде экспоненты.

Хронологически упорядоченные экспоненты

$$V(t) = \leftarrow \exp \int_0^t (L dA^+ - L^* dA - iH dt)$$

рассматривались фон Вандельфельсом, а также Хадсоном и Партасарати в [141], [20]. Эти экспоненты являются унитарными операторами, удовлетворяющими уравнению

$$dV = \left[L dA^+ - L^* dA - \left(iH + \frac{1}{2} L^* L \right) dt \right] V; \quad V(0) = \mathbf{I}$$

П р и м е р. Пусть $\dim \mathcal{H} = 1$ и $f \in L^2(\mathbf{R}_+)$. Экспонента

$$V_f(t) = \exp \int_0^t \left(f(s) dA^+(s) - \overline{f(s)} dA(s) \right)$$

является унитарным решением уравнения

$$dV_f(t) = \left[f(t) dA^+(t) - \overline{f(t)} dA(t) - \frac{1}{2} |f(t)|^2 dt \right] V_f(t)$$

в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Из этого уравнения и квантовой формулы Ито вытекает, что процессы $V_f(t)V_g(t)$ и $V_{f+g}(t) \exp i \operatorname{Im} \int_0^t f(s) \times \overline{g(s)} ds$, где g -другая функция из $L^2(\mathbf{R}_+)$, удовлетворяют одному и тому же уравнению; кроме того, они совпадают при $t = 0$ и, следовательно, тождественно равны, т. е.

$$V_f(t)V_g(t) = V_{f+g}(t) \exp \left[i \operatorname{Im} \int_0^t f(s) \overline{g(s)} ds \right]$$

Рассмотрим $L^2(\mathbf{R}_+)$ как вещественное линейное пространство Z с кососимметричной формой

$$\Delta(f, g) = 2 \operatorname{Im} \int_0^\infty f(s) \overline{g(s)} ds$$

Из (1.28) тогда следует, что операторы $W(f) = V_f(\infty)$ образуют (неприводимое) представление канонического коммутационного соотношения Вейля (1.2.12) в симметричном (бозонном) про. пространстве Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, а формулы (1.4), (1.5) дают инфинитезимальную форму канонического коммутационного соотношения. При этом экспоненциальные векторы играют ту же роль, что и когерентные состояния в случае конечного числа степеней свободы, а отображение дуальности (см. п. 2.1) соответствует переходу к представлению Шрёдингера, диагонализующему операторы $Q(t)$.

Дальнейшие сведения о квантовом стохастическом исчислении можно найти в обзоре Мейера [128], а также в сборниках [142]-[145], охватывающих такие темы, как связи с некоммутативной геометрией (Хадсон, Эшплбаум, Робинсон), применение в теории кратного стохастического интеграла (Маассен, Мейер, Партасарати, Линдсей), некоммутативные случайные блуждания в «игрушечном пространстве Фока» и их сходимость к основным процессам (Партасарати, Линдсей, Аккарди) и другие.

5.6.3 2. Расширения в пространстве Фока

Благодаря структуре непрерывного тензорного произведения, пространство Фока является естественнымместилищем различных «безгранично делимых» объектов. В конце 60-х годов Араки и Стритер рассматривали безгранично делимые представления групп и показали, что такие представления вкладываются в пространство Фока. Поскольку представление группы определяется некоторой положительно определенной функцией, то этот результат дает запись безгранично делимой положительно определенной функции через фоковское вакуумное среднее (см. [96], [138]). Отсюда также следует, что всякое безгранично-делимое распределение вероятностей может быть реализовано как распределение некоторой квантовой наблюдаемой относительно вакуумного состояния в пространстве Фока. Таким образом, пространство Фока вмещает в себя все процессы с независимыми приращениями, а также процессы

«квантового шума», которые дают универсальную модель окружения открытой квантовой системы. Это обстоятельство лежит в основе конструкций расширения, использующих фоковское пространство.

2.1. Винеровский и пуассоновский процессы в пространстве Фока. Если $\{X(t); t \in \mathbf{R}\}$ - коммутирующее семейство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве \mathfrak{g} , то оно ∂a -гомолизуемо: существует пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ и унитарный оператор J из \mathfrak{g} на $L^2(\Omega, \mu)$, такие что

$$(JX(t)J^{-1}\varphi)(\omega) = X_t(\omega)\varphi(\omega)$$

для $\varphi \in L^2(\Omega, \mu)$, где $X_t(\omega)$ - вещественные измеримые функции. При этом для любого $\psi \in \xi$ и ограниченной борелевской функции $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\langle \psi | f(X(t_1), \dots, X(t_n)) \psi \rangle = \int f(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) P(d\omega)$$

где $P(d\omega) = |(J\psi)(\omega)|^2 \mu(d\omega)$ - вероятностная мера на Ω . В этом смысле семейство $\{X(t)\}$ в гильбертовом пространстве \mathfrak{h} с выделенным вектором ψ стохастически эквивалентно случайному процессу $\{X_t(\omega)\}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$.

Рассмотрим коммутирующее (в силу (1.5)) семейство самосопряженных операторов $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Пусть $\{W_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ - стандартный винеровский процесс, $L^2(W)$ - гильбертово пространство комплексных квадратично интегрируемых функционалов от винеровского процесса. Отображение дуальности (Сигал)

$$J\psi = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{P}_n} \dots \int f_n(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1} \dots dW_{t_n}$$

где в правой части формулы - кратные стохастические интегралы в смысле Ито, является изоморфизмом пространства Фока $\mathfrak{F} = \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ и $L^2(W)$, причем

$$J\Psi_0 = 1; \quad JQ(t)J^{-1} = W_t$$

Поэтому семейство $\{Q(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно винеровскому процессу W_t . Аналогичное утверждение справедливо и для коммутирующего семейства $\{P(t)\}$. Заметим, что в силу (1.5) операторы $Q(t)$ и $P(s)$ не коммутируют между собой и поэтому семейство $\{Q(t), P(t)\}$ не эквивалентно двумерному винеровскому процессу. Унитарный оператор $U\psi(\tau) = i^{|\tau|}\psi(\tau)$ переводит ψ_0 в ψ_0 и

$$P(t) = UQ(t)U^{-1}.$$

Оператору U в $L^2(W)$ отвечает преобразование Фурье-Винера ¹⁾.

Рассмотрим теперь коммутирующее семейство самосопряженных операторов $\{\Lambda(t)\}$. Пусть $\{N_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ - пуассоновский процесс интенсивности λ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_\lambda)$ и $L^2(N) \equiv L^2(\Omega, P_\lambda)$. Отображение

$$J^{(\lambda)}\psi = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{P}_n} \dots \int f_n(t_1, \dots, t_n) dX_{t_1} \dots dX_{t_n}$$

где $X_t = \lambda^{-1/2}(N_t - \lambda t)$ - компенсированный пуассоновский процесс, является изоморфизмом пространства Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ и $L^2(N)$, причем

$$J^{(\lambda)}\psi_0 = 1, \quad J^{(\lambda)}\Pi^{(\lambda)}(t)J^{(\lambda)-1} = N_t$$

где

$$\Pi^{(\lambda)}(t) = \Lambda(t) + \sqrt{\lambda}Q(t) + \lambda t.$$

Таким образом, семейство $\{\Pi^{(\lambda)}(t)\}$ в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ с вакуумным вектором ψ_0 стохастически эквивалентно пуассоновскому процессу [108].

С точки зрения классической теории вероятностей соотношение (2.1) не может не вызвать удивления - пуассоновский процесс представлен как сумма винеровского процесса с постоянным сносом и процесса $\Lambda(t)$, равного нулю почти наверное (относительно вакуумного состояния). Дело, конечно, в том, что слагаемые не коммутируют и поэтому не могут рассматриваться как классические случайные процессы на одном вероятностном пространстве. Заметим, что подобная связь между пуассоновским и нормальным распределением хорошо известна в: квантовой оптике [21].

В подходящее пространство Фока $\Gamma(L^2_{\mathcal{H}}(\mathbf{R}_+))$, где $L^2_{\mathcal{H}}(\mathbf{R}_+)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций со значениями в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} , может быть вложен произвольный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями (Партасарати, см. [128]). Представление такого процесса требует, вообще говоря, бесконечного числа независимых процессов рождения-уничтожения-числа частиц.

Среди процессов с независимыми приращениями только ви-

1. См. Т. Хида. Броуновское движение.- М.: Наука, 1987. :неровский и пуассоновский обладают следующим свойством хаотической представимости: гильбертово пространство квадратично интегрируемых функционалов от процесса является прямой суммой подпространств, порождаемых n -кратными стохастическими интегралами (Винер, Ито). Вопрос-какие другие мартингалы обладают этим свойством - привлек внимание специалистов по теории случайных процессов. В частности, Эмери показал, что этим свойством обладает мартингал Аземы

$$X_t = \text{sgn } W_t \sqrt{2(t - g_t)}$$

,где g_t - последний нуль винеровского процесса W_t перед моментом t . Партасарати [137] рассмотрел квантовое стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX.(t) = (c - 1)X(t)d\Lambda(t) + dQ.(t), \quad X(0) = 0$$

и показал, что при любом $c \in [-1, 1]$ оно имеет решение, являющееся коммутирующим семейством самосопряженных операторов и стохастически эквивалентное (относительно вакуумного вектора) мартингалу со свойством хаотической представимости. Как заметил Мейер, при $c = 0$ решение $X(t)$ стохастически эквивалентно мартингалу Аземы. Таким образом, в высшей степени нелинейное преобразование (2.2) винеровского процесса оказывается тесно связанным с линейным стохастическим дифференциальным уравнением для некоммутирующих процессов.

2.2 Стохастические эволюции и расширения динамических полугрупп. Интересный класс безгранично делимых объектов возникает в связи с динамическими полугруппами. Пусть \mathcal{C} — гильбертово пространство, Φ -динамическое отображение в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т. е. нормальное вполне положительное отображение, такое что $\Phi[I] = I$. Назовем Φ безгранично делимым, если для любого $n = 1, 2, \dots$ $\Phi = (\Phi_n)^n$, где Φ_n — динамическое отображение. Если $\{\Phi_t; t \in \mathbf{R}_+\}$ — динамическая полугруппа, то все отображения Φ_t безгранично делимы, поскольку $\Phi_t = (\Phi_{t/n})^n$. С другой стороны, если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то всякое безгранично делимое динамическое отображение имеет вид $\Phi = \mathcal{E} \cdot e^{\mathcal{L}}$, где \mathcal{E} —

условное ожидание на некоторую подалгебру $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{H})$, а \mathcal{L} – вполне диссипативное отображение, оставляющее подалгебру инвариантной [15]. Отображение \mathcal{E} играет роль, аналогичную идемпотентному делителю в теории безгранично делимых положительно определенных функций на группах [138]. Если $\mathcal{E} = \text{Id}$, то через Φ можно провести квантовую динамическую полугруппу.

В работе Хадсона и Партасарати [108] было построено вложение непрерывной по норме квантовой динамической полугруппы в пространство Фока, которое может быть истолковано как расширение до марковского квантового случайного процесса в смысле п. 3.2.6 (см. статью Фриджерио в [142]). Для простоты ограничимся описанием конструкции работы [108] для полугруппы с инфинитезимальным оператором вида

$$\mathcal{L}[X] = i[H, X] + L^*XL - L^*L \circ X$$

где $H, L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $H^* = H$.

Предложение. Пусть $\{\Phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ -квантовая динамическая полугруппа в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ с инфинитезимальным оператором (2.3). тогда

$$\Phi_t[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes I)V(t)], X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

где $\{V(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ -семейство унитарных операторов в $\mathcal{G} = \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, удовлетворяющее уравнению (1.26), а отображение $\mathcal{E}_0 : \mathcal{V}(\mathfrak{G}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{C})$ - усреднение по вакуумному состоянию, определяемое формулой

$$\text{Tr } S \mathcal{E}_0[Y] = \text{Tr}(S \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)Y$$

для любого оператора плотности S в \mathcal{H} и любого $Y \in \mathcal{Z}(\mathfrak{h})$.

Доказательство. Из уравнения (1.26) и квантовой формулы Ито вытекает квантовое уравнение Ланжевена для $X(t)$:

$$\begin{aligned} dX(t) = & [L(t)^*, X(t)]dA(t) + [X(t), L(t)]dA^+(t) + \\ & + \{i[H(t), X(t)] + (L(t)^*X(t)L(t) - L(t)^*L(t) \circ X(t))\}dt \end{aligned}$$

Усредняя по вакуумному состоянию и учитывая первое из соотношений

$$dA(t)\psi_0 = 0, \quad d\Lambda(t)\psi_0 = 0$$

вытекающих из (1.6), получаем, что семейство наблюдаемых $\tilde{\Phi}_t[X] = \mathcal{E}_0[V(t)^*(X \otimes I)V(t)]$ в алгебре системы $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ удовлетворяет уравнению

$$d\tilde{\Phi}_t[X] = \tilde{\Phi}_t[\mathcal{L}[X]]dt; \quad \tilde{\Phi}_0[X] = X$$

Отсюда следует, что $\tilde{\Phi}_t[X] = \exp t\mathcal{L}[X] = \Phi_t[X]$.

Пусть теперь $\{\Psi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ -соответствующая динамическая полугруппа в пространстве состояний. Из представления (2.4) вытекает конструктивное доказательство теоремы о расширении, сформулированной в п. 3.2.6. Обозначим $\mathcal{E}_0 = \Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ пространство Фока, ассоциированное с $L^2(\mathbb{R})$, и пусть $S_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, где ψ_0 – вакуумный вектор в $L^2(\mathbb{R})$. В пространстве $\mathcal{C} \otimes \mathcal{E}_0$ действует группа унитарных операторов временного сдвига $\{\mathcal{P}_t; t \in \mathbb{R}\}$, определяемых как в п. 1.4. Поскольку $\mathcal{H}_0 = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_-)) \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, действие основных процессов $A(t), A^+(t), \Lambda(t); t \in \mathbb{R}_+$; естественно переносится в $\mathcal{C} \otimes \mathcal{H}_0$. Решение уравнения (1.26) является тогда семейством унитарных операторов $\{V(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$, удовлетворяющим соотношению коцикла (1.19). Из этого соотношения вытекает что

$$U_t = \begin{cases} \mathcal{S}_t V(t), & t \in \mathbf{R}_+ \\ V(-t)^* \mathcal{S}_t, & t \in \mathbf{R}_- \end{cases}$$

является группой унитарных операторов в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_0$. Поскольку $\mathcal{P}_t^*(X \otimes \mathbf{I}) \mathcal{P}_t = X \otimes \mathbf{I}$, из (2.4) следует, что

$$\Psi_t[S] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} U_t (S \otimes S_0) U_t^*, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Построенное расширение имеет прозрачную физическую интерпретацию. Группа операторов временного сдвига $\{\mathcal{S}_t\}$ описывает динамику квантового шума, который играет роль окружения рассматриваемой системы. Записывая операторы $V(t)$ в виде хронологически упорядоченной экспоненты (1.25), можно видеть, что они задают эволюцию системы с гамильтонианом H , взаимодействующей с окружением посредством сингулярного гамильтониана

$$H_{\text{Int}} = i \left(L \dot{A} + (t) - L^* \dot{A}(t) \right).$$

Усреднение унитарной эволюции $\{U_t\}$ по вакуумному состоянию шума и дает динамическую полугруппу в $\mathcal{B}(\mathcal{C})$.

Аналогичное унитарное расширение имеет место для произвольной квантовой динамической полугруппы с инфинитезимальным оператором (3.2.4) - надо только использовать квантовое стохастическое исчисление с бесконечным набором операторов рождения-уничтожения.

С точки зрения статистической механики представляет интерес выяснение точных условий, при которых такая в высшей степени идеализированная динамическая система, как квантовый шум, возникает из более реалистичных физических моделей открытых систем (см. в этой связи работу [52], где обсуждаются приближения слабого взаимодействия и малой плотности).

Из формулы (2.4) можно получить представления квантовой динамической полугруппы через решения классических стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве \mathcal{H} (см. статью А. С. Холево в [35]). Пусть W_t - стандартный винеровский процесс и $\{V_t^{(1)}(W); t \in \mathbf{R}_+\}$ - случайный процесс со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV_t^{(1)}(W) = \left[L dW_t - \left(iH + \frac{1}{2} L^* L \right) dt \right] V_t^{(1)}(W) \\ V_0^{(1)}(W) = 1$$

Тогда

$$\Phi_t[X] = \mathbf{M}_{(1)} V_t^{(1)}(W)^* \lambda V_t^{(1)}(W),$$

где $\mathbf{M}_{(1)}$ -математическое ожидание, отвечающее распределению винеровского процесса. С другой стороны, пусть N_t - пуассоновский процесс с единичной интенсивностью и $\{V_t^{(2)}(N);$

Тогда

$$dV_t^{(2)}(N) = \left[(L - \mathbf{I}) dN_t - \left(iH + \frac{1}{2} (L^* L - \mathbf{I}) \right) dt \right] V_t^{(2)}(N) \\ V_0^{(2)}(N) = \mathbf{I}$$

$$\Phi_t[X] = M_{(2)} V_t^{(2)}(N) * \lambda V_t^{(2)}(N)$$

где $M_{(2)}$ - математическое ожидание, отвечающее распределению пуассоновского процесса.

Заметим, что решения уравнений (2.7), (2.9) могут быть записаны в виде хронологически-упорядоченных экспонент (мультипликативных стохастических интегралов)

$$V_t^{(1)}(W) = \leftarrow_{\exp} \int_0^t \left\{ L dW_s - \left[iH + \frac{1}{2} (L^* + L) L \right] ds \right\}$$

$$V_t^{(2)}(N) = \leftarrow_{\exp} \int_0^t \left\{ (\ln L) dN_s - \left[iH + \frac{1}{2} (L^* L - I) \right] ds \right\}.$$

Ограничимся выводом представления (2.8). Введем семейство изометрических операторов $V_t^{(1)}$ из \mathcal{H} в $\mathfrak{H}_\ell = \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, определяемых соотношением

$$V_t^{(1)} \varphi = V(t) (\varphi \otimes \psi_0); \quad \varphi \in \mathcal{HC}.$$

Из уравнения (1.26) следует

$$dV_t^{(1)} = \left[L dQ(t) - \left(iH + \frac{1}{2} L^* L \right) dt \right] V_t^{(1)}$$

поскольку в силу (2.5) коэффициент при $dA(t)$ может быть произвольным. Если воспользоваться теперь преобразованием дуальности, то формула (2.4) перейдет в (2.8), а уравнение (1.26) - в уравнение (2.7). Аналогично, вывод представления (2.10) из формулы (2.4) основан на преобразовании $J^{(\lambda)}$ из п. 2.1 (при $\lambda = 1$) (см. п. 2.4).

2.3. Расширения инструментальных процессов. При рассмотрении процессов непрерывного измерения естественно возникает понятие безграничной делимости инструмента, которое объединяет безграничную делимость распределений вероятностей и динамических отображений. В работе Баркиелли и Лупиери (см. [61], [142]) указано соответствующее расширение в пространстве Фока, которое можно рассматривать как конкретизацию общего результата Озава (п. 4.1.2) для процессов измерения, протекающих во времени. Ограничимся здесь двумя наиболее важными примерами.

Пример 1. Рассмотрим и.-процесс $\{\mathcal{N}_{a,b}^{(1)}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda)[X] = \mathcal{L}[\lambda] + i\lambda (L^* X + X L) - \frac{1}{2} \lambda^2 X,$$

где $L, H = H^*$ -ограниченные операторы в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , а $\mathcal{L}[X]$ дается формулой (2.3). Согласно п. 4.2.3, это есть процесс непрерывного измерения наблюдаемой $A = (L + L^*)$ в системе, эволюционирующей с гамильтонианом H . Из результата Баркиелли и Лупиери следует, что

$$\mathcal{P}_{0,t}^{(1)}(E)[X] = \mathcal{E}_0 \left[V(t)^* \left(X \otimes P_{0,t}^{(1)}(E) \right) V(t) \right]; \quad E \in \mathcal{B}_{0,t}$$

где $\{V(t)\}$ -семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $= \mathcal{H} \otimes \Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$, удовлетворяющее квантовому стохастическому дифференциальному уравнению (1.26), а $P_{0,t}^{(1)}(E)$; $E \in \mathcal{B}_{0,t}$, спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $Q(s)$; $0 \leq s \leq t$, в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ (см. п. 4.2.1) (в силу однородности аналогичное представление имеет место и для $\mathcal{P}_{a,b}^{(1)}$, где $a \leq b$).

Пусть $\{\mathcal{N}_{a,b}^{(1)}\}$ -соответствующий и.-процесс в пространстве состояний. Тогда соотношение (2.16) приобретает вид формулы (4.1.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0,t}^{(1)}(E)[S] = & \text{Tr}_{\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))} V(t) (S \otimes |\psi_0\rangle \langle \psi_0|) \times \\ & \times V(t)^* \left(\mathbf{I} \otimes P_{0,t}^{(1)}(E) \right), \end{aligned}$$

которая имеет ясную физическую интерпретацию: наблюдаемая система, первоначально находившаяся в состоянии S и эволюционирующая с гамильтонианом H , взаимодействует с квантовым шумом посредством сингулярного гамильтониана (2.6). При этом над квантовым шумом, который играет роль пробной системы, производится непрерывное неразрушающее измерение семейства совместимых наблюдаемых $Q(s); 0 \leq s \leq t$.

Пример 2. И.-процесс $\{\mathcal{P}_{a,b}^{(2)}\}$ с генератором

$$\mathcal{L}^{(2)}(\lambda)[X] = i[H, \ddot{\Lambda}] + (L^* X L e^{i\lambda} - L^* L \circ \ddot{\Lambda}),$$

где $H, L \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, является естественным обобщением считающего процесса из п. 4.2.5. Для этого процесса расширение имеет вид

$$\mathcal{S}_{0,t}^{(2)}(E) = \mathcal{E}_0 \left[V(t)^* \left(\mathbf{I} \otimes P_{0,t}^{(2)}(E) \right) V(t) \right]; \quad E \in \mathcal{B}_{0,t}$$

где $P_{0,t}^{(2)}(E); E \in \mathcal{B}_{0,t}$, спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Lambda(s); 0 \leq s \leq t$, в $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$. Соответствующее представление в пространстве состояний

$$\mathcal{K}_{0,t}^{(2)}(E) = \text{Tr}_{\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))} V(t) (S \otimes |\psi_0\rangle \langle \psi_0|) V(t)^* \left(\mathbf{I} \otimes P_{0,t}^{(2)}(E) \right) \quad (2.20)$$

имеет интерпретацию, аналогичную соотношению (2.17).

Несколько слов о методе доказательства соотношения (2.16), (2.19). Обозначим

$$\tilde{\mathcal{P}}_t^{(j)}(B) = \mathcal{E}_0 \left[V(t)^* \left(\mathbf{I} \otimes P_{0,t}^{(j)}(y(\cdot) : y(t) - y(0) \in B) \right) V(t) \right],$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, и введем характеристические функции

Тогда

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} \tilde{\mathcal{P}}_t^{(j)}(dx)$$

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda)[K] = \mathcal{E}_0 \left[V(t)^* \cdot \left(\lambda^n \otimes e^{i\lambda Y^{(j)}(t)} \right) V(t) \right],$$

где $Y^{(1)}(t) = Q(t)$ и $Y^{(2)}(t) = \Lambda(t)$. Используя Квантовую формулу Ито, можно доказать, что функции (2.21) удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \mathcal{L}^{(j)}(\lambda) \cdot \tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) dt,$$

г. е.

$$\tilde{\Phi}_t^{(j)}(\lambda) = \exp t \mathcal{L}^{(j)}(\lambda).$$

Отсюда вытекает, что $\{\tilde{\mathcal{P}}_t^{(j)}\}$ есть сверточная полугруппа, отвечающая и.-процессу $\{\mathcal{P}_{a,b}^{(j)}\}$. В силу взаимной однозначности соответствия между и.-процессами и сверточными полугруппами (п. 4.2.5) отсюда следуют соотношения (2.16), (2.19).

2.4. Стохастические представления процессов непрерывного измерения. Используя прием, который позволил получить в п. 2.2 стохастические представления квантовой динамической полугруппы, найдем соответствующие стохастические представления для процессов непрерывного измерения [105]. Из этих представлений вытекает явное описание распределений вероятностей в пространстве траекторий - исходов непрерывного измерения и апостериорных состояний наблюдаемой квантовой системы.

Рассмотрим сначала и.-процесс с генератором (2.15). Как отмечалось в п. 4.2.5, он сосредоточен на непрерывных траекториях. Пусть $\mu_{(1)}$ -мера Винера в пространстве непрерывных функций \mathcal{B} , отвечающая стандартному винеровскому процессу W_t .

Предложение 1. И.-процесс $\{N_{a,b}^{(1)}\}$ абсолютно непрерывен по мере, $\mu_{(1)}$ в том смысле, что

$$\mathcal{K}_{0,t}^{(1)}(E)[S] = \int_E V_t^{(1)}(W) S V_t^{(1)}(W)^* d_{\mu_{(1)}}(W); E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathcal{C},$$

где $\{V_t^{(1)}(W)\}$ -семейство ограниченных операторов в \mathcal{C} , удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению (2.7) относительно меры $\mu_{(1)}$.

Доказательство основано на применении преобразования дуальности к представлению (2.17). При этом, как в п. 2.2, по-прежнему являются операторы $V_t^{(1)}(W)$, а спектральная мера $P_{0,t}^{(1)}$ семейства $Q(s); 0 \leq s \leq t$, диагонализует, так что проектор $P_{0,i}^{(1)}(E)$ переходит в индикатор множества $E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathcal{C}$.

Соотношение (2.17) дает конкретное представление вполне положительного инструмента $\mathcal{K}_{0,t}^{(1)}$ в виде (4.1.12). Отсюда получается распределение вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий

$$\mu_S(E) = \int_E \text{Tr} S V_t^{(1)}(W)^* V_t^{(1)}(W) d_{\mu_{(1)}}(W); E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathcal{C}$$

Оно абсолютно непрерывно по мере Винера $\mu_{(1)}$, причем плотность дается формулой

$$p_t^{(1)}(W) = \text{Tr} S V_t^{(1)}(W) V_t^{(1)}(W)^*$$

и почти наверное положительна. Апостериорное состояние, отвечающее наблюдаемой траектории $W_s; 0 \leq s \leq t$, есть

$$S_t^{(1)}(W) = p_t^{(1)}(W)^{-1} V_t^{(1)}(W) S V_t^{(1)}(W)^*$$

Отметим, что если начальное состояние чистое, $S = |\psi\rangle\langle\psi|$, то апостериорные состояния являются чистыми $S_t^{(1)}(W) = |\psi_t^{(1)}(W)\rangle\langle\psi_t^{(1)}(W)|$, где

$$\psi_t^{(1)}(W) = V_t^{(1)}(W)\psi / \|V_t^{(1)}(W)\psi\|$$

Перейдем к случаю считающего процесса с генератором (2.18). Пусть $\mu_{(2)}$ -мера в пространстве \mathcal{D} , отвечающая пуассоновскому процессу единичной интенсивности.

Предложение 2. И.-процесс $\{\mathcal{M}_{a,b}^{(2)}\}$ абсолютно непрерывен по мере $\mu_{(2)}$, а именно

$$\mathcal{A}_{0,t}^{(2)}(E)[S] = \int_E V_t^{(2)}(N) S V_t^{(2)}(N)^* d_{\mu_{(2)}}(N); E \in \mathcal{B}_{0,t} \cap \mathcal{D},$$

где $\{V_t^{(2)}(N)\}$ -семейство ограниченных операторов в \mathcal{B} , удовлетворяющее стохастическому дифференциальному уравнению (2.9) относительно меры $\mu_{(2)}$.

Доказательство соотношения (2.25) требует некоторого преобразования представления (2.20). Рассмотрим унитарные операторы Вейля $V_s(t) = \exp [zA^+(t) - zA(t)]$, где $z \in \mathbf{C}$. При $s \leq t$ имеет место соотношение

$$V_x(t)^* \Lambda(s) V_z(t) = \Lambda(s) + \bar{z}A(s) + zA^+(s) + |z|^2 s \equiv \Pi(s)$$

которое проверяется с использованием уравнения (1.27) и квантовой формулы Ито. Положим $\bar{z} = 1$, тогда $\Pi(s)$ является пуассоновским процессом единичной интенсивности в пространстве

Фока. Обозначая $\tilde{U}_t = V_1(t) * V(t)$, перепишем (2.20) в виде

$$\mathbf{x}_{0,t}^{(2)}(E) = \text{Tr}_{\Gamma(L^2(R_+))} \tilde{U}_t (S \otimes |\psi_0\rangle \langle \psi_0|) \tilde{U}_t^* \left(\mathbf{I} \otimes \tilde{P}_{0,t}^{(2)}(E) \right),$$

где $\tilde{P}_{0,t}^{(2)}$ -спектральная мера семейства совместимых наблюдаемых $\Pi(s)$; $0 \leq s \leq t$. Из квантовой формулы Ито вытекает уравнение для \tilde{U}_t :

$$d\tilde{U}_t = \left\{ (L - \mathbf{I})dA^+(t) - (L - \mathbf{I})^*dA(t) - \left[iH + \frac{1}{2} (L^*L - 2L + \mathbf{I}) \right] dt \right\} \tilde{U}_t$$

Вводя изометрические операторы $V_t^{(2)}$ из \mathcal{C} в \mathfrak{F} по формуле

$$V_t^{(2)}\varphi = \tilde{U}_t(\varphi \otimes \psi_0); \quad \varphi \in \mathcal{B}$$

и учитывая соотношения (2.5), получаем уравнение

$$dV_t^{(2)} = \left\{ (L - \mathbf{I})d\Pi(t) - \left[iH + \frac{1}{2} (L^*L - \mathbf{I}) \right] dt \right\} V_t^{(2)}$$

Унитарный оператор $J^{(1)}$ из п. 2.1 переводит пространство Фока $\Gamma(L^2(\mathbf{R}_+))$ в $L^2(N)$, где N_t - классический пуассоновский процесс единичной интенсивности, при этом уравнение (2.27) переходит в (2.9), проектор $\tilde{P}_{0,t}^{(2)}(E)$ - в индикатор множества E , а формула (2.26) - в представление (2.25).

Для распределения вероятностей в пространстве наблюдаемых траекторий и апостериорных состояний получаются формулы, аналогичные (2.23) - (2.25).

2.5. Нелинейные стохастические уравнения апостериорной динамики. Получим стохастические дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют наблюдаемые траектории и апостериорные состояния в процессе непрерывного квантового измерения. Рассмотрим сначала процесс измерения наблюдаемой $A = L + L^*$ с генератором (2.15). Из уравнения (2.7) для семейства $V_t^{(1)}(W)$ и формулы (2.23) вытекает, что плотность $P_t^{(1)}(W)$ распределения вероятностей наблюдаемых траекторий μ_s относительно меры Винера $\mu_{(1)}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dp_t^{(1)}(W) = m_t(W)p_t^{(1)}(W)dW$$

где

$$m_t(W) = \text{Tr } S_t^{(1)}(W)A$$

- апостериорное среднее наблюдаемой A . Отсюда следует¹⁾, что наблюдаемый процесс $Y(t)$ является процессом диффузионного типа, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dY(t) = m_t(Y)dt + dW_t$$

1. См. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 7.2.

Применяя стохастическое исчисление Ито, получаем уравнение для апостериорного состояния (2.24)

$$dS_t^{(1)}(Y) - \mathcal{K} [S_t^{(1)}(Y)] = \left[(L - m_t(Y)) S_t^{(1)}(Y) + S_t^{(1)}(Y) (L - m_t(Y))^* \right] [dY(t) - m_t(Y)dt]$$

где

$$\mathcal{K}[S] = -i[H, S] + LSL^* - L^*L \circ S$$

Это уравнение было получено В. П. Белавкиным из рассмотрения квантового аналога задачи фильтрации случайных процессов [64]. В случае чистых состояний уравнение для вектора апостериорного состояния имеет вид

$$d\psi_t^{(1)}(Y) = [L - m_t(Y)] \psi_t^{(1)}(Y) [dY(t) - m_t(Y)dt] - \left[iH + \frac{1}{2} (L^*L - 2Lm_t(Y) + m_t(Y)^2) \right] \psi_t^{(1)}(Y)dt$$

Нелинейность уравнений (2.30), (2.31) обусловлена нормировкой апостериорных состояний (2.24), в основе же лежит линейное стохастическое уравнение (2.7) типа уравнения Закаи в классической теории фильтрации.

Большой интерес представляет задача вывода и исследования уравнений (2.30), (2.31) в случае, когда L, H - неограниченные операторы. В работе В. П. Белавкина и Сташевского [65] рассмотрено уравнение

$$d\psi_t^{(1)}(Y') = (Q - m_t(Y)) \psi_t^{(1)}(Y) [dY(t) - m_t(Y)dt] - \left[iP^2/2m + \frac{1}{2} (Q - m_t(Y))^2 \right] \psi_t^{(1)}(Y)dt$$

которое получается из (2.31) формальной заменой $H = P^2/2m$, $L = Q$, где P, Q - канонические наблюдаемые нерелятивистской частицы массы m . Это соответствует непрерывному приближенному измерению координаты свободной частицы. Найдено явное решение в случае гауссовского начального состояния и показано, что оно является гауссовским с дисперсией, стремящейся к конечному пределу при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, уравнение (2.32) снимает известный квантовомеханический парадокс с распылением волнового пакета свободной частицы.

Интересно, что сходные нелинейные уравнения, однако с совершенно иной мотивировкой и интерпретацией, возникли практически одновременно в работах ряда авторов, занимающихся поисками альтернативного концептуального обоснования теории квантового измерения. В работе, опубликованной в сборнике [142], Гирарди, Римини и Вебер поставили вопрос о нахождении уравнений, дающих единое описание микро-и макросистем, из которых, в частности, вытекали бы как обратимая квантовая динамика, так и необратимые изменения типа проекционного постулата. Предлагались различные решения этого вопроса; в работах Джизена [91], Гирарди, Пирла и Римини [89] введено уравнение типа (2.31), где, однако, вместо $dY(t) - m_t(Y)dt$ фигурирует стохастический дифференциал некоторого априорно данного винеровского процесса (уравнение в [91]

отличается за счет выбора фазового множителя у $\psi_t^{(1)}$. Пусть $H = 0, L = \sum x_i E_i$ - самосопряженный оператор с чисто точечным спектром. В [91], [89] отмечается, что получающееся уравнение

$$d\psi_t = (L - \langle L \rangle_t) \psi_t dW_t - \frac{1}{2} (L - \langle L \rangle_t)^2 \psi_t dt$$

где $\langle L \rangle_t = \langle \psi_t | L \psi_t \rangle$, дает динамическое описание проекционного постулата $\psi \rightarrow \psi_i = E_i \psi / \|E_i \psi\|$, в том смысле, что при $t \rightarrow +\infty$ решение ψ_t стремится к одному из состояний ψ_i . В работе Гатарека и Джизена [88] дано математическое исследование уравнения (2.33) для неограниченного оператора L , а также уравнения типа (2.32). Для доказательства существования слабого решения эти авторы использовали формальный прием преобразования вероятностной меры (теорему Гирсанова), который в схеме непрерывного измерения имеет содержательный смысл перехода от процесса $Y(t)$ к винеровскому процессу W_t , определяемого формулой (2.29).

В случае считающего процесса с генератором (2.18) стохастическое уравнение для плотности в пространстве траекторий имеет вид

$$dp_t^{(2)}(N) = [\lambda_t(N) - 1] p_t^{(2)}(N) (dN - dt)$$

где

$$\lambda_t(N) = \text{Tr } S_t^{(2)}(N) L^* L$$

- апостериорная интенсивность скачков. Уравнение для апостериорного состояния

$$\begin{aligned} dS_t^{(2)}(Y) - \mathcal{K} [S_t^{(2)}(Y)] dt = \\ = \left[\frac{L S_t^{(2)}(Y) L^*}{\lambda_t(Y)} - I \right] [dY(t) - \lambda_t(Y) dt] \end{aligned}$$

В статье В. П. Белавина в сборнике [35] приведено общее нелинейное уравнение квантовой фильтрации, включающее в себя как уравнение (2.30), так и (2.34).

6 Квантовый шум и квантовые преобразования

Классический шум и марковские процессы

Квантовые преобразования

Обзор

Окружающая среда и квантовые преобразования Представление операторной суммой
Аксиоматический подход к квантовым преобразованиям Примеры квантового шума и квантовых преобразований След и частичный след Геометрическая картина квантового преобразования одного кубита Каналы с классической ошибкой и переворотом фазы Деполяризующий канал Затухание амплитуды Затухание фазы Применения квантовых преобразований Мастер-уравнения Томография квантовых процессов Ограничения формализма квантовых преобразований Меры различия квантовой информации Меры различия классической информации Насколько близки два квантовых состояния? Следовая метрика Степень совпадения Связь между мерами различия Насколько квантовый канал сохраняет информацию?

7 Исправление квантовых ошибок

Введение
Трехкубитовый код, исправляющий классические ошибки
Трехкубитовый код, исправляющий фазовые ошибки
Код Шора
Теория исправления квантовых ошибок
Дискретизация ошибок
Модели независимых ошибок
Вырожденные коды
Квантовая граница Хэмминга
Построение квантовых кодов
Классические линейные коды
Коды Кальдербанка-Шора-Стина
Симплектические коды
Формализм стабилизаторов
Унитарные операторы и формализм стабилизаторов
Измерения в формализме стабилизаторов
Теорема Готтесмана-Нилла
Построение симплектических кодов
Примеры
Стандартная форма симплектического кода
Оглавление
Квантовые схемы для кодирования, декодирования и исправления ошибок
Квантовые вычисления, устойчивые к ошибкам
Устойчивость к ошибкам, общая картина
Устойчивые к ошибкам квантовые логические элементы
Устойчивое к ошибкам измерение
Элементы надежного квантового вычисления

8 Энтропия и информация

Шенноновская энтропия, Основные свойства энтропии
Двоичная энтропия
Относительная энтропия
Условная энтропия и взаимная информация
Неравенство обработки данных
Энтропия фон Неймана
Квантовая относительная энтропия
Основные свойства энтропии
Измерения и энтропия
Субаддитивность
Вогнутость энтропии
Энтропия смеси квантовых состояний
Сильная субаддитивность
Доказательство сильной субаддитивности
Сильная субаддитивность: основные применения

9 Квантовая теория информации

Различение квантовых состояний и доступная информация
Граница Холево
Примеры применения границы Холево
Сжатие данных
Теорема Шеннона о кодировании для канала без шума
Теорема Шумахера о кодировании для квантового канала без шума
Передача классической информации по квантовым каналам с шумом
Связь по классическому каналу с шумом
Связь по квантовым каналам с шумом
Квантовая информация в квантовых каналах с шумом
Обменная энтропия и квантовое неравенство Фано
Квантовое неравенство обработки данных
Квантовая граница Синглтона
Исправление квантовых ошибок, охлаждение и демон Максвелла
Запутанность как физический ресурс
Преобразование запутанности чистого состояния системы из двух компонент
Очищение и разбавление запутанности
Очищение запутанности и исправление квантовых ошибок
Квантовая криптография
Криптография с закрытым ключом
Усиление конфиденциальности и согласование информации
Квантовое распределение ключей
Секретность и когерентная информация
Безопасность квантового распределения ключей

Part V

Квантовые вычисления

10 Квантовые схемы

Квантовые алгоритмы Операции на одном кубите Условные операции Измерение Универсальные квантовые элементы Универсальность двухуровневых унитарных операторов Универсальность набора из однокубитовых элементов и CNOT Конечный набор универсальных операций Трудность аппроксимации общего унитарного оператора в общем случае ; Сложность квантовых вычислений Модель квантовых схем вычислений

Моделирование квантовых систем Моделирование в действии Алгоритм квантового моделирования Пример Перспективы квантового моделирования

10.0.1 Моделирование квантового компьютера

(разберу, интересная и популярная тема)

11 Квантовое преобразование Фурье и его приложения

Квантовое преобразование Фурье Определение собственного числа Оценка скорости работы и вероятности ошибки Приложения: нахождение порядка и факторизация Нахождение порядка * Факторизация Общие приложения квантового преобразования Фурье Нахождение периода Дискретный логарифм Задача о скрытой подгруппе Возможны ли другие квантовые алгоритмы?

12 Квантовые алгоритмы поиска

Квантовый алгоритм поиска Оракул Процедура Геометрическая интерпретация Эффективность Квантовый поиск как квантовое моделирование Квантовое перечисление Ускорение решения NP-полных задач; Квантовый поиск в неструктурированной базе данных Оглавление Оптимальность алгоритма поиска Ограничение алгоритмов в модели черного ящика

13 О физической реализации квантовых компьютеров

Основные принципы Условия для квантового вычисления Представление квантовой информации Реализация унитарных операторов Приготовление начального состояния Измерение конечного результата Гармонический осциллятор как модель квантового компьютера Физическая аппаратура Гамильтониан Квантовые вычисления Недостатки Квантовый компьютер на оптических фотонах Физическая аппаратура Квантовые вычисления Недостатки Квантовая электродинамика в оптических резонаторах Физическая аппаратура Гамильтониан Поглощение и преломление для одиночного фотона и одиночного атома Квантовые вычисления Ионы в ловушке Физическая аппаратура Гамильтониан Квантовые вычисления Эксперимент Ядерный магнитный

резонанс Физическая аппаратура Гамильтониан Квантовые вычисления Эксперимент
Другие варианты реализации

Part VI

Problems

14 Типичные задачи

14.1 Общие вопросы

14.1.1 Задачи на проверку основ теории

14.2 Типичные задачи (!!)

(!!! добавлю много из Филиппова семинаров!!! очень хорошо по ним тренироваться)

14.2.1 Задачи на понимание состояний, запутанности, простейших преобразований

Ф-вв-л2.1 Параметры Стокса

Найдите параметры Стокса для поляризационного состояния фотона

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|H\rangle + \frac{e^{i\pi/6}}{2}|V\rangle$$

Решение

Представляем состояние в виде столбца, находим матричный элемент (??? Почему такие формулы???)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-i \\ e^{i\pi/6} \end{pmatrix} \quad \langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & e^{-i\pi/6} \end{pmatrix}$$

$$\langle X \rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & e^{-i\pi/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-i \\ e^{i\pi/6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}-1}{4}$$

$$\langle Y \rangle = \langle\psi|Y|\psi\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & e^{-i\pi/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-i \\ e^{i\pi/6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$$

$$\langle Z \rangle = \langle\psi|Z|\psi\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+i & e^{-i\pi/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-i \\ e^{i\pi/6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Ф-вв-л2.2 Измерение

Физическая величина задаётся оператором $F = 2|H\rangle\langle H| + (1-i)|H\rangle\langle V| + (1+i)|V\rangle\langle H|$. Какие результаты можно получить при измерении этой физической величины?

Решение

Пишем состояние в виде матрицы и находим собственные значения:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$
$$\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Ф-вв-л2.3 Коллапс

В какие состояния может перейти (коллапсировать) квантовая система при измерении физической величины $F = 2|H\rangle\langle H| + (1-i)|H\rangle\langle V| + (1+i)|V\rangle\langle H|$?

Решение

$$F|f_{\pm}\rangle = \lambda_{\pm}|f_{\pm}\rangle$$
$$|f_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad |f_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+i \end{pmatrix}$$

Ф-вв-л2.4 Перепутанность

При каких значениях действительного параметра φ квантовое состояние двух фотонов

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|H\rangle \otimes |H\rangle + |H\rangle \otimes |V\rangle + |V\rangle \otimes |H\rangle + e^{i\varphi}|V\rangle \otimes |V\rangle)$$

является перепутанным?

Решение

Задача сводится к проверке определения:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Ответ: при всех $\varphi \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ф-вв-л3.2 Измерение

Двухкубитная система находится в квантовом состоянии $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, где $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ - стандартный базис для каждого кубита. В некоторый момент времени происходит измерение физической величины $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ над первым кубитом. В какие состояния может перейти (коллапсировать) вся система после измерения?

Решение

(думать нужно, там его рукой написан ответ)

Ф-вв-л3.3 Спектр

Какие значения может принимать при измерении физическая величина $F \otimes G$ если $F = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ и $G = (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

Решение

(думать нужно, там его рукой написан ответ)

14.2.2 Задачи о кубитах

Вопросы по теории

Какое ускорение в решении задачи поиска можно получить в квантовом алгоритме по сравнению с классическим

?

\sqrt{N}

(???? А почему??????)

14.2.3 Задачи о кутритах и схожем

6. О

(а) Можно ли преобразовать состояние двух кутритов $\sqrt{\frac{7}{12}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|22\rangle$ в состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{2}|11\rangle + \frac{i}{\sqrt{8}}|20\rangle + \frac{e^{i\pi/3}}{\sqrt{8}}|22\rangle$ посредством локальных операций и классической коммуникации?

(б) Можно ли преобразовать состояние двух кутритов $\sqrt{\frac{7}{12}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{12}}|22\rangle$ в состояние $\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{6}}|11\rangle + \frac{i}{2}|20\rangle + \frac{e^{i\pi/3}}{2}|22\rangle$ посредством локальных операций и классической коммуникации?

15 Другие задачи (????)

(???? тут много еще про это нужно думать.)

15.0.1 Разные задачи (????)

(???? тут много еще про это нужно думать.)

1.

Для d -уровневой системы, где d — простое число, экспериментатор равновероятно выбирает взаимно несмещенные базисы $\{|a\alpha\rangle\}_\alpha, a = 1, \dots, d+1$ (из полного набора таких базисов) и проводит проективные измерения в этих базисах. Выразите матрицу плотности ρ через вероятности исходов измерений.

2. О

Известно, что чистые кубитные состояния $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ и $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ генерируются квантовым источником с вероятностями $p_1 = \frac{4}{5}$ и $p_2 = \frac{1}{5}$ соответственно. Какова максимально возможная вероятность успеха в задаче безошибочного различения этих состояний?

3. О

Найдите физически реализуемое приближение для транспонирования d -уровневой квантовой системы. Для этого рассмотрите деполяризующее отображение $\Phi_q[\rho] = q\rho + (1-q)\text{tr}[\rho]\frac{I_d}{d}$ и укажите диапазон для действительного параметра q , при котором отображение Φ_q о T является квантовым каналом. $)T$ — транспонирование в фиксированном ортонормированном базисе).

5. Кубитный инструмент

Рассмотрите кубитный инструмент $\{i \rightarrow \mathcal{I}_i\}$ с двумя элементарными исходами ($i = 1, 2$) вида $\mathcal{I}_1[\varrho] = \frac{1}{2}U_1\sqrt{1+p\sigma_z}\varrho\sqrt{1+p\sigma_z}U_1^\dagger$, $\mathcal{I}_2[\varrho] = \frac{1}{2}U_2\sqrt{1-p\sigma_z}\varrho\sqrt{1-p\sigma_z}U_2^\dagger$, где U_1 и U_2 – унитарные операторы, $-1 < p < 1$. Постройте физическую реализацию этого квантового инструмента.

7.

Классический источник производит биты "0" и "1" с вероятностями p_0 и p_1 соответственно. Бит "1" физически кодируется в оптический импульс интенсивности $I_1 = I$, а бит "0" соответствует отсутствию сигнала ($I_0 = 0$). Информация передается по длинному оптоволокну и детектируется "оп-off" детектором. В результате ослабления оптического импульса в волокне и конечной квантовой эффективности детектора вероятность зарегистрировать исход "оп" при пересылке бита "1" равна $1/2$. Темновых отсчетов у детектора нет. Найдите пропускную способность классического канала связи. Каким должно быть соотношение битов "0" и "1" в словах, используемых для достижения максимальной скорости надежной передачи данных?

8. Дефазировка

В линии квантовой коммуникации происходит дефазировка квантовых состояний и присутствуют потери частиц, что приводит к квантовому каналу

$$\Phi[\varrho] = \left(\frac{p(q\varrho + (1-q)\sigma_x\varrho\sigma_x)}{0} \middle| \frac{0}{(1-p)\text{tr}[\varrho]} \right), \quad 0 \leq p, q \leq 1$$

где ϱ – матрица плотности кубита. Используя однобуквенные кодирования, при которых среднее состояние ансамбля ϱ_A является максимально смешанным,

- оцените классическую пропускную способность этого канала;
- найдите комплементарный канал;
- оцените классическую пропускную способность линии связи с использованием ресурса перепутанности;
- оцените квантовую пропускную способность линии связи.

9.

При каком условии на параметр q кубитный деполяризующий канал $\Phi_q[\varrho] = q\varrho + (1-q)\text{tr}[\varrho]\frac{I}{2}$ является дважды самосовместимым? Т.е., при каких значениях шумового параметра q возможно приближенное клонирование произвольных кубитных состояний?

10. О кинетическом уравнении Накажimy-Цванцига для кубита

Решите кинетическое уравнение Накажimy-Цванцига для кубита:

$$\frac{d}{dt}\varrho(t) = \int_0^t (\gamma\delta(t-t') - \gamma^2 \sin[\gamma(t-t')]) [\sigma_z\varrho(t')\sigma_z - \varrho(t')] dt'$$

15.0.2 Об особенных квантовых каналах (?????)

4. О канале Ландау-Стритера

Докажите, что канал Ландау-Стритера является унистохастическим.
(не думаю, что про это думать полезно пока минимальный уровень не взят.)

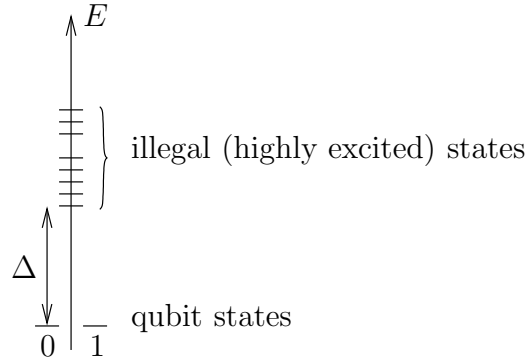


Figure 1: Spectrum of a physical qubit system.

Part VII

Другие темы

16 Другие темы

17 Topological phases and quantum computation

A. Kitaev, C. Laumann

17.1 Introduction: The quest for protected qubits

The basic building block of quantum computation is the qubit, a system with two (nearly) degenerate states that can be used to encode quantum information. Real systems typically have a full spectrum of excitations that are considered illegal from the point of view of a computation, and lead to decoherence if they couple too strongly into the qubit states during some process. See Fig. 1. The essential problem then is to preserve the quantum state of the qubit as long as possible to allow time for computations to take place.

Assuming the gap Δ to the illegal states is reasonable, we can quite generally describe the dynamics of the qubit state by an effective Schrödinger equation

$$\frac{d}{dt} |\Psi\rangle = -iH_{\text{eff}} |\Psi\rangle \quad (17.1)$$

where H_{eff} is the effective qubit Hamiltonian. In quantum optics, H_{eff} is often known with high precision. This is not so in condensed matter systems such as quantum dots. Even worse, H_{eff} may fluctuate or include interaction with the environment. This causes decoherence of the qubit state.

Ideally, we would like to arrange for H_{eff} to be zero (or $H_{\text{eff}} = \epsilon I$) for some good reason. Usually, we use a symmetry to protect degeneracies in quantum systems. For example, a quantum spin $\frac{1}{2}$ has a two-fold degeneracy protected by the $SU(2)$ symmetry, as do the $2s + 1$ degeneracies of higher spins s . Indeed, any *non-Abelian* symmetry would work. Unfortunately, the $SU(2)$ symmetry of a spin is lifted by magnetic fields and it's generally difficult to get rid of stray fields.

Rather than symmetry, in what follows we will look to topology to provide us with physically protected degeneracies in quantum systems. In particular, we will examine a number of exactly solvable models in one and two dimensions which exhibit topologically phases – that is, gapped phases with a protected ground state degeneracy dependent on the topology of the

manifold in which the quantum model is embedded. In Sec. 17.2 we warm up with the study of several quantum chains that exhibit Majorana edge modes and thus a two-fold degeneracy on open chains. The topological phenomena available in two dimensional models are much richer and will be the focus of the remaining three sections. We introduce and solve the toric code on the square lattice in Sec. 17.3, exhibiting its topological degeneracy and excitation spectrum explicitly. The following section steps back to examine the general phenomenology of quasiparticle statistics braiding in two dimensional models. Finally, in Sec. 17.5 we introduce the honeycomb lattice model which exhibits several kinds of topological phases, including that of the simple toric code and, in the presence of time reversal symmetry breaking, a gapped phase with chiral edge modes protected by the topology of the Fermi surface.

17.2 Topological phenomena in 1D: boundary modes in the Majorana chain

We will consider two examples of 1D models with \mathbb{Z}_2 symmetry and topological degeneracy: the *transverse field Ising model* (TFIM) and the *spin-polarized superconductor* (SPSC). Although these models look rather different physically, we will find that they are mathematically equivalent and that they both exhibit a topological phase in which the ground state degeneracy is dependent on the boundary conditions of the chain. That is, the ground state on an open chain is 2-fold degenerate due to the presence of boundary zero modes, whereas the ground state is unique on a closed loop. This topological degeneracy will be stable to small *local* perturbations that respect the \mathbb{Z}_2 symmetry. More details on these models may be found in [4].

1. The *transverse field Ising model* is a spin-1/2 model with Hamiltonian:

$$H_S = -J \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x - h_z \sum_{j=1}^N \sigma_j^z. \quad (17.2)$$

Here J is the ferromagnetic exchange coupling in the x direction and h_z is a uniform transverse (z) field. This model has a \mathbb{Z}_2 symmetry given by a global spin flip in the σ_x basis:

$$P_S = \prod_{j=1}^N \sigma_j^z \quad (17.3)$$

2. The *spin-polarized 1-D superconductor* is a fermionic system with Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H_F = & \sum_{j=1}^{N-1} \left(-w(a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) + \Delta a_j a_{j+1} + \Delta^* a_{j+1}^\dagger a_j^\dagger \right) \\ & - \mu \sum_{j=1}^N \left(a_j^\dagger a_j - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (17.4)$$

where a_j and a_j^\dagger are fermionic annihilation and creation operators, w is the hopping amplitude, Δ is the superconducting gap and μ is the chemical potential. For simplicity, we will assume that $\Delta = \Delta^* = w$, so that

$$H_F = w \sum_{j=1}^{N-1} (a_j - a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger) - \mu \sum_{j=1}^N \left(a_j^\dagger a_j - 1/2 \right). \quad (17.5)$$

This model has a \mathbb{Z}_2 symmetry given by the fermionic parity operator:

$$P_F = (-1)^{\sum_j a_j^\dagger a_j} \quad (17.6)$$

Although the two models are mathematically equivalent, as we will see in Sec. 17.2.2, they are clearly physically different. In particular, for the superconductor, the \mathbb{Z}_2 symmetry of fermionic parity cannot be lifted by any local physical operator, as such operators must contain an even number of fermion operators. Unfortunately, for the spin system the degeneracy is lifted by a simple longitudinal magnetic field $h_x \sum_j \sigma_j^x$ and thus the topological phase of the TFIM would be much harder to find in nature.

17.2.1 Nature of topological degeneracy (spin language)

Consider the transverse field Ising model of Eq. (17.2). With no applied field, there are a pair of Ising ground states ($h_z = 0$):

$$|\psi_{\rightarrow}\rangle = |\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow\rangle, \quad |\psi_{\leftarrow}\rangle = |\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\leftarrow\rangle. \quad (17.7)$$

The introduction of a small field h_z allows the spins to flip in the σ^x basis. In particular, tunneling between the two classical ground states arises via a soliton (domain-wall) propagating from one side of the system to the other:

$$|\rightarrow\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow\rangle \longrightarrow |\leftarrow:\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow\rangle \longrightarrow |\leftarrow\leftarrow:\rightarrow\cdots\rightarrow\rangle \quad (17.8)$$

$$\longrightarrow |\leftarrow\leftarrow\leftarrow:\cdots\rightarrow\rangle \longrightarrow \cdots \longrightarrow |\leftarrow\leftarrow\leftarrow\cdots\leftarrow\rangle. \quad (17.9)$$

As usual, the tunneling amplitude t associated with this transition falls off exponentially in the distance the soliton must propagate

$$t \sim e^{-N/\xi} \quad (17.10)$$

where ξ is the correlation length of the model. The two-fold degeneracy is therefore lifted by the effective Hamiltonian:

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ -t & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.11)$$

The splitting is exponentially small in the system size and the two-fold degeneracy is recovered in the thermodynamic limit as expected. Moreover, it is clear why introduction of a longitudinal field h_x will fully split the degeneracy.

17.2.2 Reduction of TFIM to SPSC by the Jordan-Wigner transformation

To show the equivalence of the one dimensional models introduced above, we will use a standard Jordan-Wigner transformation to convert the spins of the Ising model into fermions. It is perhaps not surprising that a fermionic description exists for spin 1/2 systems – we simply identify the up and down state of each spin with the presence or absence of a fermion. The only difficulty arises in arranging the transformation so that the appropriate (anti)-commutation relations hold in each description. The Jordan-Wigner transformation does this by introducing string-like fermion operators that work out quite nicely in 1-D nearest neighbor models.

To reduce H_S to H_F , we

1. Associate the projection onto the z -axis of the spin with the fermionic occupation number:

$$|\uparrow\rangle \leftrightarrow n = 0, \quad |\downarrow\rangle \leftrightarrow n = 1. \quad (17.12)$$

That is,

$$\sigma_j^z = (-1)^{a_j^\dagger a_j}. \quad (17.13)$$

2. Introduce the string-like annihilation and creation operators

$$\begin{aligned} a_j &= \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k^z \right) \sigma_j^+ \\ a_j^\dagger &= \left(\prod_{k=1}^{j-1} \sigma_k^z \right) \sigma_j^- \end{aligned} \quad (17.14)$$

where σ^+ and σ^- are the usual spin raising and lower operators. At this stage, we can check that the usual fermionic anticommutation relations hold for the a_j, a_j^\dagger :

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (17.15)$$

3. Observe that

$$\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x = -(a_j - a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger), \quad (17.16)$$

so H_S (Eq. (17.2)) reduces to H_F (Eq. (17.5)) with

$$w = J, \quad \mu = -2h_z \quad (17.17)$$

17.2.3 Majorana operators

Majorana operators provide a convenient alternative representation of Fermi systems when the number of particles is only conserved modulo 2, as in a superconductor. Given a set of N Dirac fermions with annihilation/creation operators a_j, a_j^\dagger , we can define a set of $2N$ real Majorana fermion operators as follows:

$$\begin{aligned} c_{2j-1} &= a_j + a_j^\dagger \\ c_{2j} &= \frac{a_j - a_j^\dagger}{i}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

These operators are Hermitian and satisfy a fermionic anticommutation relation:

$$\begin{aligned} c_k^\dagger &= c_k \\ c_k^2 &= 1, \quad c_k c_l = -c_l c_k \quad (k \neq l). \end{aligned} \quad (17.19)$$

Or, more compactly,

$$\{c_k, c_l\} = 2\delta_{kl}. \quad (17.20)$$

From any pair of Majorana operators, we can construct an annihilation and creation operator for a standard Dirac fermion ($a = (c_1 + ic_2)/2$ and h.c.), and thus the unique irreducible representation for the pair is a 2-dimensional Hilbert space which is either occupied or unoccupied by the a fermion.

Both models H_S and H_F can be written as

$$H_{\text{maj}} = \frac{i}{2} \left(v \sum_{j=1}^N c_{2j-1} c_{2j} + w \sum_{j=1}^{N-1} c_{2j} c_{2j+1} \right) \quad (17.21)$$

where $v = h_z = -\mu/2$ and $w = J$. The \mathbb{Z}_2 symmetry of fermionic parity is given in the Majorana language by

$$P_{\text{maj}} = \prod_{k=1}^N (-ic_{2k-1} c_{2k}). \quad (17.22)$$

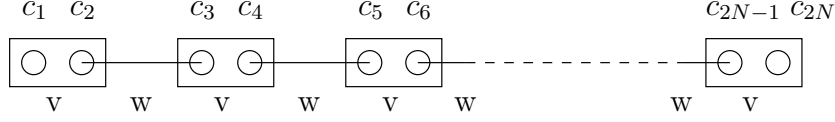


Figure 2: Majorana chain representation of 1-d superconductor. Each boxed pair of Majoranas corresponds to one site of the original fermionic chain.

We can view this model graphically as a chain of coupled Majorana modes, two to each of the N sites of the original problem as in Fig. 2. If $v = 0$, then the Majorana modes at the ends of the chain are not coupled to anything. This immediately allows us to identify the 2-fold ground state degeneracy in H_{maj} as the tensor factor given by the 2-dimensional representation of the boundary pair c_1, c_{2N} .

We will see in Sec. 17.2.4 that if $v \neq 0$ but $|v| < w$, the operators c_1 and c_{2N} are replaced by some *boundary mode operators* b_l, b_r . The effective Hamiltonian for this piece of the system is then

$$H_{\text{eff}} = \frac{i}{2} \epsilon b_l b_r = \epsilon (a^\dagger a - \frac{1}{2}) \quad (17.23)$$

where $\epsilon \sim e^{-N/\xi}$ and a, a^\dagger are the Dirac fermion operators constructed from the boundary pair. Thus, the ground state degeneracy is lifted by only an exponentially small splitting in system size.

17.2.4 General properties of quadratic fermionic Hamiltonians

We now step back and consider a generic quadratic fermionic Hamiltonian:

$$H(A) = \frac{i}{4} \sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k \quad (17.24)$$

where A is a real, skew-symmetric matrix and the c_j are Majorana fermion operators. The normalization $\frac{i}{4}$ is convenient because it has the property that

$$[-iH(A), -iH(B)] = -iH([A, B]) \quad (17.25)$$

where $A, B \in \mathfrak{so}(2N)$, and $H(A), H(B)$ act on the Fock space $\mathfrak{F}_N = \mathbb{C}^{2^N}$. Thus $H(\cdot)$ provides a natural representation of $\mathfrak{so}(2N)$.

We now bring $H(A)$ to a canonical form:

$$H_{\text{canonical}} = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^m \epsilon_k b'_k b''_k = \sum_{k=1}^m \epsilon_k (\tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k - \frac{1}{2}) \quad (17.26)$$

where b'_k, b''_k are appropriate real linear combinations of the original c_j satisfying the same Majorana fermion commutation relations and the $\tilde{a}_k, \tilde{a}_k^\dagger$ are the annihilation and creation operators associated to the b'_k, b''_k pair of Majoranas. This form for H follows immediately from the standard block diagonalization of real skew symmetric matrices

$$A = Q \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & & \\ -\epsilon_1 & 0 & & \\ & & 0 & \epsilon_2 \\ & & -\epsilon_2 & 0 \\ & & & & \dots \end{pmatrix} Q^T, \quad Q \in O(2N), \epsilon_k \geq 0 \quad (17.27)$$

From this form it is easy to check that the eigenvalues of A are $\pm i\epsilon_k$ and that the eigenvectors are the coefficients of c in $\tilde{a}_k, \tilde{a}_k^\dagger$.

If some of the ϵ_k vanish, then we refer to the associated fermions as *zero modes*. In particular, these will lead to ground state degeneracies, since occupation or nonoccupation of such modes does not affect the energy. For the Majorana chain of Eq. (17.21), we have

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v & & & \\ -v & 0 & w & & \\ & -w & 0 & v & \\ & & -v & 0 & w \\ & & & -w & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (17.28)$$

We can find a vector u such that $uA = 0$ by inspection:

$$u = (1, 0, \frac{v}{w}, 0, \left(\frac{v}{w}\right)^2, 0, \dots) \quad (17.29)$$

This vector leads to a left boundary mode

$$b_l = \sum u_k c_k \quad (17.30)$$

while an analogous calculation starting at the right end will find a right boundary mode b_r . These modes form a Majorana canonical pair, leading to a two-fold degeneracy of the ground state of the chain. Clearly, $u_k \sim e^{-k/\xi}$ falls off exponentially from the edges of the chain with correlation length $\xi^{-1} = \ln \left| \frac{w}{v} \right|$, as expected in section 17.2.3.

17.2.5 Why are the boundary modes robust?

In the simple case of a quadratic fermion Hamiltonian, we know that the modes correspond to eigenvalues of a skew-symmetric real matrix. These come in pairs $\pm i\epsilon$, in general, and the case $\epsilon = 0$ is special. In particular, if the pair of Majoranas corresponding to a zero mode are physically well separated, we expect perturbations to have trouble lifting the boundary degeneracy.

More generally, for interacting fermions, we can extend the symmetry group \mathbb{Z}_2 , generated by $P = P_{\text{maj}}$, to a *non-commuting* algebra acting on the the ground state space \mathfrak{L} . First, in the noninteracting limit, at $v = 0$, we define

$$X = Y \prod_{k=1}^j (-i c_{2k-1} c_{2k}) \quad (17.31)$$

where $Y = c_{2j+1}$ is a local Majorana operator at site $2j + 1$. A straightforward calculation shows that

$$XP = -PX \quad (17.32)$$

and that $[H, X] = 0$ so that the algebra generated by X, P acts on \mathfrak{L} nontrivially. We now allow Y to vary as we adiabatically turn on interactions and, so long as an energy gap is maintained, we expect Y to remain a local operator near $2j$, which we can separate from the boundary by suitably large choice of j . That is, to find Y , one needs to know the ground state or at least the structure of the ground state near $2j$. This is a nontrivial operation but see [3] for more details.

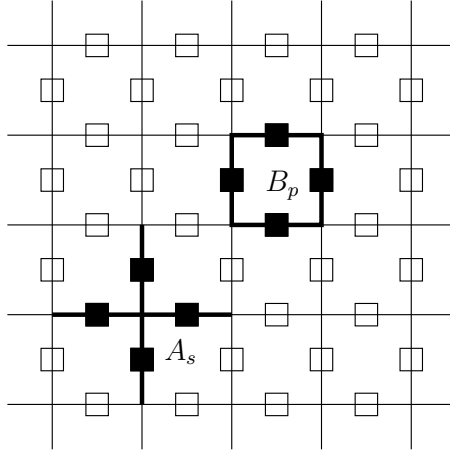


Figure 3: A piece of the toric code. The spins live on the edges of the square lattice. The spins adjacent to a star operator A_s and a plaquette operator B_p are shown.

17.3 The two-dimensional toric code

The toric code is an exactly solvable spin 1/2 model on the square lattice. It exhibits a ground state degeneracy of 4^g when embedded on a surface of genus g and a quasiparticle spectrum with both bosonic and fermionic sectors. Although we will not introduce it as such, the model can be viewed as an Ising gauge theory at a particularly simple point in parameter space (see Sec. 17.4.5). Many of the topological features of the toric code model were essentially understood by [8], but they did not propose an exactly solved model. A more detailed exposition of the toric code may be found in [5].

We consider a square lattice, possibly embedded into a nontrivial surface such as a torus, and place spins on the edges, as in Fig. 3. The Hamiltonian is given by

$$H_T = -J_e \sum_s A_s - J_m \sum_p B_p \quad (17.33)$$

where s runs over the vertices (stars) of the lattice and p runs over the plaquettes. The star operator acts on the four spins surrounding a vertex s ,

$$A_s = \prod_{j \in \text{star}(s)} \sigma_j^x \quad (17.34)$$

while the plaquette operator acts on the four spins surrounding a plaquette,

$$B_p = \prod_{j \in \partial p} \sigma_j^z. \quad (17.35)$$

Clearly, the A_s all commute with one another, as do the B_p . Slightly less trivially,

$$A_s B_p = B_p A_s \quad (17.36)$$

because any given star and plaquette share an even number of edges (either none or two) and therefore the minus signs arising from the commutation of σ^x and σ^z on those edges cancel. Since all of the terms of H_T commute, we expect to be able to solve it term by term.

In particular, we will solve H_T working in the σ^z basis. Define classical variables $s_j = \pm 1$ to label the σ^z basis states. For each classical spin configuration $\{s\}$, we can define the plaquette flux

$$w_p(s) = \prod_{j \in \partial p} s_j. \quad (17.37)$$

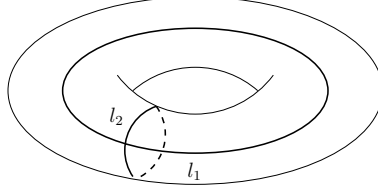


Figure 4: Large cycles on the torus.

If $w_p = -1$, we say that there is a *vortex* on plaquette p .

17.3.1 Ground states

To find the ground states $|\Psi\rangle$ of H_T , we need to minimize the energy, which means maximize the energy of each of the A_s and B_p terms. The plaquette terms provide the condition

$$B_p |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (17.38)$$

which holds if and only if

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s: w_p(s)=1 \ \forall p\}} c_s |s\rangle \quad (17.39)$$

. That is, the ground state contains no vortices. The group of star operators act on the configurations s by flipping spins. Thus, the star conditions

$$A_s |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (17.40)$$

hold if and only if *all of the c_s are equal for each orbit of the action of star operators*. In particular, if the spin flips of A_s are ergodic, as they are on the plane, all c_s must be equal and the ground state is uniquely determined.

On the torus, the star operators preserve the *cohomology class* of a vortex-free spin configuration. In more physical terms, we can define conserved numbers given by the Wilson loop like functions

$$w_l(s) = \prod_{j \in l} s_j, \quad l = l_1, l_2 \quad (17.41)$$

where l_1 and l_2 are two independent non-trivial cycles on the square lattice wrapping the torus (Fig. 4). Any given star will overlap with a loop l in either zero or two edges and therefore A_s preserves w_l . Since there are two independent loops on the torus, each of which can have $w_l = \pm 1$, there is a four-fold degenerate ground state:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s: w_p(s)=1 \ \forall p\}} c_{w_{l_1} w_{l_2}} |s\rangle. \quad (17.42)$$

17.3.2 Excitations

The excitations of the toric code come in two varieties: the *electric charges* and *magnetic vortices* of a \mathbb{Z}_2 gauge theory. We will see this connection more explicitly later. In the following, we restrict attention to the planar system for simplicity.

To find the electric charges, let us define the electric path operator

$$W_l^{(e)} = \prod_{j \in l} \sigma_j^z \quad (17.43)$$

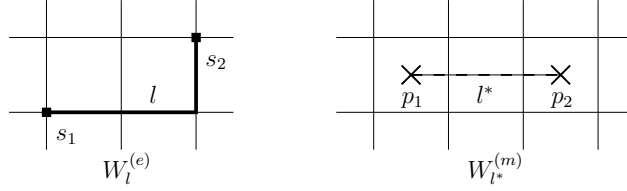


Figure 5: Electric and magnetic path operators.

where l is a path in the lattice going from s_1 to s_2 (see Fig. 5). This operator clearly commutes with the plaquette operators B_p and with all of the star operators A_s except for at the end points s_1 and s_2 , where only one edge overlaps between the star and the path and we have

$$W_l^{(e)} A_{s_1} = -A_{s_1} W_l^{(e)}. \quad (17.44)$$

Therefore, the state

$$|\Psi_{s_1, s_2}\rangle = W_l^{(e)} |\Psi_0\rangle, \quad (17.45)$$

where $|\Psi_0\rangle$ is the planar ground state, is an eigenstate of the Hamiltonian with excitations (charges) at s_1 and s_2 that each cost energy $2J_e$ to create relative to the ground state.

An analogous construction will find the magnetic vortices: we can define a dual path operator

$$W_{l^*}^{(m)} = \prod_{j \in l^*} \sigma_j^x \quad (17.46)$$

where the path l^* lies in the dual lattice (see Fig. 5) and goes from p_1 to p_2 . In this case, the stars A_s all commute with $W_{l^*}^{(m)}$, as do all of the plaquette operators B_p except the two at the end points of l^* , which anticommute. Thus, the $W_{l^*}^{(m)}$ operator creates a pair of magnetic vortices on the plaquettes p_1 and p_2 at an energy of $2J_m$ each.

17.4 Abelian anyons and quasiparticle statistics

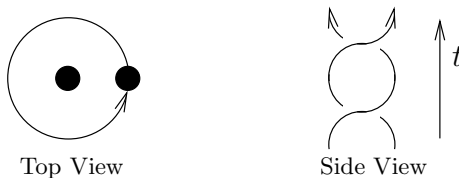
Let us discuss what can possibly happen if we exchange two particles in two dimensions. To ensure that particle statistics is well-defined, we assume that there is no long-range interaction and that the phase is gapped. If we drag two particles around one another adiabatically,



then we expect both dynamical phase accumulation and a statistical effect due to the exchange. We are well acquainted with this effect for everyday bosons and fermions, for which:

$$\begin{aligned} \text{Bosons:} \quad & |\Psi\rangle \mapsto |\Psi\rangle \\ \text{Fermions:} \quad & |\Psi\rangle \mapsto -|\Psi\rangle \end{aligned} \quad (17.47)$$

where we have dropped the dynamical phase so as to focus on the statistics. In both of these standard cases, a full rotation (two exchanges),



leaves $|\Psi\rangle$ unchanged.

In principle,

$$R_{ab} = \begin{array}{c} b \quad a \\ \frown \quad \smile \\ a \quad b \end{array} \quad (17.48)$$

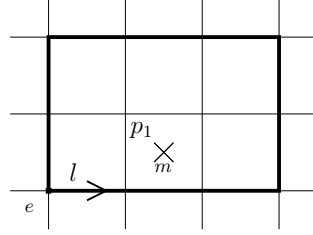
is an arbitrary phase factor or even an operator (*braiding operator*). If the two particles are distinguishable ($a \neq b$), then R_{ab} does not have an invariant meaning, but the *mutual statistics*

$$R_{ba} \cdot R_{ab} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \frown \quad \smile \\ \bigcirc \\ \smile \quad \frown \\ a \quad b \end{array} \quad (17.49)$$

does.

Let us illustrate this in the toric code model. In section 17.3.2 we found two kinds of quasiparticle excitations in the toric code: electric charges (e) and magnetic vortices (m). Since path operators of the same type commute with one another, it is easy to show that each of these are bosons. However, they have nontrivial mutual statistics.

To calculate the mutual statistics, consider taking a charge e around a vortex m .



Let $|\xi\rangle$ be some state containing a magnetic vortex at p_1 . Under the full braiding operation,

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &\mapsto \left(\prod_{j \in l} \sigma_j^z \right) |\xi\rangle \\ &= \left(\prod_{p \text{ inside } l} B_p \right) |\xi\rangle \end{aligned} \quad (17.50)$$

where the second line is a Stokes' theorem like result relating the product around a loop to the products of internal loops. Since

$$B_{p_1} |\xi\rangle = -|\xi\rangle \quad (17.51)$$

for the plaquette p_1 containing the vortex, we have that

$$|\xi\rangle \mapsto -|\xi\rangle, \quad (17.52)$$

or

$$\begin{array}{c} e \quad m \\ \frown \quad \smile \\ \bigcirc \\ \smile \quad \frown \\ e \quad m \end{array} = - \begin{array}{c} e \quad m \\ \uparrow \quad \uparrow \\ e \quad m \end{array} \quad (17.53)$$

Using the bosonic self-statistics equations,

$$\begin{array}{c} e & e \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ e & e \end{array} = \begin{array}{c} e & e \\ \uparrow & \uparrow \\ e & e \end{array} \quad \begin{array}{c} m & m \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ m & m \end{array} = \begin{array}{c} m & m \\ \uparrow & \uparrow \\ m & m \end{array} \quad (17.54)$$

we can derive the nontrivial corollary that composite $e - m$ particles are fermions:

$$\begin{array}{c} e\ m & e\ m \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ e\ m & e\ m \end{array} = \begin{array}{c} e\ m & e\ m \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{---} & \text{---} \\ e\ m & e\ m \end{array} = - \begin{array}{c} e\ m & e\ m \\ \uparrow & \uparrow \\ e\ m & e\ m \end{array} \quad (17.55)$$

17.4.1 Superselection sectors and fusion rules

Initially, we exhibited two kinds of bosonic excitations in the toric code model (charges e and vortices m) in the solution of the Hamiltonian. After a bit of work, we discovered that a composite $e - m$ object has a meaningful characterization within the model as well, at least in that it has fermionic statistics. This begs the question, how many particle types exist in the toric code model and how can we identify them?

We take an algebraic definition of a particle type: each type corresponds to a *superselection sector*, which is a representation of the local operator algebra. In particular, we say that two particles (or composite objects) are *of the same type*

$$a \sim b \quad (17.56)$$

if a can be transformed to b by some operator acting in a finite region. For example, in the toric code, two e -particles are equivalent to having no particles at all,

$$\begin{array}{c} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \xrightarrow{W_l^{(e)}} \begin{array}{c} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \quad (17.57)$$

by acting with an appropriate, geometrically bounded electric path operator $W_l^{(e)}$.

We introduce the notation

$$e \times e = 1 \quad (17.58)$$

to represent the *fusion rule* that two e -particles are equivalent to the vacuum sector 1. In the toric code, there are 4 superselection sectors:

$$1, \ e, \ m, \ \text{and } \epsilon = e \times m \quad (17.59)$$

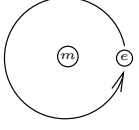
with the fusion rules:

$$\begin{array}{ll} e \times e = 1 & e \times m = \epsilon \\ m \times m = 1 & e \times \epsilon = m \\ \epsilon \times \epsilon = 1 & m \times \epsilon = e \end{array} \quad (17.60)$$

17.4.2 Mutual statistics implies degeneracy on the torus

This is an argument due to [1]. Suppose that there are at least two particle types, e and m with -1 mutual statistics. Let us define an operator Z acting on the ground state in an abstract fashion (not referring to the actual model) which creates an e pair, wraps one particle around the torus and annihilates the pair. In the toric code, this will be the path operator $W_l^{(e)} = \prod_{j \in l} \sigma_j^z$ for a loop l winding one of the nontrivial cycles on the torus, but we need not know that specifically.

We can define another operator X that creates a pair of the other type m and winds around the other nontrivial cycle on the torus. But now a bit of geometric introspection reveals that the combination,

$$Z^{-1}X^{-1}ZX = \text{diagram} = -1 \quad (17.61)$$


Thus, there are two non-commuting operators acting on the ground state space \mathfrak{L} , and we conclude $\dim \mathfrak{L} > 1$. In fact, there are four such operators, each of the two particle types can be moved around each of the two nontrivial cycles. Working out the commutation relations of these operators implies that $\dim \mathfrak{L} = 4$.

17.4.3 The toric code in a field: perturbation analysis

We now apply a magnetic field to the toric code that will realistically allow the quasiparticles to hop and, unfortunately, destroy its exact solvability (see [9]). To wit:

$$H = -J_e \sum_s A_s - J_m \sum_p B_p - \sum_j (h_x \sigma_j^x + h_z \sigma_j^z) \quad (17.62)$$

For example, with $h_x = 0$ but $h_z \neq 0$, we can view the perturbation as an electric path operator of length 1 on each edge. Hence, it can cause charge pair creation and annihilation (at an energy cost $\sim 4J_e$) or hop existing charges by one lattice displacement, at no cost. For small h_z this provides a nontrivial tight-binding dispersion to the charges,

$$\epsilon(q) \approx 2J_e - 2h_z(\cos q_x + \cos q_y) \quad (17.63)$$

but does not close the gap or lead to a change in the topological degeneracy of the ground state in the thermodynamic limit.

At large $h_z \gg J_e, J_m$, the model should simply align with the applied field as a paramagnet. Clearly, in this limit the topological degeneracy has been destroyed and we have a unique spin-polarized ground state. The phase transition can be understood from the topological side as a bose condensation of the charges, which proliferate as h_z increases.

The same argument is applicable if $h_x \gg J_e, J_m$. If h_x increases while $h_z = 0$, then vortices condense. However, the high-field phase is just a paramagnet, so one can continuously rotate the field between the x - and z -direction without inducing a phase transition. Thus, the charge and vortex condensates are actually the same phase! This property was first discovered by [2] for a 3D classical \mathbb{Z}_2 gauge Higgs model, where it appears rather mysterious.

17.4.4 Robustness of the topological degeneracy

The splitting of the ground state levels due to virtual quasiparticle tunneling is given by

$$\delta E \sim \Delta e^{-L/\xi} \quad (17.64)$$

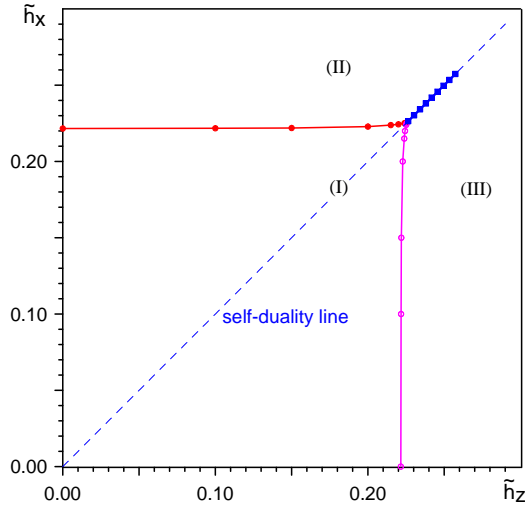


Figure 6: Numerically determined phase diagram of the toric code in a field from [9]. (I) labels the topological phase, (II) and (III) the vortex and charge condensates (*i.e.* the paramagnetic phase). The numerics were done using discrete imaginary time with a rather large quantization step.

This follows from the effective Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = -(t_{1Z}Z_1 + t_{2Z}Z_2 + t_{1X}X_1 + t_{2X}X_2) \quad (17.65)$$

where the Z_i , X_i operators are the winding loop operators of Sec. 17.4.2. Physically, this is simply a statement of the fact that the only way to act upon the ground state is to wind quasiparticles around the torus. This is a process exponentially suppressed in system size.

17.4.5 Emergent symmetry: gauge formulation

There are two ways to introduce symmetry operators in the perturbed toric code model.

1. One can define *loop operators* (e.g. Z_1, Z_2, X_1, X_2), the definition of which depends on the actual ground state of the perturbed Hamiltonian. This is similar to the definition of the operator Y in the 1D case of Sec. 17.2.5, which also requires detailed knowledge of the ground state.
2. One can exploit *gauge invariance* by rewriting the model in a gauge invariant form. This can be done for any spin model by introducing redundancy. In this case, the symmetry does not depend on the model but is only manifest in the topological phase.

We will take the second approach in order to avoid the difficulty of defining the appropriate loop operators and also to introduce the important gauge formulation of the model. To gauge the model we proceed in steps:

1. Introduce one extra spin μ_v per vertex that always remains in the state

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle). \quad (17.66)$$

This state is characterized by the condition

$$\mu_v^x |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \quad (17.67)$$

where μ_v^x is the Pauli spin matrix for the spin μ at vertex v .

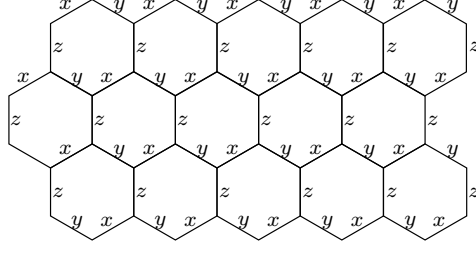


Figure 7: The honeycomb model has spins living on the vertices of a honeycomb lattice with nearest neighbor interactions that are link-orientation dependent. x -links have $\sigma^x \sigma^x$ interactions, y -links have $\sigma^y \sigma^y$ interactions and z -links have $\sigma^z \sigma^z$ interactions.

2. Change spin operators from σ_{uv}, μ_v to $\tilde{\sigma}_{uv}, \tilde{\mu}_v$ where we represent the classical value of each old spin s_{uv} as $\tilde{m}_u \tilde{s}_{uv} \tilde{m}_v$. Here s_{uv} is the spin on the edge connecting u and v and m_u, m_v are the classical values of the new spins (*i.e.* the labels in the μ^z basis).

Thus the complete transformation is given by

$$\begin{aligned}
 \sigma_{uv}^z &= \tilde{\mu}_u^z \tilde{\sigma}_{uv}^z \tilde{\mu}_v^z \\
 \sigma_{uv}^x &= \tilde{\sigma}_{uv}^x \\
 \mu_u^z &= \tilde{\mu}_u^z \\
 \mu_u^x &= \tilde{\mu}_u^x \prod_{j \in \text{star}(u)} \tilde{\sigma}_j^x = \tilde{\mu}_u^x \tilde{A}_u
 \end{aligned} \tag{17.68}$$

and the constraint Eq. (17.67) becomes the standard \mathbb{Z}_2 gauge constraint:

$$\tilde{\mu}_u^x \tilde{A}_u |\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \tag{17.69}$$

On states satisfying the gauge constraint Eq. (17.69), $A_u = \tilde{A}_u = \tilde{\mu}_u^x$. Therefore,

$$A_u |\Psi\rangle = \tilde{\mu}_u^x |\Psi\rangle \tag{17.70}$$

and we can rewrite the Hamiltonian as

$$H = -J_e \sum_v \tilde{\mu}_v^x - J_m \sum_p \tilde{B}_p - \sum_{\langle u,v \rangle} (h_x \tilde{\sigma}_{uv}^x + h_z \tilde{\mu}_u^z \tilde{\sigma}_{uv}^z \tilde{\mu}_v^z) \tag{17.71}$$

subject to the gauge constraint.

Viewed as a standard \mathbb{Z}_2 gauge theory, the protected topological degeneracy of the ground state is physically familiar as the protected degeneracy associated with the choice of flux threading the $2g$ holes of the genus g surface.

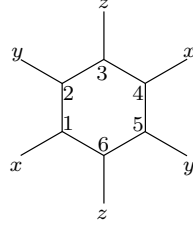
17.5 The honeycomb lattice model

We now investigate the properties of another exactly solvable spin model in two dimensions, the *honeycomb lattice model*. This model exhibits a number of gapped phases that are perturbatively related to the toric code of the previous sections. Moreover, in the presence of time-reversal symmetry breaking terms, a new topological phase arises with different topological properties, including nontrivial *spectral Chern number*. An extended treatment of the properties of this model with much greater detail can be found in [6].

In the honeycomb lattice model, the degrees of freedom are spins living on the vertices of a honeycomb lattice with nearest neighbor interactions. The unusual feature of this model is that the interactions are link orientation dependent (see Fig. 7). The Hamiltonian is

$$H = -J_x \sum_{x \text{ links}} \sigma_j^x \sigma_k^x - J_y \sum_{y \text{ links}} \sigma_j^y \sigma_k^y - J_z \sum_{z \text{ links}} \sigma_j^z \sigma_k^z \tag{17.72}$$

We might expect this model to be integrable because $[H, W_p] = 0$ for an extensive collection of plaquette operators



$$W_p = \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^z \sigma_4^x \sigma_5^y \sigma_6^z \quad (17.73)$$

where the spins and labels follow from the figure for each plaquette. Unfortunately, this is not quite enough: there are two spins but only one constraint per hexagon so that half of each spin remains unconstrained. In fact, the remaining degrees of freedom are Majorana operators!

17.5.1 A (redundant) representation of a spin by 4 Majorana operators

We consider a collection of four Majorana operators c, b^x, b^y and b^z that act on the 4-dimensional Fock space \mathfrak{F} . We define the following three operators

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^x &= ib^x c \\ \tilde{\sigma}^y &= ib^y c \\ \tilde{\sigma}^z &= ib^z c. \end{aligned} \quad (17.74)$$

These operators do not obey the spin algebra relations on the full Fock space, but we clearly have two extra dimensions of wiggle room. In fact, the physical state space is identified with a two-dimensional subspace $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ given by the constraint

$$D |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \quad \text{where } D = b^x b^y b^z c \quad (17.75)$$

Within \mathfrak{L} , the $\tilde{\sigma}^\alpha$ act as σ^α act on the actual spin. Of course, $\tilde{\sigma}^\alpha$ also act on \mathfrak{L}^\perp , but we can ignore these states by enforcing the constraint.

To be careful, we need to check two consistency conditions:

1. $\tilde{\sigma}^\alpha$ preserves the subspace \mathfrak{L} , which follows from $[\tilde{\sigma}^\alpha, D] = 0$.
2. The $\tilde{\sigma}^\alpha$ satisfy the correct algebraic relations when restricted to \mathfrak{L} . For example,

$$\tilde{\sigma}^x \tilde{\sigma}^y \tilde{\sigma}^z = (ib^x c)(ib^y c)(ib^z c) = i^3 (-1) b^x b^y b^z c^3 = iD = i \quad (17.76)$$

where the last equality only holds in the physical subspace \mathfrak{L} .

17.5.2 Solving the Honeycomb Model using Majoranas

We now use the Majorana representation of spins just introduced to rewrite each spin of the entire honeycomb model as in Fig. 8. This will greatly expand the 2^N -dimensional Hilbert space to the Fock space \mathfrak{F} of dimension 2^{2N} , but the physical space $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ is fixed by the gauge condition

$$D_j |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad \text{for all } j \quad (17.77)$$

where $D_j = b_j^x b_j^y b_j^z c$. We define a projector onto \mathfrak{L} by

$$\Pi_{\mathfrak{L}} = \prod_j \left(\frac{1 + D_j}{2} \right) \quad (17.78)$$

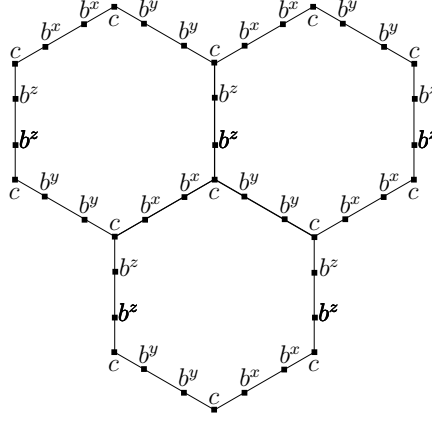


Figure 8: Majorana representation of honeycomb model.

In the Majorana representation, the Hamiltonian (17.72) becomes

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{i}{4} \sum_{\langle j,k \rangle} \hat{A}_{jk} c_j c_k \\
\hat{A}_{jk} &= 2J_{\alpha(j,k)} \hat{u}_{jk} \\
\hat{u}_{jk} &= i b_j^{\alpha(j,k)} b_k^{\alpha(j,k)}
\end{aligned} \tag{17.79}$$

where $\alpha(j, k) = x, y, z$ is the direction of the link between j and k .

We have suggestively written the Hamiltonian \tilde{H} as if it were a simple quadratic fermion Hamiltonian as in Sec. 17.2.4, but of course \hat{A}_{jk} is secretly an operator rather than a real skew-symmetric matrix. However, each operator b_j^α enters only one term of the Hamiltonian and therefore \hat{u}_{jk} commute with each other and with \tilde{H} ! Thus, we can fix $u_{jk} = \pm 1$, defining an orthogonal decomposition of the full Fock space:

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_u \mathfrak{F}_u, \quad \text{where } |\Psi\rangle \in \mathfrak{F}_u \text{ iff } \hat{u}_{jk} |\Psi\rangle = u_{jk} |\Psi\rangle \quad \forall j, k \tag{17.80}$$

Within each subspace \mathfrak{F}_u , we need to solve the quadratic Hamiltonian

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_u &= \frac{i}{4} \sum_{\langle j,k \rangle} A_{jk} c_j c_k \\
A_{jk} &= 2J_{\alpha(j,k)} u_{jk}
\end{aligned} \tag{17.81}$$

which we know how to do in principle. On the other hand, the integrals of motion W_p (the hexagon operators) define a decomposition of the physical subspace \mathfrak{L} labeled by the eigenvalues $w_p = \pm 1$:

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_w \mathfrak{L}_w, \quad \text{where } |\Psi\rangle \in \mathfrak{L}_w \text{ iff } W_p |\Psi\rangle = w_p |\Psi\rangle \quad \forall p \tag{17.82}$$

We can relate these two decompositions by expressing W_p in the Majorana representation and noting that within the physical subspace

$$\tilde{W}_p = \prod_{\langle j,k \rangle \in \partial p} \hat{u}_{jk} \tag{17.83}$$

Thus, we find

$$\mathfrak{L}_w = \Pi_{\mathfrak{L}} \mathfrak{F}_u \tag{17.84}$$

where $w_p = \prod_{\langle j,k \rangle \in \partial p} u_{jk}$.

So we have a procedure for finding the ground state of the honeycomb model:

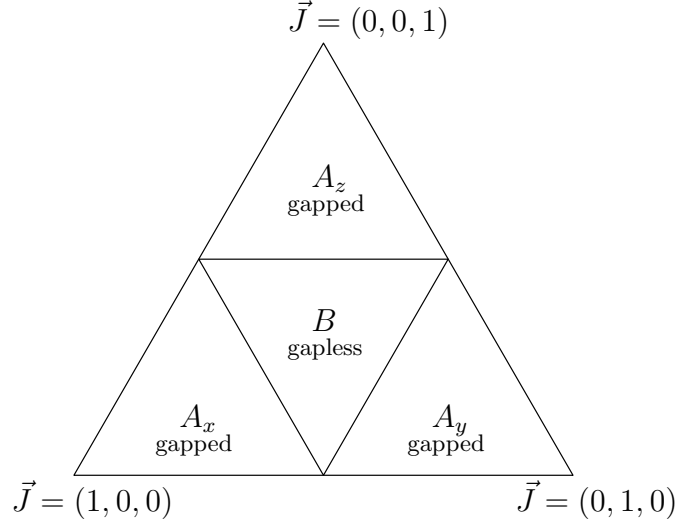


Figure 9: Phase diagram of honeycomb model. This is a slice through the positive octant in \vec{J} coupling space along the $J_x + J_y + J_z = 1$ plane. The other octants are analogous.

1. Fix $w_p = \pm 1$ for all p .
2. Find u_{jk} satisfying

$$w_p = \prod_{(j,k) \in \partial p} u_{jk}. \quad (17.85)$$

There is a small subtlety here in that $u_{jk} = -u_{kj}$ so we must be careful about ordering. We can consistently take j in the even sublattice of the honeycomb and k in the odd sublattice in equation (17.85).

3. Solve for the ground state of the quadratic Hamiltonian (17.81), finding the energy $E(w)$.
4. Project the found state onto the physical subspace (*i.e.* symmetrize over gauge transformations).
5. Repeat for all w ; pick the w that minimizes the energy.

If there were no further structure to $E(w)$, this would be an intractable search problem in the space of w_p . Fortunately, due to a theorem by Lieb 1994, the ground state has no vortices. That is,

$$E(w) = \min \text{ if } w_p = 1 \ \forall \ p \quad (17.86)$$

Using this choice of w_p , it is easy to solve the model and produce the phase diagram of Fig. 9. The gapless phase has two Dirac points in the fermionic spectrum.

17.5.3 Fermionic spectrum in the honeycomb lattice model

We just need to diagonalize the Hamiltonian

$$\begin{aligned} \tilde{H}_u &= \frac{i}{4} \sum_{\langle j,k \rangle} A_{jk} c_j c_k \\ A_{jk} &= 2J_{\alpha(j,k)} u_{jk} \\ u_{jk} &= \begin{cases} +1 & \text{if } j \in \text{even sublattice} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.87)$$

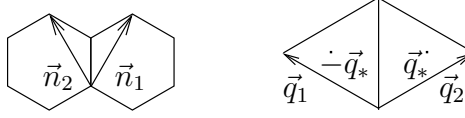


Figure 10: Direct and reciprocal lattices of the honeycomb. The points $\pm \vec{q}_*$ are the two Dirac points of the gapless phase B.

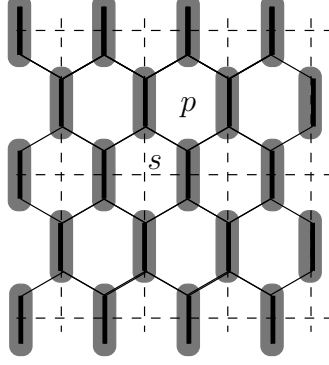


Figure 11: The vertical dimers on the honeycomb lattice themselves form the edges of a (dashed) square lattice. The plaquettes of alternate rows of the hexagonal lattice correspond to the stars and plaquettes of the square lattice. This is *weak breaking of translational symmetry*.

This is equivalent to finding the eigenvalues and eigenvectors of the matrix iA . Since the honeycomb lattice has two sites per unit cell, by applying the Fourier transform we get a 2×2 matrix $A(\vec{q})$:

$$\begin{aligned} iA(\vec{q}) &= \begin{pmatrix} 0 & if(\vec{q}) \\ -if(\vec{q}) & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon(\vec{q}) &= \pm |f(\vec{q})| \end{aligned} \quad (17.88)$$

where $f(\vec{q})$ is some complex function that depends on the couplings J_x, J_y, J_z . In the gapless phase (phase B in Fig. 9), $f(\vec{q})$ has two zeros which correspond to Dirac points (see Fig. 10). At the transition to phase A, the Dirac points merge and disappear.

17.5.4 Quasiparticle statistics in the gapped phase

It appears that there are two particle types: fermions and vortices (hexagons with $w_p = -1$). The vortices are associated with a \mathbb{Z}_2 gauge field, where u_{jk} plays the role of vector potential. Taking a fermion around a vortex results in the multiplication of the state by -1 (compared to the no-vortex case). However, the details such as the fusion rules are not obvious.

Let us look at the model from a different perspective. If $J_x = J_y = 0, J_z > 0$, the system is just a set of dimers (see Fig. 11). Each dimer can be in two states: $\uparrow\uparrow$ and $\downarrow\downarrow$. The other two states have $2J_z$ higher energy. Thus, the ground state is highly degenerate.

If $J_x, J_y \ll J_z$, we can use perturbation theory relative to the noninteracting dimer point. Let us characterize each dimer by an effective spin:

$$|\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle; \quad |\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (17.89)$$

At 4th order of perturbation theory, we get:

$$H_{\text{eff}}^{(4)} = \text{const} - \frac{J_x^2 J_y^2}{16 J_z^3} \sum_p Q_p \quad (17.90)$$

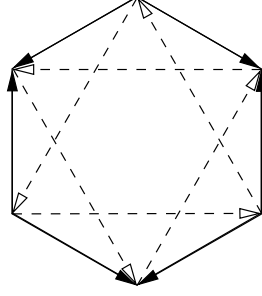


Figure 12: Picture of chiral interaction matrix A_{jk} . Forward arrows correspond to positive entries in the skew-symmetric real matrix A_{jk} . Solid arrows are the interactions of the original honeycomb model; dashed arrows give the time-reversal symmetry breaking perturbation.

where p runs over the square plaquettes of the dimer lattice (see Fig. 11) and

$$Q_p = \sigma_{p_1}^y \sigma_{p_2}^x \sigma_{p_3}^y \sigma_{p_4}^x \quad (17.91)$$

is a plaquette operator on the effective spin space $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. By adjusting the unit cell and rotating the spins, we can reduce this Hamiltonian to the toric code!

The vertices and plaquettes of the new lattice correspond to alternating rows of hexagons. Thus, vortices on even rows belong to one superselection sector and vortices on odd rows to the other. It is impossible to move a vortex from an even row to an odd row by a local operator without producing other particles (*e.g.* fermions). The fermions and $e - m$ pairs belong to the same superselection sector, ϵ , though these are different physical states.

17.5.5 Nonabelian phase

In the gapless phase B, vortex statistics are not well-defined. However, a gap can be opened by applying a perturbation that breaks the time-reversal symmetry, such as a magnetic field. Unfortunately the honeycomb model in a field is not exactly solvable. [10] studied an exactly solvable spin model where the time-reversal symmetry is spontaneously broken, but we will satisfy ourselves by introducing a T-breaking next nearest neighbor interaction on the fermionic level (which can be represented by a 3-spin interaction in the original spin language).

Written in terms of Majorana fermions, we consider the Hamiltonian

$$H = \frac{i}{4} \sum_{\langle j,k \rangle} A_{jk} c_j c_k \quad (17.92)$$

where A_{jk} now has chiral terms connecting Majoranas beyond nearest neighbor in the honeycomb lattice (see Fig. 12). After Fourier transforming, we find

$$iA(\vec{q}) = \begin{pmatrix} \Delta(\vec{q}) & if(\vec{q}) \\ -if(\vec{q}) & -\Delta(\vec{q}) \end{pmatrix} \quad (17.93)$$

with the massive dispersion relation

$$\epsilon(\vec{q}) = \pm \sqrt{f(\vec{q})^2 + \Delta(\vec{q})^2}. \quad (17.94)$$

Within this massive phase, we will find nontrivial topological invariants of the quasiparticle spectrum. Let $iA(\vec{q})$ be a nondegenerate Hermitian matrix that continuously depends on \vec{q} . In our case, A acts in \mathbb{C}^2 , but in general it can be \mathbb{C}^n for any n . Let us keep track of the “negative eigenspace” of $iA(\vec{q})$: the subspace $\mathfrak{L}(\vec{q}) \subseteq \mathbb{C}^n$ spanned by eigenvectors corresponding

to negative eigenvalues. For matrix (17.93), $\dim \mathfrak{L}(\vec{q}) = 1$. This defines a map F from momentum space (the torus) to the set of m -dimensional subspaces in \mathbb{C}^n . More formally:

$$F : \mathbb{T}^2 \longrightarrow U(n)/U(m) \times U(n-m) \quad (17.95)$$

This map F may have nontrivial topology.

In the honeycomb model with T-breaking, we have $n = 2$, $m = 1$ and $U(2)/U(1) \times U(1) = \mathbb{C}P^1 = S^2$ is the unit sphere. Thus, $F : \mathbb{T}^2 \longrightarrow S^2$ and for the matrix $iA(\vec{q})$ of Eq. (17.93), F has degree 1. That is, the torus wraps around the sphere once. More abstractly, $\mathfrak{L}(\vec{q})$ defines a complex vector bundle over the momentum space \mathbb{T}^2 . This has an invariant Chern number ν , which in this case is $\nu = 1$.

What is the significance of the spectral Chern number? It is known to characterize the integer quantum Hall effect, where it is known as the “TKNN invariant”. For a Majorana system, there is no Hall effect since particles are not conserved. Rather, the spectral Chern number determines the number of chiral modes at the edge:

$$\nu = (\# \text{ of left-movers}) - (\# \text{ of right-movers}). \quad (17.96)$$

17.5.6 Robustness of chiral modes

A chiral edge mode may be described by its Hamiltonian:

$$H_{\text{edge}} = \frac{iv}{4} \int \hat{\eta}(x) \partial_x \hat{\eta}(x) dx \quad (17.97)$$

where $\hat{\eta}(x)$ is a real fermionic field. That is,

$$\hat{\eta}(x)\hat{\eta}(y) + \hat{\eta}(y)\hat{\eta}(x) = 2\delta(x-y). \quad (17.98)$$

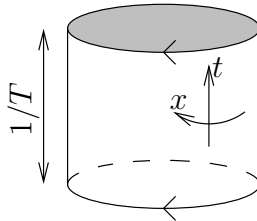
At temperature T , each mode carries energy current

$$I_1 = \frac{\pi}{24} T^2. \quad (17.99)$$

The easiest explanation of this is a straightforward 1-D fermi gas calculation:

$$\begin{aligned} I_1 &= v \int_0^\infty n(q) \epsilon(q) \frac{dq}{4\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon d\epsilon}{1 + e^{\epsilon/T}} \\ &= \frac{\pi}{24} T^2 \end{aligned} \quad (17.100)$$

However, it is useful to reexamine this current using conformal field theory (CFT), in order to understand better why the chiral modes are robust. We consider a disc of B phase extended into imaginary time at temperature T . That is, we have a solid cylinder with top and bottom identified:



We have obtained a solid torus whose surface is a usual torus. The partition function is mostly determined by the surface.

Let the spatial dimensions be much greater than $\frac{1}{T}$. From this point of view, the cylinder looks more like:



According to the usual CFT arguments, we have

$$\begin{aligned} Z &\sim q^{\frac{c}{24}} \bar{q}^{\frac{\bar{c}}{24}} \\ q &= e^{2\pi i \tau} \\ \tau &= i \frac{LT}{v} + \text{twist} \end{aligned} \tag{17.101}$$

Twisting the torus changes the partition function by:

$$\begin{aligned} \tau &\mapsto \tau + 1 \\ Z &\mapsto Z e^{2\pi i \frac{c-\bar{c}}{24}}. \end{aligned} \tag{17.102}$$

On the other hand, the twist parameter ($\text{Re } \tau$) couples to the some component of the energy-momentum tensor, namely, T_{xt} , which corresponds to the energy flow. This relation implies that

$$I = \frac{\pi}{12} (c - \bar{c}) T^2. \tag{17.103}$$

The chiral central charge, $c - \bar{c}$, does not depend on the boundary conditions. Indeed, the energy current on the edge cannot change because the energy cannot go into the bulk.

Part VIII

Appendix

A Введение

A.1 Общая мотивация

Обсудим всю мотивацию, которая позволит нам познать предмет без проблем.

A.1.1 Множество приложений

Укажем приложения
(потом раскрою)

A.1.2 Польза в плане развития как профессионала

(потом раскрою)

A.1.3 Польза в плане саморазвития

(потом раскрою)

A.1.4 Удивительные факты

(потом раскрою)

A.2 Мотивация к разделам

(потом раскрою)

A.3 Мышление профессионала в

(потом раскрою)

A.3.1 Актуальнейшие приложения

A.3.2 Построение с нуля

(потом раскрою, еще я не профессионал, а вопрос этот самый профессиональный)

A.3.3 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.
(потом раскрою)

A.4 Мышление для эффективного изучения

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоение предмета.

A.4.1 Способы изучения предмета

(потом раскрою)

A.4.2 Необходимые темы для

(потом раскрою)

A.4.3 Дополнительные темы для

(потом раскрою)

A.5 Literature

A.5.1 Основная

Основная литература

Нельсон Чанг Квантовые вычисления и квантовая информация

Большая подробная книга, которую буду периодически смотреть, а когда минимальный уровень будет, может, отдельные месяцы и буду изучать.

Teiko Heinosaari, Mário Ziman, The Mathematical Language of Quantum Theory
тоже говорят, что хорошая книга.

А. Китаев, А.Шень, М. Вялый К53 Классические и квантовые вычисления. - М.: МЦНМО, ЧеРо, 1999. - 192 с. ISBN 5-900916-35-9

Выглядит как прекрасное введение в предмет, с нее скорее всего и начну, не такая большая и многое там написано!

Задачники

Вводная, обзорная

https://www.youtube.com/watch?v=xjlGL4Mvq7A&ab_channel=Qiskit

Милое, обзорное видео для обзора истории.

Основная методическая

Лекции и презентации

Филиппова

<https://mipt.ru/science/labs/QIT-lab/for-students.php>

Отличный материала для начала, лучше - не знаю.

Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.

Филиппов рекомендует, значит, она тоже хорошая. Скорее всего после минимального уровня выгрузжу ее всю! гуглится. <https://www.mccme.ru/free-books/holevo-quantum.pdf>

Основная профессиональная

А. С. Холево, Квантовая вероятность и квантовая статистика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1991, том 83, 5–132

130 страниц очень содержательной теории, скорее всего по этой книге многие и учатся. В 1ю часть добавил, мне показалось, что книга очень очень содержательная.

А.5.2 Дополнительная

Дополнительная методическая

Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2009.

3. Холево А.С. Математические основы квантовой информатики. М.: МИАН, 2018.

Филиппов рекомендует.

4. Белоусов Ю.М., Манько В.И. Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике. Ч. 1. М.: МФТИ, 2004; Ч. 2. М.: МФТИ, 2005.

Филиппов рекомендует.

5. Стиб В.-Х., Харди Й. Задачи и их решения в квантовых вычислениях и квантовой теории информации. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.

Филиппов рекомендует.

6. Бройер Х.-П., Петруччоне Ф. Теория открытых квантовых систем. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

Филиппов рекомендует.

7. Кашурников В.А., Красавин А.В. Численные методы квантовой статистики. М.: Физматлит, 2010.

Филиппов рекомендует.

Статьи о разных явлениях

[1] Aharonov, Yakir and Albert, David Z. and Vaidman, Lev

Оказывается, можно измерить спин частицы раньше 100, если он на самом деле равен $1/2$. удивительно, мб за 2 дня это бы я и понял, но не до этого. Потом впишу в теорию.

Дополнительная по теории

[2] Aharonov, Yakir. and Rohrlich, Daniel Quantum paradoxes quantum theory for the perplexed

Книга от профессионалов, во многом популярная вроде. В открытом доступе нет, в библиотеку нужно идти. Вроде много очень интересных тем обсуждается, по идее многое можно очень фундаментального понять по ней.

В помощь

Статьи о теоретических методах

О приложениях

А.6 Обзор

(потом раскрою)

А.6.1 предмет в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

появление Предмет в нашей картине мира

один подход

второй подход

один большой раздел

такой-то набор следствий

А.6.2 Итоговые формулы и закономерности

А.6.3 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

А.6.4 Результаты

А.6.5 Преимущества квантовой информации

Более плотно можно передавать информацию

(тут докажу, что используя перепутанность, можно плотнее собирать инфу. пока не зашло док-во)

А.6.6 Обзор дальнейших развитий

А.7 Связи с другими науками

Обсудим связи с разделами
(потом раскрою)

А.8 Описание записи

А.8.1 Общее описание записи

Общие особенности записи

Часто используемые обозначения квантовых элементов и схем

Для унитарных операторов часто используются определенные условные обозначения, полезные при проектировании квантовых схем. Для удобства читателей многие из них приведены ниже. Строки и столбцы унитарных преобразований нумеруются слева направо и сверху вниз как $00\dots 0, 00\dots 1, \dots, 11\dots 1$; самый нижний провод соответствует самому младшему биту. Обратите внимание, что $e^{i\pi/4}$ есть корень квадратный из i , поэтому элемент $\pi/8$ представляет собой корень квадратный из фазового элемента, который, в свою очередь, является корнем квадратным из элемента Паули Z .

А.8.2 Особенности глав и разделов

Первая часть про предмет в двух словах

Вторая часть

Часть про приложения

какие вообще приложения я разбирал?

А.8.3 Обозначения и константы

А.9 Головоломки квантовой информации

Обсудим в порядке интересности задачи и вопросы

А.9.1 Бытовые головоломки

Каковы фундаментальные принципы квантовых вычислений и квантовой информации?

(см. нельсон чанг)

Как фундаментальные принципы квантовых вычислений развивались?

(см. нельсон чанг)

Где фундаментальные принципы квантовых вычислений можно применить?

(см. нельсон чанг)

А.9.2 Типичные вопросы

Что такое кубит

(типичный вопрос)

А.9.3 Вопросы о квантовых схемах

(их много, см. Нильсон Чанг)

А.9.4 Принципиальные головоломки

А.9.5 Головоломки о деталях

А.10 Короткий исторический обзор

Обсудим кратко историю развития...

В Математические дополнения

(потом укажу, где что нужно. заготовки по Нильсону Чангу)

В.1 Некоторые методы линейной алгебры

Частичное транспонирование

$$X : \mathcal{H}^{AB} \rightarrow \mathcal{H}^{AB}, \quad X^{\Gamma} \equiv X^{\top_B} \equiv \sum_{i,j=1}^{d_B} I \otimes |j\rangle\langle i| \cdot X \cdot I \otimes |j\rangle\langle i|$$
$$X : \mathcal{H}^{AB} \rightarrow \mathcal{H}^{AB}, \quad X^{\top} \equiv X^{\top_A} \equiv \sum_{i,j=1}^{d_A} |j\rangle\langle i| \otimes I \cdot X \cdot |j\rangle\langle i| \otimes I$$

$$X^{AB} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad X^{\top_B} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad X^{\top_A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Figure 13: Частичное транспонирование

(??? примеры в случае больших размерностей???)

Некоторые свойства следов

$$\text{tr}[X^A] = \sum_k \langle k^A | X^A | k^A \rangle \quad - \text{это число}$$

$$\text{tr}[X^B] = \sum_j \langle j^B | X^B | j^B \rangle \quad - \text{это число}$$

$$\text{tr}[X^{AB}] = \sum_{k,j} \langle k^A | \otimes \langle j^B | \cdot X^{AB} \cdot | k^A \rangle \otimes | j^B \rangle \quad - \text{это число}$$

(пример бы потом про это написать ниже...)

$$\text{tr}_B[X^{AB}] = \sum_j I^A \otimes \langle j^B | \cdot X^{AB} \cdot | j^B \rangle \quad - \text{оператор, действующий в } H^A.$$

(пример бы потом про это написать ниже...)

$$\text{tr}_A[X^{AB}] = \sum_k \langle k^A | \otimes I^B \cdot X^{AB} \cdot | k^A \rangle \otimes I^B \quad - \text{оператор, действующий в } H^B.$$

(?? примеры)

Под ним можно переставлять местами операторы (?)

Сумму можно выносить из-под следа

(тут примеры, как это используем, на самом деле достаточно часто)

С Некоторые методы программирования

(по идее тут много будет симуляций, так что мне понадобится код.)

Некоторые свойства тензорных произведений

Очень важно для доказательств теорем и преобразований формул владеть преобразованиями тензорного произведения.

(тут их список будет по актуальности)

С.1 Некоторые сведения из теории вероятностей

С.2 Теория групп

П2.1 Основные определения 741 П2.1.1 Образующие 742 П2.1.2 Циклические группы 743 П2.1.3 Смежные классы 743 П2.2 Представления 744 П2.2.1 Эквивалентность и приводимость 744 П2.2.2 Ортогональность 745 П2.2.3 Регулярное представление 746 П2.2.4 Преобразования Фурье 747

С.3 Теорема Соловея—Китаева

С.4 Теория чисел

П4.1 Начальные сведения 758 П4.2 Арифметика остатков и алгоритм Евклида 759 П4.3
Сведение разложения на простые множители к нахождению порядка элемента 767 П4.4
Цепные дроби 769 Приложение 5. Криптография с открытым

References

- [1] Aharonov, Yakir, Albert, David Z., and Vaidman, Lev: *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100*. Physical review letters, 60(14):1351–1354, 1988, ISSN 0031-9007.
- [2] Aharonov, Yakir. and Rohrlich, Daniel: *Quantum paradoxes: quantum theory for the perplexed*. Wiley-VCH, Weinheim, 2005, ISBN 3-527-40391-4.

References

- [1] Einarsson, T. (1990). Fractional statistics on a torus. *Phys. Rev. Lett.*, **64**(17), 1995–1998.
- [2] Fradkin, E. and Shenker, S. H. (1979). Phase diagrams of lattice gauge theories with higgs fields. *Phys. Rev. D*, **19**(12), 3682–3697.
- [3] Hastings, M. B. and Wen, X. G. (2005). Quasiadiabatic continuation of quantum states: The stability of topological ground-state degeneracy and emergent gauge invariance. *Phys. Rev. B*, **72**(4), 045141.
- [4] Kitaev, A. (2000). Unpaired majorana fermions in quantum wires. *arXiv*, **cond-mat/0010440v2**.
- [5] Kitaev, A. (2003). Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, **303**(1), 2 – 30.
- [6] Kitaev, A. (2006). Anyons in an exactly solved model and beyond. *Ann. Phys.*, **321**(1), 2 – 111.
- [7] Lieb, E. H. (1994). Flux phase of the half-filled band. *Phys. Rev. Lett.*, **73**(16), 2158–2161.
- [8] Read, N. and Chakraborty, B. (1989). Statistics of the excitations of the resonating-valence-bond state. *Phys. Rev. B*, **40**(10), 7133–7140.
- [9] Tupitsyn, I. S., Kitaev, A., Prokof'ev, N. V., and Stamp, P. C. E. (2008). Topological multicritical point in the toric code and 3d gauge higgs models. *arXiv*, **0804.3175v1**.
- [10] Yao, H. and Kivelson, S. A. (2007). Exact chiral spin liquid with non-abelian anyons. *Phys. Rev. Lett.*, **99**(24), 247203.