

Superconductivity

Yury Holubeu *

July 18, 2024

The note is not intended for distribution.

Superconductivity and its applications is discussed in details. Links below show the superconductivity basics by Shmidt, theory of superconductive fluctuations by Varlamov, Larkin, special models by de Gennes, Mineev's and Samokhin's unconventional superconductivity, review of Eliashberg theory and solved problems. I used the following literature.

Цели: 1) 1 неделя обычных тренировок, этого хватит.

Contents

1 Preface and main motivation	10
I Superconductivity a Nutshell	11
2 Основное о сверхпроводимости	11
2.1 Основные свойства и законы сверхпроводников	11
2.1.1 Обзор основных свойств сверхпроводников и моделей с ними	11
2.1.2 Основные результаты и методы всех теорий	15
2.1.3 London's theory, skin effect, inductance, impedance	23
2.1.4 Simplified GL theory	27
2.1.5 Simplified BCS theory (?????)	32
2.1.6 Simplified thermodynamic methods for superconductors (?????)	38
2.1.7 Элементы, материалы и сравнение их сверхпроводящих свойств	38
2.2 Типичные контакты и модели со сверхпроводниками в двух словах	39
2.2.1 Josephson equations, SQUID, RCSJ in a nutshell	39
2.2.2 NS, NIS, SIS, other contacts	52
2.2.3 Thin films, пластины, другие проникновения и квантования потока	55
2.3 Сверхпроводники 2-го рода в двух словах	58
2.3.1 Одиночные вихри и их взаимодействия	58
2.3.2 Магнитный момент, поверхностная СП, перегрев, анизотропия СП 2го рода	59
2.3.3 Критические вихри, плавление, резистивность, дефекты, крип потока	59
2.4 Типичная математика для сверхпроводимости	61
3 Об углубленных теориях и других явлениях	62
3.1 Overview of rare properties and phenomena in superconductivity	62
3.2 On applications of superconductivity	62
3.2.1 On superconductivity for qubits and quantum computers	62
3.2.2 Overview of typical applications of superconductivity	65
3.3 Углубленная теория Гинзбурга-Ландау и флюктуационные явления в двух словах	65
3.3.1 О критерии Гинзбурга-Леванюка в разных случаях	65
3.3.2 Другие свойства и модели в рамках теории Гинзбурга-Ландау	67
3.3.3 Сверхпроводимость II рода: флюктуационная теплоемкость, диамагнетизм	67
3.3.4 Другие флюктуационные явления	69
3.3.5 Теории Горькова и Гинзбурга-Ландау функциональным интегралом	70
3.4 Микроскопическая теория и её модели в двух словах	70
3.4.1 Суть механизма притяжения и куперовская неустойчивость в рамках BCS	70
3.4.2 On diagrammatic approach to BCS	71
3.4.3 Эффекты температуры и магнитного поля	71
3.4.4 Теория Элиашберга о взаимодействии электронов и фононов(???)	71
3.4.5 Неоднородные сверхпроводящие состояния	71
3.5 Unconventional superconductivity in a nutshell by Mineev and others	71

*yuri.holubev@gmail.com

3.5.1	Cooper Pairing	72
3.5.2	2 Spin Structure of Paired States	72
3.5.3	3 Phases of Superfluid Helium-3	72
3.5.4	4 Superconducting States in Crystals	72
3.5.5	Energy of Elementary Excitations in Superconductors	72
3.5.6	Gap in the Spectrum of Elementary Excitations and Critical Temperature . .	73
3.5.7	Temperature Dependence of Thermodynamic Quantities of UC SC for $T \rightarrow 0$.	73
3.5.8	8 Effects of Electron Number Parity in Superconductors	74
3.5.9	9 Paramagnetic Susceptibility and Knight Shift	74
3.5.10	10 Landau Expansion of Superconductor Free Energy	74
3.5.11	11 Superconducting States with Multicomponent Order Parameters	74
3.5.12	12 Ginzburg-Landau Equations and Upper Critical Field	74
3.5.13	13 Boundary Conditions and Surface Superconductivity	74
3.5.14	14 Meissner and Mixed States in Unconventional Superconductors	74
3.5.15	15 Magnetic Superconductors	74
3.5.16	16 Josephson Effect	74
3.5.17	17 Gor'kov Equations	74
3.5.18	18 Ginzburg-Landau Functional	74
3.5.19	19 Upper Critical Field in a p-wave Superconductor	74
3.5.20	20 Boundary Conditions for the Order Parameter	74
3.5.21	21 Effect of Impurities on Unconventional Superconductivity	74
3.5.22	22 Electronic Thermal Conductivity of Unconventional Superconductors . .	74
3.6	Другая Джозефсоника и другие контакты в двух словах	74
3.6.1	Другие свойства JJ и различные применения	74
3.6.2	Суть микроскопической теории слабых контактов, Андреевские уровни .	76
3.6.3	Transition from metallic to tunneling regimes by Blonder Tinkham Klapwijk .	76
3.6.4	Special Voltage States of JJ	77
3.6.5	JJ with special properties	77
3.6.6	Флуктуационные эффекты в слабых контактах	77
3.6.7	On SFS junctions	77
3.7	Другие теоретические методы и связи теорий в двух словах	78
3.7.1	Description of disorder in superconductors in a nutshell	78
3.7.2	Микроскопический вывод временного уравнения ГЛ по Варламову .	78
3.7.3	Микроскопический вывод функционала Гинзбурга Ландау	78
3.7.4	Микроскопическая теория флуктуационной проводимости по Варламову .	78
3.7.5	On 1D superconductors	79
3.7.6	On induced superconductivity of 2D materials (????)	79
3.8	Другие явления в двух словах	79
3.8.1	Термоэлектрические эффекты в сверхпроводниках	79
3.8.2	Теория плавления и пиннинга решетки вихрей в двух словах	79
3.8.3	Проявление флуктуационных эффектов в наблюдаемых величинах (?????) .	79
3.8.4	Флуктуации вnano-структурах и особых сверхпроводящих системах (?????)	79
3.8.5	Другие магнитные явления	79
3.9	On high-temperature superconductors	80
3.10	Applications of superconductivity	80
3.10.1	Digital Electronics	81
3.10.2	Superconducting Photon and Particle Detectors	81
3.10.3	Microwave Applications	81
4	Plots for main properties	82
II	Fundamentals of Superconductivity	86

5 Теория сверхпроводимости по Шмидту	86
5.1 ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ	86
5.1.1 5. Уравнения Лондонов	86
5.1.2 6. Глубина проникновения магнитного поля	88
5.1.3 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников	89
5.1.4 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов. Квантование магнитного потока	91
5.1.5 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников	94
5.1.6 10. Кинетическая индуктивность	100
5.1.7 11. Комплексная проводимость сверхпроводника	102
5.1.8 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс	103
5.2 ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ	105
5.2.1 13. Введение	105
5.2.2 14. Уравнения теории Гинзбурга-Ландау	107
5.2.3 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости	112
5.2.4 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами	116
5.2.5 17. Критическое поле тонкой пленки	120
5.2.6 18. Критический ток тонкой пленки	124
5.2.7 19*. Флуктуационные эффекты вблизи сверхпроводящего перехода	127
5.3 СЛАБАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ	135
5.3.1 20. Фазовая когерентность и виды слабых связей	135
5.3.2 21. Стационарный эффект Джозефсона	137
5.3.3 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов	141
5.3.4 23*. Флуктуации критического тока. Макроскопическое квантовое туннелирование	148
5.3.5 24. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле	153
5.3.6 25. Сверхпроводящие квантовые интерферометры	159
5.3.7 26. Применения слабой сверхпроводимости	167
5.4 СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА	169
5.4.1 27. Введение	169
5.4.2 28. Поле одиночного вихря	171
5.4.3 29. Первое критическое поле	173
5.4.4 30. Взаимодействие вихрей	175
5.4.5 31. Второе критическое поле	178
5.4.6 32. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода	179
5.4.7 33. Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле	182
5.4.8 34. Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния	185
5.4.9 35*. Анизотропные сверхпроводники II рода	190
5.4.10 36*. Разрушение сверхпроводимости в тонкой пленке тепловыми вихрями	192
5.4.11 37*. Плавление решетки вихрей	197
5.4.12 38. Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние	199
5.4.13 39. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга	201
5.4.14 40. Резистивное состояние	205
5.4.15 41*. Коллективный пиннинг вихрей слабыми дефектами	209
5.4.16 42*. Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП	213
5.5 МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ	219
5.5.1 43. Введение. Электрон-фононное взаимодействие	219
5.5.2 44. Основное состояние сверхпроводника	221
5.5.3 45. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника	227
5.5.4 46. Туннельные эффекты в сверхпроводниках	234
5.5.5 47*. Связь сверхпроводников через ферромагнетик	241
5.5.6 48*. Эффект четности в сверхпроводниках	247
5.5.7 49*. Сверхпроводники с нетривиальным спариванием	250

5.5.8	50. Незатухающий ток и эффект Мейсснера-Оксенфельда	254
5.5.9	51. Связь микротеории с теорией Гинзбурга-Ландау	258
5.6	НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ	259
5.6.1	52. Квазичастицы: электроны и дырки	260
5.6.2	53. Заряд квазичастицы в сверхпроводнике	261
5.6.3	54. Время релаксации заряда квазичастиц	263
5.6.4	55. Андреевское отражение. Андреевские уровни в <i>SNS</i> -переходе	264
5.6.5	56*. Проводимость <i>SIN</i> -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр	269
5.6.6	59. Неравновесное усиление сверхпроводимости	283
5.6.7	61. СП «термопара» и магнитный поток от потока тепла	285
5.6.8	62. Термоэлектрические эффекты в JJ и СП II рода со слабым пиннингом	286
6	Еще раз основы и типичные явления сверхпроводимости	291
6.1	Thermodynamics and Thermal Properties of the Superconducting State	291
6.1.1	Thermodynamics and Thermal Properties of the Superconducting State	291
6.1.2	General Aspects of Thermodynamics	292
6.1.3	Specific Heat	295
6.1.4	Thermal Conductivity	297
6.1.5	Ginzburg-Landau Theory	300
6.1.6	Characteristic Lengths of the Ginzburg-Landau Theory	303
6.1.7	Type-I Superconductors in a Magnetic Field	307
6.1.8	Critical Field and Magnetization of Rod-Shaped Samples	308
6.1.9	Thermodynamics of the Meissner State	311
6.1.10	Critical Magnetic Field of Thin Films in a Field Parallel to the Surface	315
6.1.11	The Intermediate State	315
6.1.12	The Wall Energy	319
6.1.13	Type-II Superconductors in a Magnetic Field	325
6.2	линейная электродинамика сверхпроводников	344
6.2.1	Уравнение Лондонов	344
6.2.2	сверхпроводник с точки зрения линейной электродинамики	345
6.2.3	различные конфигурации с точки зрения линейной электродинамики	346
6.3	теория Гинзбурга-Ландау	346
6.4	Cooper Pairing	346
6.5	Conventional Superconductivity	346
6.5.1	Cooper Pairing by Means of Electron-Phonon Interaction	346
6.5.2	The Superconducting State, Quasiparticles, and BCS Theory	352
6.5.3	Special Properties of Conventional Superconductors	371
6.6	Currents in Type-I and Type-II Superconductors	373
6.7	Measurement methods of a resistance	400
6.7.1	Measurement of a resistance by microwave photons (???)	400
7	Fundamentals by de Gennes	401
7.1	FUNDAMENTAL PROPERTIES	401
7.1.1	I-I A NEW CONDENSED STATE	401
7.1.2	1-2 DIAMAGNETISM	402
7.1.3	The London Equation	402
7.1.4	Meissner Effect	403
7.1.5	1-3 ABSENCE OF LOW ENERGY EXCITATIONS	405
7.1.6	1-4 TWO KINDS OF SUPERCONDUCTORS	408
7.1.7	REFERENCES	409
7.2	MAGNETIC PROPERTIES OF FIRST KIND SUPERCONDUCTORS	409
7.2.1	2-1 CRITICAL FIELD OF A LONG CYLINDER	409
7.2.2	2-2 Penetration DEPTHS	412

7.2.3	Relation between Current and Field in a First Kind Superconductor	412
7.2.4	The Penetration Depth	413
7.2.5	Methods to Measure the Penetration Depth	414
7.2.6	Discussion	415
7.2.7	EXTENSION TO ALLOYS	416
7.2.8	VARIATIONS OF λ WITH TEMPERATURE	417
7.2.9	2-3 MAGNETIC PROPERTIES OF A SAMPLE OF ARBITRARY SHAPE: INTERMEDIATE STATE	417
7.2.10	Origin of the Intermediate State	417
7.2.11	Preliminary Thermodynamics	419
7.2.12	Thermodynamic Potential for Fixed T and j_{ext}	422
7.2.13	Relation between B and H in the Intermediate State	422
7.2.14	Applications	423
7.2.15	Conclusions	425
7.2.16	CRITICAL CURRENT	425
7.2.17	PRINCIPLE OF THE CRYOTRON	426
7.2.18	Microscopic Structure of the Intermediate State	427
7.2.19	A PARADOX	430
7.2.20	ORIGIN OF THE SURFACE ENERGY	430
7.3	MAGNETIC PROPERTIES OF SECOND KIND SUPERCONDUCTORS	432
7.3.1	3-1 MAGNETIZATION CURVES OF A LONG CYLINDER	432
7.3.2	3-2 VORTEX STATE: MICROSCOPIC DESCRIPTION	437
7.3.3	Negative Surface Energy	437
7.3.4	Properties of One Isolated Vortex Line	438
7.3.5	Interactions between Vortex Lines	443
7.3.6	TWO VORTEX LINES	443
7.3.7	MAGNETIZATION CURVES	444
7.3.8	FIELDS SLIGHTLY LARGER THAN H_{C_1}	445
7.3.9	Discussion	453
7.3.10	Vortex Line Motions	454
III	Problems and Questions in Superconductivity	456
8	Типичные задачи	456
8.1	Вопросы на понимание сверхпроводимости	456
8.1.1	Вопросы на понимание феноменологии и качественных соображений	456
8.1.2	Вопросы на понимание типичной микроскопической теории	457
8.1.3	Вопросы на понимание флуктуационных методов в сверхпроводниках	457
8.1.4	Задачи на понимание других эффектов со сверхпроводниками	457
8.1.5	Задачи на гипотетические вопросы о сверхпроводниках	458
8.2	Задачи общей физики	458
8.2.1	Задачи про элементарные сверхпроводники	458
8.2.2	Упрощенные задачи про сверхпроводники	458
8.3	Типичные теорфизические задачи	459
8.3.1	Задачи на сверхпроводимость	459
8.3.2	Трудные задачи на типичную сверхпроводимость (???????)	474
8.3.3	Задачи на неоднородные сверхпроводящие состояния	487
8.3.4	Задачи на функционал Гинзбурга-Ландау (!?)	487
8.3.5	Задачи на общие свойства сверхпроводников 2го рода	490

9 Другие задачи	491
9.1 Теорфизические задачи об отдельных методах и явлениях	491
9.1.1 Задачи на вихри	491
9.1.2 Задачи на флюктуационные эффекты	492
9.1.3 Задачи на эффект Джозефсона	492
9.1.4 Задачи на вихри и сопротивление от них	493
9.1.5 Задачи на флюктуационные эффекты в слабых контактах	493
IV Other Properties of Superconductors and Effects	494
10 Углубленные основы сверхпроводимости	494
10.1 Еще раз сверхпроводимость, но по Киттелю, Михеенкову, Пухову, де Роеку, т.п.	494
10.1.1 Экспериментальные факты по Киттелю	494
10.1.2 Сверхпроводимость некоторых соединений	497
10.1.3 Изотопический эффект в сверхпроводниках	506
10.1.4 Теоретическое рассмотрение	506
10.1.5 Качественно о сверхпроводимости	532
10.1.6 The BCS theory of superconductivity by De Roeck	533
10.1.7 Ginzburg-Landau Theory by De Roeck	540
10.1.8 Anderson-Higgs mechanics by De Roeck	546
10.1.9 Джозефсон, Мейсснер, вихри, критические поля на вводном уровне по Михеенкову и др.	548
10.1.10 Магнитные свойства сверхпроводников, ур Лондонов по Михеенкову	555
10.1.11 Теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау по Михеенкову или Пухову	565
10.1.12 Микроскопическая теория БКШ по Михеенкову	574
10.2 Unconventional Superconductivity by Mineev, V.P. Samokhin, K.	593
10.2.1 ЧАСТЬ I	593
10.2.2 1. Куперовское спаривание	593
10.2.3 2. Спиновая структура спаренных состояний	597
10.2.4 3. Фазы сверхтекучего гелия-3	599
10.2.5 4. Сверхпроводящие состояния в кристаллах	601
10.2.6 5. Энергия элементарных возбуждений сверхпроводника	611
10.2.7 6. Щель в спектре возбуждений и критическая температура	618
10.2.8 7. Температурное поведение термодинамических величин при $T \rightarrow 0$	621
10.2.9 8. Эффекты четности числа электронов в сверхпроводниках	623
10.2.10 9. Парамагнитная восприимчивость и сдвиг Найта	629
10.2.11 10. Разложение Ландау свободной энергии сверхпроводников	633
10.2.12 11. Сверхпроводящие состояния с многокомпонентными параметрами порялка	636
10.2.13 12. Уравнения Гинзбурга-Ландау и верхнее критическое поле	640
10.2.14 13. Границные условия и поверхностная сверхпроводимость	647
10.2.15 14. Мейсснеровское и смешанное состояние в необычных сверхпроводниках	655
10.2.16 15. Магнитные сверхпроводники	663
10.2.17 16. Эффект Джозефсона	668
10.2.18 ЧАСТЬ II	672
10.2.19 17. Уравнения Горькова	672
10.2.20 18. Функционал Гинзбурга-Ландау	679
10.2.21 19. Верхнее критическое поле в сверхпроводниках с p -спариванием	685
10.2.22 20. Границные условия для параметра порялка	692
10.2.23 21. Вияние примесей на необычную сверхпроводимость	700
10.2.24 22. Электронная теплопроводность необычных сверхпроводников	708
10.3 Сверхпроводимость по Ландау	718
10.3.1 Сверхтекучий ферми-газ: Энергетический спектр	718
10.3.2 Сверхтекучий ферми-газ: Термодинамические свойства	718

10.3.3	Гриневские функции сверхтекучего ферми-газа (-)	718
10.3.4	Температурные гриновские функции сверхтекучего ферми-газа (-)	718
10.3.5	Джозефсоновский контакт (???)	718
10.3.6	Связь тока с магнитным полем в сверхпроводнике (-)	718
10.3.7	Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник (-)	718
10.3.8	Сверхпроводящие сплавы (-)	718
10.3.9	Эффект Купера при отличных от нуля орбитальных моментах пары (-)	718
10.4	Eliashberg Theory: a short review by F. Marsiglio	718
10.4.1	introduction	719
10.4.2	The Eliashberg Equations	721
10.4.3	Results on the imaginary axis: T_c	724
10.4.4	Validity of the Theory	726
10.4.5	Results on the imaginary axis: in the superconducting state	729
10.4.6	Results on the real axis	729
10.4.7	Summary and Outlook	736
10.5	Сверхпроводимость по Абрикосову “теории металлов”	741
10.6	Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity by Philip F. Bagwell	741
10.6.1	I. INTRODUCTION	741
10.6.2	II. SNS JUNCTION WITH AN IMPURITY	742
10.6.3	III. JUNCTION SHORTER THAN THE HEALING LENGTH	746
10.6.4	IV. JUNCTION LONGER THAN THE HEALING LENGTH	748
10.6.5	v. CONCLUSIONS	752
10.6.6	ACKNOWLEDGMENTS	752
10.6.7	APPENDIX A: SCATTERING FROM THE SNS POTENTIAL	752
10.6.8	APPENDIX B: CONTINUUM SUPERCURRENTS	757
10.6.9	APPENDIX C: SUPERCURRENT FROM FREE ENERGY	760
10.6.10	APPENDIX D: APPROXIMATE ANDREEV LEVELS IN A LONG JUNCTION	761
10.7	Другое про сверхпроводимость	762
10.7.1	левитация над сверхпроводником	762
10.8	Теория сверхпроводимости по Абрикосову Горькову	762
10.8.1	Общие сведения. Выбор модели	762
10.8.2	Феномен Купера и неустойчивость относительно притяжения	765
10.8.3	Система основных уравнений для сверхпроводника	772
10.8.4	Выход уравнений сверхпроводимости в фононной модели	780
10.8.5	Термодинамика сверхпроводников (!!!!!)	783
10.8.6	Сверхпроводник в слабом электромагнитном поле	787
10.8.7	Сверхпроводник в произвольном магнитном поле вблизи температуры перехода	797
10.8.8	О сверхпроводящих сплавах	802
11	Основы флюктуаций по Варламову и Ларкину	815
11.1	2.1. Теория Гинзбурга - Ландау	818
11.1.1	2.1.1. Функционал Гинзбурга - Ландау	818
11.1.2	2.1.2. С скачок теплоемкости	819
11.1.3	2.1.3. Уравнения Гинзбурга - Ландау	820
11.2	2.2. Вклад флюктуаций в теплоемкость	822
11.2.1	2.2.1. Точное решение задачи в случае размерности $D = 0$	822
11.2.2	2.2.2. Произвольная размерность: случай $T \geq T_c$	823
11.2.3	2.2.3. Произвольная размерность: случай $T < T_c$	825
11.3	2.3. Флюктуационный диамагнетизм	826
11.3.1	2.3.1. Предварительные замечания	826
11.3.2	2.3.2. Флюктуационный диамагнетизм нульмерного образца	829
11.3.3	2.3.3. Флюктуационный диамагнетизм в двумерном случае	830
11.4	2.4. Слоистый сверхпроводник в магнитном поле	833

11.4.1	2.4.1. Модель Лоуренса - Дониака	833
11.4.2	2.4.2. Общая формула для флуктуационного вклада в свободную энергию в произвольном магнитном поле	835
11.4.3	2.4.3. Флуктуационная намагниченность и ее кроссоверы	836
11.4.4	2.4.4. Флуктуационная теплоемкость в магнитном поле	838
11.5	2.5. Критерий Гинзбурга - Леванюка	839
11.5.1	2.5.1. Определение числа Гинзбурга - Леванюка по теплоемкости в отсутствие магнитного поля	839
11.5.2	2.5.2. Другие определения	841
11.5.3	2.5.3. Уширение критической области магнитным полем	842
11.6	2.6. Скэйлинг и ренормализационная группа	844
11.7	2.7. Влияние флуктуаций на сверхтекущую плотность и критическую температуру	851
11.8	2.8. Флуктуации магнитного поля	855
12	Высокотемпературная сверхпроводимость	857
13	Other theoretical models	857
13.1	Possibility of superconductivity type phenomena in a one-dimensional system	857
13.2	Transition from metallic to tunneling regimes by Blonder Tinkham Klapwijk	857
13.2.1	I. INTRODUCTION	858
13.2.2	II. GENERALIZED SEMICONDUCTOR SCHEME	858
13.2.3	III. THE N-S BOUNDARY IN EQUILIBRIUM	862
13.2.4	IV. THE N-S BOUNDARY AT FINITE VOLTAGE: I – V CURVES	865
13.2.5	V. RELATION TO TRANSFER HAMILTONIAN APPROACH	867
13.2.6	VI. EXCESS CURRENT	868
13.2.7	VII. ANALYSIS OF CURRENTS AND CHARGE-IMBALANCE GENERATION	870
13.2.8	VIII. APPLICATIONS AND DISCUSSION	873
13.2.9	Green's-function method.	874
13.2.10	IX. CONCLUSION	877
13.2.11	ACKNOWLEDGMENTS	877
13.2.12	APPENDIX	878
14	Эксперименты по сверхпроводимости	882
14.0.1	теоретические эксперименты	882
15	Явления со сверхпроводниками	882
15.0.1	Левитация над сверхпроводником	882
V	Adds for Superconductivity	883
A	Введение	883
A.1	Мотивация	883
A.1.1	Множество приложений	883
A.1.2	Польза в плане развития как професионала	883
A.1.3	Польза в плане саморазвития	883
A.1.4	Результаты	883
A.1.5	Удивительные факты	883
A.1.6	Мотивация к разделам	883
A.2	Мышление професионала в сверхпроводимости	883
A.2.1	Суть сверхпроводимости	883
A.2.2	Способы заработать, зная предмет	883
A.2.3	Использование предмета в обычной жизни (!)	883
A.2.4	Актуальнейшие приложения	883
A.2.5	Построение с нуля	883

A.2.6 Способы догадаться до всех главных идей	883
A.2.7 Мышление для эффективного изучения	884
A.3 Литература	884
A.3.1 Основная	884
A.3.2 Дополнительная литература и статьи про разные явления и методы	884
A.4 Обзор	887
A.4.1 Популярное введение в сверхпроводимость	888
A.4.2 обзор теоретических подходов	888
A.4.3 Обзор дальнейших развитий	888
A.4.4 Связи с другими науками	888
A.4.5 Описание записи	888
A.4.6 Об истории предмета	889
A.5 Головоломки	889
A.5.1 Типичные головоломки	889
A.5.2 Бытовые головоломки	889
A.5.3 Принципиальные головоломки	889
A.5.4 Головоломки о деталях	889
A.5.5 Головоломки для освоения типичных понятий	889
B Математика и физика в помощь	889
B.0.1 О квантовой механике для сверхпроводимости (??)	889
B.0.2 О математике для сверхпроводимости (??)	889
C References	890
C.0.1 References from this note	890
C.0.2 References from Eliashberg Theory: a short review by F. Marsiglio	892

1 Preface and main motivation



Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Сверхпроводимость - раздел, позволяющий соприкоснуться с результатами человеческого гения

(все-таки это одно из наиболее сильно мотивирующих! потом раскрою эту мысль.)

Best fundamental questions

(потом добавлю из ЛШ пару задач тут, пока в другом месте тренируюсь.)

I-motiv-1. Nature of Superconductivity (вопрос про то, почему вообще есть сверхпроводимость? по сути для этого во многом мы и изучаем сверхпроводники.)

I-motiv-2. Dielectric properties of superconductor (???) Why do we have a Meissner effect?

(потом напишу подробнее вопрос и ответ, почему такое вообще??? совсем не тривиально, что такое происходит.)

I-motiv.3 Levitation of superconductor (??? почему такое явление есть????)

Best technical questions

(потом добавлю из ЛШ пару задач тут, пока в другом месте тренируюсь.)

Part I

Superconductivity a Nutshell

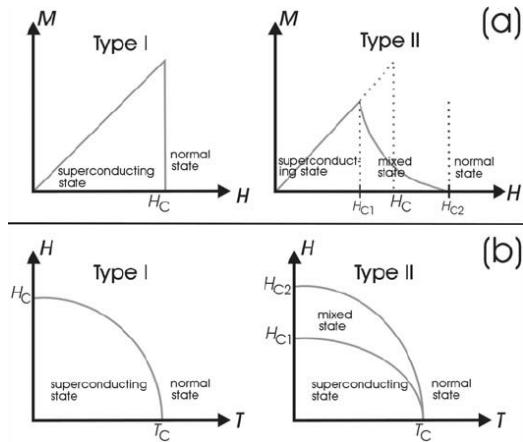
2 Основное о сверхпроводимости

2.1 Основные свойства и законы сверхпроводников

2.1.1 Обзор основных свойств сверхпроводников и моделей с ними

Основные итоговые свойства сверхпроводников в графиках

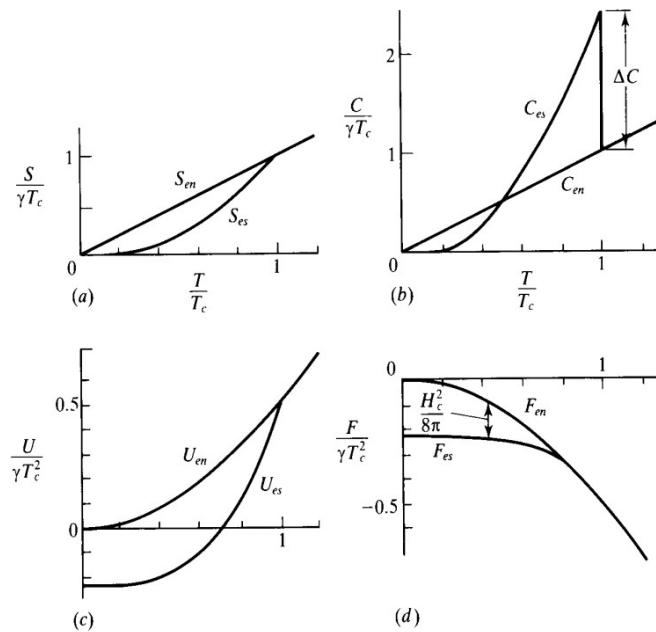
(!!! допишу везде короткое пояснение, почему так???)



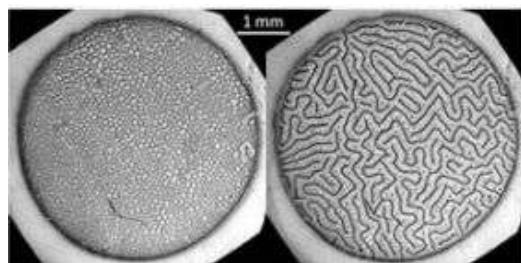
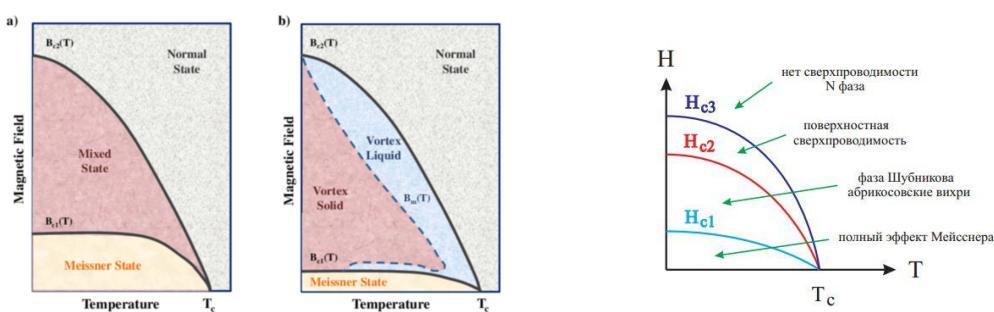
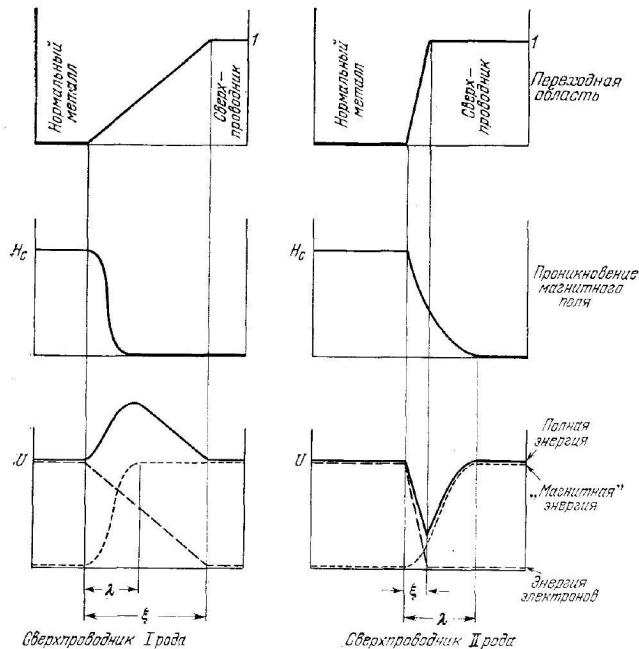
(напишу строчку, что за параметры. М - намагниченность, положительная, да???)

$$T_c \propto \omega_D \propto \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \text{Isotope effect}$$

$$T_c = 1,13 \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \exp \left(-\frac{1}{N_n(E_F)V} \right)$$



(!! нужны пояснения, что такое U и откуда такие графики, укажу коротко!)



Основные экспериментальные факты и их отражение в теории сверхпроводимости

(отражение - потом допишу!!!)

1. Идеальные проводники ниже критической температуры T_c . Температура перехода $T_c \sim 10$ К (Камерлинг-Оннес, 1911).

2. Сверхпроводимость разрушается магнитным полем $H_c \sim 300$ Э или транспортным током $j_c \sim 10^6$ А · см⁻² (Камерлинг-Оннес, 1914).

(??? в итоге, почему это, словами????)

3. Эффект Мейсснера (Мейсснер, Оксенфельд, 1933). Сверхпроводник - идеальный диамагнетик. Ниже критической температуры магнитное поле полностью выталкивается

из сверхпроводника. Это важное обстоятельство. Поскольку $B = 0$ при $T < T_c$ независимо от предыстории возникновения сверхпроводимости, сверхпроводимость - это новая термодинамическая фаза металла.

(???? в итоге, почему это, словами?????)

4. Экспоненциальная зависимость теплоемкости от температуры . Электронная теплоёмкость сверхпроводника ниже температуры перехода ведёт себя как $C_e \sim \exp(-\Delta/T)$ (Корак, 1954). Это означает, что возбуждённые состояния сверхпроводника отделены от основного «энергетической щелью» Δ как в полупроводнике. Поскольку при $T = T_c$ происходит фазовый переход II рода со скачком теплоемкости, то $\Delta(T) = 0$ в точке перехода. Далее электронная теплоемкость имеет нормальное поведение $C_e \sim T$.

(???? в итоге, почему это, словами?????)

5. Изотопический эффект (Максвелл, Рейнольдс, 1950). Температура перехода зависит от массы атомов металла как $T_c \propto M^{-1/2}$. Это значит, что ключевую роль при возникновении сверхпроводимости играет решётка металла (? почему??). Электроны могут взаимодействовать между собой посредством обмена фононов, типичная энергия которых $\hbar\omega_D \approx 300$ К. Это могут быть виртуальные фононы, которые возбуждают в решётке движущийся в кристалле электрон. Испущенный одним электроном фонон может поглотиться другим электроном, и между ними возникает эффективное притяжение. Ниже мы увидим, что энергия связи такой пары $\Delta \sim T_c$. Поэтому

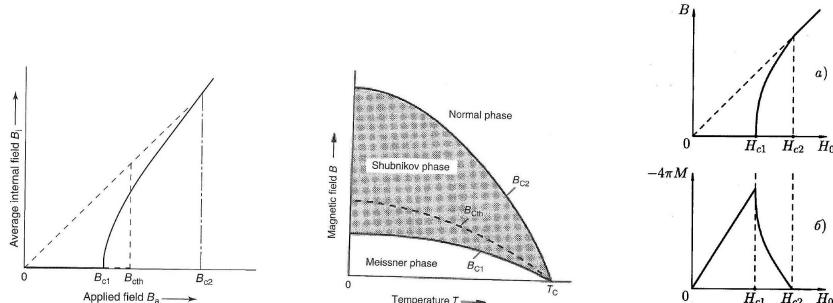
$$T_c \propto \hbar\omega_D.$$

(???? в итоге, почему это, словами????? как это помогает понять сверхпроводимость?)

(???? тут суть того, как вообще измерить нулевое сопротивление???? где-то ниже подробнее тоже укажу, потому что важный вопрос)

(где-то ниже будет большой раздел с указаниями на эти эксперименты конкретно)

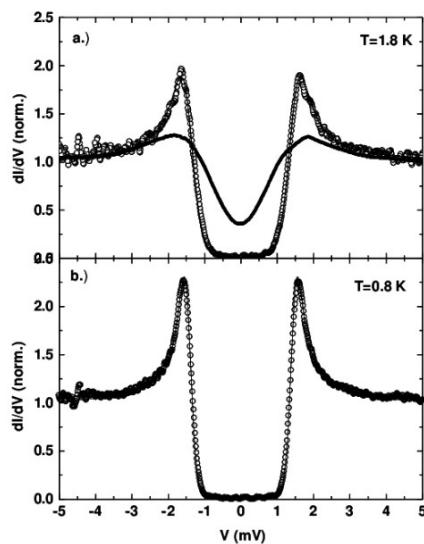
Основные свойства сверхпроводников именно 2го рода



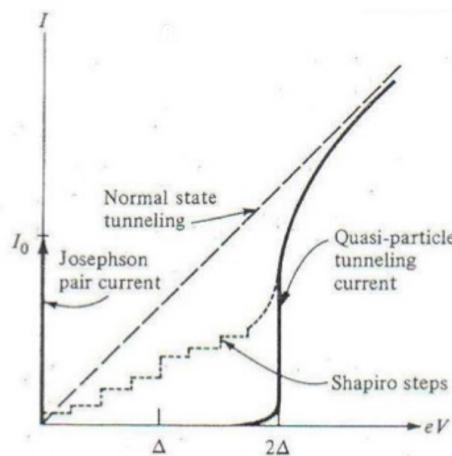
(????? какая скорость сверхпроводящих электронов?????)

Основные модели сверхпроводников

Основные свойства NS контактов Для NS контакта:

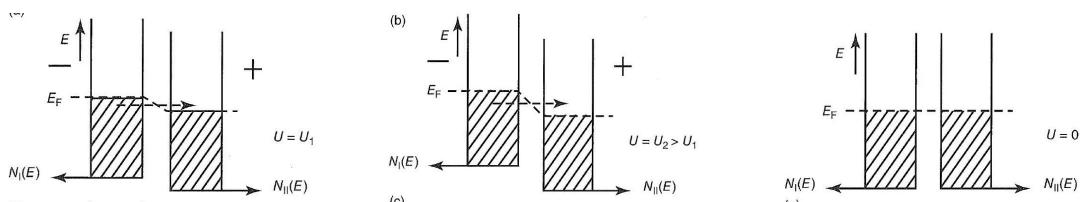
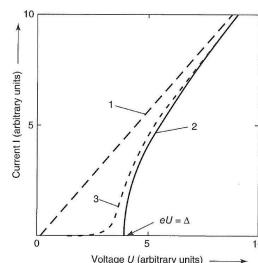


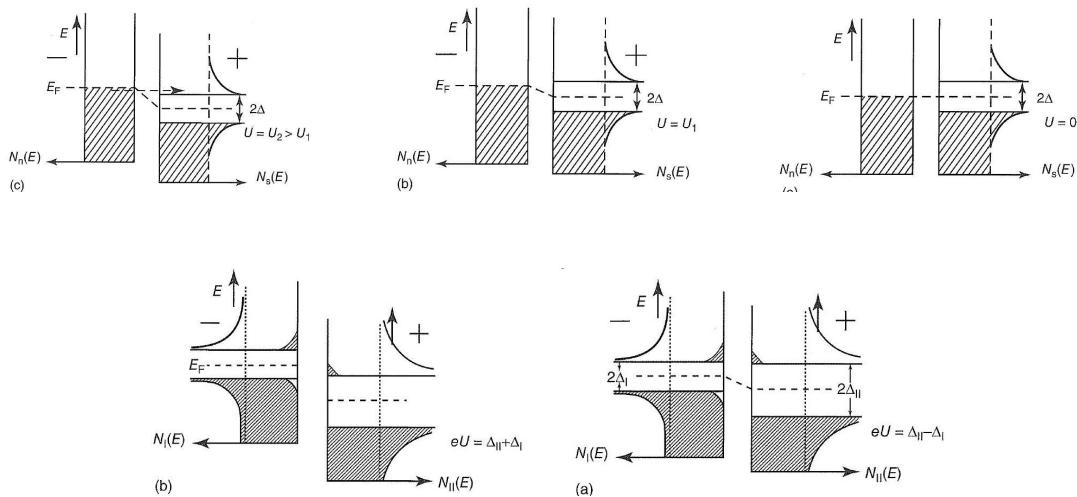
(!?!?!?! очень важно это додумать, что это такое вообще???? какая-то щель, но почему такой график и как с БКШ связано???)



(!? тут словами пояснение, почему так?)

Контакты со сверхпроводником





Обзор эффектов (!!?)

(в духе "а еще может быть такое-то с таким-то графиком и ключевой формулой (мб парой, а мб и без формулы вообще)".)

Флуктуации сверхпроводящего параметра порядка приводят также к росту проводимости металла с понижением температуры к T_c . Этот эффект был предсказан Асламазовым и Ларкиным [40] и надежно подтвержден экспериментально.

Другие общие важные вопросы о природе сверхпроводимости

Как измеряют нулевое сопротивление?

Как измеряют ток при нулевом сопротивлении?

Как измеряют такие малые температуры?

2.1.2 Основные результаты и методы всех теорий

Основные идеи и соотношения теорий сверхпроводимости

Природа сверхпроводимости

(чуть формул тоже добавлю позже)

При сколь угодно слабом притяжении между двумя электронами возникает связанное состояние, энергия которого зависит от орбитального момента. сверхпроводящие состояния, соответствующие куперовскому спариванию с различными значениями орбитального момента, имеют различную критическую температуру.

Основные свойства сверхпроводников

Типичные параметры сверхпроводников, их связи и оценки

$$\kappa = \lambda_L / \xi_{GL}$$

$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} < 1/\sqrt{2}$ Type-I superconductors Related to positive wall energy.

$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} > 1/\sqrt{2}$ Type-II superconductors Related to negative wall energy.

$$a^2/b = 4\Delta_0^2 n/\varepsilon_F T_c^2 \approx n/\varepsilon_F \quad (T=0)$$

(!! добавлю, откуда это получается, см. Пухова)

(!!! добавлю многие оценки!!!)

$$\hbar \nabla \varphi = m_s \mathbf{v}_s + q_s \mathbf{A}$$

(????? откуда такая формула???)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_s &= q_s n_s \mathbf{v}_s = \frac{q_s n_s}{m_s} (\hbar \nabla \varphi - q_s \mathbf{A}) \\ \nabla \varphi &= \frac{2\pi}{\Phi_0} (\mu_0 \lambda_L^2 \mathbf{j}_s + \mathbf{A}) \end{aligned}$$

London penetration depth $\lambda_L(T)$ The typical distance it takes to screen the magnetic field inside a superconductor

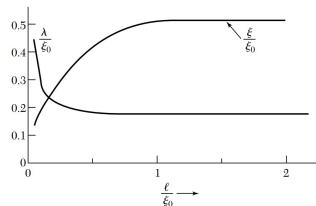
Coherence length ξ_0 (BCS, Pippard) Characterizes the length scale over which the correlation between the electrons in a Cooper pair is active. It is the typical size of a Cooper pair.

GL-coherence length $\xi_{GL}(T)$ Gives the typical distance over which the superconducting order parameter can vary.

Dependence of λ_L , ξ_{GL} and ξ_0 on impurities:

$$\begin{aligned} \text{clean limit } l^* &>> \xi_0, T \rightarrow T_c & \text{dirty limit } l^* &<< \xi_0, T \rightarrow T_c \\ \lambda_L(T) &= 0,71 \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1-T/T_c}} & \lambda_L(T) &= 0,64 \lambda_L(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l^*(1-T/T_c)}} \\ \xi_{GL}(T) &= 0,74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-T/T_c}} & \xi_{GL}(T) &= 0,855 \sqrt{\frac{\xi_0 l^*}{1-T/T_c}} \\ \xi_0 &= 0,18 \frac{\pi \hbar v_F}{2k_B T_c} & \xi_0 &\approx l^* \end{aligned}$$

Also κ depends on impurities !!



(??? почему такой график, с плато?? разве так???)

$$a \approx T_c/\varepsilon_F \quad b \approx T_c^2/n\varepsilon_F$$

De

(???? какая скорость сверхпроводящих электронов????)

$$\begin{aligned} H &= E_0 + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} \\ E_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} H_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\xi_k - E_{\mathbf{k}}) \quad \text{energ of gr state} \end{aligned}$$

Для сверхпроводника с синглетным спариванием имеем:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$$

$$E_0 \text{ s} = E_{0n} - \frac{1}{2} N_0 \Delta^2$$

для синглетного изотропного спаривания, и

$$E_0 \text{ s} = E_{0n} - \frac{1}{4} N_0 \text{tr} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Delta_{\mathbf{k}}^+ \Delta_{\mathbf{k}}$$

для произвольного типа спаривания, где $E_0 \text{ n}$ есть энергия основного состояния нормального металла.

In metals and superconductors, the electrons are highly delocalized, and their wavefunctions tend to be spread out over large distances. In fact, the Cooper pairs in low-temperature superconductors have very large spatial wavefunctions.

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \sqrt{m / (\mu_0 q^2 n_s)} & \lambda_L(T) &= \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_c}} \\ \xi_{GL} &= \sqrt{-\hbar^2 / 2ma} & \xi_{GL}(T) &\sim \frac{1}{\sqrt{1 - T/T_c}} \end{aligned}$$

(?? тут ведь m^* , да??? перепишу формулу! в хи минус что значит?)
(??? что с системой единиц, это СГС или СИ в итоге??)

$$\frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0)} \propto \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

(?? откуда она??)

Параметр порядка - куперовская волновая функция $\Psi(r)$.

$$\Psi(r) \sim |\Delta| \sim \sqrt{n_s}.$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\phi}.$$

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\hbar^2}{4ma(T_c - T)}, \\ \lambda^2 &= \frac{mc^2 b}{8\pi e^2 a(T_c - T)}. \end{aligned}$$

(!!!! тут список а,b,c через микро параметры!!!)

Длина когерентности ξ по порядку величины совпадает с размером куперовской пары (? формула!). На границе сверхпроводника с вакуумом параметр порядка Ψ уменьшается до на масштабе ξ , ибо куперовские пары не могут «выглядеть» больше, чем на свой размер ξ . Лондоновская глубина проникновения λ определяет толщину приповерхностного слоя, по которому текут мейсснеровские токи, экранирующие сверхпроводник от внешнего магнитного поля.

(!!! добавлю скорее всего графики из ку левена!)

Effective field $B_{\text{eff}} = \frac{1}{1-N_M} B_a$

Wall energy per unit area

(type-I) $\alpha_w \approx (\xi_{GL} - \lambda_{\text{pen}}) \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0}$

$$(\text{type-II}) \quad \alpha_w \approx \xi_{GL} \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0} - \lambda_L \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$B_{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} (\ln \kappa + 0.08) B_{chl} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} (\ln \kappa + 0.08)$$

$$B_{c2} = \sqrt{2}\kappa B_{cth} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2}$$

$$g_n - g_s = \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0}$$

Characteristic lengths:

$$\lambda_L := \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} \quad \xi_{GL} := \sqrt{-\hbar^2/2m\alpha} \quad \xi_0 := 0,18 \frac{\pi \hbar v_F}{2k_B T_c}$$

$$\lambda_L(T) = 0,71 \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad (\text{clean limit})$$

$$\lambda_L(T) = 0,64 \lambda_L(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l^*(1-T/T_c)}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,855 \sqrt{\frac{\xi_0 l^*}{1-T/T_c}} \quad \xi_0 \approx l^* \quad (\text{dirty limit})$$

(????? когда-то посмотрю про это вывод, пока просто знаю!!!)

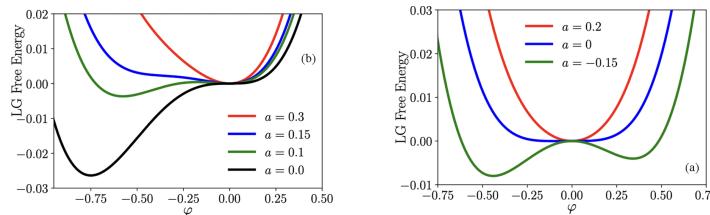
Idea and main properties of GL (?!!)

(I'll write idea here, important!)

$$\Omega_s[\Psi(\mathbf{r}), \mathcal{A}(\mathbf{r})] = \Omega_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathcal{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\nabla \times \mathcal{A})^2}{8\pi} \right] dV. \quad (\text{series})$$

$$\alpha = a(T - T_c), \quad a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad m \rightarrow 2m, e \rightarrow 2e \quad e := -|e|$$

(??? абзац про отсутствие нечетных членов!)



(??? абзац про то, почему именно такие коэффициенты!)

$$\Psi(r) = \text{const}, \quad B = 0 \Rightarrow (\text{minimisation}) \Rightarrow \frac{n_s}{2} \equiv |\Psi_0|^2 = \begin{cases} -\frac{a(T-T_c)}{b}, & T < T_c, \\ 0, & T > T_c. \end{cases}$$

$$n_s(T)|_{T=0} = 2aT_c/b.$$

Без внешнего поля $\Omega_n - \Omega_s(\mathcal{H} = 0) \equiv V\alpha^2/2b$ может быть скомпенсирован проигрышем в энергии из-за магнитного поля $\Omega_s(\mathcal{H}) - \Omega_s(\mathcal{H} = 0) = V\mathcal{H}^2/8\pi$ (ибо $\mathcal{M} = -\mathcal{H}/4\pi$ и $-V \int_0^{\mathcal{H}} \mathcal{M} d\mathcal{H} = \mathcal{H}^2/8\pi$). Отсюда

$$\mathcal{H}_c^2 = \frac{4\pi a^2 (T - T_c)^2}{b}.$$

(?? лекц 12 смотреть нужно, потом это пойму!)

$$a^2/b = 4\Delta_0^2 n/\varepsilon_F T_c^2 \approx n/\varepsilon_F.$$

Получаем $a \approx T_c/\varepsilon_F$ и $b \approx T_c^2/n\varepsilon_F$.

$$\alpha\Psi + b\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathcal{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (1 \text{ GL eq.})$$

$$\left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathcal{A}\Psi \right)_S \bar{n} = 0.$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_s = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\mathcal{A}. \quad (2 \text{ GL eq.})$$

(!!!! тут вопрос про то, где e , а где $2e$, допишу потом. важно помнить, что масса тоже двух электронов!!!!)

(тут укажу, откуда они!!!?)

Теория Гинзбурга-Ландау является типичной теорией среднего поля, учет флюктуаций ограничивает пределы применимости таких теорий. Критерием применимости является малость числа Гинзбурга-Леванюка $Gi = T_c b^2 / ac^3$. Подставляя полученные выше a, b и c , для числа Гинзбурга-Леванюка получаем:

$$Gi \approx \left(\frac{T_c}{\varepsilon_F} \right)^4 \ll 1.$$

$\psi = \Psi/\Psi_0$, где Ψ_0 параметр порядка в глубине образца (12.3), уравнения Гинзбурга-Ландау можно записать как ($\psi = |\psi|e^{i\phi}$):

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathcal{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0$$

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathcal{A} + |\psi|^2 \mathcal{A} = \frac{-\Phi_0}{2\pi} |\psi|^2 \nabla\phi,$$

где $\Phi_0 = \pi\hbar c/e = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_c}{\text{cm}^2}$ - квант магнитного потока.

$$\lambda_L = \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} \quad \lambda_L(T) = \frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}}$$

$$\xi_{GL} = \sqrt{\hbar^2/(2m|\alpha|)} \quad \xi_{GL}(T) \sim \frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}}$$

(?? тут ведь m^* , да???) перепишу формулу!)

$$\frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0)} \propto \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

(?? откуда она???)

Параметр порядка - куперовская волновая функция $\Psi(r)$.

$$\Psi(r) \sim |\Delta| \sim \sqrt{n_s}.$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\phi}.$$

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4ma(T_c - T)},$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2b}{8\pi e^2a(T_c - T)}.$$

Длина когерентности ξ по порядку величины совпадает с размером куперовской пары (? формула!). На границе сверхпроводника с вакуумом параметр порядка Ψ уменьшается до на масштабе ξ , ибо куперовские пары не могут «выглянуть» больше, чем на свой размер ξ . Лондоновская глубина проникновения λ определяет толщину приповерхностного слоя, по которому текут мейсснеровские токи, экранирующие сверхпроводник от внешнего магнитного поля.

(!!! добавлю скорее всего графики из ку левена!)

Effective field $B_{\text{eff}} = \frac{1}{1-N_M}B_a$

Wall energy per unit area

(type-I) $\alpha_w \approx (\xi_{GL} - \lambda_{\text{pen}}) \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0}$

(type-II) $\alpha_w \approx \xi_{GL} \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0} - \lambda_L \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$B_{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa}(\ln \kappa + 0.08)B_{cth} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2}(\ln \kappa + 0.08)$$

$$B_{c2} = \sqrt{2}\kappa B_{cth} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2}$$

$$g_n - g_s = \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0}$$

Characteristic lengths:

$$\lambda_L := \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} \quad \xi_{GL} := \sqrt{-\hbar^2/2m\alpha} \quad \xi_0 := 0,18 \frac{\pi \hbar v_F}{2k_B T_c}$$

$$\lambda_L(T) = 0,71 \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad (\text{clean limit})$$

$$\lambda_L(T) = 0,64 \lambda_L(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l^*(1-T/T_c)}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,855 \sqrt{\frac{\xi_0 l^*}{1-T/T_c}} \quad \xi_0 \approx l^* \quad (\text{dirty limit})$$

(????? когда-то посмотрю про это вывод, пока просто знаю!!!)

Начнем с

$$F[\Delta(\mathbf{r})] = F_{n0} + \int d\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + a \int d\mathbf{r} \Delta^* \left[\frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} - \hbar D \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{b}{2T_c} |\Delta|^2 \right] \Delta,$$

где F_{n0} - свободная энергия в нормальном состоянии в отсутствие магнитного поля, Δ - параметр порядка, e - заряд электрона, \mathbf{A} - векторный потенциал внешнего магнитного поля \mathbf{B} и T_c - критическая температура сверхпроводника. Обратите внимание на дополнительный (по сравнению с обычным выражением для импульса в магнитном поле) коэффициент 2 перед векторным потенциалом - это 2 электрона. Интегрирование ведётся по объёму образца. τ_{GL} имеет размерность времени и меняет знак в точке сверхпроводящего перехода, так что

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{GL}}} = \alpha(T - T_c),$$

где T - температура. Удобно нормировать параметр порядка так, чтобы его модуль совпадал с щелью в квазичастичной плотности состояний объёмного образца. Коэффициенты

a, α, D и b слабо зависят от температуры, и их можно найти из модели сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (БКШ). Мы будем в основном интересоваться так называемым грязным пределом (реализующимся, например, в сверхпроводящих сплавах с примесями), когда длина свободного пробега электрона l много меньше, чем $\xi_0 = \sqrt{\hbar D/T_c}$ (характерный размер куперовской пары при $T = 0$), – именно такая ситуация чаще всего реализуется в эксперименте. В этом случае D совпадает с коэффициентом диффузии электрона на уровне Ферми (т. е. $D = v_F l/3$, где v_F – скорость Ферми), а остальные коэффициенты имеют следующие значения [11]:

$$a = \frac{\nu\pi}{8T_c}, \quad \alpha = \frac{8}{\pi}, \quad b = \frac{7\zeta(3)}{\pi^3},$$

где $\nu = mp_F/2\pi^2\hbar^3$ – плотность состояний электрона на уровне Ферми в нормальном состоянии, $\zeta(3) \approx 1.2$ – дзета-функция Римана [$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^n$].

Условие применимости разложения $F[\Delta(\mathbf{r})]$ – малость параметра порядка Δ по сравнению с его значением $\Delta(0)$ при $T \ll T_c$. Для сверхпроводника $\Delta(0) \sim T_c$ и $\Delta \sim \sqrt{\hbar T_c / \tau_{\text{GL}}} \sim \sqrt{(T_c - T) T_c}$, откуда следует условие $|T - T_c| \ll T_c$. Кроме того, Δ должна меняться в пространстве не слишком быстро, а именно на расстояниях много больших ξ_0 .

Для чистого случая:

$$a = 7\zeta(3)n/8\pi^2T_c^2, \quad \alpha = 6\pi^2T_c/7\zeta(3)E_F, \quad D = \hbar/4m, \quad b = 3T_c/4E_F,$$

где $n = p_F^3/3\pi^2\hbar^3$ – плотность электронов, $E_F = p_F^2/2m$ – энергия Ферми, m – масса электрона.

(???) тут у нас всегда обычная масса, не эффективная? этот вопрос не четко обсуждается в литературе, додумать нужно)

Idea and main properties of BCS (?!!)

(!! Idea is here)

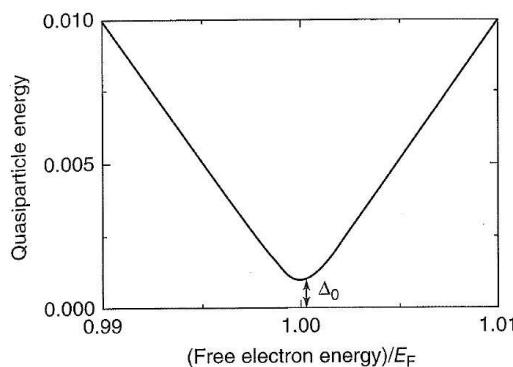
$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda g_F}}.$$

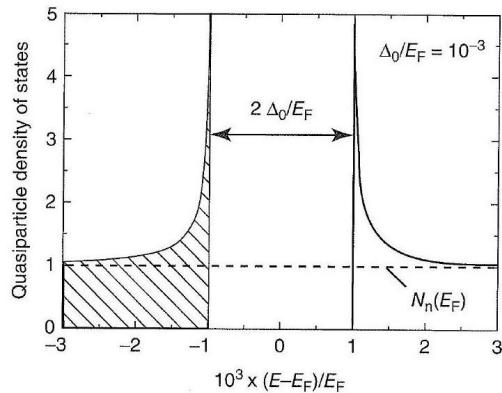
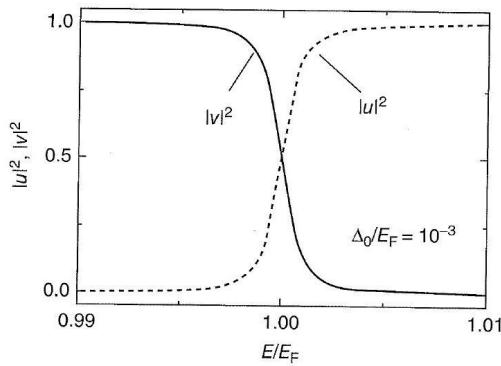
$$E_{\text{condens-n}} = -N(E_F)\Delta_0^2/2$$

$$E_{\text{paired el.}} = 2E_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/N(E_F)V}$$

$$T_c = 1,13 \frac{\hbar\omega_D}{k_B} \exp\left(-\frac{1}{N_n(E_F)V}\right)$$

Электроны в паре Купера все-таки куда-то в общей массе двигаются, пусть и имеют противоположные импульсы, потому что их импульсы противоположны только в их CO, а не в нашей. (???? никак это не соотношу с формулой????????????77)





Main thermodynamic relations and laws of superconductors (????)

$$c_{nL} \approx \alpha (T/\theta_D)^3; \quad c_{nE} \approx \gamma T; \quad c_{sE}^{BCS} = 9,17 \gamma T_c \exp\left(-\frac{1,5 T_c}{T}\right); \quad \gamma := \frac{2}{3} \pi^2 k_B^2 N(E_F)$$

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_R$$

Экспериментальные факты в основе теорий сверхпроводимости

Эвристические соображения (!!?) (допишу, тут вопросы остаются, но это и не так важно для начала)

Ключевые факты:

1. Притяжение между электронами обеспечивается фононами решетки. Это взаимодействие не прямое, а опосредованное и не может выражаться потенциальной функцией $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

2. Для существования связанного состояния двух электронов нужна двумерность. Она обеспечивается тем, что движение электронов происходит на фоне заполненной ферми-сферы.

Эффективно взаимодействие выражается в рассеянии электрона на электроне. Чтобы электрон мог перейти из состояния \mathbf{p} в состояние \mathbf{p}' , последнее, согласно принципу Паули, должно быть свободно. Это возможно лишь для состояний вблизи поверхности Ферми. Ширина области, в которой электроны могут притягиваться друг к другу $\sim \hbar\omega_D$, поскольку это максимальная энергия фононов, которую можно передать. Остальные электроны, находящиеся в глубине ферми-сферы, не могут изменить свой импульс.

В мелкой трёхмерной яме уровня, соответствующего связанному состоянию, нет. Он появляется только, если яма достаточно глубока и число Борна больше единицы. Откуда

же появляется «низкоразмерность» движения, обеспечивающая существование пары? У нас не об изолированные частицы в 3D-пространстве, а о квазичастицы на фоне заполненной ферми-сферы. Испускание и поглощение фонара приводит лишь к повороту импульса электрона, его положение описывается только двумя углами на ферми-сфере, а величина импульса остаётся практически неизменной $p \approx p_F$. Наличие заполненной ферми-сферы делает задачу эффективно двумерной. Кроме того, мы заменяем плотность состояний вблизи поверхности Ферми на постоянную величину, что также соответствует двумерному случаю. В мелкой двумерной яме уровень, соответствующий связанному состоянию, есть всегда. Энергия связи экспоненциально мала по константе взаимодействия, что и объясняет малую величину температуры сверхпроводящего перехода (?? почему???).

Little–Parks oscillations, (??? what else???) as a hit for BCS

Общие важные вопросы про теории сверхпроводимости

Связи теорий сверхпроводимости друг с другом (????) (??? оставшийся важный вопрос, потом пойму, пока прописать сами теории нужно еще)

Переходы между одними и другими типами сверхпроводников за счет изменения их параметров (????) (укажу про эти задачи потом, что как доказать, что меняя такой-то параметр такие-то эффекты поменяются. пока тренируюсь в этом.)

Почему вообще классическая теория ГЛ работает для квантовых явлений? (????) (тоже, стану умнее - допишу)

Другие принципиальные свойства сверхпроводников

Вычисление сил, действующих на сверхпроводник в магнитном поле (см ЛЛ8, еще додумать нужно. Броде в общефизике тоже про это задачи были)

Самоиндукция сверхпроводников (см ЛЛ8, еще додумать нужно. добавлю задачи про это в каталог)

Теоретическое доказательство, что проводимость сверхпроводника равна ровно бесконечности (?????) (??? непонятно, почему все другие процессы дают ровно нулевой вклад в проводимость. а так- через переход к ур Лондонов это можно показать, допишу позже.)

Как различные поправки за счет различных эффектов могут быть учтены? (!!!)

(в духе, что а если электроны отталкиваются электростатически еще, как это учесть? и про все это. С опытом соберу, смотрел немного про такие теории, пока не до этого.)

Флуктуации сверхпроводящего параметра порядка приводят также к росту проводимости металла с понижением температуры к T_c . Этот эффект был предсказан Асламазовым и Ларкиным [40] и надежно подтвержден экспериментально.

2.1.3 London's theory, skin effect, inductance, impedance

(просто саммари 1й части Шмидта, хорошие темы там)

Вывод уравнений Лондонов и их свойств

(выпишу из Шмидта, все про них)

6. Глубина проникновения магнитного поля по Лондонам

Лондоновская глубина проникновения для некоторых сверхпроводников по Шмидту, со ссылкой на [Линтон Э. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1971.]:

Элемент	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda(0), \text{Å}$	500	1300	$380 \div 450$ (анизотропия)	640	470	390	510	920

(?!!! проверю расчетами!)

Нелокальная электродинамика сверхпроводников по Шмидту

В общем виде нелокальная связь между j_s и \mathbf{A} может быть записана в виде

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \int \hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где \hat{Q} - некоторый оператор, который, действуя на вектор \mathbf{A} , превращает его в вектор $\hat{Q}\mathbf{A}$. Радиус действия оператора $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ берется равным ξ_0 , т.е. $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ отличен от нуля только при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi_0$. Так происходит усреднение действия вектора \mathbf{A} на частицу (носитель сверхтока) больших размеров. Если этот размер устремить к нулю, то \hat{Q} превратится в δ -функцию, и мы вернемся к локальной электродинамике. Пиппарт предложил $\hat{Q}\mathbf{A}$ выбрать в виде

$$\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') = -\frac{3n_s e^2}{4\pi m c \xi_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^4} (\mathbf{A}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi_0}$$

$$\lambda = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty H dx.$$

Здесь H_0 - поле на поверхности полубесконечного сверхпроводника.

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\lambda_P}{\xi_0} \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_P^2} \mathbf{A},$$

$$\lambda_P^2 = \lambda^2 \xi_0 / \lambda_P,$$

$$\lambda_P \simeq (\lambda^2 \xi_0)^{1/3}.$$

Квантовое обобщение уравнения Лондонов. Квантование магнитного потока по Лондонам

$$\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$$

(5.18), легко получим из (8) авнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi,$$

$$\Phi = (\Phi_0/2\pi) \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

$$\Phi = n\Phi_0,$$

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} = \frac{hc}{2e}.$$

Принцип замыкания по Шмидту

(есть такой принцип, Шмидт говорит, что он хороший, я пока не читал, не нужно это было.)

Кинетическая индуктивность

(!!?? нужно додумать еще смысл этого!)

$$\mathcal{F}^M = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2c^2} L^M I^2;$$

$$L^K := c^2 \Lambda \int j_s^2 dV / I^2$$

Примеры кинетической индуктивности (см Шмидт пар 10.)

Комплексная проводимость сверхпроводника

$$\mathbf{E} = \Lambda d\mathbf{j}_s / dt.$$

лекtronов можно написать

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{n_n e} \frac{\mathbf{j}_n}{\tau} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt}.$$

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{\mathbf{j}_n}{\tau}.$$

$$\mathbf{j}_n \propto e^{i\omega t},$$

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{1}{\Lambda \omega} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E}$$

Полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$, и мы имеем комплексную проводимость в высокочастотном поле:

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2, \\ \sigma_1 &= \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\Lambda\omega} \left[1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right].\end{aligned}$$

Скин эффект

Нормальный скин-эффект

$$\begin{aligned}\text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \\ -\nabla^2 \mathbf{H} &= -\frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.\end{aligned}$$

$$k^2 = -i \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega,$$

$$\begin{aligned}k &= (1 - i)/\delta \\ \delta &= \left(\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega} \right)^{1/2}. \\ \sigma &= \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega}.\end{aligned}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\left(\frac{n_n}{n_s} \omega \tau - i \right)^{1/2}}.$$

Поверхностный импеданс

$$Z := \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H}$$

$$ikH = \frac{4\pi}{c} \sigma E.$$

$$Z = \frac{ik}{\sigma} = \frac{1+i}{\sigma\delta}.$$

$$\begin{aligned}Z &= R_{\square} + iX_{L\square}, \\ R_{\square} &= \frac{2\pi\omega^2\lambda}{c^2} \frac{n_n}{n_s} \tau \\ X_{L\square} &= 4\pi\lambda\omega/c^2 = \omega L_{\square}/c^2\end{aligned}$$

Выясним, как зависят от температуры R_{\square} и $X_{L\square}$. Воспользуемся для этого эмпирической зависимостью $\lambda \propto (1 - t^4)^{-1/2}$, $t = T/T_c$. Поскольку $\lambda \propto n_s^{-1/2}$, имеем $n_s \propto (1 - t^4)$, или $n_s = n(1 - t^4)$, где n -плотность свободных электронов металла. Тогда $n_n = nt^4$, таким образом,

$$R_{\square} \propto t^4 / (1 - t^4)^{3/2}, \quad X_{L\square} \propto (1 - t^4)^{-1/2}.$$

$$Z = \frac{2\pi}{c^2} \left(2\omega\tau \frac{n_s}{n_n} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\tau} (1+i) = \frac{1+i}{\sigma_n \delta_n}$$

(картинку добавлю)

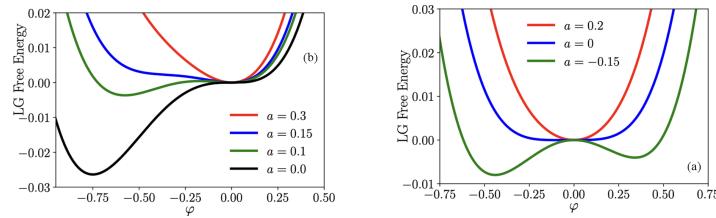
2.1.4 Simplified GL theory

Derivations of main properties of SC from GL theory

$$\Omega_s[\Psi(\mathbf{r}), \mathcal{A}(\mathbf{r})] = \Omega_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathcal{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\nabla \times \mathcal{A})^2}{8\pi} \right] dV. \quad (\text{series})$$

$$\alpha = a(T - T_c), \quad a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad m \rightarrow 2m, e \rightarrow 2e \quad e := -|e|$$

(???) абзац про отсутствие нечетных членов!)



(???) абзац про то, почему именно такие коэффициенты!)

$$\Psi(r) = \text{const}, \quad B = 0 \Rightarrow (\text{minimisation}) \Rightarrow \frac{n_s}{2} \equiv |\Psi_0|^2 = \begin{cases} -\frac{a(T-T_c)}{b}, & T < T_c, \\ 0, & T > T_c. \end{cases}$$

$$n_s(T)|_{T=0} = 2aT_c/b.$$

Без внешнего поля $\Omega_n - \Omega_s(\mathcal{H} = 0) \equiv V\alpha^2/2b$ может быть скомпенсирован проигрышем в энергии из-за магнитного поля $\Omega_s(\mathcal{H}) - \Omega_s(\mathcal{H} = 0) = V\mathcal{H}^2/8\pi$ (ибо $\mathcal{M} = -\mathcal{H}/4\pi$ и $-V \int_0^\mathcal{H} \mathcal{M} d\mathcal{H} = \mathcal{H}^2/8\pi$). Отсюда

$$\mathcal{H}_c^2 = \frac{4\pi a^2 (T - T_c)^2}{b}.$$

(???) лекц 12 смотреть нужно, потом это пойму!)

$$a^2/b = 4\Delta_0^2 n / \varepsilon_F T_c^2 \approx n/\varepsilon_F.$$

Получаем $a \approx T_c/\varepsilon_F$ и $b \approx T_c^2/n\varepsilon_F$.

$$\alpha\Psi + b\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla + \frac{2e}{c} \mathcal{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (1 \text{ GL eq.})$$

$$\left(i\hbar \nabla \Psi + \frac{2e}{c} \mathcal{A} \Psi \right)_S \bar{n} = 0.$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_s = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathcal{A}. \quad (2 \text{ GL eq.})$$

(!!!! тут вопрос про то, где e , а где $2e$, допишу потом. важно помнить, что масса тоже двух электронов!!!!)

(тут укажу, откуда они!!!?)

Теория Гинзбурга-Ландау является типичной теорией среднего поля, учет флюктуаций ограничивает пределы применимости таких теорий. Критерием применимости является малость числа Гинзбурга-Леванюка $Gi = T_c b^2 / ac^3$. Подставляя полученные выше a, b и c , для числа Гинзбурга-Леванюка получаем:

$$Gi \approx \left(\frac{T_c}{\varepsilon_F} \right)^4 \ll 1.$$

$\psi = \Psi/\Psi_0$, где Ψ_0 параметр порядка в глубине образца (12.3), уравнения Гинзбурга-Ландау можно записать как ($\psi = |\psi|e^{i\phi}$):

$$\begin{aligned} \xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathcal{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi|\psi|^2 &= 0 \\ \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathcal{A} + |\psi|^2 \mathcal{A} &= \frac{-\Phi_0}{2\pi} |\psi|^2 \nabla \phi, \end{aligned}$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar c/e = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_c}{\text{см}^2}$ - квант магнитного потока.

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} & \lambda_L(T) &= \frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}} \\ \xi_{GL} &= \sqrt{\hbar^2/(2m|\alpha|)} & \xi_{GL}(T) &\sim \frac{1}{\sqrt{1-T/T_c}} \end{aligned}$$

(??? тут ведь m^* , да??? перепишу формулу!)

$$\frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0)} \propto \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

(?? откуда она??)

Параметр порядка - куперовская волновая функция $\Psi(r)$.

$$\Psi(r) \sim |\Delta| \sim \sqrt{n_s}.$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\phi}.$$

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\hbar^2}{4ma(T_c - T)}, \\ \lambda^2 &= \frac{mc^2 b}{8\pi e^2 a (T_c - T)}. \end{aligned}$$

Длина когерентности ξ по порядку величины совпадает с размером куперовской пары (? формула!). На границе сверхпроводника с вакуумом параметр порядка Ψ уменьшается до на масштабе ξ , ибо куперовские пары не могут «выглянуть» больше, чем на свой размер ξ . Лондоновская глубина проникновения λ определяет толщину приповерхностного слоя, по которому текут мейсснеровские токи, экранирующие сверхпроводник от внешнего магнитного поля.

(!!! добавлю скорее всего графики из ку левена!)

Effective field $B_{\text{eff}} = \frac{1}{1-N_M} B_a$

Wall energy per unit area

(type-I) $\alpha_w \approx (\xi_{GL} - \lambda_{\text{pen}}) \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0}$

$$(\text{type-II}) \quad \alpha_w \approx \xi_{GL} \frac{B_{ch}^2}{2\mu_0} - \lambda_L \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$B_{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} (\ln \kappa + 0.08) B_{chl} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} (\ln \kappa + 0.08)$$

$$B_{c2} = \sqrt{2}\kappa B_{cth} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2}$$

$$g_n - g_s = \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0}$$

Characteristic lengths:

$$\lambda_L := \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} \quad \xi_{GL} := \sqrt{-\hbar^2/2m\alpha} \quad \xi_0 := 0, 18 \frac{\pi \hbar v_F}{2k_B T_c}$$

$$\lambda_L(T) = 0,71 \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,74 \frac{\xi_0}{\sqrt{1-T/T_c}} \quad (\text{clean limit})$$

$$\lambda_L(T) = 0,64 \lambda_L(0) \sqrt{\frac{\xi_0}{l^*(1-T/T_c)}} \quad \xi_{GL}(T) = 0,855 \sqrt{\frac{\xi_0 l^*}{1-T/T_c}} \quad \xi_0 \approx l^* \quad (\text{dirty limit})$$

(????? когда-то посмотрю про это вывод, пока просто знаю!!!)

Критерий применимости теории Гинзбурга–Ландау в типичном случае

(!!! выпишу из Шмидта гл 19, там много хороших мыслей!!!)

Флуктуационные поправки к Ω -потенциалу, энтропии и теплоемкости еще раз дают область применимости уравнений Гинзбурга–Ландау:

$$\Delta_{fl} C_\phi = \frac{T_c^2 V a^{3/2}}{16 c^{3/2} \pi \sqrt{T - T_c}} \quad \Delta_{gap} C \sim C(T_c) \approx g_F T_c / \varepsilon_F,$$

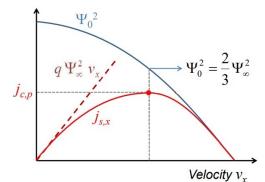
где для сверхпроводника $c = \hbar^2/4m$ и $a = T_c m \pi^2 / p_F^2$. Снова получаем критерий $Gi = \Delta_{fl} C_\phi / \Delta_{gap} C = \left(\frac{T_c}{\varepsilon_F} \right)^4 \ll 1$ (????).

(а в нетипичном - см ниже от Варламова Ларкина жесткая теория, потом добавлю)

Critical currents in SC from GL

(тут про метод через сверхтекучесть по Пухову!!!)

$$j_{s,x} = q \Psi_0^2(v_x) v_x \quad \Psi_0^2(v_x) = \Psi_\infty^2 \left(1 - \frac{mv_x^2}{2|\alpha|} \right)$$



$$v_{max,p} = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{3m}} j_{c,p} = q \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2|\alpha|}{3m}} \Psi_\infty^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} B_{cth} \frac{1}{\mu_0 \lambda_L}$$

(??? на самом деле тут нужно бы указать просто, откуда формула, которая выше для в.ф.)

$$j_{s,x} = \frac{q\hbar k}{m} \Psi_0^2 - \frac{q^2}{m} \Psi_0^2 A_x = q \Psi_0^2 \frac{\hbar k - qA_x}{m}$$

because $j_s = \frac{q\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}$ and $\Psi = \Psi_0 e^{ikx}$.

Типичные решения уравнений Гинзбурга-Ландау (???)

(чисто с точки зрения УМФ допишу уравнения и указания про решения потом)

Эффект Мейсснера по ГЛ Ротор от $\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathcal{A} + |\psi|^2 \mathcal{A} = \frac{-\Phi_0}{2\pi} |\psi|^2 \nabla \phi$ с учётом $\nabla \times \mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$, достаточно глубоко «в теле» сверхпроводника, где $|\psi|^2 = 1$ дает уравнение Лондонов:

$$\lambda^2 \cdot \nabla^2 \mathcal{B} - \mathcal{B} = 0.$$

Решение - экспоненциальное затухание вглубь сверхпроводника: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \exp(-z/\lambda)$ на глубину λ .

(?? ниже - додумаю теорпол - пойму это??) Возникновение эффекта Мейсснера связано со спонтанным нарушением симметрии при $T < T_c$ и калибровочной инвариантности Ω -потенциала сверхпроводника. Он совершенно аналогичен эффекту Хиггса возникновения массы m у частицы при спонтанном нарушении симметрии теории. Подобно тому, как кулоновский потенциал безмассовых частиц заменяется юкавским потенциалом массивных частиц с конечным радиусом действия $\lambda \sim m^{-1}$, в сверхпроводнике ниже точки перехода магнитное поле экспоненциально «зарезается» мейсснеровскими токами на масштабе лондоновской глубины проникновения λ .

Квантование потока по ГЛ

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \Phi_0 = \pi \hbar c / e = 2 \cdot 10^{-7} \text{Гс} \cdot \text{см}^{-2}$$

Обоснование: $j_s = \frac{-c|\psi|^2}{4\pi\lambda^2} (\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \phi + \mathcal{A})$, рассмотрим топологически неодносвязный образец - сверхпроводник с дыркой, в которой «заморожен» некоторый магнитный поток. Этот поток создаётся текущими по внутренней поверхности полости сверхпроводящими токами. Проинтегрируем ток по контуру, охватывающий дырку и проходящий глубоко ($\ll \lambda$) в сверхпроводник, где $|\psi|^2 = 1$ и $\mathbf{j}_s = 0$:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Тут интеграл от фазы не ноль, потому что у нас топологически не связный образец, а $\oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n$. (?? когда-то додумаю, как так, что ловко топологическим аргументом у нас появляются особенности теоремы Гаусса. Но так все тут рассуждают, так что остается поверить)

(?!?!?!? абзац про флюксоид, что это за понятие.)

Энергия границы раздела между сверхпроводящей и нормальной фазами и два рода сверхпроводников по ГЛ (!!!!!!!) (!!! скоро допишу, очень важный параграф)

$$\mathcal{H}_c = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi} \quad (\text{термод. критическое поле})$$

Пусть плоская вертикальная NS -граница разделяет фазы так, что слева нормальная, а справа сверхпроводящая. Поскольку NS -граница покоятся, фазы находятся в равновесии; это значит, что параллельное границе магнитное поле равно термодинамическому критическому полю \mathcal{H}_c .

Посмотрим, как изменяется объемная плотность энергии вглубь сверхпроводника. Благодаря наличию упорядоченных сверхпроводящих электронов она падает на $\mathcal{H}_c^2/8\pi$ на масштабе $\sim \xi$.

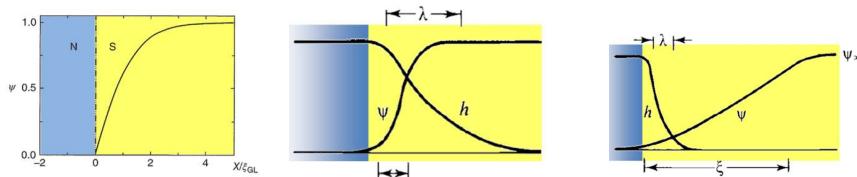
В то же время мейсснеровские токи создают намагниченность, уничтожающую внутреннее магнитное поле, что приводит к увеличению плотности свободной энергии на эти же $\mathcal{H}_c^2/8\pi$ на масштабе $\sim \lambda$.

Поскольку поверхностное натяжение σ - это интеграл от плотности энергии по поперечной координате z , то ясно, что $\sigma \approx (\mathcal{H}_c^2/8\pi)(\xi - \beta\lambda)$. Здесь $\beta \approx 1$ число порядка единицы, более точный расчёт показывает!!!! нужно узнать его!! перепишу скорее всего этот раздел!), что $\beta = \sqrt{2}$.

Таким образом, в сверхпроводниках II рода ($\xi/\lambda < \sqrt{2}$) при определённых условиях может быть выгодно возникновение смешанного состояния, когда соседствуют области сверхпроводящей и нормальной фазы. Это смешанное состояние связано с образованием квантовых вихрей, аналогичных сверхтекучим вихрям.

Мы видим, что квантовомеханические соображения позволяют чисто феноменологически ввести параметр ξ_0 . Пойдем немного дальше. Пусть сверхпроводящие электроны описываются некоторой эффективной волновой функцией Ψ . Квадрат модуля этой функции определяет плотность сверхпроводящих электронов. Это плотность обращается в нуль в нормальном металле и увеличиваясь на NS границе достигает своего максимального значения в толще сверхпроводника. Таким образом на границе $|\nabla\Psi|^2 \neq 0$. Из квантовой механики известно, что эта величина пропорциональна плотности кинетической энергии. Кинетическая энергия - положительна и дает положительный вклад в поверхностную энергию. Таким образом, можно ожидать, что последовательный учет неоднородности позволит изменить знак результирующего поверхностного натяжения на $\sigma > 0$ и расслоение станет невыгодным.

(пропишу с графиками, нужно додумать!)



Глубина проникновения поля в сверхпроводник 1го и 2го родов по ГЛ Уравнение Лондонов справедливо если $\lambda_L \gg \xi_0$, потому что при его выводе неявно предполагалось, что волновой пакет сверхпроводящих частиц целиком повержен магнитному полю, мы получили, что магнитное поле изменяется на масштабе λ_L . Если $\xi_0 \gg \lambda_L$, то лишь малая часть волнового пакета подвержена влиянию магнитного поля. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками второго рода. Парадоксально, но после открытия эффекта Мейсснера, главным образом, исследовались сверхпроводники первого рода, когда $\lambda_L \ll \xi_0$, для которых уравнение Лондонов не работает.

Оценим глубину проникновения магнитного поля λ в другом предельном случае, когда $\lambda \ll \xi_0$. В этом случае, только λ/ξ_0 часть волнового пакета подвержена влиянию магнитного поля, то есть участвует в формировании незатухающего тока. Для оценки можно считать, что это эквивалентно уменьшению концентрации n . Тогда вычисление λ можно провести тем же способом, каким получалась лондоновская глубина проникновения, но с концентрацией $n_s \lambda / \xi_0$. В результате получаем самосогласованное уравнение

$$\lambda = \left(\frac{mc^2 \xi_0}{4\pi n_s e^2 \lambda} \right)^{1/2}.$$

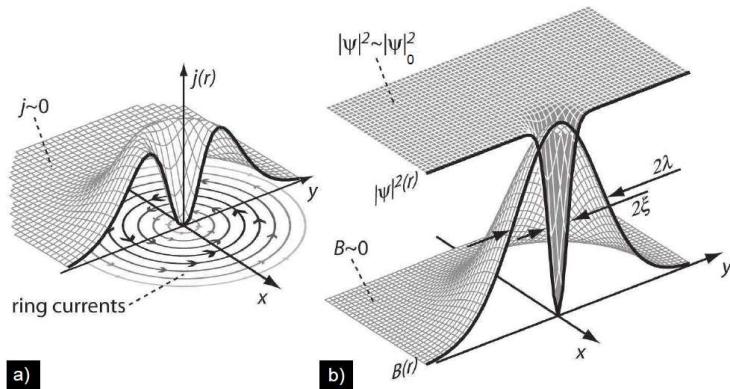
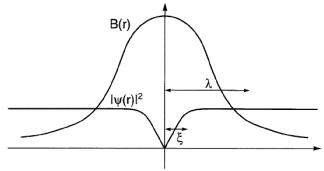
Отсюда следует, что

$$\lambda = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^{1/3} \gg \lambda_L.$$

(!! очень четко напишу эти рассуждения!!!)

Решение ур. ГЛ для абрикосовского вихря

$$\mathcal{B}(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$



(сперва подумаю про рассуждения, потом уже напишу их!)

Верхнее и нижнее критические магнитные поля (сперва подумаю про рассуждения, потом уже напишу их!)

Флуктуационная поправка к теплоемкости по ГЛ

Обзор ходов для успешного применения теории ГЛ

Об эффективных методах решениях уравнений Гинзбурга-Ландау (???) (???)
мб это численно решается, пока не знаю, и не важно это)

2.1.5 Simplified BCS theory (?????)

Derivations of main properties of SC from BCS theory

Картина квазичастиц. Спектр возбуждений фермиевского типа Пары образуются не из свободных электронов, а из квазичастиц ферми-жидкости, возбуждений над заполненной ферми-сферой. Элементарные возбуждения - электроны вне фермисферы и дырки внутри нее, причем появиться они могут только при $T \neq 0$. Спектр квазичастиц это $+\xi_p$, квазидырок это $-\xi_p$, где $\xi_p = p^2/2m - \varepsilon_F$ – превышение энергии над химическим потенциалом, которое вблизи поверхности Ферми равно $\xi_p = v_F(p - p_F)$.

В пару объединяются квазичастицы с одинаковым $|\mathbf{p}|$, так что речь идет о паре двух частиц или о паре двух дырок. Поскольку спин квазичастиц $\frac{1}{2}$, а полный спин образца должен сохраняться, они рождаются парами: частица-античастица, так что число возбуждений над и под Ферми-сферой всегда одинаково. Такая ситуация в картине квазичастиц называется спектром фермиевского типа в противоположность спектру бозевского типа, когда квазичастицы рождаются поодиночке. Пара - частица «над» и дырка «под» поверхностью Ферми. Они имеют единый энергетический спектр $\varepsilon(\mathbf{p})$ и единую фермиевскую функцию распределения

$n_F(\mathbf{p})$ с нулевым химическим потенциалом $\mu = 0$. Все квазичастицы имеют положительную энергию, а их число зависит от температуры. Например, при $T > T_c$ в нормальном металле $\varepsilon(\mathbf{p}) = |\xi_{\mathbf{p}}|$.

Плотностью состояний по импульсу

$$d := v_F g_F / 2 \quad g_F = g(\varepsilon_F) = p_F m / \pi^2 \hbar^3,$$

где g_F - плотность электронных состояний по энергии в нашем узком слое вблизи уровня Ферми. (!!! там были формулы про это в 2D ферми газе, да???!!! свяжу с ними)

Куперовская неустойчивость

$$\hat{H}_0(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1) = |\xi_{\mathbf{p}}| \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1), \quad (\text{free part-l near Fermi surf-s})$$

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = V^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}}, \quad \xi_{\mathbf{p}} = v_F(p - p_F).$$

$$\psi_{\text{pair}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) := \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},+}(\mathbf{r}_1) \psi_{-\mathbf{p},-}(\mathbf{r}_2),$$

$$[\hat{H}_0(\mathbf{r}_1) + \hat{H}_0(\mathbf{r}_2) + \hat{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad \hat{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \neq V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$2|\xi_{\mathbf{p}}| c_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'} = E c_{\mathbf{p}} \quad V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} := \langle \mathbf{p}, +, -\mathbf{p}, - | \hat{V} | \mathbf{p}', +, -\mathbf{p}', - \rangle$$

(???) пока не получилось $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ получить, нужно читать теорию!)

$$2\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F; \quad V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \stackrel{\text{model}}{=} \begin{cases} -\lambda, & \text{при } p_F - \frac{\hbar\omega_D}{v_F} < |\mathbf{p}|, |\mathbf{p}'| < p_F + \frac{\hbar\omega_D}{v_F} \\ 0, & \text{вне этого слоя.} \end{cases}$$

$$c_{\mathbf{p}} = \frac{\lambda I}{2|\xi_{\mathbf{p}}| - E} \quad I := \sum'_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'} = \text{const}$$

$$-\frac{1}{\lambda} = \sum'_{\mathbf{p}'} \frac{1}{E - 2|\xi_{\mathbf{p}'}|}$$

Размер куперовской пары

$$\Delta \approx \left| \frac{p^2}{2m} - \frac{p_F^2}{2m} \right| \approx v_F \delta p.$$

Размер - это неопределенность координаты, поэтому из соотношения неопределенности:

$$\xi \approx \frac{\hbar v_F}{\Delta}.$$

Для типичного сверхпроводника $v_F/c \approx 10^{-2}$, $\Delta \approx 10K$ длина когерентности пары

$$\xi \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см},$$

она превышает среднее расстояние между электронами: $a = n^{-1/3} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ на четыре порядка или в ε_F/T_c раз: $\frac{\xi}{a} \approx \frac{\varepsilon_F}{T_c}$.

Поскольку 2Δ есть энергия связи двух электронов,

$$\Delta \approx \left| \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} \right| \approx \frac{p_F \delta p}{m}, \quad (v_i \approx v_F)$$

Размер куперовской пары можно оценить также из щели: у электронов в нормальном состоянии в сверхпроводнике $\varepsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2}$. Вдали от ферми-уровня $v_F |p - p_F| \gg \Delta$ она совпадает с спектром нормального металла: $\varepsilon(p) = v_F |p - p_F|$. Это значит, что эффект спаривания оказывает влияние только на электроны с импульсами в области шириной $\delta p \approx \Delta/v_F$. Соответственно, пространственный масштаб куперовской корреляции составляет $\xi \approx \hbar/\delta p \approx \hbar v_F/\Delta$.

При $v_F \approx 10^8$ см/с, $\Delta \approx 10K$ получается $\xi \approx 2 \cdot 10^{-4}$ см, то есть размер куперовской пары составляет десятки тысяч межатомных расстояний. Пары проникают друг через друга, их нельзя представлять себе как классический газ частиц, расстояние между которыми больше их размеров.

Модель Бардина–Купера–Шиффера

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \xi_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} - \lambda \sum'_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}'+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}'-}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}+} \hat{a}_{-\mathbf{p}-}, \quad \{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

Оператор рождения куперовской пары это $\hat{a}_{\mathbf{p},+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p},-}^\dagger$, а её уничтожения это $\hat{a}_{-\mathbf{p}-} \hat{a}_{\mathbf{p}+}$. Введём для них статистическое усреднение (по основному состоянию при $T = 0$ и по ансамблю при $T > 0$) и проинтегрируем по слою с притяжением (штрих в сумме):

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \lambda \cdot \sum'_{\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}',+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}',-}^\dagger \rangle, \\ \Delta &= \lambda \cdot \sum'_{\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}',-} \hat{a}_{\mathbf{p}',+} \rangle. \end{aligned}$$

(??? Этот переход нужно дочитать еще!! не понимаю, как так усредняем???)

$$\hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \xi_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} + \frac{1}{\lambda} |\Delta|^2 + \sum_{\mathbf{p}} [\Delta^* \hat{a}_{\mathbf{p}+} \hat{a}_{-\mathbf{p}-} + \Delta \hat{a}_{-\mathbf{p}-}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}+}^\dagger]$$

Bogoliubov tr-s:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\mathbf{p}-} &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}-} + v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}+}^\dagger, \\ \hat{b}_{\mathbf{p}+} &= u_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}+} - v_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}-}^\dagger, \end{aligned} \quad \{\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}, \hat{b}_{\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

(??!!! допишу обратные, именно они нужны!!)

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu \hat{N} &= \Omega_0 + \sum'_{\mathbf{p}} \varepsilon(p) (\hat{b}_{\mathbf{p}+}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}+} + \hat{b}_{\mathbf{p}-}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}-}) \\ \Omega_0 &\equiv 2 \sum'_{\mathbf{p}} [\xi_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 - \Delta u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}] + \frac{1}{\lambda} \Delta^2, \quad \varepsilon(p) := \sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2} \end{aligned}$$

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \right), \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2}} \right)$$

v_p^2 - вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ вблизи поверхности Ферми занята, u_p^2 - вероятность того, что эта пара состояний свободна (??? почему??). Это связано с тем, что даже при нулевой температуре распределение электронов сверхпроводника около поверхности Ферми размазано в интервале энергий $\sim \Delta_0$. Таково основное состояние сверхпроводника при $T = 0$. (??? почему????)

$$|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \right) |vac\rangle.$$

This is just the standard Fermi sea, if $u_{\mathbf{k}} = 0$, $v_{\mathbf{k}} = 1$, for $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F|$, and $u_{\mathbf{k}} = 1$, $v_{\mathbf{k}} = 0$, for $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$. Close to the Fermi surface, it's mostly a superposition of empty state, with amplitude u_k , and occupied Cooper pairs, with amplitude v_k . (????)

At zero temperature not all of the electrons in the BCS ground state form Cooper pairs.

Но при этом Пухов говорит, что при нулевой температуре все электроны сверхпроводящие (???????????)

Энергия основного состояния сверхпроводника $E_0 = \Omega_0(\Delta_0) - \Omega_0(0)$ при $T = 0$

$$E_0 = \frac{1}{2} g_F (\hbar\omega_D)^2 - \frac{1}{2} g_F \hbar\omega_D \Delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)^2} \approx -g_F \Delta_0^2 / 4 \quad (\Delta_0 \ll \hbar\omega_D)$$

Отрицательный знак энергии означает куперовскую неустойчивость нормального состояния ферми-газа с притяжением: более энергетически выгодно сверхпроводящее состояние. Поскольку энергия связи куперовской пары $2\sqrt{\Delta_0^2 + \xi_p^2}$, отсюда следует, что основной вклад в энергию основного состояния дает спаривание квазичастиц из узкого слоя шириной $\sim \Delta_0$ вблизи уровня Ферми. Там имеется $\sim g_F \Delta_0$ квазичастиц, энергия которых при переходе в сверхпроводящее состояние понижается на величину $\sim \Delta_0$. Остальные куперовские пары в силу $\varepsilon(p) = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$ вносят в энергию малый вклад.

Зависимость щели от температуры

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda g_F}}.$$

(тут формула для дельта-от-T)

Уравнение для щели $\Delta(T)$ получается самосогласованно из опр. $\Delta := \lambda \sum'_{\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{\mathbf{p}',+}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}',-}^\dagger \rangle$, просто подставим $\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$ через $\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}$ и усредним с учётом того, что наши квазичастицы (электроны и дырки) фермионы $\langle \hat{b}_{\mathbf{p}+}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}+} \rangle = \bar{n}_{\mathbf{p}} = \langle \hat{b}_{\mathbf{p}-}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}-} \rangle = [\exp(\varepsilon(p)/T) + 1]^{-1}$, получаем (???? нет, это непонятно, нужно смотреть другой вывод!)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1 - 2\bar{n}_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}}.$$

Это уравнение определяет зависимость щели $\Delta(T)$ от температуры T .

(!!!! тут укажу, как же это сделать в итоге??? пока не знаю.)

$\Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)$ получаем, подставив $\bar{n}_{\mathbf{p}}(T = 0) \equiv 0$, и заменив сумму на интеграл с плотностью состояний $v_F g_F / 2$:

$$1 = \frac{\lambda}{2} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_F^2}{v_F} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_0^2}} = \frac{\lambda}{2} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_F^2}{v_F} 2 \int_0^{\hbar\omega_D/\Delta_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Имеем «длинный логарифм» $\int dx / \sqrt{1 + x^2} = \ln|x + \sqrt{1 + x^2}|$, но его можно и оценить: верхний предел интегрирования велик $\hbar\omega_D/\Delta_0 \gg 1$, поэтому $\int_0^x dx / \sqrt{1 + x^2} \propto \ln|x|$. Точность этой оценки обусловлена соотношениями $\Delta_0 \sim T_c \ll \hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$. Отсюда $\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda g_F}}$.

(???? не понял этот вывод, по хорошей книге еще раз его переделаю!!!)

T_c можно определить, записывая для точки перехода, где $T = T_c$ и $\Delta = 0$:

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int' \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1 - 2\bar{n}_{\mathbf{p}}}{|\xi_{\mathbf{p}}|} = \frac{\lambda g_F}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{+\hbar\omega_D} \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{2\xi_{\mathbf{p}}} \operatorname{th} \frac{|\xi_{\mathbf{p}}|}{2T_c} = \frac{\lambda g_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D/2T_c} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx.$$

Здесь мы учли, что спектр квазичастиц $\varepsilon(p) = |\xi_{\mathbf{p}}|$, а также $1 - 2\bar{n}_{\mathbf{p}} = \operatorname{th}(|\xi_{\mathbf{p}}|/2T_c)$. Далее, при $x \gg 1$ имеем $\int_0^x (\operatorname{th} x/x) dx \approx \int_1^x dx/x = \ln|x|$. Отсюда $2T_c \approx \hbar\omega_D \exp(-2/\lambda g_F) = 0,5\Delta_0$. Точный ответ по БКШ почти такой же:

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} \Delta_0 \approx 0,57\Delta_0,$$

$\gamma = 1,78$ - постоянная Эйлера. (??? впишу, как его получить, уже делал это в задаче!!!)

Сколько сверхпроводящих электронов при нулевой температуре?

(??? это спорный вопрос, который нужно додумать!!! так что, если есть норм компонента, то всегда что ли есть диссипация??? странно очень).

Газ электронов в сверхпроводнике характеризуется разделением его плотности n на нормальную n_n и сверхтекущую n_s части. Получается из теории ферми-жидкости (разложением и усреднением) $\mathbf{P} = -\mathbf{v} \frac{4\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dpp^4 \frac{dn_B(\varepsilon)}{d\varepsilon}$. Подставим фермиевское распределение и умножим на 2 (от спина), получаем

$$\rho_n = -\frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{dn_F}{dp} p^4 dp.$$

Этот интеграл «набирается» в окрестности импульса Ферми $p \approx p_F$, поэтому

$$\rho_n = -\frac{p_F^4}{3\pi^2\hbar^3 v_F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn_F}{d\varepsilon} d\xi.$$

Полная плотность электронного газа $\rho \equiv \rho_n + \rho_s$ равна $\rho = mN/V = p_F^3 m / 3\pi^2 \hbar^3$, поэтому

$$\frac{\rho_n}{\rho} = -2 \int_0^{+\infty} \frac{dn_F}{d\varepsilon} d\xi.$$

Тут интеграл определяется температурной зависимостью щели $\Delta(T)$. Дифференцируем $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \cdot \frac{1+2\bar{n}_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2}}$ по T и подставляем, получаем (!!! сделаю это уже очень скоро!!!)

$$\frac{\rho}{\rho_n} = 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \Delta}.$$

Поэтому при $T \rightarrow 0$ плотность нормальной компоненты обращается в ноль $\rho_n \rightarrow 0$. Другими словами, при нулевой температуре все электроны становятся сверхпроводящими и $\frac{\rho_s}{\rho} = -\frac{d \ln T}{d \ln (\Delta/T)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

(???? пока это вопрос, а то в другом месте написано, что нет, не все, ибо ферми сфера заполнена, рассеяние не может быть)

Критический ток из BCS и критерия сверхтекучести Более точное разложение $E_0 = \frac{1}{2}g_F(\hbar\omega_D)^2 - \frac{1}{2}g_F\hbar\omega_D\Delta_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right)^2}$ вблизи точки перехода $T = T_c$ позволяет получить зависимость $\Delta(T) \sim (T_c - T)^{1/2}$.

По определению $\Delta := \lambda \cdot \sum_{\mathbf{p}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{p}'}, -\hat{a}_{\mathbf{p}',+} \rangle$, она пропорциональна оператору уничтожения куперовских пар, поэтому $\Delta^2 \sim n_s$.

Это позволяет оценить температурную зависимость критического j_c тока от температуры T . В соответствии с критерием сверхтекучести (!! добавлю формулу!) для куперовских пар со спектром $\varepsilon(p) = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$, их критическая скорость $v_c = \Delta/p_F$. Это значит, что при скоростях, больших v_c , пары утрачивают свойство сверхтекучести и разваливаются. Поэтому плотность критического тока

$$j_c = en_s v_c \sim \Delta^3 \sim (T_c - T)^{3/2}$$

При типичных значениях параметров $n_s \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, $\Delta \approx 5 \text{ K}$, $\varepsilon_F \approx 5 \text{ эВ}$ величина тока распаривания составляет $j_s \approx 10^7 \text{ A/cm}^2$.

Энергия и теплоемкость сверхпроводника При низких температурах число возбуждений в сверхпроводнике невелико. По спектру возбуждений и считаем теплоёмкость. Для спектра с щелью Δ при $T \ll T_c$ типично получается экспоненциальная зависимость теплоемкости $C_s \sim \exp(-\Delta/T)$. Покажем это на примере числа квазичастиц в сверхпроводнике. Полное равновесное число электронов (ферми-квазичастиц) равно

$$N(T) = \int_0^\infty \frac{g_s V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 \left(e^{\frac{\varepsilon(p)}{T}} + 1\right)},$$

где $\varepsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2}$, $g_s = 2s + 1 = 2$. Поскольку $T \ll \Delta$, экспонента велика по сравнению с единицей; а поскольку $\sqrt{T\Delta} \ll v_F p_F$, интеграл «набирается» в узкой $|p - p_F| \approx \sqrt{T\Delta}/v_F \ll p_F$ области около p_F :

$$N(T) \approx \frac{8V\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\Delta}{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp' e^{-\frac{v_F^2 p'^2}{2T\Delta}} = \frac{8V\pi p_F^2 \sqrt{2\Delta}}{(2\pi\hbar)^3 v_F} T^{1/2} e^{-\frac{\Delta}{T}} \propto e^{-\frac{\Delta}{T}} \ll 1.$$

Число квазичастиц экспоненциально мало, поэтому предэкспоненциальный множитель можно не выписывать. (?? я не уверен, что так можно действительно опускать множитель, проверю потом, подставив значения. Посмотрю, чему равен этот множитель!)

Энергия квазичастиц:

$$E(T) = \int_0^\infty \frac{g_s V 4\pi p^2 dp \varepsilon(p)}{(2\pi\hbar)^3 \left(e^{\frac{\varepsilon(p)}{T}} + 1\right)} \approx \frac{8V\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\Delta}{T}} \int_0^\infty \left(\Delta + \frac{v_F^2 (p - p_F)^2}{2\Delta}\right) e^{-\frac{v_F^2 (p - p_F)^2}{2T\Delta}} dp \approx \frac{8V\pi p_F^2 \sqrt{\pi T \Delta}}{(2\pi\hbar)^3 v_F} e^{-\frac{\Delta}{T}}.$$

Учтено, что интеграл «набирается» в гауссом в узкой окрестности $|p - p_F| \ll \sqrt{T\Delta}/v_F \ll p_F$.

За счет малости экспоненты, $E \sim e^{-\frac{\Delta}{T}}$ и получаем теплоемкость:

$$C_s(T) \propto e^{-\frac{\Delta}{T}}$$

Это типичная экспоненциальная зависимость теплоемкости для спектра возбуждений со щелью.

При температуре перехода теплоемкость испытывает скачок. Модель Бардина-Купера-Шиффера предсказывает для него значение

$$(C_s - C_n)/C_s = 1.43.$$

(????? вывод укажу тут скоро!!!)

2.1.6 Simplified thermodynamic methods for superconductors (?????)

Теплоемкость сверхпроводника в двух словах

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_R$$

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)^2 + H_{cm} \frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2} \right] = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_{T_c}^2 \quad (\text{формула Рутгерса}),$$

ибо при $T = T_c$ критическое поле $H_{cm} = 0$.

Теплоемкость от температуры испытывает скачок при $T = T_c$ (??? почему???)

$$S = - \sum_k \{(1 - f_k) \ln(1 - f_k) + f_k \ln f_k\}$$

$$C_s = \sum_{k\alpha} E_k \frac{\partial f_k}{\partial T}$$

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T^1) + 1} \right)$$

$$C_{s,T \rightarrow 0} \approx \frac{2N_0 \Delta^2}{T^2} e^{-\Delta/T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2/(2\Delta T)} \approx N_0 \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^2 \sqrt{2\pi T \Delta_0} e^{-\Delta_c/T}.$$

(добавлю позже детали по Шмидту)

2.1.7 Элементы, материалы и сравнение их сверхпроводящих свойств

Periodic table of superconductivity																	
H																	He
Li 0.004	Be 0.026																
Na	Mg																
K	Ca 29	Sc 19.6	Ti 0.5	V 5.4	Cr	Mn	Fe 2.1	Co	Ni	Cu	Zn 0.87	Ga 1.1	Ge 5.35	As 2.4	Se 8	Br 1.4	Kr
Rb	Sr 7	Y 19.5	Zr 0.85	Nb 9.25	Mo 0.92	Tc 8.2	Ru 0.5	Rh 0.0003	Pd	Ag	Cd 0.5	In 3.4	Sn 3.7	Sb 3.9	Te 7.5	I 1.2	Xe
Cs 1.3	Ba 5		Hf 0.38	Ta 4.5	W 0.01	Re 1.7	Os 0.7	Ir 0.1	Pt	Au	Hg 4.15	Tl 2.4	Pb 7.2	Bi 8.5	Po —	At Rn	
Fr	Ra		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cu	Nb	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
Lanthanides																	
Actinides																	
La 6	Ce 1.7	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu 2.7	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu 0.1			
Ac	Th 1.4	Pa 1.4	U 1.3	Np	Pu	Am 1.0	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr			

Periodic table of binary hydride superconductors																	
H																	He
LiH ₆ 82	BeH ₂ 44																
Na	MgH ₃ 30																
KH ₀ 140	CaH ₈ 235	ScH ₈ 233	TiH ₁₄ 54	VH ₈ 72	CrH ₃ 81	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	GaH ₃ 123	GeH ₄ 220	AsH ₃ 90	SeH ₂ 120	BrH ₂ 12	Kr
Rb	SrH ₁₀ 259	VH ₁₀ 240	ZrH ₁₄ 88	NbH ₆ 47	Mo	TcH ₂ 11	RuH ₃ 2.5	RhH 5	PdH 25	Ag	Cd	InH ₃ 41	SnH ₁₄ 90	SbH ₄ 95	TeH ₆ 100	IH ₂ 30	XeH 29
Cs	BaH ₈ 38		HfH ₂ 76	TaH ₆ 136	WH ₃ 60	Re	OsH 2	IrH 7	PtH 25	AuH 21	Hg	Tl	PbH ₈ 107	BiH ₃ 110	PoH ₂ 50	At	Rn
FrH ₇ 63	RaH ₁₂ 116		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cu	Nb	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
Lanthanides																	
Actinides																	
LsH ₁ 250	CeH ₈ 117	PrH ₈ 31	NdH ₈ 6	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	HoH ₆ 37	ErH ₁₅ 30	TmH ₈ 21	Yb	LuH ₁₂ 7			
Ach ₁ 250	TmH ₁₂ 170	PaH ₆ 62	Uh ₈ 35	NpH ₇ 10	Pu	AmH ₈ 0.3	CmH ₈ 0.9	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr			

Название материала	Критическая температура T_c , К	Критическое поле B_c , Тл	Год опубликования обнаружения сверхпроводимости	Сверхпроводники II рода		
				Nb (ниобий)	9,20 ^[3]	0,4 ^[4]
Сверхпроводники I рода						
Pb (свинец)	7,26 ^[3]	0,08 ^[4]	1913 ^[3]	(Nb ₃ Al) ₄ Ge	20,0 ^[4]	
Sn (олово)	3,69 ^[3]	0,031 ^[4]	1913 ^[3]	Nb ₃ Ge	23 ^[4]	
Ta (тантал)	4,38 ^[3]	0,083 ^[4]	1928 ^[3]	GeTe	0,17 ^[4]	0,013 ^[4]
Al (алюминий)	1,18 ^[3]	0,01 ^[4]	1933 ^[3]	SrTiO ₃	0,2—0,4 ^[4]	>60 ^[4]
Zn (цинк)	0,88 ^[4]	0,0053 ^[4]		MgB ₂ (дигорид магния)	39	?
W (вольфрам)	0,01 ^[4]	0,0001 ^[4]		H ₂ S (сероводород)	203 ^[6]	72 ^[6]
						2015 ^[6]

Calculated intrinsic coherence length and London penetration depth, at T=0 Meservey and B. B. Schwartz (from Kittel):

Metal	Intrinsic Pippard coherence length ξ_0 , in 10^{-6} cm	London penetration depth λ_L , in 10^{-6} cm	λ_L/ξ_0
Sn	23.	3.4	0.16
Al	160.	1.6	0.010
Pb	8.3	3.7	0.45
Cd	76.	11.0	0.14
Nb	3.8	3.9	1.02

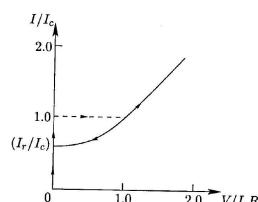
(????? why Nb is a SC? are they confirmed experimentally????? can I prove it theoretically?????)

2.2 Типичные контакты и модели со сверхпроводниками в двух словах

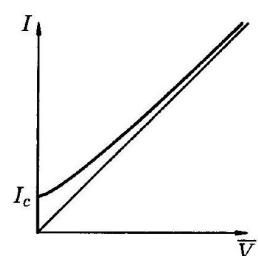
2.2.1 Josephson equations, SQUID, RCSJ in a nutshell

Overview of main properties of typical Josephson junctions

For $\beta_c = 4$



If we have just a JJ with resistance:



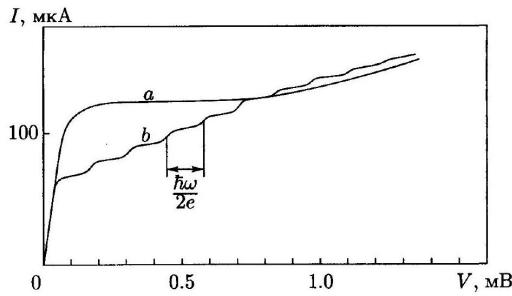
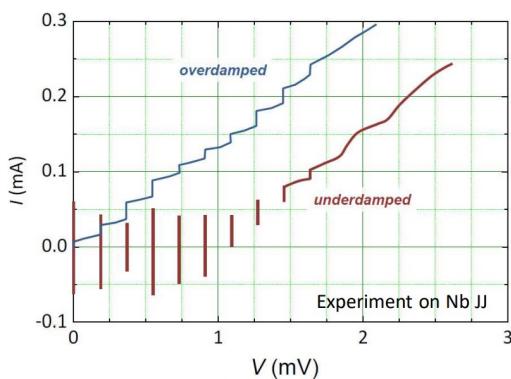
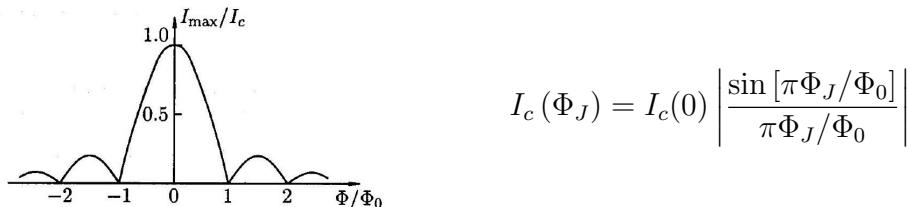
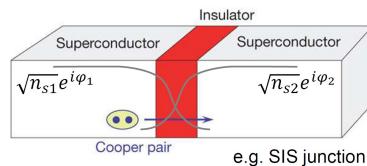


Рис. 26.1. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода: а) без внешнего высокочастотного электромагнитного поля; б) высокочастотное поле включено.

Now, if we add a field in JJ, then:



Josephson effect and equations



$$I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1^{\text{st}} \text{ Joseph. eq./current-phase rel-n})$$

$$\frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} U \equiv \frac{2\pi}{\Phi_0} U \quad (2^{\text{st}} \text{ Joseph. eq./voltage-phase rel-n})$$

$$I_c := \frac{4eK\sqrt{N_1 N_2}}{\hbar}$$

Both come from Schrödinger equation:

$$\psi_A = \sqrt{n_A} e^{i\phi_A} \quad \psi_B = \sqrt{n_B} e^{i\phi_B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1} \\ \sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} = \frac{-i}{\hbar} \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1} \\ \sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$E_1 - E_2 = 2eV$$

$$\varphi := \phi_B - \phi_A.$$

$$\sqrt{n_A} + i\sqrt{n_A} \dot{\phi}_A = \frac{1}{i\hbar} (eV\sqrt{n_A} + K\sqrt{n_B} e^{i\varphi})$$

$$\sqrt{n_B} + i\sqrt{n_B} \dot{\phi}_B = \frac{1}{i\hbar} (-eV\sqrt{n_B} + K\sqrt{n_A} e^{i\varphi})$$

We need to take conjugate of 1(or 2) equation and add to eliminate $\dot{\phi}_A$ ($\dot{\phi}_B$) and then also to subtract to eliminate $\sqrt{n_A}$ ($\sqrt{n_B}$), we will get:

$$\dot{n}_A = \frac{2K\sqrt{n_A n_B}}{\hbar} \sin \varphi \quad \dot{\phi}_A = -\frac{1}{\hbar} \left(eV + K\sqrt{\frac{n_B}{n_A}} \cos \varphi \right).$$

$$\dot{n}_B = -\frac{2K\sqrt{n_A n_B}}{\hbar} \sin \varphi, \quad \dot{\phi}_B = \frac{1}{\hbar} \left(eV - K\sqrt{\frac{n_A}{n_B}} \cos \varphi \right).$$

By adding and remembering that $I_s = 2eV \frac{\partial n_s}{\partial t}$ we get 1-st and by subtracting we get 2-nd Josephson equation.

Same can be done from GL:

$$\mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_1 = \mathbf{n} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Lambda}.$$

Вид правой части можно было бы угадать, исходя из требования линейности по Δ_1 и Δ_2 (так как параметр порядка мал), а также из того, что при перестановке местами полупространств 1 и 2 ток должен менять направление - поэтому должна войти разность Δ_1 и Δ_2 . Параметр Λ имеет размерность длины и равен $\Lambda = \sigma R \mathcal{A} \sim l/\mathcal{T}$, где $\sigma = 2e^2 \nu D$ - проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии (при нагревании выше T_c), R и \mathcal{A} - сопротивление и площадь границы, l - длина свободного пробега, а $\mathcal{T} < 1$ - вероятность туннелирования электрона с энергией порядка энергии Ферми через границу между сверхпроводниками при $T > T_c$. Из $\mathbf{j}_s = 4eaD \operatorname{Im} \Delta^* (\nabla_{\mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}) \Delta$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{s2} = \frac{\pi}{4eT_c R \mathcal{A}} \operatorname{Im} (\Delta_1^* \Delta_2)$$

Если граница малопрозрачна, то модули параметров порядка с двух сторон от границы совпадают со своими значениями в объёме, и параметры порядка отличаются только фазами: $\Delta_{1(2)} = \Delta_0 e^{i\varphi_{1(2)}}$. Поэтому

$$j_s = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R \mathcal{A}} \sin (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I_s = I_c \sin (\varphi_2 - \varphi_1), \quad I_c = \frac{\pi \Delta_0^2}{4eT_c R}$$

$$I_c(T) = C \frac{T_c - T}{R_N}, \quad C := \frac{2\pi^3}{7\zeta(3)e} \approx 635 \frac{\text{mK}\text{B}}{\text{K}},$$

$$\text{ибо } |\Delta| \equiv \Delta_0 = \sqrt{-\frac{\hbar T_c}{\tau_{\text{GL}} b}} = \sqrt{\frac{\alpha T_c (T_c - T)}{b}}.$$

There are several others derivations of Josephson equations, but there is no need to think about them a lot.

Particular cases are as follows:

DC Josephson effect: At zero applied voltage we have a finite supercurrent, upto a maximum ‘critical’ current.

AC Josephson effect: A DC voltage causes variation over time of the gauge invariant phase difference and thus produces an AC current. The frequency of the current is proportional to the voltage.

In formulas: from $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} U = \frac{2e}{\hbar} U$ we get $\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} U t$, thus $I(t) = I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} U t + \gamma(0)\right)$, here

$$f_J := \frac{1}{\Phi_0} U \equiv \frac{2e}{\hbar} U$$

Josephson constant

$$K_J := 2e/h = 483,5979 \text{GHz/mV} \quad (\text{material independent})$$

The inverse AC Josephson effect: Microwave radiation of a single frequency can induce quantized DC voltages across the Josephson junction, in which case the Josephson phase takes the form $\varphi(t) = \varphi_0 + n\omega t + a \sin(\omega t)$,

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \omega(n + a \cos(\omega t)), \text{ and } I(t) = I_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \sin(\varphi_0 + (n+m)\omega t)$$

The DC components are: $V_{\text{DC}} = n \frac{\hbar}{2e} \omega$, and $I_{\text{DC}} = I_c J_{-n}(a) \sin \varphi_0$. This means a Josephson junction can act like a perfect frequency-to-voltage converter,^[17] which is the theoretical basis for the Josephson voltage standard.

(see wiki, I didn’t work with it yet)

Josephson inductance, energy, (etc...)

Josephson inductance:

$$L(\varphi) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} = \frac{L_J}{\cos \varphi} \quad L_J := L(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c}$$

Which is from $\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = I_c \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\Phi_0} V$, so $V = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} \frac{\partial I}{\partial t} \equiv L(\varphi) \frac{\partial I}{\partial t}$. Note that although the kinetic behavior of the Josephson junction is similar to that of an inductor, there is no associated magnetic field. This behavior is derived from the kinetic energy of the charge carriers, instead of the energy in a magnetic field.

Energy storage in JJ \rightarrow Nonlinear reactance

$$\frac{dI_s}{dt} = I_c \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{dI_s}{dt} = I_c \cos \varphi \frac{2\pi}{\Phi_0} V$$

$$\begin{aligned} I_s(t) &= I_c \sin \varphi(t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{2\pi}{\Phi_0} V \end{aligned}$$

For small variations near $I_s = I_c \sin \varphi \rightarrow$ JJ equivalent to inductance

$$L_s = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} = L_J \frac{1}{\cos \varphi}$$

with $L_c = \frac{\hbar}{2el_c}$ Josephson inductance

Properties of the Josephson inductance: Negative for $\pi/2 + 2\pi n < \varphi < 3\pi/2 + 2\pi n$ ($V > 0 \rightarrow$ Oscillating Josephson current)

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I_s}{I_c}\right)^2}$$

Josephson energy:

$$U_J(\delta) = E_J(1 - \cos \delta)$$

Because the superconducting phase evolution equation is analogous to Faraday's law: $V = d\Phi/dt$. Assume that at time t_1 , the Josephson phase is φ_1 ; At a later time t_2 , the Josephson phase evolved to φ_2 .

$$\Delta E = \int_1^2 IV dt = \int_1^2 I d\Phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_c \sin \varphi d\left(\Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}\right) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \Delta \cos \varphi.$$

This shows that the change of energy in the Josephson junction depends only on the initial and final state of the junction and not the path. Therefore, the energy stored in a Josephson junction is a state function, which can be defined as:

$$E(\varphi) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \varphi = -E_J \cos \varphi$$

Here $E_J = |E(0)| = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ is a characteristic parameter of the Josephson junction, named the Josephson Energy. It is related to the Josephson Inductance by $E_J = L_J I_c^2$.

Формула $E_s(\varphi)$ применима для случая синусоидальной зависимости сверхпроводящего тока от разности фаз. Это так в туннельном контакте, но в общем случае зависимость $E_s(\varphi)$ может быть более сложной, для общего случая продифференцируем формулу $E_s = \int_0^t I_s V dt$ по времени, что даёт $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial t}$ и далее $I_s V = \frac{\partial E_s}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}$. В результате

$$I_s = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_s}{\partial \varphi}$$

Other typical properties of JJ:

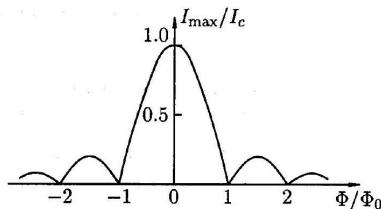
$$I = (2e/\hbar)d\Omega/d\phi \quad \Omega - \text{free energy}$$

??? тут обсуждение, что будет, если соединить два сверхпроводника? правильно понимаю, что их фаза начнет как-то меняться и в итоге перейдет к равновесию фаз и нулевому току в контакте???)

(???? как вообще можно зафиксировать разность фаз в SNS контакте???? пока нет идей на самом деле, мб магнитным полем в сквиде, но тогда ведь не будет работать модель просто контакта?)

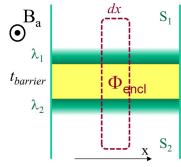
Magnetic field in single JJ

Fraunhofer pattern in finite width JJ



$$I_c(\Phi_J) = I_c(0) \left| \frac{\sin [\pi \Phi_J / \Phi_0]}{\pi \Phi_J / \Phi_0} \right|$$

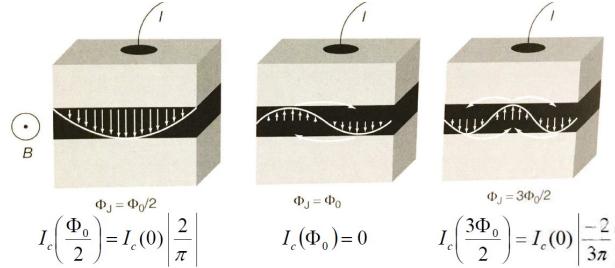
$\Phi_J = B_a t_{\text{eff}} a$ - flux through the junction, $t_{\text{eff}} = t_{\text{barrier}} + \lambda_{L,1} + \lambda_{L,2}$, $I_c(0) = j_c ab$ - critical current at zero magnetic field.



We consider a little contour, in which $\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi$. Then, we move along side of a junction $\gamma(x + dx) - \gamma(x) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_{\text{encl}} = \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{\text{eff}} dx$, from here:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dx} &= \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{\text{eff}} \\ \gamma(x) &= \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{\text{eff}} x \\ j_s(x) &= j_c \sin \left[\gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{\text{eff}} x \right] \\ I_c(\Phi_J) &= I_c(0) \left| \frac{\sin [\pi \Phi_J / \Phi_0]}{\pi \Phi_J / \Phi_0} \right|\end{aligned}$$

If we fix total flux, spatial distribution of current can be:



JJ with field inside and Ferrell-Prange equation by Shmidt (!??!)

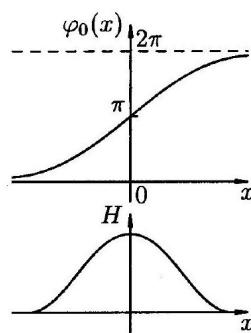
$$\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}$$

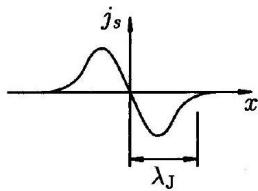
где θ - фаза волновой функции, \mathbf{v}_s - скорость пары, m - масса электрона, e - его заряд, \mathbf{A} - векторный потенциал магнитного поля.

Сверхток через переход в направлении оси y , согласно Максвеллу, $j_s = \frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx}$

Подставляя сюда (24.5) и учитывая основное джозефсоновское соотношение между током и разностью фаз $j_s = j_c \sin \varphi$, имеем окончательно так называемое уравнение Феррелла - Прейнджа [82]

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi \quad \lambda_J := \left(\frac{c \Phi_0}{8\pi^2 j_c d} \right)^{1/2}$$





Josephson vertex by Shmidt (!??!) (по идеи тут ничего не должно быть нового, разве что так вот поле вихрями попадает, ну и окей. потом дочитаю.)

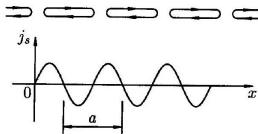
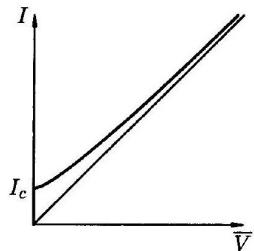


Рис. 24.4. а) Схематическое изображение смешанного состояния джозефсоновского туннельного перехода-плотно сжатая цепочка вихрей; б) распределение туннельного сверхтока через переход, которое при этом возникает.

On RCSJ, RSJL Josephson Junctions

RSJ If we have just a JJ with resistance:



$$I = \frac{V}{R} + I_c \sin(\phi)$$

$$I = \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \phi}{\partial t} + I_c \sin(\phi)$$

$$I_c > I \quad \phi = \arcsin(I/I_c)$$

$$I_c < I \quad \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\phi}{I - I_c \sin(\phi)} = dt$$

$$(2\pi \text{ phase change}) \quad t_0 = \frac{\hbar}{2eR} \frac{2\pi}{\sqrt{I^2 - I_c^2}}$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} V dt = \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{2\pi\hbar}{2e} \frac{1}{t_0}$$

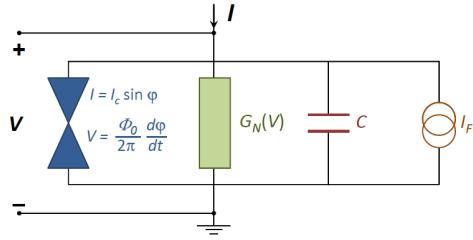
If we average $V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t}$, where $\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}$, we get

$$2e\bar{V} = \hbar\omega.$$

Очевидно, если среднее расстояние по энергиям между уровнями куперовских пар в двух половинках перехода равно $2e\bar{V}$, то при переходе одной пары через область слабой связи такая энергия выделяется в виде кванта электромагнитного излучения.

(?? светится что ли контакт???)

Resistively and Capacitively Shunted Junction (RCSJ) In general a junction is equivalent to



We combine contributions:

$$\frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{\hbar}{2e} \frac{dy}{dt} + [I_c \sin \gamma - I] = 0$$

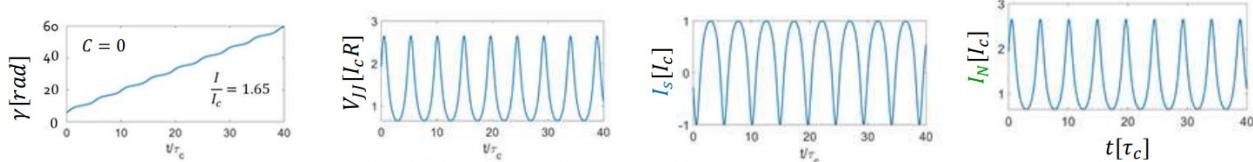
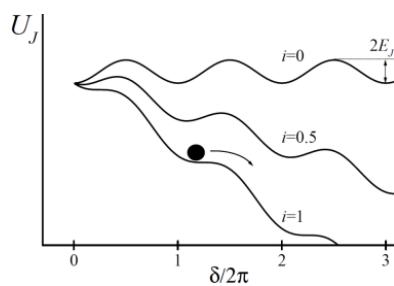
$$\beta_C \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \sin \gamma - i = 0$$

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{dy}{dt} + \frac{d}{d\gamma} \{E_{J0}[1 - \cos \gamma - i\gamma]\} = 0$$

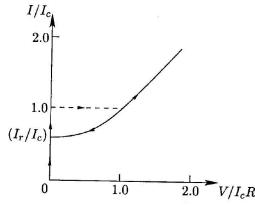
We have a mechanical analog:

$$\boxed{\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{dy}{dt} + \frac{d}{d\gamma} \{E_{J0}[1 - \cos \gamma - i\gamma]\} = 0} \quad \boxed{M \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \nabla U = 0}$$

$x(t) \leftrightarrow \gamma(t) \quad M \leftrightarrow \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \quad \eta \leftrightarrow \frac{1}{R} \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \quad U \leftrightarrow E_{J0}[1 - \cos \gamma - i\gamma]$



For $\beta_c = 4$

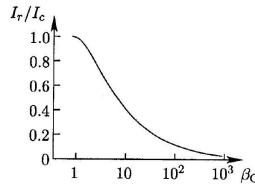


$$\beta_C = (2e/\hbar)I_c C R^2.$$

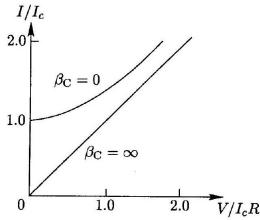
$$\omega_c = (2e/\hbar)I_c R$$

$$I/I_c = \beta_C \omega_c^{-2} \ddot{\phi} + \omega_c^{-1} \dot{\phi} + \sin \varphi.$$

(for some reason????) if we have inductance, then numerically:



McCamber has such impact: Для $\beta_C \rightarrow \infty$ имеем $I_r \rightarrow 0$.



$$I_s(t) = I_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n \left(\frac{2\pi V_1}{\Phi_0 \omega_1} \right) \sin[(\omega_{DC} - n\omega_1)t + \gamma_0]$$

J_n is the n^{th} order Bessel function of the first kind

$\omega_{DC} \equiv \frac{2\pi}{\Phi_0} V_{DC}$ The Josephson frequency associated with the V_{DC} bias

Shapiro spikes (AC voltage circuits)

$$V = V_0 + V_1 \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{2eV}{\hbar} dt = \frac{2e}{\hbar} \int [V_0 + V_1 \cos(\omega t)] dt \\ &= \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2e}{\hbar \omega} V_1 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$I_s = I_c \sin(\phi) = I_c \operatorname{Im} \left[\exp \left(i \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2eV_1}{\hbar \omega} \sin(\omega t) \right) \right) \right]$$

Substituting back and adding the shunt current V_0/R the total current takes the form

$$I = I_s + \frac{V_0}{R} = I_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k \left(\frac{2eV_1}{\hbar \omega} \right) \sin \left(\phi_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t - k\omega t \right) + \frac{V_0}{R}$$

also known as the inverse AC Josephson effect. The DC part of the current is V_0/R unless

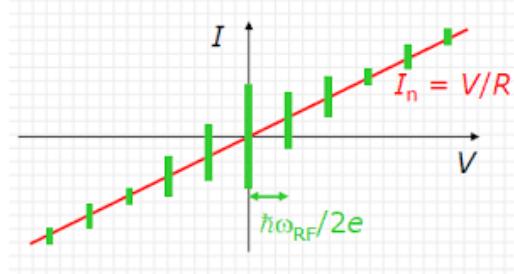
$$V_0 = \frac{k\hbar\omega}{2e}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2.2.1 Josephson equations, SQUID, RCSJ in a nutshell

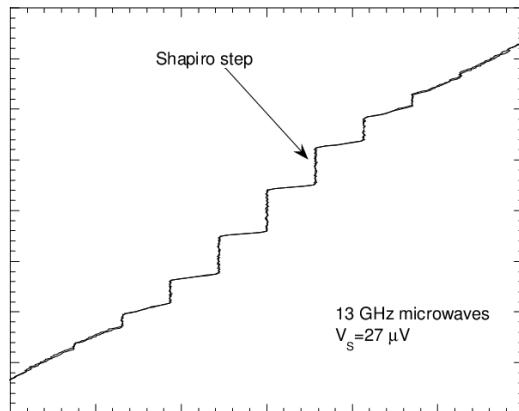
Then the supercurrent has the DC component

$$I_s = I_c(-1)^k J_k \left(\frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin(\phi_0)$$

If the potential is not precisely given by Eq. (46) the supercurrent will oscillate slowly with an amplitude given by Eq. (47) with $\phi_0 = \pi/2$, i.e. given by the Bessel function value.



Shapiro steps (AC current circuits) We don't know how to solve analytically equations, but we know numerical results:



We have some hysteresis effect here (???)

The currents jump at the Shapiro step by an amount given by the Bessel function expression above.

The plateau appears and a Shapiro step occurs when the voltage match an integer value of $\hbar\omega/(2e)$

C. C. Grimes and S. Shapiro obtained such steps for different power levels:

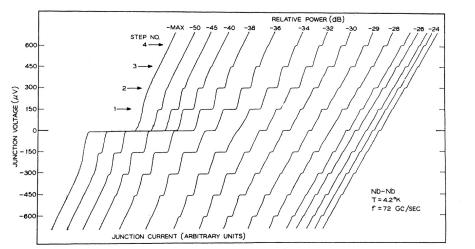


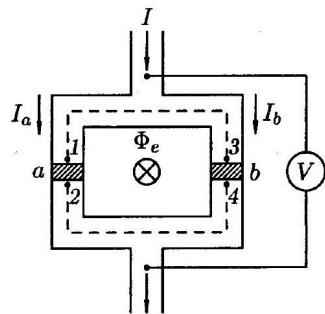
FIG. 1. Voltage-current curves for a Nb-Nb point-contact Josephson junction exposed to a 72-Gc/sec signal at various power levels.

Shapiro steps have been observed in nanotube Josephson junctions, superconducting nanowires and High-Temperature superconductors with additional interesting effects.

Fractional Shapiro steps have been observed in circuits with several Josephson junctions although all fractions can not be explained.

(???) maybe in later parts of this part I'll write about it, currently I don't need it)

Typical SQUID in a nutshell



Typical SQUID

$$I_{s,\max} = 2I_c \left| \cos \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right|$$

this is true for $I_{c,1} = I_{c,2} = I_c$, $\beta_L \equiv \frac{2LI_c}{\Phi_0} \ll 1$.

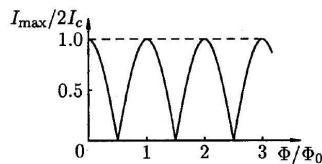
$I = I_1 + I_2$ assume $I_{c,1} = I_{c,2}$ $I_1 = \frac{I}{2} + J = I_c \sin \gamma_1$, $I_2 = \frac{I}{2} - J = I_c \sin \gamma_2$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_a + LJ)$$

Neglect flux from screening currents, assume inductance parameter

$$\beta_L \equiv \frac{2LI_c}{\Phi_0} \ll 1 \Rightarrow \Phi = \Phi_a$$

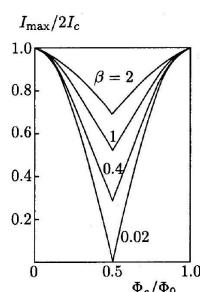
$$I_{s,\max} = 2I_c \left| \cos \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right|$$



Подчеркнем, что Φ -это полный поток в кольце интерферометра. Поток, созданный непосредственно катушкой, введенной в интерферометр, Φ_e , связан с Φ простым соотношением

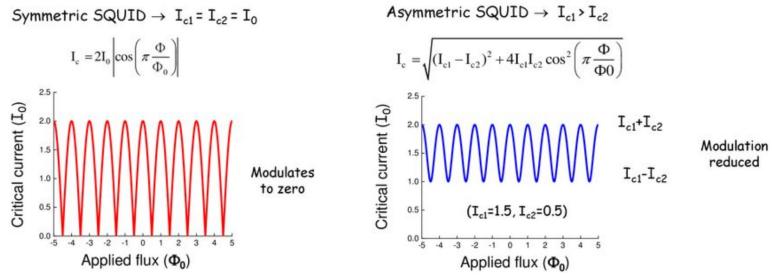
$$\Phi = \Phi_e - LI_3,$$

где L -индуктивность кольца интерферометра, I_3 - экранирующий ток, текущий по интерферометру. Критический ток интерферометра зависит от Φ_e тоже периодически и тоже с периодом Φ_0 :

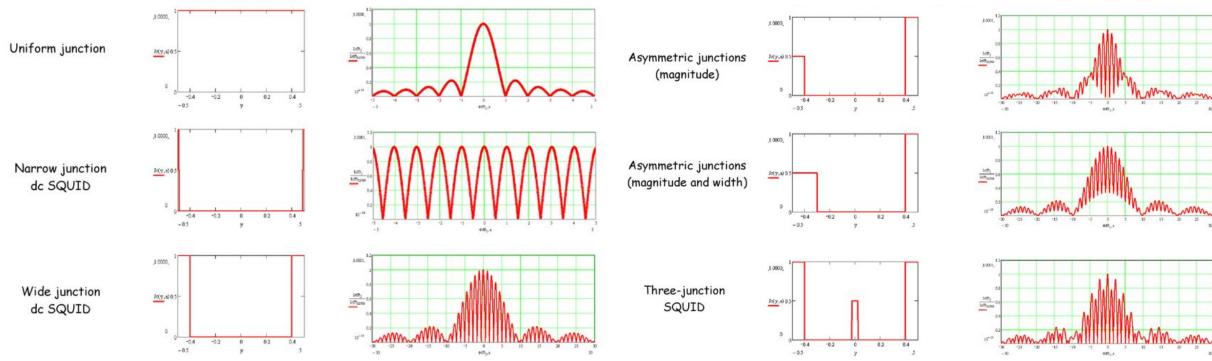


Properties of modified SQUID-s

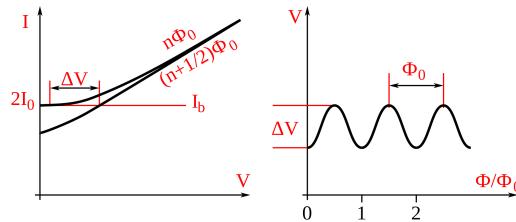
Asymmetric SQUID will shift current up:



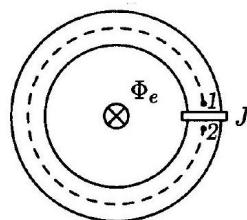
In general:



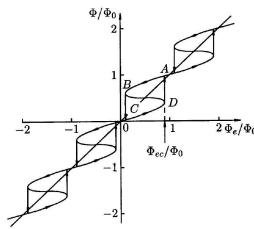
(????? график ниже пока я не понимаю еще, дальше нужно думать)



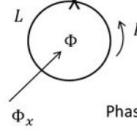
Rf SQUID ring. No d.c voltage may be established across rf squids.
We have properties as follows:



- non-linear inductance of Josephson junction gives a periodic modulation of the resonance frequency of the tank circuit
- these changes follow the amplitude of the rf current for a given working frequency response varies with $\Phi_0 = h/2e = 2,0710^{-15} \text{ Vs}$
- advantage: no electrical contacts
- disadvantage: noise of tank circuit and amplifier large than intrinsic SQUID noise



rf SQUID (Superconducting Quantum interference Device) --- not a SQUID (no interference)



Phase coherence: $\phi + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0$

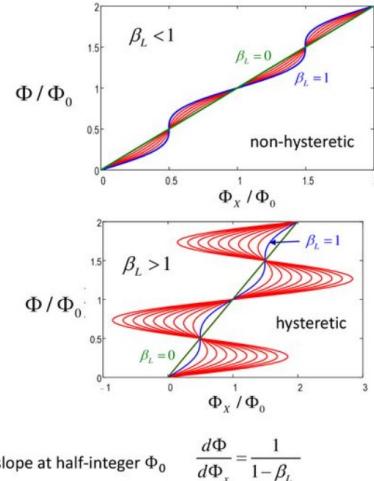
$$\Phi = \Phi_x + LI_c = \Phi_x + LJ \sin \phi$$

$$\Phi = \Phi_x - LI \sin \left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right)$$

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} + \left(\frac{LI_c}{\Phi_0} \right) \sin \left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right)$$

$$= \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{1}{2\pi} \beta_L \sin \left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right)$$

Single-junction inductance parameter $\beta_L = \frac{2\pi LI_c}{\Phi}$



slope at half-integer Φ_0 $\frac{d\Phi}{d\Phi_x} = \frac{1}{1-\beta_L}$

Другие типичные свойства и типичные джозефсоновы контакты

Overview other theoretical general properties of JJ The free energy of a Josephson junction at temperature T is given by [19]

$$\Omega = -gT \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \ln[2 \cosh(\varepsilon/2T)].$$

The spectrum of H_{BdG} consists of bound states (Andreev levels) for $\varepsilon < \Delta_0$ and a continuous spectrum for $\varepsilon > \Delta_0$.

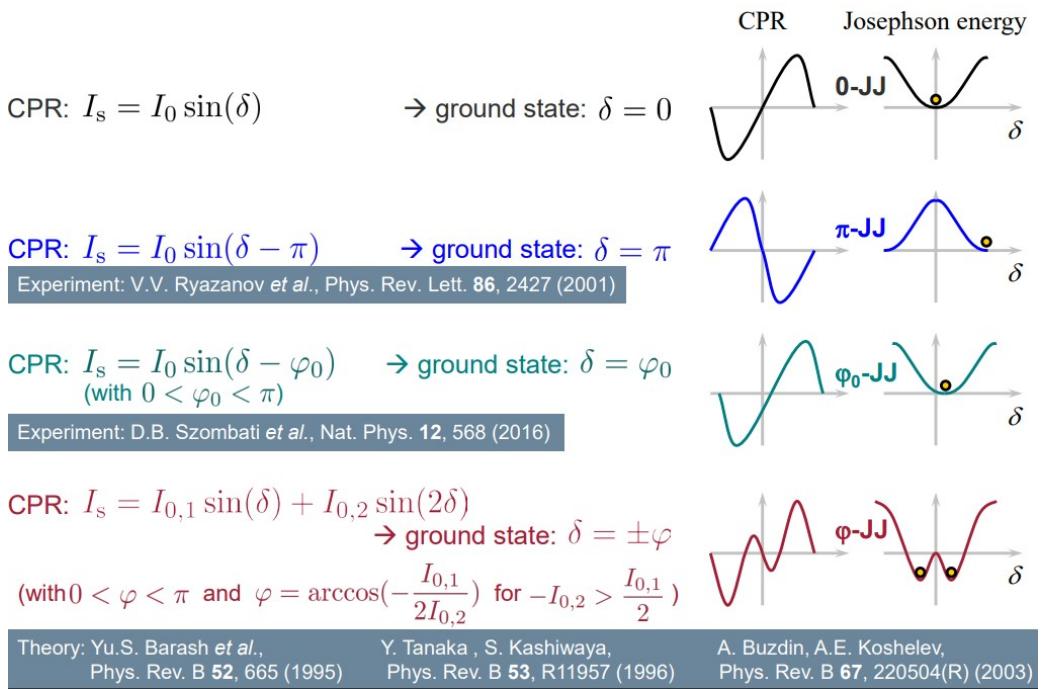
$$\rho(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{d}{d\varepsilon} \ln \det [1 - R_A (\varepsilon + i0^+) S_N (\varepsilon + i0^+)],$$

where R_A is an Andreev reflection matrix and S_N is the scattering matrix of the junction in the normal state.

$$I_{\max, \text{JJ}} = \frac{\pi \Delta}{2eR} \tanh \frac{\Delta}{2T}$$

где R - сопротивление контакта при $T > T_c$.

$I_{\max, \text{JJ}}(R)$ - т.н. "соотношение Амбераокара-Баратова".
(!?!??!?)

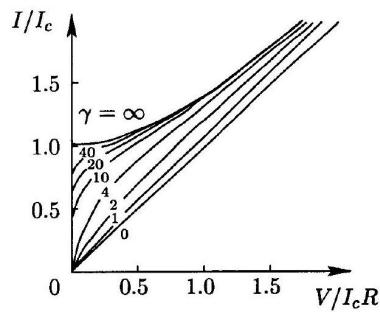


Overview of other JJ-s (here I'll add comments, what is going on and why someone needs it)

Влияние тепловых флюктуаций на эффект Джохефсона (?????) Shmidt cites some literature and states:

$$U_0(I) = \frac{4\sqrt{2}}{3} E_J (1 - I/I_c)^{3/2}.$$

$$\omega(I) = \omega_p [1 - (I/I_c)^2]^{1/4},$$



Теория Асламазова и Ларкина о геометрическом сужении в сверхпроводниках (см Щелкочева, там хорошо написано, пока не до этого)

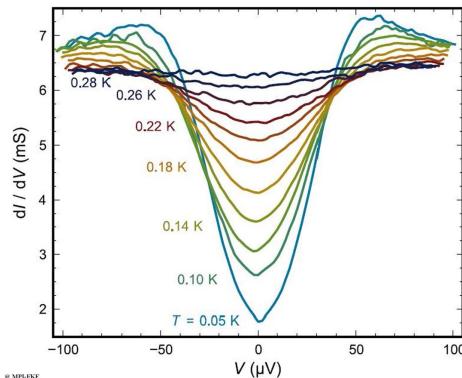
2.2.2 NS, NIS, SIS, other contacts

Normal-Superconductor (NS) контакт

At low temperatures the tunneling provides direct information on the superconducting state. Figure 2 shows $d//dV(V)$ tunneling characteristics at temperatures below the superconducting transition. The characteristics reveal a clear superconducting gap and allow the gap of the 2DEL to be measured for the first time: it equals $\Delta(50\text{mK}) \approx 40\mu\text{V}$. This value is derived from fitting the data with a quasiparticle lifetimebroadened BCS s-wave quasiparticle density

of states. The gap vanishes at 280mK and the temperature dependence is well described by that expected from the BCS theory. (?????)

(?????? how to get a gap from it?????)



Типичное явление - эффект близости: проникновение ψ в нормальный металл. Это же и для двух разных сверхпроводников.

Из ГЛ:

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C,$$

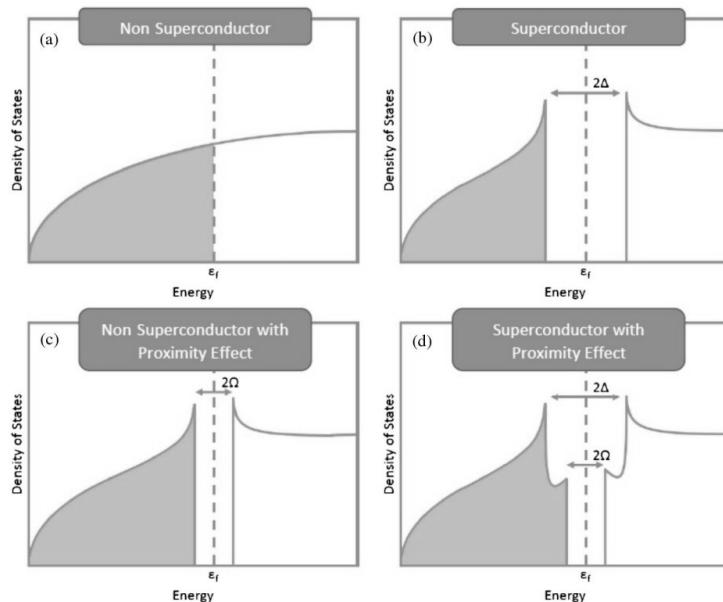
где C - константа интегрирования. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ имеем $(d\psi/dx) \rightarrow 0, \psi \rightarrow 1$, то $C = -1/2$. Подставляя это значение C в (15.9) и интегрируя, получим

$$\psi = \text{th} \left[(x - x_0) / \sqrt{2\xi} \right].$$

Здесь x_0 -константа интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия при $x = 0$. Это условие (14.20) в нашем случае имеет вид

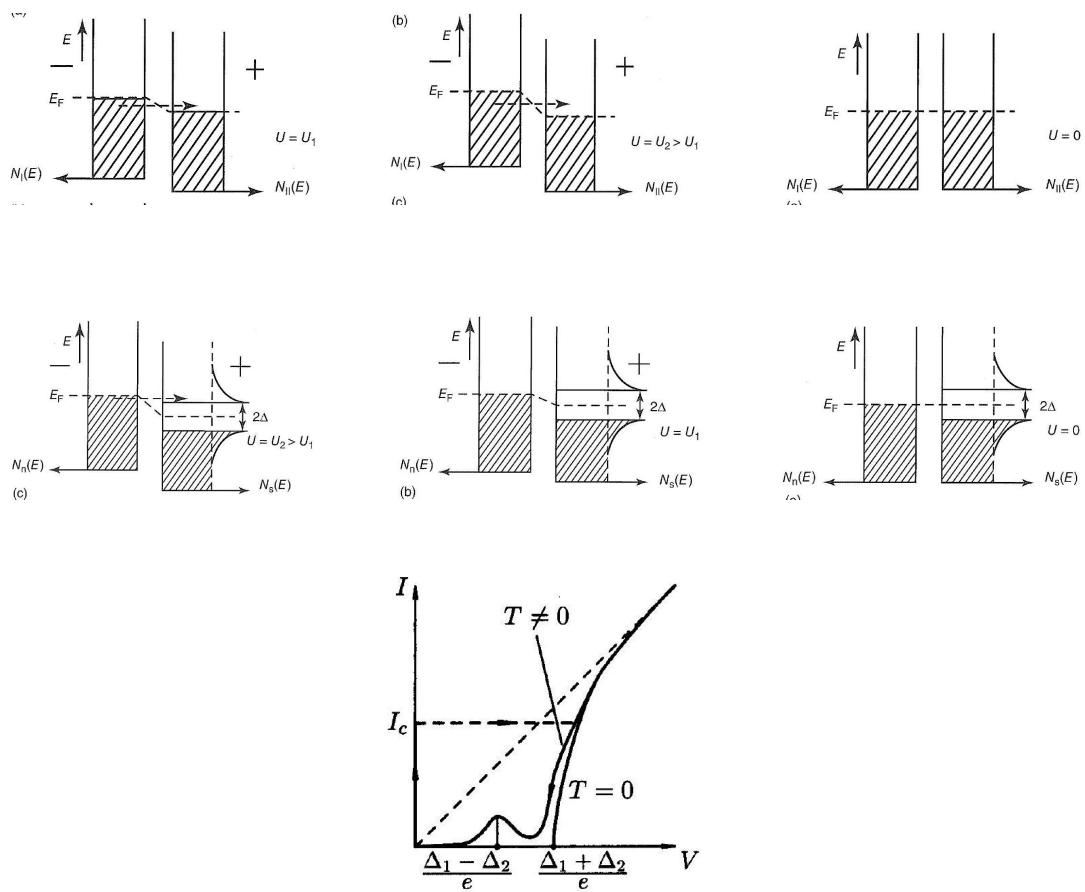
$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b}$$

(снова тут картинка!)



(?? додумаю, не прямо полностью понимаю это)

Superconductor-Insulator-Superconductor (SIS) контакт



(???? добавлю строчку обоснования, почему так???)

Holm-Meissner effect (proximity effect) in SIS contact (????) When a superconductor (S) is placed in contact with a "normal" (N) non-superconductor.

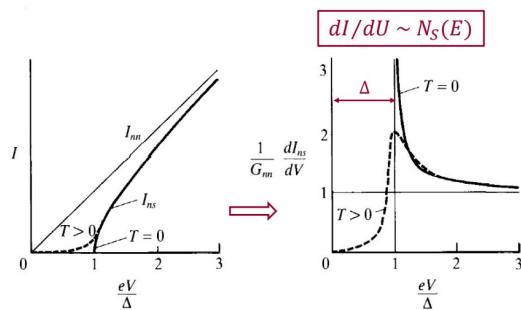
(??? what???)

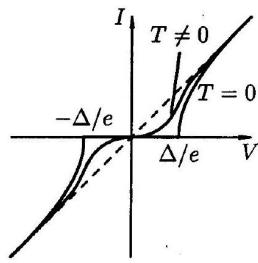
Typically the critical temperature T_c of the superconductor is suppressed and signs of weak superconductivity are observed in the normal material over mesoscopic distances.

(???? пока ничего не понял, что это за эффект???)

Normal-Insulator-Superconductor (NIS) junctions

(???????)





(есть также Эффект близости в SIN-контакте, см. Щелкочева, за минут 20 додумаю, если будет нужно)

SINIS junction

(см Щелкочева, просто, интересно, но пока не до этого)

2.2.3 Thin films, пластины, другие проникновения и квантования потока

(выпишу Шмидта и ЛЛ9, добавлю задачи в каталог. не так актуально просто, но тут много нетривиального)

Critical field of a thin film

$$\begin{aligned} d &\ll \xi, \lambda \\ -\left(1 - (2\pi\xi A/\Phi_0)^2\right) \psi + \psi^3 &= 0 \\ d^2 A / dx^2 &= (\psi^2 / \lambda^2) A \\ H(\pm d/2) &= H_0 \end{aligned}$$

(words)

$$H = A_1(\psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + A_2(\psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda)$$

(words)

$$\psi^2 = 1 - \frac{1}{24} \frac{H_0^2 d^2}{H_{cm}^2 \lambda^2}$$

Finally,

$$H_K = 2\sqrt{6} H_{cm} \frac{\lambda}{d}$$

Если толщина пленки на порядок меньше ее глубины проникновения, $\lambda/d \sim 10$, а $H_{cm} \sim 10^3$, то $H_K \sim 40000$. Физически это вполне понятно. Поскольку магнитное поле проникает в пленку, она имеет существенно меньший диамагнитный момент на единицу объема, чем массивный образец. Но малый диамагнитный момент во внешнем поле - это маленькая магнитная стрелка, ориентированная навстречу полю. Такая ситуация энергетически более выгодна, чем в случае большого диамагнитного момента. Поэтому пленка оказывается во внешнем поле гораздо более устойчивой, чем массивный образец, и может сохранить сверхпроводимость в существенно больших полях.

Критический ток тонкой пленки

(words, something very similar to the previous part)

$$2\lambda^2 H_I^2 / (d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6$$

$$\frac{d}{d\psi} (2\lambda^2 H_I^2 / d^2 H_{cm}^2) = 4\psi_c^3 - 6\psi_c^5 = 0,$$

отсюда $\psi_c^2 = 2/3$

$$H_{Ic} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{cm} \frac{d}{\lambda}.$$

$$2H_{Ic} = (4\pi/c) I_c$$

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{3}} \frac{cH_{cm}}{\lambda}.$$

1. Поле, созданное критическим током на поверхности пленки, оказывается пропорциональным ее толщине: $H_{Ic} \propto d$, т.е. падает с уменьшением толщины пленки, в то время как критическое поле пленки $H_k \propto 1/d$, т.е. растет с уменьшением толщины. Так, если $d/\lambda \sim 0.1$, а $H_{cm} = 1000 \text{ Э}$, то $H_k \sim 4 \cdot 10^4$, а $H_{Ic} \sim 30$. Это значит, что для тонкой пленки разрушение сверхпроводимости током никак нельзя сводить к разрушению сверхпроводимости магнитным полем этого тока.

2. Критическая плотность тока j_c , согласно (18.5), не зависит от толщины пленки. Из этой формулы следует, что j_c просто является характеристикой токонесущей способности данного материала.

3. Отметим, наконец, еще один очень важный момент. Разрушение сверхпроводимости током не сопровождается каким-либо фазовым переходом. При этом мы, конечно, имеем в виду, что пленка с током хорошо омывается жидким гелием и все выделяющееся в ней тепло сразу отводится, т.е. ее температура остается равной температуре гелиевой ванны. В этом случае даже при токе I_c свободная энергия сверхпроводящего состояния все еще остается меньше свободной энергии нормального состояния.

(by the way, it is similar to considerations about critical current. (??? how??))

Проникновение потока

(тут основное указание про то, как по итогу это вообще получается!!!)

Глубина проникновения по Ландау 9 (?????) (??? там много соображений, потом подумаю про них еще раз)

Пластина толщиной d в однородном параллельном магнитном поле B_0

$$\vec{h} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{h} = 0$$

$$h - \lambda^2 \frac{d^2 h}{dx^2} = 0$$

$$h(x) = h_1 \operatorname{ch}(x/\lambda) + h_2 \operatorname{sh}(x/\lambda)$$

$$h(\pm d/2) = B_0 \quad (\text{граничные условия})$$

$$h(x) = B_0 \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/(2\lambda))}$$

$$j_s(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{dh}{dx} = -\frac{cB_0}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/(2\lambda))} \quad (\text{распределение тока})$$

(?? там ур Максвелла в конце??)

Пластина с током Итак, в единичной полосе вдоль оси z течет ток I . На поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) он создает магнитное поле $H(\pm d/2) = \mp H_I$. Подставляя эти граничные условия в общее решение (9.2), найдем поле в пластине:

$$H(x) = -H_I \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)},$$

где $H_I = 2\pi I/c$.

$$j_s(x) = \frac{cH_I}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)}$$

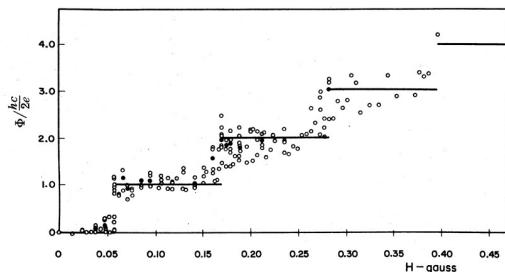
$$H = -H_I \cdot 2x/d, \quad j_s = \frac{cH_I}{2\pi d} = \frac{I}{d}.$$

(картинку из Шмидта добавлю)

Пленка над экраном. (изучу у Шмидта, пока не нужно это)
(тоже картинки у него есть)

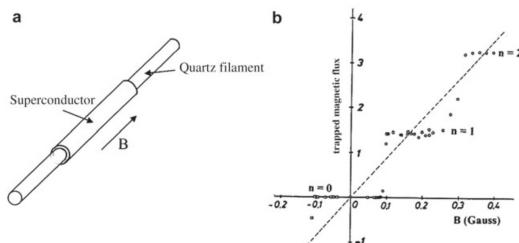
Квантование потока

Эксперименты, проверяющие квантование потока Deaver and Fairbank prooved in 1961 that: (?????? how???)



Расплывание потока они свели к погрешностям, а было ли это перемерено еще раз (???????)

Also, Doll, R. and N  bauer, M. in 1961 showed that (?????) field in rod is quantized if (?????)



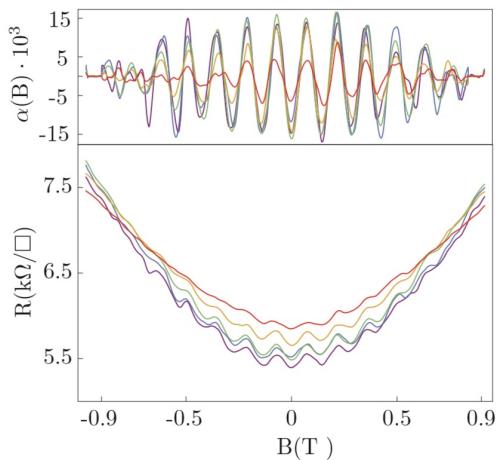
They did this: 1. The sample was heated above the transition temperature; then a defined field to be frozen in, H_y , was applied. 2. After recooling below the transition temperature, H_y was switched off. 3. The resonance amplitude was measured, and it is proportional to the product (measuring field H) times (magnetic moment of the sample). The latter in turn is proportional to the frozen-in flux. (???? need to discuss it with someone who knows it)

Little-Parks oscillations

Суть эффекта заключается в незначительном подавлении сверхпроводимости незатухающим током.

Результаты схематически показаны на рис. где наблюдаются периодические осцилляции критической температуры (T_c) на параболическом фоне.

(изучаю мб потом, не самый важный эффект, если усвою основы, по идеи быстро и решу его сам)



2.3 Сверхпроводники 2-го рода в двух словах

2.3.1 Одиночные вихри и их взаимодействия

Основные свойства вихрей

Мы рассматриваем сверхпроводники 2го рода при магнитном поле между 1м и 2м критическом, потому что это наиболее типичный случай.

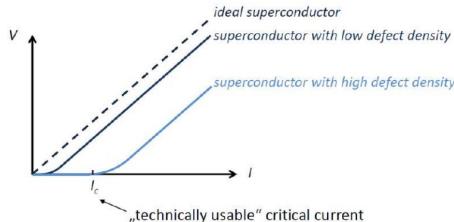
"Lorentz"-like force \mathbf{F}_L between current and magnetic flux lines.

→ force \perp current and \perp magnetic field

→ Flux lines move \perp current and \perp magnetic field

→ Moving flux lines create dissipation (electrical resistance!):

→ $j_c \ll j_{c,p}$ 'Ideal' superconductors have zero critical current density



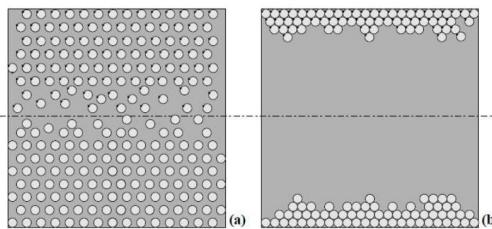
Silsbee's hypothesis for the critical current:

"The threshold value of the current is that at which the magnetic field due to the current itself is equal to the critical magnetic field."

For type-II superconductors: $I_c = B_{c1}2\pi R/\mu_0$

(????? как оценить размер вихря???? они супер мелкие, но я пока не умею их оценивать)

Вихри проникают именно через границу, потому что так им выгоднее (?) когда-то мб пойму, почему?). Внутри они так вот просто не возникают. Если пининг сильный, то они особо и не двигаются, если же малый, то особо и не двигаются.



Решение Абрикосова для решетки вихрей и верхнее критическое поле.

Взаимодействие вихрей (в лондоновском приближении).

Вихрь в тонкой пленке.

Описание пиннинга вихрей в двух словах (???)

(?? там тоже часть лекции про это)

Критический ток при зацеплении вихрей на линейных дефектах.

Взаимодействие вихрей с точечными дефектами.

Типичные следствия вихрей

28 Поле одиночного вихря 159

29 Первое критическое поле 161

30 взаимодействие вихрей 163

31 Второе критическое поле 165

2.3.2 Магнитный момент, поверхностная СП, перегрев, анизотропия СП 2го рода

32 Обратимый магнитный момент сверхпроводника 2го рода

33 Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле

34 Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния

35* Анизотропные сверхпроводники II рода

2.3.3 Критические вихри, плавление, резистивность, дефекты, крип потока

36* Разрушение сверхпроводимости в тонкой пленке тепловыми вихрями, БКТ переход

Длина экранировки:

$$\lambda_{2d} = \frac{2\lambda^2}{d}.$$

Этот результат можно угадать и из сравнения формул (10.4) и (10.7) для кинетических индуктивностей поверхности массивного сверхпроводника и тонкой пленки - обе эти формулы можно записать в виде $L_\square^k = 2\pi\lambda_{зфф}$, где $\lambda_{зфф}$ равно либо λ , либо λ_{2d} .

При расстояниях между вихрями в пленке $R \ll \lambda_{2d}$ экранировкой можно пренебречь, и полная энергия взаимодействия $U_2(R) = 2q_1q_2d\epsilon_0 \ln(R/\lambda_{2d})$, а собственная энергия каждого из вихрей равна $U_1 = d\epsilon_0 \ln(\lambda_{2d}/\xi)$, так что полная энергия пары вихрей противоположных циркуляций равна

$$U_{pair}(R) = 2\epsilon_0 d \ln \frac{R}{\xi} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 \lambda_{2d}} \ln \frac{R}{\xi}.$$

В тонких пленках λ_{2d} может достигать макроскопических размеров. Так, при $\lambda = 3$ мкм (что легко достигается в близкой окрестности T_{c0}) и толщине пленки $d = 50\text{ \AA}$ получим $\lambda_{2d} \simeq 3.6$ мм. При этом энергия кора вихря, $U_{\text{core}} = d\epsilon_0$, мала: $U_{\text{core}}/k_{\text{B}} \simeq 10$ К, в то время как полная энергия гораздо больше, $U_1/k_{\text{B}} \simeq 100$ К (мы выбрали здесь для оценки $\xi \simeq 0.1$ мкм).

Поскольку λ_{2d} может быть очень велико, имеет смысл рассмотреть случай размеров L , малых по сравнению с λ_{2d} (мы обсудим влияние конечности длины λ_{2d} позже, в самом конце этого раздела). Тогда энергия вихря равна $U_1(L) = d\epsilon_0 \ln(L/\xi)$, а среднее число вихрей во всей пленке порядка

$$n(L) \simeq (L/\xi)^2 \exp(-U_1(L)/T) = (L/\xi)^{2-\alpha},$$

где $\alpha = \epsilon_0 d / k_{\text{B}} T = \Phi_0^2 / (8\pi^2 \lambda_{2d} k_{\text{B}} T)$.

$$\frac{1}{\lambda_{2d}(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{d}{2\lambda_{-}(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{16\pi^2 k_{\text{B}} T_{\text{ВКТ}}}{\Phi_0^2}.$$

Иначе говоря, макроскопическая (с учетом вихрей) сверхтекучая плотность пленки $n_s^{(2)} = n_s d$ испытывает при повышении температуры скачок от значения $n_s^{(2),\text{min}}$, универсальным образом связанного с температурой перехода:

$$n_s^{(2),\text{min}} = \frac{8mk_{\text{B}} T_{\text{ВКТ}}}{\pi\hbar^2}$$

(далее, видимо, словами что-то напишу, потому что много всякой теории и формул)

$$\ln \frac{R_c(T)}{\xi} = b \left(\frac{\text{Gi}^{(2D)} T}{T - T_{\text{ВКТ}}} \right)^{1/2},$$

где $\xi(T)$ - обычная сверхпроводящая длина корреляции, определяемая с помощью теории Гинзбурга - Ландау, а b - число порядка единицы. Появление множителя $\text{Gi}^{(2D)}$ в правой части (36.8) легко понять: при $\frac{T-T_{\text{ВКТ}}}{T} \geq \text{Gi}^{(2D)}$ температура уже столь близка к T_{c0} , что невозможно отличить флюктуационные вихри от обычных флюктуаций, поэтому $R_c(T) \sim \xi(T)$.

(многое вообще не буду писать, слишком теории много)

37* Плавление решетки вихрей

$$B_m(T) \propto \frac{\Phi_0}{(k_{\text{B}} T)^2} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^4 \propto (1 - T/T_c)^2 \quad \text{при} \quad T \rightarrow T_c.$$

Мы получили важный и несколько неожиданный результат: поле плавления решетки убывает с повышением температуры быстрее, чем верхнее (и нижнее) критическое поле, которое ведет себя линейно вблизи температуры перехода, $H_{c2} \propto (1 - T/T_c)$. Вспоминая определение ширины флюктуационной области Gi , данное в §19, оценку (37.1) для поля плавления решетки можно записать в виде

$$\frac{B_m(T)}{H_{c2}(T)} = \alpha_m \frac{1 - T/T_c}{\text{Gi}}$$

где α_m - численный коэффициент.

38 Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние**39 Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга**

(???) допишу, если будет нужно)

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|\Phi_0}{\lambda a_0^2} \delta x.$$

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|B}{\lambda} \delta x.$$

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{c} I_{\text{Tp}} B,$$

$$I_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}}.$$

$$j_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}d}.$$

40 Резистивное состояние

(???) допишу, если будет нужно)

41* Коллективный пиннинг вихрей слабыми дефектами

(???) допишу, если будет нужно)

42* Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП.

(???) допишу, если будет нужно)

2.4 Типичная математика для сверхпроводимости**Типичный интеграл БКШ**

(?? строчка - откуда он???)

$$I(u) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + u^2} (e^{\sqrt{x^2 + u^2}} + 1)}.$$

Получим его асимптотики при низких температурах ($u \gg 1$) и при температурах вблизи точки перехода ($u \ll 1$). При $u \gg 1$ раскладываем по степеням u^{-1} :

$$I(u) \approx \int_0^\infty \frac{dx}{u} e^{-u(1+\frac{x^2}{2u^2})} = \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} e^{-u}.$$

При малых $u \ll 1$ представим $I(u) \equiv I_1(u) + I_2(u)$, в

$$I_1(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}} - \frac{1}{x} \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) dx$$

первый член подынтегрального выражения интегрируется элементарно, а второй интегрируется по частям, в итоге

$$I_1(u) = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{\operatorname{ch}^2(x/2)}.$$

(?у Пухова тут видимо опечатка, перерешаю??) Стоящая в (16.4) константа равна $(1/2)\ln(\pi/2\gamma)$, $\ln\gamma = C = 0, 577$.

$$I_2(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + u^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{x^2 + u^2}}{2} \right) dx$$

$$I_2(0) = 0 \quad I_2(u) \approx \frac{u^2}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left(\frac{1}{x} \operatorname{th} \frac{x}{2} \right)'.$$

Интеграл в (16.6) равен $7\zeta(3)/4\pi^2$. Таким образом, для обоих предельных случаев имеем

$$I(u) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} e^{-u} & \text{при } u \gg 1, \\ \ln \frac{\pi}{\gamma u} + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} u^2 & \text{при } u \ll 1. \end{cases}$$

Полезные интегралы

$$\begin{array}{lll} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} & \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{8} & \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{3}{8} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{16} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4} dx = \frac{\pi}{16} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx = \frac{5\pi}{16} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} = \frac{1}{32} \zeta(5) & \int_0^{\infty} \frac{1+4x^2}{(1+x^2)^{\frac{7}{2}}} dx = 0 \\ \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7}{8} \zeta(3) & \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} = \frac{31}{32} \zeta(5) & \end{array}$$

(соберу потом, решая задачи)

3 Об углубленных теориях и других явлениях

3.1 Overview of rare properties and phenomena in superconductivity

(по идеи тут словами, что такие-то вещи могут быть и для них такие-то формулы и графики)

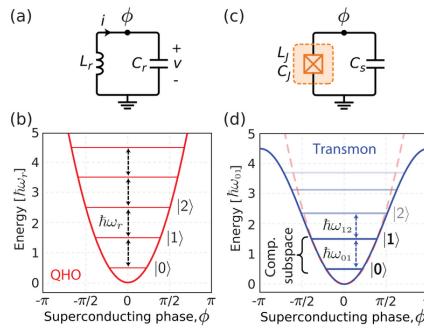
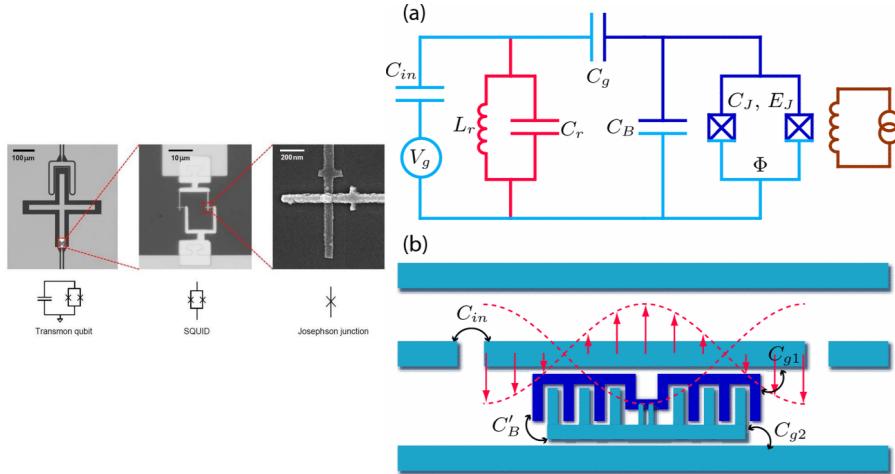
3.2 On applications of superconductivity

(very short review!)

3.2.1 On superconductivity for qubits and quantum computers

(это же в кв теор инф)

Transmon qubits



$$\text{LC circuit } E_{tot} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L}\Phi^2 = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}C\frac{1}{LC}\Phi^2 \quad \hat{H} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L}\hat{\Phi}^2$$

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Non-linear inductance $L_J = \frac{\hbar}{2eI_c \cos(\varphi)} = \pm L_c \frac{1}{\cos(\varphi)}$ Energy in JJ $E = E_J[1 - \cos(\varphi)]$ $E_J \equiv \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c$ $E_c = e^2/2C$ Transmon

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{Q}^2}{2C} + E_J[1 - \cos(\hat{\varphi})] \\ \hat{H} &= 4E_c \hat{n}^2 + E_J[1 - \cos(\hat{\varphi})] & hf_{01} &\approx \sqrt{8E_J E_c} - E_c \\ \hat{H} &= 4E_c \hat{n}^2 + E_J \frac{\hat{\varphi}^2}{2} - E_J \frac{\hat{\varphi}^4}{24} + \dots & hf_{12} &\approx hf_{01} - E_c \end{aligned}$$

Time dependence

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= c_0(t)e^{-\frac{i\varepsilon_0 t}{\hbar}}|0\rangle + c_1(t)e^{-\frac{i\varepsilon_1 t}{\hbar}}|1\rangle \\ c_0(t) &= e^{-i\Delta t/2} \left[\cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] \end{aligned}$$

$$c_1(t) = i \frac{A}{\Omega \hbar} e^{i\Delta t/2} \sin \frac{\Omega t}{2} \quad P_1(t) = |c_1(t)|^2 = \frac{A^2}{\hbar^2 \Omega^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega}{2} t \right)$$

Rabi frequency $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + A^2/\hbar^2}$ Detuning $\Delta = \omega_{01} - \omega$
Resonator $\omega_r = 2\pi \frac{v_p}{\lambda_n} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{(n+1)}{2\ell}$ FWHM: $\kappa = \frac{\omega_r}{Q}$

Dispersive readout $\omega_r \pm \frac{g^2}{\Delta}$

(???) так пока и не разобрался, как это работает???)

Anharmonicity is required to isolate two levels

(тут абзац про эту идею)

We need an anharmonic energy spectrum

Non-linear circuit elements are required (diodes, transistors,) But typical non-linear elements are dissipating

Solution: Josephson junction The energy levels will be non-equidistant

A Josephson junction is a non-linear inductor

Inductance of a JJ:

$$V = L_J \frac{dI_S}{dt}$$

$$I_S = I_c \sin \varphi \Leftrightarrow \frac{dI_S}{dt} = I_c \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} I_c \cos \varphi \quad L_J = \frac{\hbar}{2eI_C \cos \varphi}$$

voltage-phase relation: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}$; $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I_s}{I_c}\right)^2}$ the inductance of a JJ depends on the current (via the phase difference φ)

Total energy \rightarrow Hamiltonian:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{Q}^2}{2C} + E_J[1 - \cos \hat{\varphi}] \\ \hat{H} &= 4E_c \hat{n}^2 + E_J[1 - \cos \hat{\varphi}] \end{aligned}$$

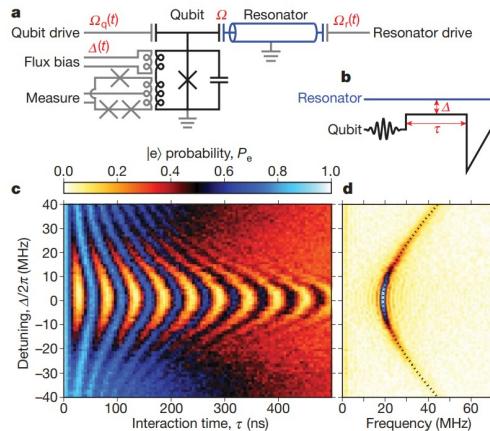
We consider $\varphi \ll 1$ and $E_J > E_C$ i.e. the transmon regime

$$\hat{H} = 4E_c \hat{n}^2 + E_J \left[1 - \left(1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{2} + \frac{\hat{\varphi}^4}{24} \dots \right) \right] \approx 4E_c \hat{n}^2 + E_J \frac{\hat{\varphi}^2}{2} - E_J \frac{\hat{\varphi}^4}{24}$$

Stored energy in JJ:

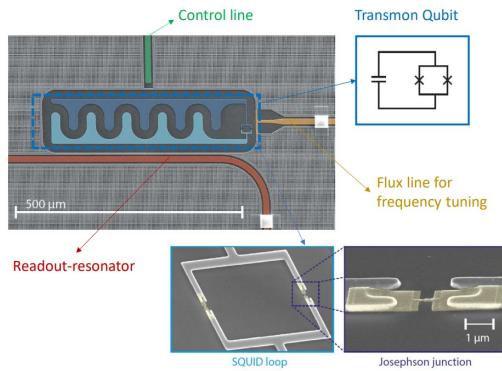
$$\begin{aligned} E &= \int_0^t IV dt = \int_0^\varphi I_C \sin \varphi \frac{\hbar}{2e} d\varphi \\ E &= \frac{\Phi_0}{2\pi} I_C [1 - \cos(\varphi)] = E_J [1 - \cos(\varphi)] \quad E_J := \frac{\Phi_0}{2\pi} I_C = \text{"Josephson energy"} \end{aligned}$$

Two-level systems, basic quantum optics for quantum computing



Superconducting circuits as artificial atoms: frequency range

General circuit is as follows:



Qubit control (допишу скоро уже, там минут 20 и сделаю это)

Qubit readout When a qubit is coupled to a superconducting CPW resonator, dispersive readout allows to determine the qubit state: under the conditions:

- Strong coupling regime

$$\text{i.e. } g \gg \kappa, \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2} \quad \left(\frac{1}{g} \sim 50 \text{ ns} \ll T_1, T_2 \right)$$

- Dispersive regime (detuned regime)

$$\text{i.e. } g \ll \omega_{\text{resonator}} - \omega_{\text{qubit}} \equiv \Delta$$

- Low photon numbers in cavity: $\ll \Delta^2/4$ g^{2~100}

3.2.2 Overview of typical applications of superconductivity

On applications in MRI (magnetic resonance imaging), where superconductors are used for Strong Magnetic Fields, Size and Design (????)

On applications in colliders where superconducting wires are used.

3.3 Углубленная теория Гинзбурга-Ландау и флюктуационные явления в двух словах

2.1.1. Функционал Гинзбурга — Ландау

2.1.2. Скачок теплоемкости

2.1.3. Уравнения Гинзбурга — Ландау

3.3.1 О критерии Гинзбурга-Леванюка в разных случаях

Суть

(???? важно дописать, когда такие формулы работают, потому что у Шмидта например другие. Когда-то мб доучу это!!)

$$Gi_{(D)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{V_D}{V} \vartheta_D b (4m)^{\frac{D}{2}} T_c^{\frac{D}{2}-1} \right]^{\frac{2}{4-D}}.$$

Подставляя в эту формулу следующие из микроскопического рассмотрения значения параметров теории Гинзбурга - Ландау (2.6), можно найти

$$Gi_{(D)} = \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{1}{\nu_D T_c \xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

Так как $\nu_D T_c \sim \nu_D v_F / \xi_c \sim p_F^{D-1} \xi_c^{-1} \sim \alpha^{1-D} \xi_c^{-1}$, то

$$Gi_{(D)} \sim \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{\xi_c \alpha^{D-1}}{\xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

Также:

$$Gi_{(2)} = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^3} \frac{1}{\nu_2 T_c \xi^2}$$

$$Gi_{(3)} = \left[\frac{7\zeta(3)}{64\pi^3} \frac{1}{\nu_3 T_c \xi^3} \right]^2$$

Указания о выводе критериев Гинзбурга - Леванюка (!!!!!)

Определение числа Гинзбурга - Леванюка по теплоемкости в отсутствие магнитного поля Соответственно, так называемое число Гинзбурга - Леванюка $Gi_{(D)}$ определяется, как то значение приведенной температуры, при которой флуктуационная поправка (2.34) сравнивается с $\Delta C(2.9)$:

$$Gi_{(D)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{V_D}{V} \vartheta_D b(4m)^{\frac{D}{2}} T_c^{\frac{D}{2}-1} \right]^{\frac{2}{4-D}}.$$

Подставляя в эту формулу следующие из микроскопического рассмотрения значения параметров теории Гинзбурга - Ландау (2.6), можно найти

$$Gi_{(D)} = \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{1}{\nu_D T_c \xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

Для дальнейшего нам будет полезно выписать число Гинзбурга - Леванюка для $3D$ и $2D$ случаев в явном виде:

и

$$Gi_{(3)} = \left[\frac{7\zeta(3)}{64\pi^3} \frac{1}{\nu_3 T_c \xi^3} \right]^2$$

$$Gi_{(2)} = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^3} \frac{1}{\nu_2 T_c \xi^2}$$

Так как $\nu_D T_c \sim \nu_D v_F / \xi_c \sim p_F^{D-1} \xi_c^{-1} \sim \alpha^{1-D} \xi_c^{-1}$, то эту формулу можно преобразовать к виду

$$Gi_{(D)} \sim \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{\xi_c \alpha^{D-1}}{\xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

где α есть межатомное расстояние. Как уже упоминалось, в массивных традиционных сверхпроводниках ввиду большой величины корреляционной длины ($\xi_c \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ см), которая намного превышает межатомное расстояние ($\alpha \sim 10^{-8}$ см), флуктуационная поправка к теплоемкости оказывается чрезвычайно малой.

Значения числа Гинзбурга - Леванюка для различных сверхпроводящих систем

$Gi_{(3)}$	$Gi_{(2)}$
$80 \left(\frac{T_c}{E_F}\right)^4, (c)$	$\left(\frac{T_c}{E_F}\right), (d)$
$\frac{1,6}{(p_F l)^3} \left(\frac{T_c}{E_F}\right), (d)$	$\frac{0,27}{p_F l}, (d)$
$Gi_{(1)}$	$\frac{1,3}{p_F^2 l d}, (d)$ film
$Gi_{(0)}$	
$0, 5, (d)$	
$1, 3 (p_F^2 S)^{-2/3} (T_c \tau)^{-1/3}, (d)$ wire	$\frac{\sqrt{7\zeta(3)}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\nu T_c V}} \approx$
$2, 3 (p_F^2 S)^{-2/3}, (d)$ whisker	

Укажем на существующую связь между найденным числом Гинзбурга - Леванюка для грязного $2D$ случая $Gi_{(2)}^{(d)}$ и безразмерным кондактансом

$$G_{\square} = \frac{\hbar}{e^2 R_{\square}},$$

Другие определения

Уширение критической области магнитным полем (потом когда-то дочитаю)

3.3.2 Другие свойства и модели в рамках теории Гинзбурга-Ландау

Нелокальная экранировка, предел Пиппарда.

Кинетическая индуктивность и поверхностный импеданс.

3.3.3 Сверхпроводимость II рода: флюктуационная теплоемкость, диамагнетизм

Флуктуации вблизи температуры перехода (оценка ширины флюктуационной области, диамагнетизм, парапроводимость).

Переход Березинского-Костерлица-Таулеса в тонкой пленке.

(По Варламову Ларкину создам параграфы потом!)

2.2. Вклад флюктуаций в теплоемкость

2.2.1. Точное решение задачи в случае размерности $D = 0$

2.2.2. Произвольная размерность: случай $T \geq T_c$

2.2.3. Произвольная размерность: случай $T < T_c$

2.3. Флюктуационный диамагнетизм

2.3.1. Предварительные замечания Что касается трехмерных образцов, то следует отметить, что выражение (1.10), будучи представленным посредством корреляционной длины $\xi(T)$, оказывается справедливым в области более широкой, чем обсуждаемая выше область слабых флюктуаций (ГЛ-область). Действительно, в ГЛ-области ($|\epsilon| \gtrsim Gi$) $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-1/2}$ и такое представление тривиально. Ситуация изменяется в непосредственной близости точки перехода, где становится существенным взаимодействие флюктуаций. Здесь само присутствие куперовских пар начинает влиять на корреляционную длину. Согласно скэйлинговой гипотезе (которую мы подробно обсудим ниже) вблизи перехода единственным масштабом в системе остается корреляционная длина, по-прежнему степенным образом зависящая от температуры: $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-\nu}$, однако взаимодействие флюктуаций изменяет критический

индекс по сравнению с его ГЛ-величиной $\nu = 1/2$. Та же скэйлинговая гипотеза позволяет записать для диамагнитной восприимчивости общее соотношение:

$$\chi_{(3)} \sim -e^2 T \xi(T) \sim -\chi_P \epsilon^{-1/2} \begin{cases} 1, & \epsilon \gtrsim Gi \\ \left(\frac{\epsilon}{Gi}\right)^{1/2-\nu}, & \epsilon \lesssim Gi, \end{cases}$$

$$\chi_{(3c)}(T \gg T_c) \sim -e^2 T \xi(T) \sim -\chi_P$$

В двумерном случае выражение (1.10) применимо для оценки $\chi_{(2)}$, когда магнитное поле приложено перпендикулярно плоскости, позволяя флюктуационным куперовским парам вращаться в ней:

$$\chi_{(2c)}(T) \sim e^2 \frac{n}{m} \langle R^2 \rangle \sim e^2 T \xi^2(T) \sim -\chi_P \frac{E_F}{T - T_c}.$$

$$\chi_{(\text{layer }, \perp)}(\epsilon, H \rightarrow 0) \sim -e^2 T \frac{\xi_x(\epsilon) \xi_y(\epsilon)}{\max \{s, \xi_z(\epsilon)\}}$$

Из этой формулы очевидно существование кроссовера между $2D$ и $3D$ температурными режимами: по мере того, как температура приближается к T_c , зависимость диамагнитной восприимчивости от ϵ меняется с $1/\epsilon$ на $1/\sqrt{\epsilon}$. Это происходит тогда, когда приведенная температура достигает значения $\epsilon_{\text{cr}} = r (\xi_z(\epsilon_{\text{cr}}) \sim s)$. Параметр анизотропии:

$$r = \frac{4\xi_z^2(0)}{s^2} = \frac{J^2}{T} \begin{cases} \frac{\pi\tau}{4}, & T\tau \ll 1 \\ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T}, & T\tau \gg 1 \end{cases}$$

играет важную роль в теории слоистых сверхпроводников ⁵.

2.3.2. Флюктуационный диамагнетизм нульмерного образца

$$T_c(H) = T_c(0) \left(1 - \frac{4\pi^2 \xi^2}{\Phi_0^2} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right)$$

По этой причине для описания сверхпроводящей гранулы в магнитном поле можно воспользоваться статистической суммой в той же форме (2.25), как и в его отсутствие, но с перенормированным параметром $a(H) = a + \frac{e^2}{m} \langle \mathbf{A}^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} Z_{(0)}(H) &= \pi \int d|\Psi_0|^2 \exp \left(-\frac{[a + \frac{e^2}{m} \langle \mathbf{A}^2 \rangle] |\Psi_0|^2 + \frac{b}{2V} |\Psi_0|^4}{T} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 V T}{2b}} \exp \left[\frac{a^2(H)V}{2bT} \right] \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[a(H) \sqrt{\frac{V}{2bT}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В области слабых флюктуаций $Gi_{(0)} \lesssim \epsilon$ для свободной энергии можно выписать асимптотическое выражение (2.27):

$$\begin{aligned} F_{(0)}(\epsilon, H) &= -T \ln \frac{\pi}{\alpha \left(\epsilon + \frac{4\pi^2 \xi^2}{\Phi_0^2} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right)} \\ M_{(0)}(\epsilon, H) &= -\frac{1}{V} \frac{\partial F_{(0)}(\epsilon, H)}{\partial H} = -\frac{6\pi T \xi^2}{5\Phi_0^2 d} \frac{H}{\left(\epsilon + \frac{\pi^2 \xi^2}{10\Phi_0^2} H^2 d^2 \right)} \end{aligned}$$

Легко видеть, что флюктуационная намагниченность отрицательна и линейно возрастает по абсолютной величине вплоть до некоторого поля кроссовера, при котором она достигает минимума. Это поле мы назовем температурно зависящим критическим полем гранулы $H_{c2(0)}(\epsilon) \sim \frac{\Phi_0}{d\xi(\epsilon)} \sim \sim \frac{\xi}{d} H_{c2}(0) \sqrt{\epsilon}$ ⁷.

$$\chi_{(D)}(\epsilon) = -2\pi \frac{\xi T}{v_F} \chi_P \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, & \text{проводка в параллельном} \\ \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}, & \text{поле,} \\ \frac{d}{3\xi} \ln \frac{1}{\epsilon}, & \text{проводка в перпендикулярном} \end{cases}$$

2.3.3. Флюктуационный диамагнетизм в двумерном случае

$$F(\epsilon, H) = -\frac{SH}{\Phi_0} T \sum_{n, k_z} \ln \frac{\pi T}{\alpha T_c \epsilon + \omega_c (n + \frac{1}{2})}.$$

Здесь S есть площадь сечения, перпендикулярного полю, а учет вырожденности уровней привел к появлению множителя HS/Φ_0 , равного числу квантовых состояний, соответствующих определенной паре квантовых чисел n и k_z . Поскольку мы будем интересоваться лишь флюктуационным вкладом, сингулярным по степени близости системы к точке перехода, то, в интересующем нас случае тонкой пленки ($d \ll \xi_z(T)$), при суммировании по k_z в выражении (2.71) следует оставить лишь член с $k_z = 0$. Это приводит к появлению множителя $1/d$.

Выражение (2.51) удобно переписать, введя безразмерное магнитное поле:

$$h = \frac{\omega_c}{\alpha T_c} = \frac{eH}{2m\alpha T_c} = \frac{H}{\tilde{H}_{c2}(0)}$$

после чего флюктуационная часть свободной энергии $2D$ сверхпроводника принимает вид:

$$F_{(2)}(\epsilon, H) = -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2} h \sum_{n=0}^{n_c-1} \ln \frac{\pi}{\alpha [\epsilon + 2h(n + \frac{1}{2})]}$$

Мы ввели здесь удобное для нашего дальнейшего рассмотрения определение верхнего критического поля

$$\tilde{H}_{c2}(0) = \frac{2m\alpha T_c}{e} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}$$

(???) дальше словами. Плюс указания на эти действия выше обязательно должны быть!!!)

3.3.4 Другие флюктуационные явления

2.4. Слоистый сверхпроводник в магнитном поле

2.4.1. Модель Лоуренса - Дониака Обобщение функционала Гинзбурга - Ландау на случай слоистого сверхпроводника (функционал Лоуренса - Дониака, ЛД-функционал [50]) в перпендикулярном магнитном поле может быть записано в виде

$$\mathcal{F}_{LD}[\Psi] = \sum_l \int d^2r \left(a |\Psi_l|^2 + \frac{b}{2} |\Psi_l|^4 + \frac{1}{4m} |(\nabla_{||} - 2ie\mathbf{A}_{||}) \Psi_l|^2 + \mathcal{J} |\Psi_{l+1} - \Psi_l|^2 \right),$$

где Ψ_l - параметр порядка в l -м сверхпроводящем слое, а феноменологический параметр \mathcal{J} пропорционален энергии джозефсоновской связи между соседними слоями.

(дальше словами какие-то свойства напишу и указания на ходы. Вроде что-то похожее на типичные ходы дальше идет, но тут прямо специфика.)

2.4.2. Общая формула для флуктуационного вклада в свободную энергию в произвольном магнитном поле (словами напишу, тут специфика)

2.4.3. Флуктуационная намагниченность и ее кроссоверы

2.4.4. Флуктуационная теплоемкость в магнитном поле Дифференцирование общего выражения для флуктуационного вклада в свободную энергию слоистого сверхпроводника (2.74) по приведенной температуре позволяет найти наиболее сингулярную часть флуктуационной теплоемкости в магнитном поле:

$$C_{LD}(\epsilon, h) = -\frac{1}{VT} \frac{\partial^2}{\partial^2 \epsilon} F_{LD}(\epsilon, h) = \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \frac{1}{2h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}(\theta)}{2h} \right).$$

2.6. Скейлинг и ренормализационная группа

- 2.7. Влияние флуктуаций на сверхтекущую плотность и критическую температуру
- 2.8. Флуктуации магнитного поля

3.3.5 Теории Горькова и Гинзбурга-Ландау функциональным интегралом

Статистическая сумма в виде интеграла по грависмановым переменным.

Функциональный интеграл для ферми-газа с притяжением в произвольном канале.

Эффективное действие и функции Горькова.

Разложение по степеням Δ : локальные члены.

Градиентный член и длина корреляции.

3.4 Микроскопическая теория и её модели в двух словах

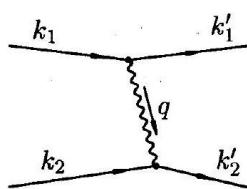
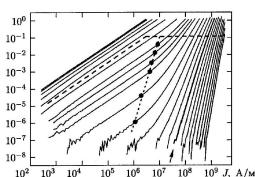
3.4.1 Суть механизма притяжения и куперовская неустойчивость в рамках BCS

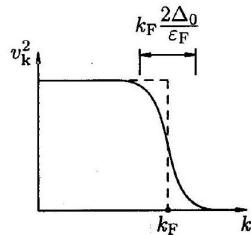
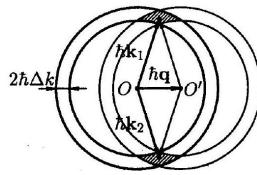
Притяжение между электронами за счет обмена виртуальными фононами.

Куперовская неустойчивость в вершинной части.

Роль кулоновского отталкивания.

Спиновая структура волновой функции пары при синглетном и триплетном спаривании.





3.4.2 On diagrammatic approach to BCS

3.4.3 Эффекты температуры и магнитного поля

Уравнение самосогласования для Δ и его решение при низких температурах; $\Delta(T)$ при нетривиальном спаривании.

Теплоемкость и спиновая восприимчивость сверхпроводника.

Парамагнитный предел для синглетного сверхпроводника.

Диамагнитный отклик, глубина проникновения поля и ее температурная зависимость.

3.4.4 Теория Элиашберга о взаимодействии электронов и фононов(???)

Обзор теории Элиашберга

Eliashberg theory is a theory of superconductivity that describes the role of phonons in providing the attractive interaction between two electrons. Phonon dynamics are taken into account, thus giving rise to retardation effects that impact the electrons, in the form of a frequency-dependent electron self-energy. In the superconducting state, this means that the order parameter, generally considered to be a static quantity in the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) theory, also becomes frequency dependent.

Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия и уравнения Дайсона.

Формальное решение для функций Грина, спектральное представление и усреднение по ферми-поверхности.

Интегральное уравнение для параметра порядка $\Delta(\omega)$ и анализ его решения.

Роль кулоновского взаимодействия.

Простое применение: изотопический эффект в сверхпроводимости.

3.4.5 Неоднородные сверхпроводящие состояния

Уравнения Боголюбова - де Жена.

Андреевское отражение и андреевские уровни в S-N-S контакте.

Локализованные электронные уровни в центре абрикосовского вихря.

3.5 Unconventional superconductivity in a nutshell by Mineev and others

(!!!!!! добавлю потом деление по типам тем!!!)

Singlets, Triplets, other states

Operation	Singlet	Triplet
Fermion exchange	$\psi(\vec{k}) = \psi(-\vec{k})$	$\vec{d}(\vec{k}) = -\vec{d}(-\vec{k})$
Orbital rotation	$g\psi(\vec{k}) = \psi(R(g)\vec{k})$	$g\vec{d}(\vec{k}) = \vec{d}(R(g)\vec{k})$
Spin rotation	$g\psi(\vec{k}) = \psi(\vec{k})$	$g\vec{d}(\vec{k}) = \tilde{R}(g)\vec{d}(\vec{k})$
Time-reversal	$\hat{K}\psi(\vec{k}) = \psi^*(-\vec{k})$	$\hat{K}\vec{d}(\vec{k}) = -\vec{d}^*(-\vec{k})$
$U(1)$ -gauge	$\hat{\Phi}\psi(\vec{k}) = e^{i\phi}\psi(\vec{k})$	$\hat{\Phi}\vec{d}(\vec{k}) = e^{i\phi}\vec{d}(\vec{k})$

3.5.1 Cooper Pairing

$$\Psi_{\text{pair}}^l = g_1(\mathbf{k})|\Pi \uparrow\rangle + g_2(\mathbf{k})(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + g_3(\mathbf{k})|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{k}) & g_2(\mathbf{k}) \\ g_2(\mathbf{k}) & g_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix}.$$

$$g_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^1 a_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$$

- амплитуды состояний с $S_z = 1, 0$ и -1 , соответственно.

Или через базиса симметричные матрицы $i\sigma\sigma_y = (i\sigma_x\sigma_y, i\sigma_y\sigma_y, i\sigma_z\sigma_y)$:

$$\begin{aligned} \Psi'_{\text{pair}} &= i(\mathbf{d}(\mathbf{k})\boldsymbol{\sigma})\sigma_y = (d_x(\mathbf{k})\sigma_x + d_y(\mathbf{k})\sigma_y + d_z(\mathbf{k})\sigma_z)i\sigma_y = \\ &= \begin{pmatrix} -d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) & d_z(\mathbf{k}) \\ d_z(\mathbf{k}) & d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g_1 = -d_x + id_y, g_2 = d_z, g_3 = d_x + id_y$$

$$d_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}).$$

Среднее значение спина пары:

$$\mathbf{S} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{k});$$

Среднее значение орбитального момента пары:

$$\mathbf{L} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \left[\mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right] \mathbf{d}(\mathbf{k}).$$

3.5.2 2 Spin Structure of Paired States

3.5.3 3 Phases of Superfluid Helium-3

3.5.4 4 Superconducting States in Crystals

3.5.5 Energy of Elementary Excitations in Superconductors

$$V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} V_\Gamma(k, k') \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \left(\psi_i(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{g}_{\alpha\beta} \right) \left(\psi_i^*(\hat{\mathbf{k}'}) \mathbf{g}_{\lambda\mu}^+ \right)$$

$$\Psi = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |vac\rangle$$

Основное состояние сверхпроводника представляет собой суперпозицию состояний с различным числом куперовских пар, поэтому волновая функция пары $F_{\mathbf{k},\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} T = 0 \quad & F_{\mathbf{k},\uparrow\downarrow} = \langle \Psi | a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow} | \Psi \rangle \\ & F_{\mathbf{k},\uparrow\downarrow}^+ = \langle \Psi | a_{-\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\downarrow}^+ | \Psi \rangle \\ T \neq 0 \quad & F_{\mathbf{k},\alpha\beta} = \langle a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\beta} \rangle, \\ & F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ = \langle a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ \rangle. \end{aligned}$$

В случае нечетного потенциала взаимодействия функции $\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta}$ и $F_{\mathbf{k},\alpha\beta}$ также нечетны и описывают триплетное спаривание:

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = \Delta \mathbf{d}(\mathbf{k}) (i\sigma\sigma_y)_{\alpha,\beta}.$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^1 \mathbf{b}_{lm}(k) Y_{lm}(\dot{\mathbf{k}}) \quad \int \frac{d\Omega}{4\pi} |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2 = 1$$

Для сверхпроводника с триплетным спариванием:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2}$$

В B -фазе $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{k}}$

$$E_k^B = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$$

то есть, как и в случае s -спаривания, на всей ферми-поверхности имеется щель, не зависящая от направления \mathbf{k} .

В A -фазе $\mathbf{d} = \sqrt{3/2} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0)$

$$E_{\mathbf{k}}^A = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2}\Delta^2 (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)} = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2}\Delta^2 \sin^2 \theta}$$

то есть щель в спектре обращается в нуль на северном и южном полюсах ($\theta = 0, \pi$) фермисферы.

3.5.6 Gap in the Spectrum of Elementary Excitations and Critical Temperature

3.5.7 Temperature Dependence of Thermodynamic Quantities of UC SC for $T \rightarrow 0$

Для анизотропного спаривания:

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} E_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/T} + 1}$$

- 3.5.8 8 Effects of Electron Number Parity in Superconductors
- 3.5.9 9 Paramagnetic Susceptibility and Knight Shift
- 3.5.10 10 Landau Expansion of Superconductor Free Energy
- 3.5.11 11 Superconducting States with Multicomponent Order Parameters
- 3.5.12 12 Ginzburg-Landau Equations and Upper Critical Field
- 3.5.13 13 Boundary Conditions and Surface Superconductivity
- 3.5.14 14 Meissner and Mixed States in Unconventional Superconductors
- 3.5.15 15 Magnetic Superconductors
- 3.5.16 16 Josephson Effect
- 3.5.17 17 Gor'kov Equations
- 3.5.18 18 Ginzburg-Landau Functional
- 3.5.19 19 Upper Critical Field in a p-wave Superconductor
- 3.5.20 20 Boundary Conditions for the Order Parameter
- 3.5.21 21 Effect of Impurities on Unconventional Superconductivity
- 3.5.22 22 Electronic Thermal Conductivity of Unconventional Superconductors

3.6 Другая Джозефсоника и другие контакты в двух словах

(из Applied Superconductivity: Josephson Effect and Superconducting Electronics by Prof. Dr. Rudolf Gros)

3.6.1 Другие свойства JJ и различные применения

Двухчастичный эффект Джозефсона по ЛПШ

Формально этот вклад можно описать, заменив нормальные функции Грина в диаграмме на рис. 11.3 на аномальные - см. рис. 11.6. Таким образом, туннельный эксперимент позволяет «измерить» аномальную функцию Грина в сверхпроводнике.

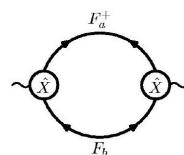


Рис. 11.6

Покажите, что в равновесии, при $V = 0$, двухчастичный ток отличен от нуля и равен

$$I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)$$

где $\varphi_{a(b)}$ - значения фазы сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{a(b)} = |\Delta_{a(b)}| e^{i\varphi_{a(b)}}$ на разных берегах контакта. Туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, в котором имеет место эффект Джозефсона ($I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)$), называется соответственно джозефсоновским контактом.

Рассмотрите случай, когда сверхпроводники по обе стороны контакта одинаковые, т.е. $\Delta_{a(b)} = \Delta e^{i\varphi_{a(b)}}$. Получите формулу для максимального тока в джозефсоновском контакте:

$$I_0 = \frac{\pi\Delta}{2eR} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}$$

где R - сопротивление контакта при $T > T_c$. Связь между максимальным джозефсоновским током I_0 и сопротивлением контакта в нормальном состоянии называется соотношением Амбера-Баратова.

Формулы Бенаккера для контакта Джозефсона (???)

(продумаю их, там много всякого может быть)

Сила Казимира в Джозефсоне

$$F = -\frac{g\hbar v_F}{24\pi L^2} (\pi^2 - 3\phi^2), \quad |\phi| < \pi$$

$F = -d\Omega/dL$, Ω - free energy.

On fabrication of Josephson Junctions

(not important)

Критический ток и «ток возврата» в JJ

(??? хз пока что)

Джозефсоновские вихри.

(хз, что это, потом когда-то додумаю.)

Josephson radiation (???)

- DC bias current \rightarrow AC response $f_d=3$ GHz
- Power generated typically low & difficult to couple to external circuit (impedance mismatch)

• Nice recent experiment: direct detection of the emitted radiation.

(??? хз, что это такое, но есть статья про это, нужно будет - буду изучать, пока ничего такого не понимаю.)

Overview of applications of JJs and SQUIDS

(просто раскрою плюсы приборов с ними, пока не особо про это думал)

The particular I-V dependence of a JJ and the possible hysteresis (~memory) has a large number of applications in analog and digital electronics. (??? какие???)

Produce very fast switches (IC's), low power consumption

SQUID as a highly sensitive sensors for the magnetic field

- Laboratory applications (magnetometry)
- Geophysical applications (earth magnetic field, rock magnetometry, ...)
- Non-destructive tests and evaluations, structural characterization Scanning SQUID microscopy
- Medical applications

Scanning SQUID microscope (хз, как это работает, потом допишу мб, пока знаю, что такой есть.)

Medical applications of SQUID magnetometers (хз, продумаю потом)

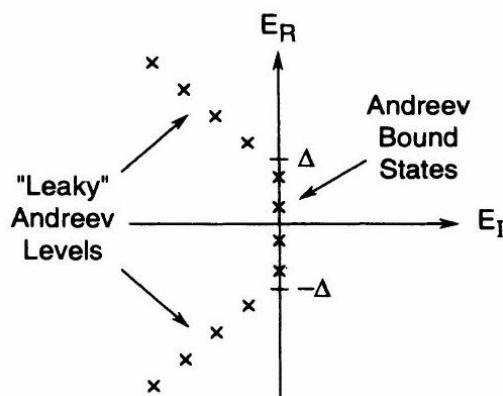
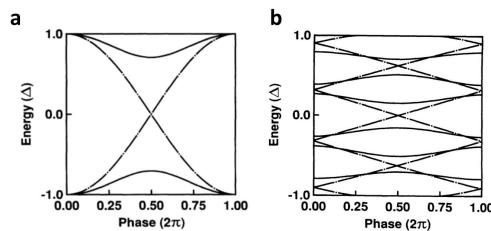
3.6.2 Суть микроскопической теории слабых контактов, Андреевские уровни

Энергия связи в S-I-S контакте и критический ток.

Температурная зависимость тока, формула Амбераокара-Баратова для симметричного S-I-S.

Андреевские уровни и сверхток в S-N-S контактах.

Spectrum of Andreev bound state. a) Short ballistic junction with (solid) and without (dotted) the presence of impurity (From Ref.[65]). b) Long ballistic junction. The discrete Andreev levels are shown with (solid) and without (dashed) the presence of an impurity. In both (a) and (b), an energy gap is opened in this quasi-particle spectrum.



Формула Бинаккера для короткого контакта.

Анализ предельных случаев большой и малой прозрачности.

Тепловая длина когерентности, введение в метод квазиклассических функций Грина.

Контакт сверхпроводников через ферромагнетик (S-F-S) и инверсия фазы (π -контакт).

3.6.3 Transition from metallic to tunneling regimes by Blonder Tinkham Klapwijk

(напишу конспект его потом сперва сюда)

3.6.4 Special Voltage States of JJ

(упрощенное это поставлю раньше! тут усложненные будут модели)

3.1 The Basic Equation of the Lumped Josephson Junction 90

3.1.1 The Normal Current: Junction Resistance 90 3.1.2 The Displacement Current: Junction Capacitance 92 3.1.3 Characteristic Times and Frequencies 93 3.1.4 The Fluctuation Current 94 3.1.5 The Basic Junction Equation 96

3.2 The Resistively and Capacitively Shunted Junction Model 97

3.2.1 Underdamped and Overdamped Josephson Junctions 100 3.3 Response to Driving Sources 102 3.3.1 Response to a dc Current Source 102 3.3.2 Response to a dc Voltage Source 107 3.3.3 Response to ac Driving Sources 107 3.3.4 Photon-Assisted Tunneling 112

3.4 Additional Topic: Effect of Thermal Fluctuations 115

3.4.1 Underdamped Junctions: Reduction of I_c by Premature Switching 117 3.4.2 Overdamped Junctions: The Ambegaokar-Halperin Theory 118

3.5 Secondary Quantum Macroscopic Effects 122

3.5.1 Quantum Consequences of the Small Junction Capacitance 122 3.5.2 Limiting Cases: The Phase and Charge Regime 125 3.5.3 Coulomb and Flux Blockade 128 3.5.4 Coherent Charge and Phase States 130 3.5.5 Quantum Fluctuations 132 3.5.6 Macroscopic Quantum Tunneling 133

3.6 Voltage State of Extended Josephson Junctions 139

3.6.1 Negligible Screening Effects 139 3.6.2 The Time Dependent Sine-Gordon Equation 140 3.6.3 Solutions of the Time Dependent Sine-Gordon Equation 141 3.6.4 Additional Topic: Resonance Phenomena

3.6.5 JJ with special properties

On topological Josephson effect (???)

(Скорее всего в современной науке про него многие думают.)

Intrinsic Josephson contact

(такое тоже есть, картинку в некоторых местах даже видел)

3.6.6 Флуктуационные эффекты в слабых контактах

Тепловые флуктуации в джозефсоновском переходе, проскальзывание фазы и $I(V,T)$.

Макроскопические квантовые эффекты: «туннелирование фазы» и переход в резистивное состояние.

Макроскопическая квантовая когерентность в СКВИДах.

3.6.7 On SFS junctions

(много статей про это есть, нужно будет - выпишу все про это сюда)

Основные свойства

(нужно будет - начну с того, что из Шмидта выпишу, пока итак хватает занятий)

3.7 Другие теоретические методы и связи теорий в двух словах

3.7.1 Description of disorder in superconductors in a nutshell

Потенциальные примеси и их влияние на обычное s-спаривание.
Зависимость критических магнитных полей от беспорядка.
Спин-орбитальное примесное рассеяние и парамагнитный предел.
Нарушение Т-инвариантности и распаривающий фактор.
Подавление сверхпроводимости магнитным полем. Бесщелевая сверхпроводимость.
Разрушение «необычных» сверхпроводящих фаз потенциальными примесями.

3.7.2 Микроскопический вывод временного уравнения ГЛ по Варламову

- 5.1. Предварительные замечания
- 5.2. Куперовский канал электрон-электронного взаимодействия: флюктуационный пропагатор
- 5.3. Диаграммное представление флюктуационных поправок
- 5.4. Сверхпроводник с примесями.
- 5.4.1. Учет рассеяния на примесях
(тут по Варламову Ларкину темы мб будут, это их ч2 и она скорее всего многое говорит. увеличу их потом мб.)

3.7.3 Микроскопический вывод функционала Гинзбурга Ландау

6. 1. Функционал Гинзбурга — Ландау традиционного сверхпроводника
6. 2. Функционал Гинзбурга — Ландау для сверхпроводника с нетривиальной симметрией параметра порядка

3.7.4 Микроскопическая теория флюктуационной проводимости по Варламову

- 7.1. Качественное обсуждение различных флюктуационных вкладов
- 7.2. Оператор электромагнитного отклика
- 7.3. Флюктуационная проводимость слоистого сверхпроводника в окрестности T_c
 - 7.3.1. AL-вклад
 - 7.3.2. Вклад связанный с флюктуационной перенормировкой плотности состояний
 - 7.3.3. Вклад Маки - Томпсона
 - 7.3.4. Время сбоя фазы τ_φ
 - 7.3.5. Сравнение результатов теории флюктуационной проводимости с экспериментом
- 7.4. Флюктуационная проводимость в переменном поле
- 7.5. Флюктуационная проводимость в ультрачистом сверхпроводнике
 - 7.5.1. Предварительные замечания
 - 7.5.2. Нелокальная флюктуационная проводимость в квазибаллистическом режиме

7.6. Флуктуационная проводимость вдали от температуры перехода

7.6.1. Парапроводимость чистого сверхпроводника при $T \gg T_c$ 7.6.2. Флуктуационная проводимость примесного сверхпроводника при $T \gg T_c$ 7.6.3. Воздействие межэлектронного взаимодействия в куперовском канале на проводимость неупорядоченного металла

7.7. Нелинейные флуктуационные эффекты

3.7.5 On 1D superconductors

(есть интересная статья Бычкова Горькова Дзялошинского, мб когда-то отвечу на этот вопрос. Говорят, что она может быть, но это спорно и при сильном кулоновском взаимодействии (????))

3.7.6 On induced superconductivity of 2D materials (????)

(maybe I'll look later)

3.8 Другие явления в двух словах

3.8.1 Термоэлектрические эффекты в сверхпроводниках

Эффект Зеебека в сверхпроводнике и возможность его измерения.

«Сверхпроводящая термопара» и магнитный поток в ней.

Эффект Нернста в смешанном состоянии сверхпроводника и проблема энтропии, приходящейся на один вихрь.

Флуктуационный эффект Нернста выше точки перехода.

3.8.2 Теория плавления и пиннинга решетки вихрей в двух словах

Вихрь в потенциале точечных дефектов.

Скейлинговые соотношения.

Решетка вихрей: упругие модули.

Плавление решетки вихрей тепловыми флуктуациями.

Разрушение дальнего порядка решетки примесями и критический ток.

Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП.

3.8.3 Проявление флуктуационных эффектов в наблюдаемых величинах (????)

(по Варламову Ларкину, их часть 3)

3.8.4 Флуктуации вnano-структурах и особых сверхпроводящих системах (????)

(по Варламову Ларкину. их часть 4. там огромное задротство)

3.8.5 Другие магнитные явления

(пока как-то не актуально про них думать, но слышал про них)

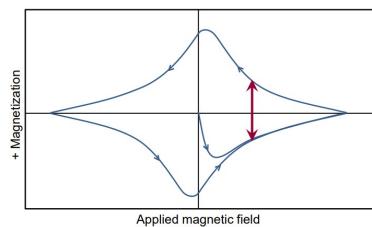
Magnetization curve of hard superconductors

(я не понял это, когда-то подумаю еще раз, все равно никакими формулами нас не обучали)

If flux lines are pinned in hard superconductors, their thermodynamic equilibrium positions can not settle, which results in irreversible magnetization curves with higher magnetization values.

Close relation between irreversible magnetization and critical current. The 'Bean critical state model' explains that under certain assumptions:

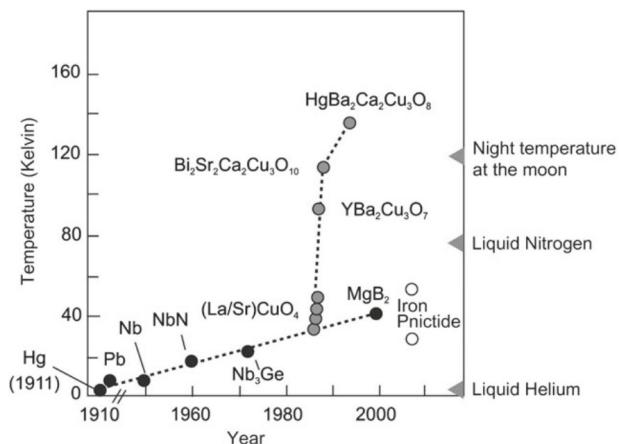
$$|M(B_a)| \sim j_c(\mathbf{B}_a)$$



3.9 On high-temperature superconductors

(нужно будет - прочитало, тут пока мало что знаю и не нужно это было еще.)

Overview of high T sup cond



Compound	T _C (K)
La _{2-x} Sr _x CuO ₄	38
YBa ₂ Cu ₃ O _{7-x}	92
Bi ₂ Sr ₂ Ca ₂ Cu ₃ O _{8+x}	110
Tl ₂ Ba ₂ Ca ₂ Cu ₃ O _{10+x}	125
HgBa ₂ Ca ₂ Cu ₃ O _{8+x}	133

3.10 Applications of superconductivity

(из Applied Superconductivity: Josephson Effect and Superconducting Electronics by Prof. Dr. Rudolf Gross, пока не актуально в этом разбираться.)

3.10.1 Digital Electronics

5.1 Superconductivity and Digital Electronics 216 5.1.1 Historical development 217 5.1.2 Advantages and Disadvantages of Josephson Switching Devices 219 5.2 Voltage State Josephson Logic 222 5.2.1 Operation Principle and Switching Times 222 5.2.2 Power Dissipation 225 5.2.3 Switching Dynamics, Global Clock and Punchthrough 226 5.2.4 Josephson Logic Gates 228 5.2.5 Memory Cells 234 5.2.6 Microprocessors 236 5.2.7 Problems of Josephson Logic Gates 237 5.3 RSFQ Logic 239 5.3.1 Basic Components of RSFQ Circuits 241 5.3.2 Information in RSFQ Circuits 246 5.3.3 Basic Logic Gates 247 5.3.4 Timing and Power Supply 249 5.3.5 Maximum Speed 249 5.3.6 Power Dissipation 250 5.3.7 Prospects of RSFQ 250 5.3.8 Fabrication Technology 253 5.3.9 RSFQ Roadmap 25 254 5.4 Analog-to-Digital Converters 255 5.4.1 Additional Topic: Foundations of ADCs 256 5.4.2 The Comparator 261 5.4.3 The Aperture Time 263 5.4.4 Different Types of ADCs 26

The Josephson Voltage Standard

6.1 Voltage Standards 270 6.1.1 Standard Cells and Electrical Standards 270 6.1.2 Quantum Standards for Electrical Units 271 6.2 The Josephson Voltage Standard 274 6.2.1 Underlying Physics 274 6.2.2 Development of the Josephson Voltage Standard 274 6.2.3 Junction and Circuit Parameters for Series Arrays 279 6.3 Programmable Josephson Voltage Standard 281 6.3.1 Pulse Driven Josephson Arrays 283

3.10.2 Superconducting Photon and Particle Detectors

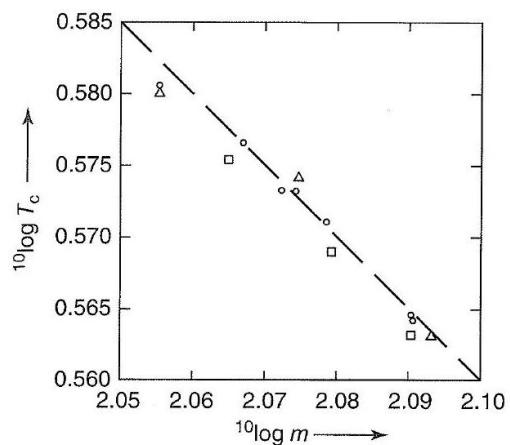
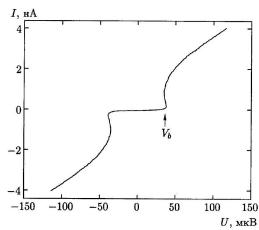
7.1 Superconducting Microwave Detectors: Heterodyne Receivers 286
7.1.1 Noise Equivalent Power and Noise Temperature 286
7.1.2 Operation Principle of Mixers
7.1.5 Josephson Mixers 296
7.2 Superconducting Microwave Detectors: Direct Detectors 297
7.2.1 NEP of Direct Detectors 298
7.3 Thermal Detectors 300
7.3.1 Principle of Thermal Detection 300
7.3.2 Bolometers 302
7.3.3 Antenna-Coupled Microbolometers 307
7.4 Superconducting Particle and Single Photon Detectors 314
7.4.1 Thermal Photon and Particle Detectors: Microcalorimeters 314
7.4.2 Superconducting Tunnel Junction Photon and Particle Detectors 318
7.5 Other Detectors 328

3.10.3 Microwave Applications

8.1 High Frequency Properties of Superconductors 330
8.1.1 The Two-Fluid Model 330
8.1.2 The Surface Impedance 333
8.2 Superconducting Resonators and Filters 336
8.3 Superconducting Microwave Sources 3

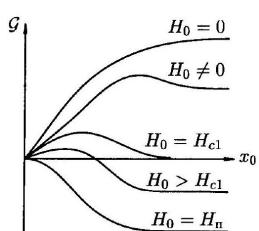
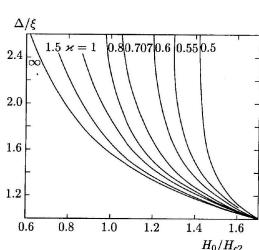
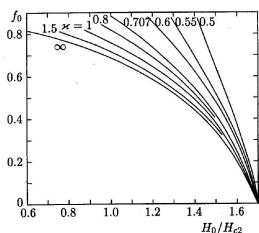
4 Plots for main properties

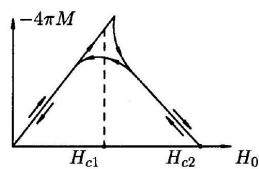
1



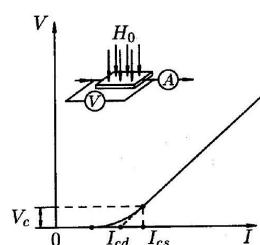
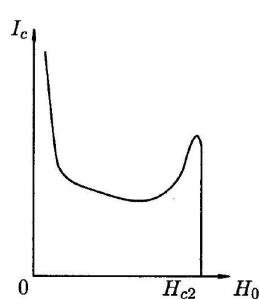
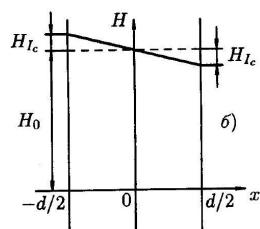
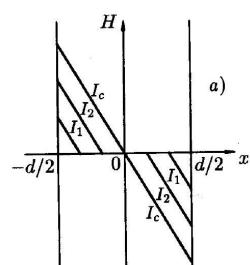
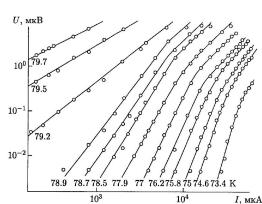
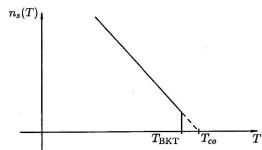
Other plots

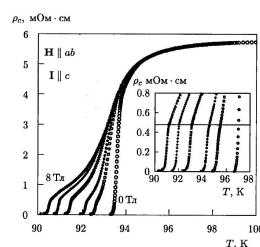
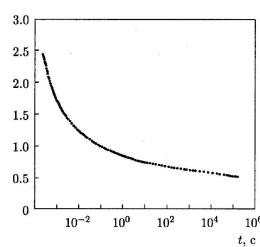
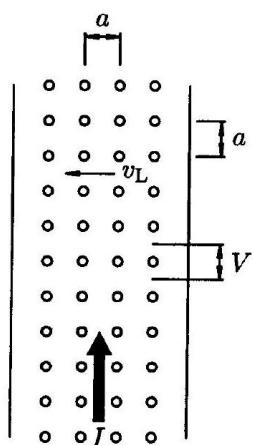
6



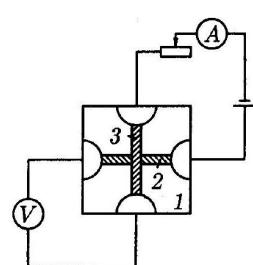
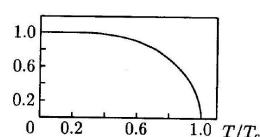
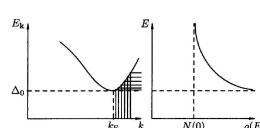


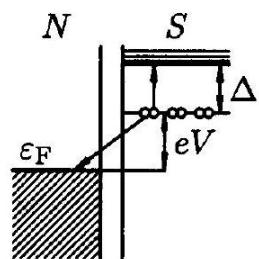
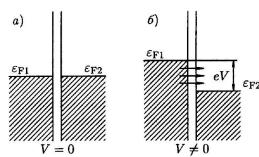
7





9





Part II

Fundamentals of Superconductivity

5 Теория сверхпроводимости по Шмидту

5.1 ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

5.1.1 5. Уравнения Лондонов

Для того чтобы понять, как ведет себя сверхпроводник, помещенный во внешнее электромагнитное поле, воспользуемся так называемой двухжидкостной моделью. Будем считать, что все свободные электроны сверхпроводника разделены на два коллектива: сверхпроводящие с плотностью n_s и нормальные с плотностью n_n . Плотность свободных электронов $n = n_s + n_n$. При изменении температуры от 0 до T_c величина n_s меняется от n до 0.

Начнем систематическое изучение свойств сверхпроводников в электромагнитном поле с самого простого случая. Мы предполагаем, что напряженности электрического и магнитного полей столь малы, что они не оказывают заметного влияния на плотность сверхпроводящих электронов, кроме того, предполагаем, что плотность n_s всюду одинакова, т. е. пренебрегаем пространственным изменением n_s .

Связь между электрическим полем, магнитным полем и током в этом случае линейная и дается уравнениями Ф. и Г. Лондонов [21].

5.1. Первое уравнение Лондонов.

Запишем уравнение движения для единичного объема сверхпроводящих электронов, находящихся в электрическом поле:

$$n_s m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = n_s e \mathbf{E} \quad (5.1)$$

где m - масса электрона, e - его заряд, \mathbf{v}_s - сверхтекущая скорость.

Учитывая, что плотность сверхтока (часто говорят «сверхпроводящего тока») $\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s$, имеем

$$\mathbf{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \mathbf{j}_s). \quad (5.2)$$

Введено обозначение

$$\Lambda = m/n_s e^2 \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) - это просто второй закон Ньютона для сверхпроводящих электронов. Из этого уравнения следует, что в стационарном состоянии, когда $d\mathbf{j}_s/dt = 0$, электрического поля в сверхпроводниках нет. Мы здесь, правда, не учитываем возможного пространственного изменения химического потенциала сверхпроводящих электронов. Такой эффект существует, например, в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, когда через эту границу идет ток. Подробнее об этом см. главу VII.

5.2. Второе уравнение Лондонов. Сейчас будет найдена связь между сверхтоком и магнитным полем в сверхпроводнике.

Обозначим напряженность истинного, микроскопического магнитного поля в данной точке сверхпроводника $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Здесь требуется некоторое разъяснение. В главе I было

сказано, что магнитное поле в сверхпроводник первого рода не проникает, что оно там равно нулю. Сейчас мы убедимся, что это верно лишь приблизительно. На небольшую глубину от поверхности тела (порядка $500 \div 1000\text{\AA}$) магнитное поле все же проникает.

Наша задача как раз и состоит в том, чтобы выяснить, как меняется в пространстве это поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

Пусть свободная энергия сверхпроводника без магнитного поля и тока равна \mathcal{F}_{s0} . Плотность кинетической энергии сверхтока равна

$$W_{\text{кин}} = n_s m v_s^2 / 2 = m j_s^2 / 2n_s e^2 \quad (5.4)$$

Учитывая уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s \quad (5.5)$$

приводим выражение для $W_{\text{кин}}$ (5.4) к виду

$$W_{\text{кин}} = \frac{\lambda^2}{8\pi} (\text{rot } \mathbf{H})^2 \quad (5.6)$$

где введено обозначение

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \quad (5.7)$$

Плотность магнитной энергии в том же месте сверхпроводника равна, как известно, $H^2/8\pi$, поэтому свободная энергия всего сверхпроводника с учетом кинетической энергии сверхтока и энергии магнитного поля равна

$$\mathcal{F}_{sH} = \mathcal{F}_{s0} + \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2 (\text{rot } \mathbf{H})^2] dV \quad (5.8)$$

Интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника.

Решим теперь вариационную задачу: узнаем, какой вид функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ будет давать функционалу \mathcal{F}_{sH} минимальное значение. Оговоримся, что правильнее было бы ставить вопрос о минимизации свободной энергии Гиббса. Мы так и поступим при выводе уравнений Гинзбурга - Ландау (см. 14). Результат, однако, не зависит от того, какой функционал исследуется на минимум: \mathcal{F}_{sH} или \mathcal{G}_{sH} . Поэтому мы будем варьировать \mathcal{F}_{sH} , что делать проще.

Итак, дадим функции $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ малую вариацию $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Изменение \mathcal{F}_{sH} будет равно $\delta\mathcal{F}_{sH}$:

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = \frac{1}{8\pi} \int (2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2\lambda^2 \text{rot } \mathbf{H} \text{rot } \delta\mathbf{H}) dV \quad (5.9)$$

Искомая функция $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ - это такая функция, на которой \mathcal{F}_{sH} достигает минимума, т.е.

$$\delta\mathcal{F}_{sH} = 0 \quad (5.10)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \text{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] \quad (5.11)$$

преобразуем (5.9) и (5.10) к виду

$$\int [\mathbf{H} + \lambda^2 (\text{rot rot } \mathbf{H})] \delta\mathbf{H} dV - \int \text{div}[\text{rot } \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV = 0. \quad (5.12)$$

Последний интеграл, однако, равен нулю. Действительно, воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем последний интеграл к виду $\oint [\text{rot } \mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] d\mathbf{S}$, где интеграл берется по

поверхности сверхпроводника. Но поле на поверхности нам задано - это внешнее поле, поэтому там вариация $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$.

Мы пришли к уравнению $\int (\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \delta \mathbf{H} dV = 0$. При произвольной вариации $\delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ это уравнение может удовлетворяться, только если выражение в скобках равно нулю. Итак, мы получили уравнение для магнитного поля в сверхпроводнике:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (5.13)$$

Это и есть второе уравнение Лондонов. Его можно записать и под другому. Используя уравнение Максвелла (5.5) и равенство $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, легко получим из (5.13)

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{A} \quad (5.14)$$

Перейти от (5.13) к (5.14) можно только при условии, что мы выбираем так называемую лондоновскую калибровку векторного потенциала

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = 0 \quad (5.16)$$

где \mathbf{n} - вектор нормали к поверхности сверхпроводника.

Уравнение (5.15) совместно с (5.14) дает неразрывность линий сверхтока, отсутствие источников сверхтока, а (5.16) - невозможность сверхтоку течь через поверхность сверхпроводящего тела. Отсутствие внешних цепей и контактов, подводящих токи, конечно, предполагается.

Используя (5.3) и (5.7), уравнение (5.14) можно записать еще и в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{1}{c\Lambda} \mathbf{A} \quad (5.17)$$

$$\Lambda = 4\pi\lambda^2/c^2 \quad (5.18)$$

Второе уравнение Лондонов в виде (5.17) будет в дальнейшем нами часто использоваться.

5.1.2 6. Глубина проникновения магнитного поля

Исследуем с помощью уравнений Лондонов вопрос о том, как проникает магнитное поле в сверхпроводник. Рассмотрим сверхпроводящее полупространство $x > 0$. Это значит, что поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x = 0$. В направлении оси z наложено внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . Для решения этой задачи воспользуемся уравнением (5.13). Учитывая, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$, и учитывая симметрию задачи, уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2 H / dx^2 - \lambda^{-2} H = 0 \quad (6.1)$$

Границные условия задачи: $H(0) = H_0, H(\infty) = 0$. Последнее граничное условие учитывает эффект Мейсснера-Оксенфельда.

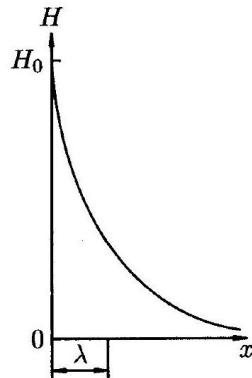
Решение этой задачи:

$$H = H_0 e^{-x/\lambda} \quad (6.2)$$

Из этого решения следует, что магнитное поле убывает в глубину сверхпроводника. Характерная длина, на которой происходит ослабление поля в раз, есть λ (рис.6.1). Это и есть физический смысл величины λ , введенной формально формулой (5.7). Эта величина называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля:

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2} \quad (6.3)$$

Рис. 6.1. Проникновение магнитного поля в массивный сверхпроводник. Поле на поверхности равно H_0 .



На такую же величину убывает и экранирующий (мейсснеровский) сверхток, текущий по поверхности. Действительно, $\mathbf{j}_s = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$, что в нашей плоской геометрии дает $j_s = (c/4\pi)dH/dx$. Подставляя сюда (6.2), получим

$$j_s = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (6.4)$$

Поскольку λ зависит от n_s , она зависит от температуры. Довольно хорошо приближением для температурной зависимости λ является эмпирическая формула

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\left(1 - (T/T_c)^4\right)^{1/2}} \quad (6.5)$$

Оценим порядок величины $\lambda(0)$. При $T = 0$ все электроны металла-сверхпроводящие, т. е. $n_s = n \simeq 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Подставляя в (6.3) это значение, а также $m \sim 10^{-27} \text{ г}, c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}/\text{с}, e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ абл. ед.}$, получим $\lambda(0) \sim 600 \text{ \AA}$.

Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Лондоновская глубина проникновения для некоторых сверхпроводников [5].

Элемент	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
$\lambda(0), \text{ \AA}$	500	1300	$380 \div 450$ (анизотропия)	640	470	390	510	920

5.1.3 7. Нелокальная электродинамика сверхпроводников

То, что говорилось до сих пор об электродинамике сверхпроводников, относилось к так называемой локальной электродинамике. Действительно, уравнение Лондонов (5.17) связывает плотность сверхтока j_s (т. е. скорость движения носителей сверхтока \mathbf{v}_s) с векторным потенциалом \mathbf{A} в этой же точке. Поэтому, строго говоря, оно применимо, только если размеры носителей сверхтока существенно меньше характерной длины, на которой происходит изменение векторного потенциала, т.е. глубины проникновения λ . Носители сверхтока - это электронные пары. Обозначим размер пары ξ_0 . Оценка по порядку величины, которую мы проведем в главе VI, покажет, что для чистых металлов $\xi_0 \sim 10^{-4} \text{ см}$. С другой стороны, глубина проникновения $\lambda \sim (10^{-5} \div 10^{-6}) \text{ см}$. Отсюда

следует, что локальная лондоновская электродинамика к чистым сверхпроводникам не применима, потому что на размере ξ_0 магнитное поле должно сильно измениться.

Поэтому локальное уравнение (5.17) должно быть заменено на нелокальное, устанавливающее связь между скоростью частицы и магнитным полем, которое сильно меняется на размере частицы ξ_0 . Такую нелокальную связь предложил Пиппарт [22] еще до появления микроскопической теории сверхпроводимости.

В общем виде нелокальная связь между \mathbf{j}_s и \mathbf{A} может быть записана в виде

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \int \hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (7.1)$$

где \hat{Q} - некоторый оператор, который, действуя на вектор \mathbf{A} , превращает его в вектор $\hat{Q}\mathbf{A}$. Радиус действия оператора $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ берется равным ξ_0 , т.е. $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ отличен от нуля только при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \lesssim \xi_0$. Так происходит усреднение действия вектора \mathbf{A} на частицу (носитель сверхтока) больших размеров. Если этот размер устремить к нулю, то \hat{Q} превратится в δ -функцию, и мы вернемся к локальной электродинамике.

Пиппарт предложил $\hat{Q}\mathbf{A}$ выбрать в виде

$$\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') = -\frac{3n_s e^2}{4\pi m c \xi_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^4} (\mathbf{A}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi_0} \quad (7.2)$$

В нелокальном случае закон проникновения магнитного поля в сверхпроводник отличается от экспоненциального, однако и в этом случае можно говорить о глубине проникновения магнитного поля, определив ее так:

$$\lambda = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty H dx \quad (7.3)$$

Здесь H_0 - поле на поверхности полубесконечного сверхпроводника. Если поле уменьшается вглубь сверхпроводника экспоненциально, то это определение λ и предыдущие (см. (6.1) и (6.2)) совпадают.

Мы не будем решать нелокальную задачу, а покажем, как можно просто получить правильный ответ по порядку величины [7]. Допустим, что истинную зависимость $H(x)$, т.е. закон проникновения магнитного поля, мы аппроксимируем экспонентой с новой глубиной проникновения. Обозначим эту глубину λ_P (пиппартовская глубина проникновения). Итак, на частицу диаметром ξ_0 векторный потенциал \mathbf{A} действует только на глубину $\lambda_P \ll \xi_0$. В результате частица участвует в создании плотности тока \mathbf{j}_s , но действие \mathbf{A} на частицу в нелокальном случае менее эффективно, ведь только доля частицы λ_P/ξ_0 "чувствует" действие вектор-потенциала \mathbf{A} . Соответственно, и плотность тока будет меньше в ξ_0/λ_P раз. Подставив этот коэффициент в формулу (5.14), получим

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \frac{\lambda_P}{\xi_0} \mathbf{A} \quad (7.4)$$

Если это уравнение записать в виде

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda_P^2} \mathbf{A} \quad (7.5)$$

мы получим, как и хотели, экспоненциальный закон спадания поля на глубине λ_P . Сравнение (7.4) и (7.5) дает $\lambda_P^2 = \lambda^2 \xi_0 / \lambda_P$, откуда оценка λ_P по порядку величины будет

$$\lambda_P \simeq (\lambda^2 \xi_0)^{1/3} \quad (7.6)$$

Величина λ здесь по-прежнему определяется формулой (5.7). Из формулы (7.6) следует, что в случае $\lambda \ll \xi_0$ имеем $\lambda_P \gg \lambda$, т. е. нелокальная электродинамика предсказывает

более глубокое проникновение магнитного поля, чем то, которое следует из локальной электродинамики. При этом, конечно, предполагается, что λ_P тоже удовлетворяет неравенству $\lambda_P \ll \xi_0$. Но так может быть не всегда даже у чистых металлов.

Типичным представителем сверхпроводников, хорошо описываемых нелокальными соотношениями (пишардовских сверхпроводников), является Al. Наоборот, даже чистый Pb является лондоновским сверхпроводником.

С приближением T к T_c все сверхпроводники становятся лондоновскими, так как λ растет при $T \rightarrow T_c$, а ξ_0 от T не зависит.

Все, что говорилось до сих пор, относится к случаю чистого металла, т. е. такого, у которого длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$. Если загрязнить металл примесными атомами, то может возникнуть ситуация, когда $l \ll \xi_0$. Такие металлы мы будем называть грязными. Сюда же относятся и сплавы. В очень грязных металлах роль размера электронной пары уже играет величина порядка $(\xi_0 l)^{1/2}$. Микроскопическая теория также показывает, что для грязных сверхпроводников глубина проникновения магнитного поля $\lambda_d \simeq \lambda (\xi_0 / l)^{1/2}$ при $l \ll \xi_0$. Таким образом, сплавы хорошо описываются локальными лондоновскими уравнениями. В дальнейшем мы будем пользоваться локальными уравнениями.

5.1.4 8. Квантовое обобщение уравнения Лондонов. Квантование магнитного потока

8.1. Квантовое обобщение уравнения Лондонов.

В главе I уже говорилось о том, что элементарным носителем сверхтока является пара электронов, куперовская пара. При этом все пары находятся на одном энергетическом уровне, в одном квантовом состоянии, образуют конденсат. Волновая функция такой конденсатной частицы может быть записана в виде $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta(\mathbf{r})}$, где θ - фаза волновой функции. В нормировке $\Psi(\mathbf{r})$ учтено, что плотность электронных пар равна $n_s/2$, где n_s - плотность сверхпроводящих электронов.

Если частица с массой $2m$ и с зарядом $2e$ движется в магнитном поле, то импульс частицы можно записать в виде

$$\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (8.1)$$

где \hbar - постоянная Планка. Действительно, в отсутствие магнитного поля плотность потока частиц $n_s \mathbf{v}_s / 2$ можно записать в виде $(i\hbar/4m)(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$. Подставляя сюда выражение $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, получим $\hbar \nabla \theta = 2m \mathbf{v}_s$. Если частица движется в магнитном поле, то полный импульс $\hbar \nabla \theta$ есть сумма $2m \mathbf{v}$ -импульса и импульса $\frac{2e}{c} \mathbf{A}$, создаваемого магнитным полем.

Используя выражение для плотности сверхтока в виде

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s \quad (8.2)$$

и формулы (5.7) и (5.18), легко получим из (8.1) следующее обобщение второго уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \quad (8.3)$$

Здесь введено обозначение $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$. Эта величина имеет размерность магнитного потока, а с ее физическим смыслом мы познакомимся в следующем пункте.

8.2. Квантование магнитного потока.

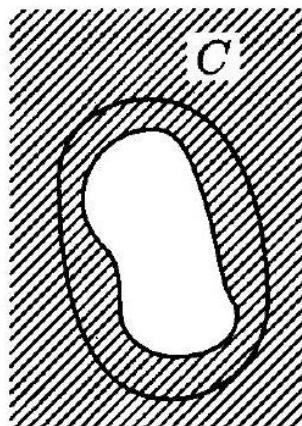
Мы переходим к изучению очень интересного (и важного для различных технических применений сверхпроводимости) явления - квантования магнитного потока в сверхпроводниках.

Рассмотрим внутри массивного сверхпроводника цилиндрическую полость (рис. 8.1). Пусть сперва $T > T_c$ и сверхпроводник находится в нормальном состоянии. Наложим внешнее поле \mathbf{H}_0 параллельно образующей полости. Понизим температуру так, чтобы сверхпроводник перешел в сверхпроводящее состояние. Теперь поле из тела сверхпроводника будет вытеснено, а в полости будет заморожен некоторый магнитный поток. Этот поток будет создаваться сверхтоком, возникающим на внутренней поверхности полости. Найдем этот замороженный магнитный поток.

Рассмотрим контур C (рис. 8.1), который охватывает полость и проходит всюду внутри сверхпроводника на расстояниях от границы полости, много больших λ . Тогда в любой точке этого контура сверхток $j_s = 0$, и контурный интеграл уравнения (8.3) по этому контуру сведется к выражению

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla\theta dl = \oint_C \mathbf{A} dl \quad (8.4)$$

Рис. 8.1. В сплошном сверхпроводнике (заштриховано) имеется цилиндрическая полость. Контур C проходит всюду внутри сверхпроводника на больших по сравнению с λ расстояниях от границы полости.



Учитывая, что

$$\oint_C \mathbf{A} dl = \Phi \quad (8.5)$$

имеем

$$\Phi = (\Phi_0/2\pi) \oint_C \nabla\theta dl \quad (8.6)$$

Здесь Φ -это полный магнитный поток, охватываемый контуром C . Отсюда сразу видно, что θ - многозначная функция; каждый раз при обходе вокруг отверстия она изменяется на некоторую величину. Но волновая функция Ψ должна быть однозначной. Поэтому мы должны потребовать, чтобы изменение θ при обходе вокруг отверстия с магнитным потоком было кратным $2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, добавление к $\theta(\mathbf{r})$ величины $2\pi n$ не изменяет функцию $\Psi(\mathbf{r}) = (n_s/2)^{1/2} e^{i\theta}$, так как $e^{i2\pi n} = 1$. Поэтому $\oint_C \nabla\theta dl = 2\pi n$, и равенство (8.6) можно написать окончательно в виде

$$\Phi = n\Phi_0 \quad (8.7)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} = \frac{hc}{2e} \quad (8.8)$$

Из формулы (8.7) следует, что магнитный поток в полости (точнее-магнитный поток, охватываемый контуром C) может

принимать только значения, кратные минимально возможному потоку Φ_0 - кванту потока. Величина Φ_0 определяется формулой (8.8) и равняется

$$\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Физически квантование магнитного потока имеет то же происхождение, что квантование орбит электронов в атоме. Нужно, чтобы волновая функция электронов, вращающихся по некоторому замкнутому контуру, имела целое число длин волн на длине этого контура.

Экспериментально квантование магнитного потока было обнаружено практически одновременно в США (Б. Дивер и В. Фербенк) [11] и в ФРГ (Р. Долл и М. Небауэр) [12] в 1961 г. Интересно отметить, что Ф. Лондон, предсказывая квантование магнитного потока, считал, что квант будет равен hc/e , т. е. предсказывал значение, в два раза большее Φ_0 . Это и понятно, он считал, что элементарный заряд носителя сверхтока равен заряду электрона e . Опыт подтвердил правильность формулы (8.8). Таким образом, результаты опытов по изучению квантования магнитного потока явились прямым доказательством того, что сверхток переносится парами электронов.

III-з.

8.1. В массивном сверхпроводнике имеется отверстие диаметром 0.1 мм, в котором захвачено 7 квантов магнитного потока. Определить напряженность магнитного поля в отверстии.

Ответ. $H = 1.84 \cdot 10^{-2}$ Э.

III-з.

8.2. В массивном сверхпроводнике имеется цилиндрическое отверстие диаметром 2 см. В нем захвачено магнитное поле с напряженностью $H = 300$ Э. Найти величину векторного потенциала A на расстоянии $R = 2$ см от центра отверстия. Найти градиент фазы $\nabla\theta$ на этом же расстоянии R .

Ответ. $A = 75 \Gamma \cdot$, $\nabla\theta = 2.36 \cdot 10^9$ рад/см.

III-з.

8.3. Рассматривается тонкая сверхпроводящая пленка толщины $d \ll \lambda$, нанесенная на поверхности диэлектрической нити. Радиус сечения нити равен R . Нить внесена в продольное магнитное поле при комнатной температуре, и затем температура нити опущена ниже T_c . После этого внешнее магнитное поле выключается. Как квантуется магнитный поток, захваченный нитью с пленкой?

Решение Поскольку $d \ll \lambda$, ток будет распределен по пленке однородно. Поэтому интегрирование выражения (8.3) по замкнутому круговому контуру радиуса R дает

$$\Phi = \Phi_0 n - \frac{2\pi mcR}{n_s e^2} j_s \quad (8.9)$$

С другой стороны, магнитное поле внутри цилиндра и ток по поверхности цилиндра связаны соотношением

$$H = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

поэтому поток внутри цилиндра $\Phi = (4\pi^2/c) j_s d R^2$. Выражая отсюда j_s и подставляя в (8.9), имеем

$$\Phi = \Phi_0 n \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd} \right)^{-1}$$

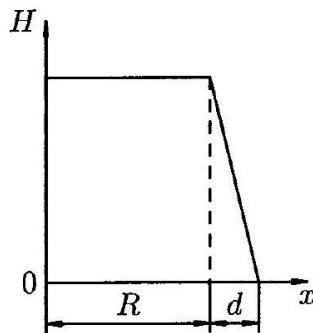
Замечание. Если $Rd \gg 2\lambda^2$, квантование магнитного потока в тонкостенном цилиндре ($d \ll \lambda$) происходит так же, как и в массивном. В остальных случаях "квант потока" меньше Φ_0 .

III-з.

8.4. Найти распределение магнитного поля в условиях предыдущей задачи.

Ответ. См. рис. 8.2.

Рис. 8.2. Распределение магнитного поля, захваченного тонкостенным сверхпроводящим цилиндром.



5.1.5 9. Распределение поля и тока в простейших конфигурациях сверхпроводников

9.1. Пластина в параллельном поле.

Переходим к рассмотрению распределения поля и тока в некоторых простых конфигурациях. Начнем со случая, когда бесконечная пластина толщины d помещена в однородное параллельное поле H_0 . Пусть плоскость $x = 0$ проходит по центру пластины, поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено вдоль оси z .

Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению (5.13). Учитывая, что по соображениям симметрии поле H внутри пластины должно быть направлено вдоль оси z и зависеть только от x , уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2 H / dx^2 - \lambda^{-2} H = 0 \quad (9.1)$$

с граничными условиями $H(\pm d/2) = H_0$.

Общее решение уравнения (9.1) имеет вид

$$H = H_1 \operatorname{ch}(x/\lambda) + H_2 \operatorname{sh}(x/\lambda) \quad (9.2)$$

где H_1 и H_2 - постоянные интегрирования. Подставляя в (9.2) граничные условия, получим и решим два алгебраических уравнения с двумя неизвестными (H_1 и H_2). В результате имеем окончательно

$$H(x) = H_0 \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)} \quad (9.3)$$

Плотность сверхтока в пластине можно найти, воспользовавшись формулой (9.3) и уравнением Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$:

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx} \quad (9.4)$$

В результате получим

$$j_s = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(d/2\lambda)} \quad (9.5)$$

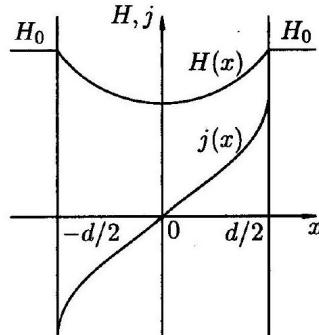
Из (9.3) и (9.5) следует, что и магнитное поле, и ток проникают в пластину только на глубину порядка λ , если пластина толстая ($d \gg \lambda$). Если же это тонкая пленка ($d \ll \lambda$), то, разлагая гиперболические функции по степеням малых параметров x/λ и $d/2\lambda$, получим в линейном приближении

$$H = H_0, \quad j_s = cH_0x/(4\pi\lambda^2).$$

Это означает, что магнитное поле полностью проникает в пленку, а плотность сверхтока - линейная функция координаты.

Распределение поля и тока в пластине при $d \sim \lambda$ показано на рис. 9.1.

Рис. 9.1. Распределение магнитного поля и тока по сечению тонкой пленки, находящейся в однородном параллельном магнитном поле.



Токи текут по краям пластины так, чтобы созданное ими магнитное поле уничтожало внешнее поле H_0 в глубине пластины.

9.2. Пластина с током.

В этом пункте рассмотрим случай, когда по бесконечной пластине течет заданный ток, а внешнее поле отсутствует. Пусть пластина будет такая же, как и в п.9.1, а заданный ток течет в направлении оси y . При этом, конечно, предполагается, что ток распределен однородно вдоль оси z , т.е. краевые эффекты не учитываются.

Итак, в единичной полосе вдоль оси z течет ток I . На поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) он создает магнитное поле $H(\pm d/2) = \mp H_I$. Подставляя эти граничные условия в общее решение (9.2), найдем поле в пластине:

$$H(x) = -H_I \frac{\operatorname{sh}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)} \quad (9.6)$$

где $H_I = 2\pi I/c$.

Снова используя уравнение Максвелла (9.4), найдем распределение тока в пластине:

$$j_s(x) = \frac{cH_I}{4\pi\lambda} \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{sh}(d/2\lambda)} \quad (9.7)$$

Из (9.6) и (9.7) следует, что и в этом случае поле и ток распределены только в поверхностном слое толщины λ , если $d \gg \lambda$. В случае же тонкой пленки ($d \ll \lambda$) ток течет по всему сечению пластины, а поле - линейная функция координат:

$$H = -H_I \cdot 2x/d, \quad j_s = \frac{cH_I}{2\pi d} = \frac{I}{d}$$

Напомним, что однородный ток в бесконечной пластине создает вне этой пластины неубывающее однородное магнитное поле. Распределение тока и поля в пластине с током показано на рис. 9.2.

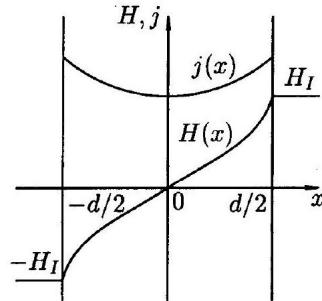


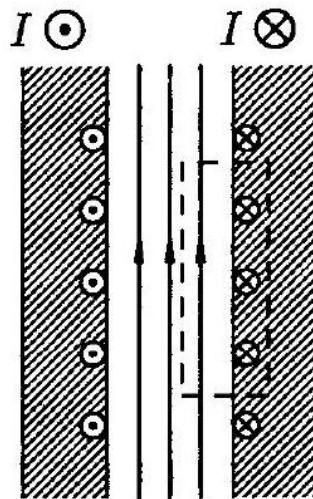
Рис. 9.2. Распределение магнитного поля и тока в тонкой пленке с заданным током.

9.3. Пластина с током в однородном поперечном магнитном поле.

Пусть пластина находится в однородном внешнем магнитном поле \mathbf{H}_0 , направленном вдоль оси z , как в п. 9.1, и по пластине течет ток в направлении оси y , который однородно распределен вдоль оси z , как в п. 9.2. Полный ток через поперечное сечение единичной высоты равен I , он создает на поверхностях пластины ($x = \pm d/2$) поле $\mp H_I$. Такая суперпозиция условий двух предыдущих задач, в силу линейности уравнений Лондонов, должна привести к суперпозиции их решений.

Рассмотрим частный случай, когда $H_I = H_0$. Это значит, что внешнее поле H_0 будет полностью компенсировать поле тока с одной стороны пластины и удваивать его с другой стороны, что приведет к тому, что ток I теперь будет течь только по одной стороне пластины. Такую ситуацию можно реализовать, создав внешнее поле H_0 посредством второй пластины с таким же током I , но противоположно направленным (рис. 9.3). Поле $H = 2H_0$ между пластинами равно ¹⁾ $H = (4\pi/c)I$. Можно считать, что это поле создано обоими токами. Ток I левой пластины создает всюду правее от пластины однородное поле $H_I = 2\pi I/c$, направленное вверх, и такое же поле левее пластины, направленное вниз. Ток правой пластины, наоборот, создает поле H_I , направленное вниз справа от этой пластины и вверх слева от нее. Сложение этих полей приводит к полной компенсации полей справа и слева от пары пластин и к удвоению поля в промежутке между пластинами.

Рис. 9.3. Если в параллельных сверхпроводящих пластинах текут равные и противоположные токи, то магнитное поле этих токов будет «заперто» между пластинами.



9.4. Пленка над экраном.

В этом пункте мы рассмотрим очень важный для практики случай: пленка над полубесконечным сверхпроводящим пространством (экраном). Чтобы найти, как распределяется поле в такой системе, когда по пленке течет заданный ток, рассмотрим совсем простой случай.

Пусть над сверхпроводящим полупространством (экраном)

¹⁾ По теореме Стокса $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = (4\pi/c)I$, где I - полный ток, пересекающий поверхность, ограниченную контуром, по которому берется контурный интеграл. Проведя интегрирование по штриховому контуру (рис. 9.3), получим $H = (4\pi/c)I$. находится прямой проводник с током вдоль оси y на некотором расстоянии a от поверхности экрана. Каково будет магнитное поле над экраном? Если бы экрана не было, то магнитные силовые линии были бы концентрическими окружностями с центром в месте расположения проводника с током.

Поскольку силовые линии проникнуть в сверхпроводник не могут (эффект Мейсснера - Оксенфельда), ясно, что наличие экрана приведет к деформации поля.

Найдем это поле. В области $z > 0$ и вне проводника с током никаких токов нет, поэтому $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Это значит, что в этой области поле безвихревое, т.е. здесь можно ввести потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению Лапласа. С другой стороны, мы знаем, что магнитное поле на поверхности сверхпроводника всегда касательно к поверхности, т. е. $H_z(z = 0) = 0$. Это граничное условие делает решение уравнения Лапласа однозначным.

Из сказанного следует, что правильное поле в области $z > 0$ можно найти очень просто методом изображений. Это будет поле, созданное двумя прямолинейными токами, равными и противоположными, которые теперь уже текут в пространстве без экрана. Один из токов находится на расстоянии a от плоскости $z = 0$, а именно в точке $(0, a)$, а другой (изображение) - в точке $(0, -a)$. Действительно, в области $z > 0$ и вне провода с током поле по-прежнему удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, а граничное условие $H_z(z = 0) = 0$ выполняется благодаря симметрии задачи.

Таким образом, мы пришли к методу изображений, который сейчас применим для анализа поля, созданного сверхпроводящей пленкой, расположенной над сверхпроводящим экраном.

Итак, пусть пленка толщины $d > \lambda$ и ширины $w \gg \lambda$ расположена над сверхпроводящим полубесконечным экраном на расстоянии b от него. По пленке идет ток I . Найти распределение тока в пленке и в экране и магнитное поле между пленкой и экраном.

Воспользуемся методом изображений. Заменим действие экрана действием пленки-изображения, отстоящей от нашей пленки на расстояние $2b$. По пленке-изображению тоже течет

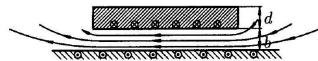


Рис. 9.4. Магнитное поле, созданное пленкой с током, расположенной над экраном.

ток, но в противоположном направлении. Таким образом, мы пришли к задаче о распределении тока и поля в случае двух параллельных пленок с противоположными токами. Эта задача была рассмотрена в п. 9.3 (рис. 9.3). Поэтому мы сразу можем дать ответ: между пленкой и экраном возникает однородное магнитное поле $H_I = \frac{4\pi}{c} I/w$. Ток I в пленке будет сосредоточен только на нижней (обращенной к экрану) стороне пленки в слое толщиной порядка λ . Поле H_I между пленкой и экраном согласуется по закону полного тока с током в экране. Этот ток сосредоточен в слое толщиной порядка λ около поверхности экрана, и поверхностная плотность его равна I/w . Направление тока в экране противоположно направлению тока в пленке. Все это схематически изображено на рис. 9.4. Краевые эффекты в этих рассуждениях не учитывались. Точный расчет с учетом краевых эффектов [23] дает распределение магнитных полей, показанное на рис. 9.5.

Полученная картина будет соответствовать действительности в том случае, если реальную пленку, играющую роль экрана, можно аппроксимировать полубесконечным экраном. Приведем пример, когда это сделать нельзя.

Пусть толстая сверхпроводящая пленка (толщина $d \gtrsim \lambda$) ширины w и длины l нанесена на стеклянную подложку, $w \ll l$. После этого пленка покрыта тонким слоем изолятора толщиной b , причем $b \ll w$, а затем нанесена другая сверхпроводящая пленка, тоже ширины w и длины намного большей l . По этой верхней пленке пропускается ток от внешнего источника. В пределах длины l обе пленки параллельны друг другу и располагаются одна над другой. Легко сообразить, что нижняя пленка никакого эффекта экранирования дать не может. Действительно, если по

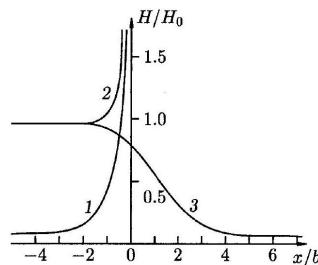


Рис. 9.5. Распределение магнитного поля вблизи края сверхпроводящей пленки с током, расположенной вблизи сверхпроводящего экрана: 1 - поле на верхней поверхности пленки, 2 - поле на нижней поверхности пленки, 3 - поле на поверхности экрана.

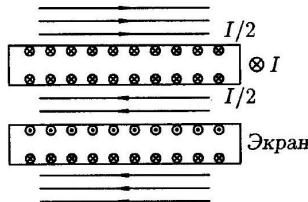
верхней пленке течет какой-то ток I , то в пространстве между пленками должно возникнуть магнитное поле. Это значит, что по нижней поверхности верхней пленки и по верхней поверхности нижней пленки должен течь одинаковый по величине поверхностный ток. Но длина нижней пленки конечна, и току, текущему по ее верхней поверхности, придется замкнуться по ее нижней поверхности (см. рис. 9.6). Это значит, что на нижней поверхности появится точно такое же поле, как и в промежутке между пленками. Более того, ток в верхней пленке разделится поровну между верхней и нижней поверхностями, как это показано на рис. 9.6. Таким образом, поле над, между и под нашей системой пленок будет такое же, как и в отсутствие нижней пленки, т. е. никакого эффекта экранирования она не создает.

9.5. Принцип замыкания.

В современной сверхпроводниковой электронике, когда создаются сложные многоплановые системы, бывает довольно затруднительно сразу сообразить, как будут течь токи по

пленкам и как будут распределены магнитные поля. Большую помощь здесь может оказать так называемый принцип замыкания [24]. Он применим к толстым пленкам, толщина которых превосходит глубину проникновения, а их длина и ширина существенно превосходят расстояния между пленками.

Рис. 9.6. Распределение поля и токов для случая двух близко и параллельно расположенных пленок. Верхняя пленка несет заданный ток I . В нижней пленке ток не задан.



Сущность принципа сводится к следующему. По двум обращенным друг к другу поверхностям пленок, разделенных тонким слоем диэлектрика, могут течь лишь равные и противоположно направленные токи (действительно, поверхностный ток определяется магнитным полем на поверхности сверхпроводника, а магнитное поле в зазоре между пленками - общее для обеих пленок). Если зазор между пленками мал, то магнитный поток в этом зазоре будет тоже мал, и, выйдя на конце пленок из зазора, он создает пренебрежимо малое магнитное поле. Поэтому, пренебрегая этим краевым эффектом, можно утверждать, что остальные части пленочной системы «не знают» о существовании этого потока и «не заметят», если он пропадет. А пропасть он может в результате замыкания, соприкосновения двух сверхпроводящих поверхностей, обращенных друг к другу и несущих противоположные и равные токи.

Итак, сформулируем принцип замыкания [24]: если закоротить (замкнуть) две обращенные друг к другу поверхности пленок в какой-либо сложной пленочной структуре, то это не повлияет на распределение токов во всех остальных участках структуры, кроме замкнутых поверхностей.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих этот принцип.

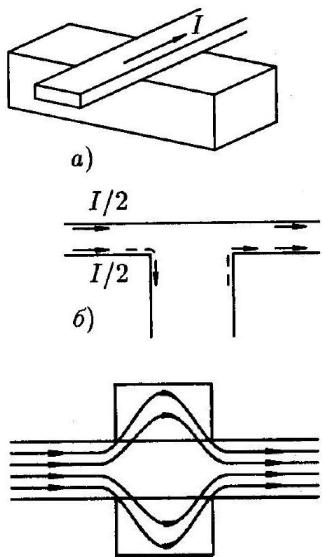
- Найдем распределение токов в двух толстых одинаковых параллельных пленках, разделенных тонким зазором, если в первой пленке задан ток I_1 , а во второй - в ту же сторону ток I_2 . Замкнем эти две пленки. Получится одна, но с полным током $I_1 + I_2$, который равномерно распределится по двум наружным поверхностям замкнутых пленок. Итак, по каждой из этих поверхностей течет ток $(I_1 + I_2)/2$. Так мы сразу нашли наружные поверхностные токи нашей пленочной системы. Обозначим теперь ток, текущий по внутренним поверхностям пленок, через i . Поскольку полный ток в первой пленке задан равным I_1 , то $(I_1 + I_2)/2 + i = I_1$, т.е. $i = (I_1 - I_2)/2$. Все поверхностные токи нашей системы теперь полностью определены.

Заметим, что если $I_2 = 0$, то мы сразу получим результат, который показан на рис. 9.6 - отсутствие экранирующего действия пленки.

- Если изолированный провод с током покрыт сверхпроводящей оболочкой, то оболочка не сможет экранировать поле тока. Действительно, замкнем внутреннюю поверхность оболочки и поверхность провода. Весь ток провода пойдет по наружной поверхности оболочки и создаст магнитное поле в окружающем пространстве.

- Найдем распределение токов в системе, образованной толстой сверхпроводящей пленкой с током, расположенной над массивным сверхпроводящим телом (рис. 9.7). В результате замыкания нижней поверхности пленки и верхней поверхности массивного бруска возникает система, распределение токов в которой мы можем нарисовать. Действительно, ток из пленки растечется по верхней поверхности сверхпроводящего бруска, но небольшая его доля пойдет вокруг бруска через его нижнюю поверхность. Плотность тока в верхней

поверхности пленки резко уменьшится. Используя этот результат, теперь можно сказать, что в исходной (незамкнутой) системе часть пленки, которая находится над бруском, будет нести заданный ток I главным образом по нижней поверхности. Такой же, но противоположно направленный ток пойдет по верхней поверхности бруска, находящейся непосредственно под пленкой. Затем этот ток растечется по верхней поверхности бруска и замкнется, а малая его часть замкнется на пути вокруг бруска.



в)

Рис. 9.7. Пленка с током отделена от плоской поверхности массивного сверхпроводника узким зазором: а) общий вид, б) вид сбоку после замыкания, в) вид в плане.

Можно сделать вывод, что роль бруска в этой схеме приближается к роли полубесконечного экрана (см. рис. 9.5).

5.1.6 10. Кинетическая индуктивность

Индуктивность какого-либо участка электрической цепи обычно определяется по величине энергии магнитного поля \mathcal{F}^M , возникающего при протекании заданного тока I по этому участку:

$$\mathcal{F}^M = \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{1}{2c^2} L^M I^2 \quad (10.1)$$

интеграл берется по всему пространству. Эту индуктивность мы будем называть магнитной, или геометрической. Но при создании в участке цепи тока I часть энергии перешла еще и в кинетическую энергию \mathcal{F}^K носителей тока (электронов). С этой энергией можно ассоциировать так называемую кинетическую индуктивность участка цепи L^K :

$$\mathcal{F}^K = \int n \frac{mv^2}{2} dV = \frac{1}{2c^2} L^K I^2 \quad (10.2)$$

здесь n - концентрация носителей тока, m - масса одного носителя, v -скорость. Интегрирование ведется по объему проводника.

В случае, когда рассматриваемый участок цепи - нормальный, вклад от кинетической индуктивности в полное сопротивление участка очень мал по сравнению с его активным сопротивлением, и им обычно пренебрегают. Учет кинетической индуктивности в нормальных проводниках может оказаться существенным при очень высоких частотах (больших 10^{13} Г

ц). Наоборот, в сверхпроводниках кинетическая индуктивность играет иногда важную роль.

Итак, плотность сверхтока $j_s = n_s e v_s$. Тогда из формулы (10.2) получим следующее определение кинетической индуктивности сверхпроводника:

$$L^K = c^2 \Lambda \int j_s^2 dV / I^2 \quad (10.3)$$

где интеграл берется по объему сверхпроводника, а I - полный ток, текущий по сверхпроводнику.

Примеры кинетической индуктивности

Проиллюстрируем понятие кинетической индуктивности на конкретных примерах.

- Рассмотрим сверхпроводник круглого сечения длины l и радиуса R . Пусть $R \gg \lambda$. Найдем кинетическую индуктивность нашего провода L^K . Если по проводу течет ток I , то он течет по поверхности провода. Плотность тока j_s на расстоянии r от центра провода равна $j_s(x) = j_{s0} e^{-x/\lambda}$, где $x = R - r$, $j_{s0} = j_s(0)$. Полный ток $I = 2\pi R \lambda j_{s0}$. Подставляя эти данные в (10.3) и проводя интегрирование, получим $L^K = l\lambda/R$.

Введем теперь очень полезное для приложений понятие - индуктивность на квадрат: L_\square . Если рассматривается плоский проводник, то индуктивность его (так же, как и сопротивление) тем больше, чем больше его длина, и тем меньше, чем больше его ширина, поэтому индуктивность квадрата всегда одна и та же для данного проводника - будь это 1 km^2 или 1 m^2 . Поскольку длина окружности поперечного сечения нашего провода равна $2\pi R$, то

кинетическая индуктивность на квадрат будет равна

$$L_\square^K = 2\pi\lambda. \quad (10.4)$$

Если воспользоваться выражением (10.1) и найти ту часть магнитной индуктивности, которая связана с магнитным полем, проникшим в сверхпроводник, т.е. в слой толщиной порядка λ у поверхности, то после элементарных расчетов получим то же самое значение:

$$L_\square^M = 2\pi\lambda. \quad (10.5)$$

Этот же результат будет справедлив и для плоской поверхности сверхпроводящего полупространства.

Полная индуктивность на квадрат λ -слоя поверхности массивного сверхпроводника равна сумме (10.4) и (10.5):

$$L_\square = 4\pi\lambda. \quad (10.6)$$

В СИ эта формула имеет вид $L_\square = \mu_0 \lambda$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/А}$. Как следует из (10.4) - (10.6), L_\square измеряется в см, а в СИ-в Гн, причем $1 \text{ см} = 10^{-9} \text{ Гн} = 1 \text{ Г}$.

Поскольку L_\square^K для полупространства зависит только от глубины проникновения, можно сказать, что λ характеризует инерциальные свойства носителей сверхтока.

Если $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, то $L_\square = 4\pi\lambda = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 6.3 \cdot 10^{-14} \text{ Г}$.

- Рассмотрим кинетическую индуктивность тонкой сверхпроводящей пленки. Пусть толщина пленки $d \ll \lambda$, и поэтому ток в пленке будет распределен по толщине однородно. По ширине пленки рассмотрим малый участок ширины w , на котором ток будем считать распределенным однородно. Ограничим длину рассматриваемого участка тоже величиной w , имеем для кинетической энергии сверхпроводящих электронов в этом участке выражение

$$\mathcal{F}_\square^K = \frac{\Lambda}{2} j_s^2 w^2 d$$

Поскольку ток I по сечению участка предполагается однородным, то $j_s = I/wd$, откуда

$$\mathcal{F}_\square^K = \frac{1}{2d} \Lambda I^2 = \frac{1}{2d} \frac{4\pi\lambda^2}{c^2} I^2 = \frac{1}{2c^2} L_\square^K I^2.$$

Из последнего равенства сразу получим выражение для L_\square^K тонкой пленки:

$$L_\square^K = 4\pi\lambda^2/d. \quad (10.7)$$

Понятно, что в случае $d \ll \lambda$ кинетическая индуктивность может стать значительной.

Так, для тонкой пленки ($d \sim 10^{-6}$ см), имеющей глубину проникновения $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см, кинетическая индуктивность на квадрат будет, согласно (10.7), равна $L_\square^K \simeq 10^{-2}$ см = 10^{-11} Гн.

- Рассмотрим, наконец, случай толстой пленки над массивным сверхпроводящим экраном. Пусть расстояние между пленкой и плоскостью экрана равно b . Если по пленке идет некоторый ток, то в зазоре между пленкой и экраном появится некоторое магнитное поле. Вычисляя энергию этого магнитного поля в зазоре, найдем вклад в индуктивность пленки от этого поля: $L_\square = 4\pi b$. Но магнитное поле будет также проникать на глубину λ_1 в пленку и на глубину λ_2 в экран. Согласно (10.6), это проникновение дает дополнительный вклад в индуктивность всей системы, так что полная индуктивность пленки над экраном равна

$$L_\square = 4\pi(b + \lambda_1 + \lambda_2). \quad (10.8)$$

Отсюда видно, что для снижения индуктивности пленки ее надо располагать как можно ближе к экрану (уменьшать b), но уменьшать b существенно меньше λ_1 или λ_2 нет смысла, так как магнитная и кинетическая индуктивности в слое порядка глубины проникновения останутся и в пленке, и в экране.

5.1.7 11. Комплексная проводимость сверхпроводника

В этом параграфе будет рассмотрена комплексная проводимость сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. При этом мы предполагаем, что длина свободного пробега электронов l невелика, т.е. справедливо приближение нормального скин-эффекта. Иными словами, l достаточно мала, а частоты не столь велики, и поэтому l меньше глубины проникновения электромагнитного поля. При этом частота соударений электронов $\tau^{-1} = v_F/l \gg \omega$, где ω - частота электромагнитной волны, v_F -скорость электронов на поверхности Ферми.

В изложении этих вопросов мы будем частично следовать книге Ван-Дузера и Тернера [25].

Для вычисления проводимости сверхпроводника в высокочастотном поле воспользуемся двухжидкостной моделью, т.е. будем считать, что существуют нормальные электроны с плотностью n_n и сверхпроводящие с плотностью n_s , причем плотность электронов проводимости $n = n_s + n_n$.

Уравнением движения для сверхпроводящих электронов является первое уравнение Лондонов (5.2)

$$\mathbf{E} = \Lambda d\mathbf{j}_s/dt \quad (11.1)$$

Для нормальных электронов можно написать

$$e\mathbf{E} - \frac{m}{n_n e} \frac{\mathbf{j}_n}{\tau} = \frac{m}{n_n e} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} \quad (11.2)$$

Здесь в левой части стоят силы, действующие на нормальные электроны: электрическое поле и усредненная "сила трения" из-за соударений, а справа - произведение массы на

ускорение. Этот второй закон Ньютона для нормального электрона можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{d\mathbf{j}_n}{dt} + \frac{n_s}{n_n} \Lambda \frac{\mathbf{j}_n}{\tau} \quad (11.3)$$

Предполагая, что $\mathbf{j}_n \propto e^{i\omega t}$, запишем (11.1) и (11.3) так:

$$\mathbf{j}_s = -i \frac{1}{\Lambda \omega} \mathbf{E} \quad (11.4)$$

$$\mathbf{j}_n = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \mathbf{E} \quad (11.5)$$

Полная плотность тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$, и мы имеем окончательно

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2, \quad (11.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (11.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\Lambda \omega} \left[1 + \frac{n_n}{n_s} \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} \right]. \quad (11.8)$$

Уравнения (11.6) - (11.8) дают комплексную проводимость сверхпроводника в высокочастотном поле.

5.1.8 12. Скин-эффект и поверхностный импеданс

12.1. Нормальный скин-эффект.

Известно, что если на поверхность нормального металла падает электромагнитная волна, то поле проникает внутрь на так называемую скин-глубину, или глубину скин-слоя. В этом пункте будет рассмотрен вопрос о проникновении поля вглубь сверхпроводника, на плоскую поверхность которого падает электромагнитная волна. Поверхность сверхпроводника совпадает с плоскостью $x = 0$.

Запишем уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (12.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.2)$$

Предполагая, что магнитное поле в сверхпроводнике $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx-\omega t)}$ и взяв еще раз ротор от правой и левой частей (12.1), получим

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (12.3)$$

Здесь мы, используя уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$, воспользовались равенством $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$. Подставляя в (12.3) $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx-\omega t)}$, получим

$$k^2 = -i \frac{4\pi}{c^2} \sigma \omega \quad (12.4)$$

откуда

$$k = (1 - i)/\delta \quad (12.5)$$

где

$$\delta = \left(\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega} \right)^{1/2} \quad (12.6)$$

В принципе поставленная задача решена. Действительно, проникновение поля определяется величиной k , которая, согласно (12.5) и (12.6), выражается через найденную проводимость σ . Проведем некоторые упрощения. Будем считать, что температура не очень близка к T_c , так что выполняется неравенство $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$. Кроме того, конечно, всегда предполагается, что $\omega\tau \ll 1$. Тогда (11.7) и (11.8) дадут

$$\sigma = \frac{n_n}{n_s} \frac{\tau}{\Lambda} - i \frac{1}{\Lambda\omega} \quad (12.7)$$

Подставив это выражение в (12.6), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\left(\frac{n_n}{n_s}\omega\tau - i \right)^{1/2}} \quad (12.8)$$

Для малых частот, когда $(n_n/n_s)(\omega\tau) \ll 1$, имеем $\delta = \sqrt{2i}\lambda = \lambda(1 + i)$. Подставляя это выражение в (12.5), получим $k = -i/\lambda$, т.е. $H \propto e^{-ikx} = e^{-x/\lambda}$, т.е., как и следовало ожидать, низкочастотное магнитное поле проникает в сверхпроводник, как и стационарное поле - на глубину проникновения λ . В общем же случае проникновение определяется формулами (12.5) и (12.8).

12.2. Поверхностный импеданс.

По определению поверхностный импеданс равен

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E}{H} \quad (12.9)$$

Это выражение имеет ясный физический смысл. Пусть на поверхности металла существуют переменные электрическое и магнитное поля, причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} касательны к поверхности и ортогональны друг к другу. Тогда $c\mathbf{H}/4\pi$ -это поверхностная плотность тока $j_{\text{пов}}$, поэтому Z в (12.9) - это отношение $E/j_{\text{пов}}$, т. е. импеданс на квадрат поверхности металла.

Найдем теперь поверхностный импеданс сверхпроводника. Записывая снова магнитное поле в виде $\mathbf{H} \propto e^{-i(kx - \omega t)}$, приведем уравнение (12.1) к виду

$$ikH = \frac{4\pi}{c} \sigma E. \quad (12.10)$$

Тогда, согласно (12.9) и (12.5),

$$Z = \frac{ik}{\sigma} = \frac{1 + i}{\sigma\delta} \quad (12.11)$$

Подставляя сюда (12.6) и (12.7), получим

$$Z = R_{\square} + iX_{L\square}, \quad (12.12)$$

$$R_{\square} = \frac{2\pi\omega^2\lambda}{c^2} \frac{n_n}{n_s} \tau, \quad (12.13)$$

$$X_{L\square} = 4\pi\lambda\omega/c^2 = \omega L_{\square}/c^2. \quad (12.14)$$

Вещественная часть импеданса R_{\square} характеризует потери энергии на нагревание, а мнимая часть $X_{L\square}$ является индуктивным сопротивлением.

Выясним, как зависят от температуры R_{\square} и $X_{L\square}$. Воспользуемся для этого эмпирической зависимостью $\lambda \propto (1 - t^4)^{-1/2}$, $t = T/T_c$. Поскольку $\lambda \propto n_s^{-1/2}$, имеем $n_s \propto (1 - t^4)$, или $n_s = n(1 - t^4)$, где n – плотность свободных электронов металла. Тогда $n_n = nt^4$, таким образом,

$$R_{\square} \propto t^4 / (1 - t^4)^{3/2}, \quad X_{L\square} \propto (1 - t^4)^{-1/2} \quad (12.15)$$

Эти формулы хорошо (по крайней мере качественно) передают температурную зависимость активной и реактивной составляющих импеданса за исключением области температур около T_c . В этой области формулы (12.13) и (12.14) уже неверны.

Действительно, при их выводе мы использовали формулу (12.7), полученную в предположении $(n_n/n_s)(\omega\tau)^2 \ll 1$, но как бы ни была мала частота, при $T \rightarrow T_c$ плотность $n_s \rightarrow 0$ и неравенство нарушается. Поэтому при $T \rightarrow T_c$ из (11.8) имеем $\sigma = (n_n/n_s)\tau/\Lambda - i(n_n/n_s)(\omega\tau)^2/\Lambda\omega$. Пренебрегая здесь мнимой частью и подставляя это выражение и (12.5) в (12.11), получим

$$Z = \frac{2\pi}{c^2} \left(2\omega\tau \frac{n_s}{n_n} \right)^{1/2} \frac{\lambda}{\tau} (1 + i) = \frac{1 + i}{\sigma_n \delta_n} \quad (12.16)$$

где σ_n и δ_n – проводимость и глубина скин-слоя нормального металла.

Из этого выражения следует, что R_{\square} и $X_{L\square}$ при $T \rightarrow T_c$ принимают одинаковое значение и теряют свою зависимость от температуры, так как $n_s^{1/2}\lambda = \text{const}$.

Зависимость R_{\square} и $X_{L\square}$ от температуры, даваемая двухжидкостной моделью, представлена на рис. 12.1.

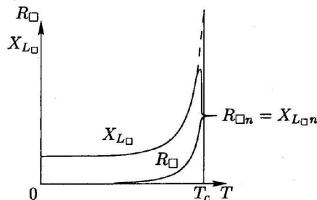


Рис. 12.1. Активная и реактивная части поверхностного импеданса в зависимости от температуры [26].

5.2 ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

5.2.1 13. Введение

В теории Лондонов (глава II) не учитывались квантовые эффекты сверхпроводимости. Теория Гинзбурга-Ландау (ГЛ) [27] стала первой квантовой феноменологической теорией сверхпроводимости.

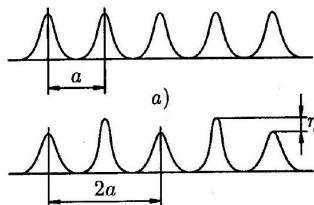
В теории должно было быть учтено то, что сверхпроводящее состояние – более упорядоченное, чем нормальное, и что переход из одного в другое (в отсутствие магнитного поля) – это фазовый переход второго рода. Отсюда следовало, что в сверхпроводнике должен существовать какой-то параметр порядка, который отличен от нуля при $T < T_c$ и обращается в нуль при $T \geq T_c$. С другой стороны, для создания квантовой теории необходимо было ввести какую-то эффективную волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$.

В. Л. Гинзбург и Л. Д. Ландау решили объединить эти две величины, решали рассматривать $\Psi(\mathbf{r})$ в качестве параметра порядка. Для этого потребовалась большая научная смелость и проникновенная физическая интуиция. В основу теории ГЛ положена разработанная Л. Д. Ландау теория фазовых переходов второго рода [28].

Согласно этой теории, фазовый переход второго рода - это такой переход, при котором состояние тела меняется непрерывно, а его симметрия - скачком. При этом низкотемпературная фаза - менее симметричная фаза, т.е. фаза, обладающая большим порядком.

К фазовым переходам второго рода относятся переходы порядок-беспорядок в некоторых сплавах, ферромагнитный переход в точке Кюри, переход гелия в сверхтекущее состояние, переход металла в сверхпроводящее состояние.

Поясним теперь, как непрерывное изменение состояния тела может сопровождаться скачкообразным изменением его симметрии. Наиболее наглядно это видно на примере следующего структурного перехода (явления упорядочения). Пусть атомы сортов A и B расположены в линейной цепочки и при достаточно высокой температуре вероятности заполнения узлов атомами A и B одинаковы (полный беспорядок, рис. 13.1, а). На рис. 13.1, б показана вероятность заполнения узлов атомами сорта A при $T < T_c$. Теперь атомы расположены в большем порядке - "через один". При прохождении через точку T_c появился и начал увеличиваться с понижением температуры параметр порядка η , а период структуры a изменился скачком при $T = T_c$ и стал равным $2a$.



б)

Рис. 13.1. Иллюстрация скачкообразного изменения симметрии при структурном фазовом переходе второго рода: а) вероятность найти атом сорта A в данной точке кристалла при $T > T_c$; б) то же при $T < T_c$.

Возвратимся к сверхпроводимости. В основе теории фазовых переходов второго рода Л. Д. Ландау лежит разложение свободной энергии по степеням параметра порядка, который мал вблизи точки перехода. Поскольку теория ГЛ основана на таком разложении, ясно, что область ее применимости ограничена близостью к критической температуре: $T_c - T \ll T_c$ ¹⁾ Более подробно область применимости теории ГЛ дана в 51 (после изложения микроскопической теории).

Итак, будем считать волновую функцию сверхпроводящих электронов $\Psi(\mathbf{r})$ параметром порядка. Более того, теперь нам понятно, как удобно выбрать нормировку этой волновой функции. Пусть $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ будет плотностью электронных куперовских пар, т.е.

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = n_s/2 \quad (13.1)$$

Рассмотрим сперва самый простой случай - однородный сверхпроводник без внешнего магнитного поля. Тогда Ψ не должна зависеть от \mathbf{r} , и разложение свободной энергии по степеням $|\Psi|^2$ вблизи T_c дает выражение

$$F_{s0} = F_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \quad (13.2)$$

Здесь F_{s0} - плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля, F_n - плотность свободной энергии тела в нормальном состоянии, α и β - некоторые феноменологические коэффициенты разложения, характеризующие материал.

Найдем то значение $|\Psi|^2$, при котором свободная энергия однородного сверхпроводника F_{s0} достигает минимума. Это значение $|\Psi_0|^2$ будет решением уравнения

$$\frac{dF_{s0}}{d|\Psi|^2} = 0$$

Подставляя сюда (13.2), после элементарных вычислений получим

$$|\Psi_0|^2 = -\alpha/\beta. \quad (13.3)$$

Подставляя (13.3) в (13.2), найдем разность

$$F_n - F_{s0} = \alpha^2/2\beta \quad (13.4)$$

Но, согласно формуле (3.5), эта разность равна $H_{cm}^2/8\pi$, откуда имеем

$$H_{cm}^2 = 4\pi\alpha^2/\beta \quad (13.5)$$

Обсудим температурную зависимость коэффициентов α и β . Поскольку при $T = T_c$ параметр порядка должен быть равен нулю, а при $T < T_c$ - отличен от нуля, из (13.3) следует, что $\alpha = 0$ при $T = T_c$ и $\alpha < 0$ при $T < T_c$. Поэтому в первом порядке по $(T_c - T)$ можно записать

$$\alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c), \quad (13.6)$$

где $\tilde{\alpha}$ не зависит от близости к T_c . Такая температурная зависимость α согласует вблизи T_c формулу (13.5) и эмпирическую формулу (1.1).

Коэффициент β положителен и от температуры не зависит. Действительно, согласно (13.3), при $T < T_c$ и $\alpha < 0$ положительное значение величины $|\Psi_0|^2$ может быть получено только при $\beta > 0$. С другой стороны, если $T > T_c$ и, согласно (13.6), $\alpha > 0$, то при $\beta > 0$ величина F_{s0} достигает минимума при $|\Psi_0|^2 = 0$, т.е., как и должно быть, сверхпроводящее состояние при $T > T_c$ отсутствует. Таким образом, при $T < T_c$ и $T > T_c$ параметр $\beta > 0$. Поэтому мы можем в первом порядке по $(T_c - T)$ приближении считать, что $\beta = \text{const}$.

5.2.2 14. Уравнения теории Гинзбурга-Ландау

14.1. Плотность свободной энергии.

Переходим теперь к рассмотрению общего случая неоднородного сверхпроводника, находящегося во внешнем магнитном поле.

Вблизи T_c разложение свободной энергии Гиббса по степеням Ψ можно записать так:

$$G_{sH} = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right|^2 + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi} \quad (14.1)$$

G_n - плотность свободной энергии сверхпроводника в нормальном состоянии, \mathbf{H}_0 - напряженность внешнего однородного магнитного поля, в котором находится сверхпроводник. Предпоследнее слагаемое в (14.1) представляет собой просто плотность магнитной энергии, где \mathbf{H} -это точное микроскопическое поле в данной точке сверхпроводника. Слагаемое с градиентным членом - это плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов. Рассмотрим это слагаемое более подробно.

Плотность кинетической энергии частицы с массой m в квантовой механике записывается в виде

¹⁾ Применимость теории ГЛ ограничена и со стороны очень малых $T - T_c$ т. наз. флюктуационными эффектами, см. 19.

$$\frac{1}{2m} | -i\hbar \nabla \Psi |^2.$$

В случае, если частица имеет заряд и движется в поле векторного потенциала \mathbf{A} , в выражении для плотности кинетической энергии оператор $-i\hbar\nabla$ надо изменить:

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} = m\mathbf{v}$$

Оператор скорости поэтому равен

$$\mathbf{v} = -(i\hbar/m)\nabla - (e/cm)\mathbf{A}$$

Поскольку в выражение для плотности кинетической энергии входит именно скорость частицы \mathbf{v} , становится понятным выражение (14.1). Остается только сказать, что в этом выражении произведена замена $e \rightarrow 2e$, поскольку элементарный заряд носителя сверхтока равен $2e$. Соответственно, под m^* в (14.1) понимается удвоенная масса свободного электрона.

14.2. Уравнения Гинзбурга - Ландау (ГЛ).

Свободная энергия Гиббса всего сверхпроводника, согласно (14.1), равна

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV \quad (14.2)$$

где интегрирование ведется по всему объему сверхпроводника. Наша задача - найти такие уравнения относительно функций $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, решения которых, будучи подставлены в (14.2), давали бы минимальное значение \mathcal{G}_{sH} .

Для решения этой вариационной задачи будем сперва считать $\Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ неизменными, а проварырем функцию $\Psi^*(\mathbf{r})$. Итак, решаем вариационную задачу

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = 0 \quad (14.3)$$

где

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \right] \quad (14.4)$$

Вынести $\delta \Psi^*$ за квадратные скобки мешает только член $i\hbar \nabla \delta \Psi^*$. Проделаем такие преобразования. Обозначим

$$\mathbf{v} = \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right)$$

Используя тождество

$$\nabla (\delta \Psi^* \mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \delta \Psi^* + \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v}$$

имеем

$$\int dV \nabla \delta \Psi^* \mathbf{v} = - \int \delta \Psi^* \nabla \mathbf{v} dV + \int \nabla (\delta \Psi^* \mathbf{v}) dV \quad (14.5)$$

Последний интеграл в этом равенстве по теореме Гаусса превращается в поверхностный интеграл:

$$\int_S \nabla (\delta\Psi^* \mathbf{v}) dV = \oint_S \delta\Psi^* \mathbf{v} dS$$

Подставляя (14.5) в (14.4), а (14.4) в (14.3), получим

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta\Psi^* + \oint_S \left[-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right] \delta\Psi^* dS = 0$$

Это выражение может быть равно нулю при произвольной функции $\delta\Psi^*$ только в том случае, если выражения в квадратных скобках равны нулю. Так мы получим первое уравнение теории ГЛ и граничное условие к нему:

$$\begin{aligned} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi &= 0 \\ \left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

где \mathbf{n} -единичный вектор, нормальный к поверхности сверхпроводника. Легко проверить, что минимизация \mathcal{G}_{sH} по Ψ даст уравнение, комплексно сопряженное уравнению (14.6). Полученное уравнение есть уравнение относительно параметра порядка Ψ . У нас осталось еще одно переменное: \mathbf{A} . Чтобы найти уравнение для \mathbf{A} , минимизируем выражение (14.2) для \mathcal{G}_{sH} по \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{A}} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left\{ \frac{1}{4m} \delta_{\mathbf{A}} \left[\left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^* \right) \times \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \right] + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{A} \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} - \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi} \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} \right\} = \\ &= \int \left\{ \frac{1}{4m} \left(-\frac{2e}{c}\Psi^* \delta\mathbf{A} \right) \left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4m} \left(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^* \right) \left(-\frac{2e}{c}\Psi \delta\mathbf{A} \right) + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} \right\} dV. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Из (14.7) следует, что вынести вариацию $\delta\mathbf{A}$ за фигурную скобку мешает член $(1/4\pi)(\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta\mathbf{A}$. Воспользовавшись тождеством

$$\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \operatorname{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] \quad (14.8)$$

проинтегрируем последнее слагаемое в (14.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dV (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0) \operatorname{rot} \delta\mathbf{A} &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \delta\mathbf{A} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi} \oint dS [\delta\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0] \end{aligned} \quad (14.9)$$

Ири этом мы воспользовались теоремой Гаусса и перешли от объемного интеграла к поверхностному:

$$\int dV \operatorname{div} [\delta\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0] = \oint dS [\delta\mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}_0]$$

Илo этот поверхностный интеграл равен нулю, так как магнитное поле на поверхности сверхпроводника задано, и поэтому $\delta\mathbf{A}|_S = 0$.

Подставляя теперь (14.9) без последнего члена в (14.7), производя элементарные преобразования и приравнивая вариацию 'вободной энергии нулю, получим

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{A}} \mathcal{G}_{sH} &= \int dV \left[\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \delta \mathbf{A} = 0 \end{aligned} \quad (14.10)$$

Этот интеграл может быть равен нулю при любой вариации $\delta \mathbf{A}$ только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Это требование определяет второе уравнение теории ГЛ относительно векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A} \quad (14.11)$$

где, согласно уравнению Максвелла, плотность тока \mathbf{j}_s в сверхпроводнике равна

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (14.12)$$

Перейдем к безразмерной волновой функции $\psi(\mathbf{r})$, обозначив

$$\psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})/\Psi_0 \quad (14.13)$$

где $\Psi_0^2 = n_s/2 = |\alpha|/\beta$.

Кроме того, введем следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|} \quad (14.14)$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|} \quad (14.15)$$

Тогда уравнения ГЛ можно записать в более компактной и удобной форме:

$$\begin{aligned} \xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= -i \frac{\Phi_0}{4\pi \lambda^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (14.17)$$

Здесь $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ – квант потока (8).

Представив волновую функцию ψ в виде $\psi = |\psi| e^{i\theta}$, второе уравнение ГЛ можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \quad (14.18)$$

Из (14.6) получим граничное условие для ψ . Если сверхпроводник граничит с вакуумом или каким-либо другим диэлектриком, таким условием будет

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n} \psi = 0 \quad (14.19)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности сверхпроводника. Легко проверить с помощью формулы (14.11), что условие (14.19) обеспечивает выполнение естественного

физического требования, чтобы сверхток через границу сверхпроводник - диэлектрик равнялся нулю. Однако этому же требованию равенства нулю нормальной компоненты сверхтока на границе удовлетворяет и более общее равенство:

$$\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \mathbf{n}\psi = ia\psi \quad (14.20)$$

где a - произвольное вещественное число. С помощью микротеории сверхпроводимости можно показать, что условие (14.20) соответствует случаю, когда сверхпроводник граничит с нормальным металлом.

14.3. Градиентная инвариантность теории ГЛ. В уравнения ГЛ входит векторный потенциал \mathbf{A} . Но хорошо известно, что выбор \mathbf{A} неоднозначен. Действительно, переход к другому полю \mathbf{A}' по формуле

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi \quad (14.21)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ - произвольная однозначная скалярная функция, не изменяет величины магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$$

так как

$$\text{rot } \nabla\varphi = 0$$

Для того чтобы результаты теоретических расчетов не зависели от того или иного выбора вектор-потенциала \mathbf{A} , т. е., иначе

говоря, были бы градиентно инвариантными, нужно, чтобы сами уравнения ГЛ удовлетворяли требованию градиентной инвариантности.

Легко проверить, что это требование выполняется в случае, если от переменных \mathbf{A} и ψ перейти к переменным \mathbf{A}' и ψ' по следующим формулам преобразования

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\varphi \quad (14.22)$$

$$\psi = \psi' \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi(\mathbf{r}) \right] \quad (14.23)$$

Проверим это для формулы (14.18).

Перейдем от \mathbf{A} и ψ к \mathbf{A}' и ψ' по формулам (14.22) и (14.23). Легко видеть, что второе уравнение ГЛ (14.18) останется неизменным:

$$\text{rot rot } \mathbf{A}' = \frac{|\psi'|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta' - \mathbf{A}' \right)$$

Аналогичным образом можно убедиться в градиентной инвариантности и первого уравнения ГЛ (14.16).

Из свойства градиентной инвариантности уравнений ГЛ следует один очень важный для будущего вывод: для односвязного сверхпроводника всегда можно выбрать такую калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , чтобы $\psi(\mathbf{r})$ была вещественной функцией. ¹⁾

Требование односвязности здесь существенно потому, что в многосвязном сверхпроводнике фаза параметра порядка θ уже не является однозначной функцией, а может меняться на величину, кратную 2π , при обходе вокруг отверстия в сверхпроводнике. Поэтому $\theta(\mathbf{r})$ становится непригодной для соответствующей калибровки \mathbf{A} .

¹⁾ Напомним, что под односвязным телом понимается такое тело, в котором можно произвольный замкнутый контур стянуть в точку, не пересекая при этом нигде границ тела. Иначе говоря, в односвязном теле нет сплюснутых отверстий. Тороид - пример двухсвязного тела.

5.2.3 15. Два характерных масштаба длины в сверхпроводниках. Эффект близости

15.1. Длина когерентности и глубина проникновения.

В предыдущем параграфе была введена чисто формально определенная величина ξ (14.14). Сейчас мы узнаем ее физический смысл.

Рассмотрим такой простой пример. На чистую плоскую поверхность сверхпроводника нанесена пленка нормального металла. Тогда локально около поверхности плотность сверхпроводящих электронов несколько понизится. Иными словами, значение параметра порядка $|\psi|$ на поверхности будет несколько отличаться от его равновесного значения в глубине сверхпроводника, где $|\psi| = 1$. Каков тот характерный масштаб длины, на котором параметр порядка восстановится до единицы?

Направим ось x перпендикулярно к поверхности сверхпроводника (на поверхности $x = 0$). Очевидно, изменение ψ может происходить только вдоль оси x , т.е. $\psi = \psi(x)$. Кроме того, поскольку мы рассматриваем односвязный сверхпроводник, можем считать ψ вещественной функцией (см. 14). Тогда первое уравнение ГЛ (14.16) примет следующий простой вид:

$$-\xi^2 d^2\psi/dx^2 - \psi + \psi^3 = 0 \quad (15.1)$$

Предположим, что слой нормального металла на поверхности такой тонкий, что значение ψ на поверхности очень мало отличается от единицы, т. е.

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \ll 1$$

Подставляя это выражение для ψ в (15.1) и оставляя только линейные по $\varepsilon(x)$ члены, получим

$$\xi^2 d^2\varepsilon(x)/dx^2 - 2\varepsilon(x) = 0 \quad (15.2)$$

Учитывая, что при $x \rightarrow \infty$ функция $\psi \rightarrow 1$, имеем $\varepsilon(\infty) = 0$. Решение уравнения (15.2) очевидно:

$$\varepsilon = \varepsilon(0)e^{-\sqrt{2}x/\xi}$$

Отсюда следует, что ξ -это и есть по порядку величины тот характерный масштаб, на котором происходит изменение параметра порядка ψ .

Эту длину называют длиной когерентности.

Другая величина, введенная в предыдущем параграфе, λ , нам уже известна (§6). Это глубина проникновения слабого магнитного поля. Она так же, как и ξ , зависит от температуры;

$$\lambda^2 = mc^2\beta / (8\pi|\alpha|e^2) \quad (15.3)$$

$$\xi^2 = \hbar^2/(4m|\alpha|) \quad (15.4)$$

поскольку вблизи T_c имеем $|\alpha| \propto (T_c - T)$. Таким образом, вблизи T_c

$$\lambda \propto (T_c - T)^{-1/2}, \quad \xi \propto (T_c - T)^{-1/2} \quad (15.5)$$

Во всем диапазоне температур $\lambda(T)$, как правило, хорошо аппроксимируется формулой (6.5). Значения $\lambda(0)$ для некоторых сверхпроводников были приведены в таблице 6.1. Используя нормировку (13.1) и формулу (13.3), убеждаемся, что глубина проникновения (15.3) совпадает с глубиной проникновения, введенной в (5.7).

С помощью $\lambda(T)$ и $\xi(T)$ можно ввести очень важную величину - параметр теории Гинзбурга-Ландау \varkappa :

$$\varkappa = \lambda/\xi \quad (15.6)$$

Используя формулы (15.3), (15.4) и (15.6), получим другое выражение для \varkappa :

$$\varkappa = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} \lambda^2 H_{cm}. \quad (15.7)$$

С помощью выражения для кванта магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c /$ легко получим отсюда очень полезную формулу:

$$\sqrt{2}H_{cm} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda\xi}. \quad (15.8)$$

Обсудим в заключение вопрос о влиянии магнитного поля на параметр порядка и на глубину проникновения.

Пусть $\varkappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Сверхпроводящий образец занимает полупространство $x > 0$, а внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z . Поскольку по предположению $\lambda \ll \xi$, магнитное поле проникает в образец лишь на небольшую по сравнению с ξ глубину. Это значит, что параметр порядка Ψ оказывается под воздействием магнитного поля лишь на глубине λ , а существенно измениться он может только на расстоянии ξ . Поэтому на основной части длины когерентности параметр порядка "не знает" о существовании магнитного поля и близок к $\Psi_0 = (|\alpha|/\beta)^{1/2}$. Следовательно, мы можем заключить, что в случае $\varkappa \ll 1$ параметр порядка мало изменяется магнитным полем.

Отсюда сразу же следует, что и глубина проникновения магнитного поля, которая зависит от $|\Psi|^2$, тоже мало изменяется магнитным полем. Точный расчет показывает, что уменьшение модуля параметра порядка ψ вблизи поверхности образца во внешнем магнитном поле H_0 происходит на величину [27]

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \varkappa \frac{H_0^2}{H_{cm}^2}$$

Влияние внешнего магнитного поля на параметр порядка в случае $\lambda \gg \xi$ оказывается значительно более сильным и приводит ко многим интересным и качественно новым эффектам. Об этом мы будем подробно говорить в будущем.

III-з.

15.1. Свинцовый цилиндр находится при температуре 4.2 К в однородном магнитном поле, параллельном его оси. Поле на поверхности цилиндра равно $H_0 = 300 \text{ Э}$. Найти плотность w магнитной энергии в свинце на расстоянии $x = 300 \text{ \AA}$ от поверхности цилиндра. (Диаметр цилиндра много больше глубины проникновения слабого магнитного поля.)

Решение Если $\lambda(0) = 390 \text{ \AA}$, то $\lambda(4.2 \text{ К}) = 415 \text{ \AA}$. Магнитное поле на расстоянии 300 \AA от поверхности будет равно $H = H_0 e^{-x/\lambda} = 145.6 \text{ Э}$. Тогда $w = H^2/8\pi = 844 \text{ эрг}/\text{cm}^3$.

III-з.

15.2. Критическая температура свинца равна 7.18 К. Во сколько раз глубина проникновения λ при $T = 7.10$ К больше, чем глубина проникновения при $T = 4.2$ К? Оценить плотность сверхпроводящих электронов при $T = 7.10$ К.

$$\text{Омсем. } \lambda(7.10 \text{ K})/\lambda(4.2 \text{ K}) = 4.49; n_s(7.10 \text{ K}) = 8.06 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}.$$

15.2. Эффект близости.

Очень ярко проявляется роль длины когерентности в случае хорошего контакта между нормальным металлом N и сверхпроводником S . Куперовские пары могут проникать из S в N и некоторое время там жить. Это приводит к тому, что какой-то слой нормального металла вблизи границы SN станет сверхпроводящим. Но проникновение пар из S в N приведет к уменьшению их плотности в S , т.е. параметр порядка ψ в сверхпроводнике вблизи NS -границы будет меньше единицы даже в отсутствие магнитного поля.

Это явление называется эффектом близости.

Рассмотрим наиболее простой случай. Пусть хороший контакт осуществлен между двумя сверхпроводниками, критические температуры которых (T_{cn} и T_{cs}) слегка различны: $T_{cs} > T_{cn}$, $T_{cs} - T_{cn} \ll T_{cn}$. Температура образца T выбрана такой, что выполняется неравенство $T_{cn} < T < T_{cs}$, т.е. материал с критической температурой T_{cn} находится в нормальном состоянии. Плоская граница между двумя материалами совпадает с плоскостью $x = 0$. Сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, нормальный металл - соответственно, $x < 0$.

Поведение параметра порядка в S -области ($x > 0$) можно определить, решив первое уравнение ГЛ (14.16) в форме (15.1). Это уравнение интегрируется точно. Действительно, его первый интеграл имеет вид

$$-\xi^2(d\psi/dx)^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 = C \quad (15.9)$$

где C - константа интегрирования. Поскольку при $x \rightarrow \infty$ имеем $(d\psi/dx) \rightarrow 0, \psi \rightarrow 1$, то $C = -1/2$. Подставляя это значение C в (15.9) и интегрируя, получим

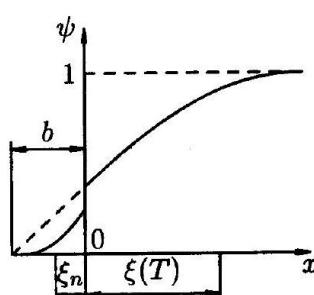
$$\psi = \operatorname{th} \left[(x - x_0) / \sqrt{2}\xi \right] \quad (15.10)$$

Здесь x_0 - константа интегрирования, которая должна быть определена из граничного условия при $x = 0$. Это условие (14.20) в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{b} \quad (15.11)$$

Величина b в общем случае должна быть вычислена с помощью микроскопической теории. Ее геометрический смысл ясен из рис. 15.1.

Рис. 15.1. Параметр порядка $\psi(x)$ вблизи границы между сверхпроводником ($x > 0$) и нормальным металлом ($x < 0$).



Подставив (15.10) в (15.11), найдем связь между константой интегрирования x_0 и величиной b :

$$-\operatorname{sh}\left(\sqrt{2}x_0/\xi\right) = \sqrt{2}b/\xi$$

Рассмотрим теперь поведение параметра порядка ψ в нормальной области ($x < 0$). Здесь мы тоже можем использовать (см., например, [29]) первое уравнение ГЛ. Действительно, согласно (13.6), коэффициент $\alpha_n \propto (T - T_{cn})$, т. е. $\alpha_n < 0$ при $T < T_{cn}$ и $'x_n > 0$ при $T > T_{cn}$. Поэтому первое уравнение (14.6) в нашем случае для N -области и при условии $(T - T_{cn}) \ll T_{cn}$ будет иметь вид

$$-\xi_n^2 \left(d^2\psi/dx^2 \right) + \psi + \psi^3 = 0$$

где $\xi_n^2 = \hbar^2/4m\alpha_n$.

Параметр порядка в нормальной области мал ($\psi \ll 1$), поэтому можно пренебречь кубическим членом. В результате имеем

$$-\xi_n^2 \left(d^2\psi/dx^2 \right) + \psi = 0$$

Решение этого уравнения при условии $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ будет

$$\psi = \psi_0 e^{-|x|/\xi_n} \quad (15.12)$$

Отсюда следует, что параметр порядка, экспоненциально затухая, проникает в N -область на глубину ξ_n . Поскольку T_{cn} и T_{cs} близки, можно считать ψ и $d\psi/dx$ непрерывными на NS -границе. Тогда из (15.12) имеем $b = \xi_n$.

В общем случае контакта сверхпроводника с истинно нормальным металлом ($T_{cn} = 0$) применять уравнения ГЛ в нормальной области уже нельзя. Тем не менее, качественно явление сохраняется: параметр порядка проникает на некоторую глубину ξ_n в нормальную область.

Расчет с использованием методов микроскопической теории сверхпроводимости дает следующие результаты [30].

В чистом N -металле, т.е. когда длина свободного пробега электрона $l_n \gg \xi_n$, длина когерентности будет равна

$$\xi_n = \frac{\hbar v_{F_n}}{2\pi k_B T} \quad (15.13)$$

где v_{F_n} - скорость электрона на поверхности Ферми, k_B - постоянная Больцмана. При этом, однако, надо иметь в виду, что при $T \rightarrow 0$ затухание параметра порядка в глубину N -области становится не экспоненциальным, а значительно более медленным.

В «грязном» N -металле ($l_n \ll \xi_n$) длина когерентности будет

$$\xi_n = \left(\frac{\hbar v_{F_n} l_n}{6\pi k_B T} \right)^{1/2} \quad (15.14)$$

Оценки по этим формулам дают для ξ_n значения в области ($10^{-5} \div 10^{-4}$) см.

Поведение параметра порядка ψ в общем случае изображено на рис. 15.1. Величина b , согласно [31], в «грязном» случае равна

$$b = \frac{\sigma_s}{\alpha \sigma_n} \xi_n, \quad (15.15)$$

где $\sigma_{s,n}$ -проводимости S - и N -областей, ξ_n определяется формулой (15.14), коэффициент α имеет порядок единицы. Точные значения α для разных ситуаций даны в [31].

Существование эффекта близости надежно подтверждено экспериментом.

Если на поверхность нормального металла нанести пленку сверхпроводника, то ее критическая температура понизится. Так, в работе [32] была исследована система из пленки Al (толщина 4400 Å, $T_c = 1.2$ К), покрытой пленкой Pb. При толщине свинцовой пленки $d(\text{Pb}) = 900\text{\AA}$ критическая температура системы T_c близка к критической температуре массивного свинца (7.2 К), но при $d(\text{Pb}) = 600\text{\AA}$ величина T_c уже становится равной примерно 5.6 К, а при $d(\text{Pb}) = 200\text{\AA}$: $T_c = 1.6$ К, т. е. приближается к критической температуре алюминия.

Эффект близости используется для создания джозефсоновских переходов типа SNS , когда фазовая когерентность между (:верхпроводящими) электродами устанавливается через нормальную прослойку, которая может быть достаточно толстой (порядка 1 мкм).

5.2.4 16. Энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами

Мы уже знаем, что сверхпроводники первого и второго рода могут совершенно по-разному реагировать на внешнее магнитное поле. Это происходит потому, что энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами σ_{ns} у сверхпроводников первого рода положительна, а у сверхпроводников второго рода отрицательна. Теперь мы можем понять причину этого. Оказывается, что в первом случае $\lambda < \xi$, а во втором случае $\lambda > \xi$. Более точно граница между сверхпроводниками первого и второго рода будет определена ниже. Начнем со сверхпроводника первого рода.

Итак, рассматривается плоская NS -граница сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии. Пусть далеко слева от этой границы наблюдается чисто сверхпроводящее состояние, а далеко справа - нормальное. Граница расположена перпендикулярно оси x , магнитное поле приложено параллельно оси z . Несколько мы рассматриваем левое сверхпроводящее полупространство, т.е. односвязный сверхпроводник, всегда можно выбрать так калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , что волновая функция теории ГЛ будет вещественной. Кроме того, в силу простой геометрии задачи, все переменные будут зависеть только от x , а вектор \mathbf{A} можно считать параллельным оси y . Начало координат $x = 0$ выбрано в области границы.

Итак, формулируем исходные данные: $\mathbf{H} = (0, 0, H(x))$, $\psi = \psi(x)$ - вещественная функция, $\mathbf{A} = (0, A(x), 0)$.

Учитывая это, исходные уравнения ГЛ (14.16) и (14.18) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} -\xi^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0} \right)^2 A^2 \psi - \psi + \psi^3 &= 0 \\ d^2 A / dx^2 &= (\psi^2 / \lambda^2) A \end{aligned} \quad (16.1)$$

Легко проверить, что первый интеграл этих уравнений будет

$$\left[1 - \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 \right] \psi^2 - \frac{1}{2} \psi^4 + \left(\frac{2\pi\lambda\xi}{\Phi_0} \right)^2 \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = C \quad (16.2)$$

где C - постоянная интегрирования. Ее мы легко найдем из граничных условий: при $x \rightarrow -\infty$ имеем $\psi \rightarrow 1$, $d\psi/dx \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$.

Действительно, далеко слева, т. е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле будет отсутствовать и волновая функция теории ГЛ будет стремиться к единице. Подставляя эти граничные условия в (16.2), получим $C = 1/2$. Отсюда, используя (15.8), окончательно имеем

$$\left[\left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 - 1 \right] \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 = \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H^2}{2H_{cm}^2} - \frac{1}{2}. \quad (16.3)$$

После такой предварительной подготовки перейдем непосредственно к вычислению энергии границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами, приходящейся на единицу площади. Но сперва немного физики. Когда мы будем рассматривать сверхпроводящий участок, надо будет точно определить, в каком внешнем магнитном поле он находится. Он является сверхпроводящим участком образца, находящегося в промежуточном состоянии. Следовательно, рядом с ним находится нормальный участок, по которому проходит магнитное поле напряженностью H_{cm} . Напоминаем, что именно эта напряженность автоматически устанавливается в нормальных частях сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии.

Итак, внешнее поле по отношению к сверхпроводящему участку будет всегда равно H_{cm} . Запишем теперь плотность гиббсовской свободной энергии сверхпроводящего участка где-то далеко лева от NS -границы. Согласно формуле (3.15), имеем

$$G_s = F_{s0} - HH_{cm}/4\pi$$

Поскольку далеко слева от NS -границы $H = 0$, имеем $G_s = F_{s0}$, где F_{s0} - плотность свободной энергии сверхпроводника в отсутствие магнитного поля. Далеко справа от NS -границы, т.е. в нормальном металле, где существует поле H_{cm} , плотность свободной энергии будет равна

$$F = F_n + H_{cm}^2/8\pi,$$

где второе слагаемое просто дает плотность энергии магнитного поля.

Отсюда плотность гиббсовской свободной энергии в нормальном слое будет

$$G_n = F - HH_{cm}/4\pi = F_n + H_{cm}^2/8\pi - H_{cm}^2/4\pi = F_n - H_{cm}^2/8\pi = F_{s0}. \quad (16.4)$$

Здесь мы воспользовались условием, что в нормальном слое $H = H_{cm}$, и известным соотношением между F_n и F_{s0} (3.5):

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi.$$

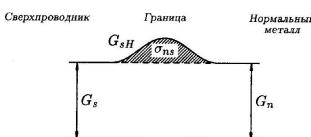


Рис. 16.1. Плотность гиббсовской свободной энергии сверхпроводника G_{sH} в области границы между нормальной и сверхпроводящей фазами.

Таким образом, мы пришли к тому результату, который и следовало ожидать: в условиях равновесия плотность гиббсовской свободной энергии далеко слева от границы равна соответствующей плотности далеко справа от границы.

А что же будет в области границы?

Схематический чертеж на рис. 16.1 дает ответ на этот вопрос.

Плотность гиббсовской свободной энергии может здесь отличаться от уровня G_n . Естественно тогда поверхностную энергию границы раздела σ_{ns} определить так:

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_{sH} - G_n) dx \quad (16.5)$$

где

$$G_{sH} = F_{sH} - HH_{cm}/4\pi \quad (16.6)$$

$$F_{sH} = F + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}\psi \right|^2 \right] + \frac{H^2}{8\pi} \quad (16.7)$$

$$G_n = F_n - H_{cm}^2/8\pi \quad (16.8)$$

Формула (16.6) следует из общей формулы для гиббсовской свободной энергии (\mathbf{H} - напряженность магнитного поля в сверхпроводнике), формула (16.7) является основой для построения теории ГЛ, легко получается из (14.1), формула (16.8) получена ранее (см. (16.4)).

Подставляя (16.6) - (16.8) в (16.5), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi^2 \left| i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}\psi \right|^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right\} dx \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{A} = (0, A, 0)$, а ψ -вещественная функция, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[-\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 + \xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{2\pi\xi A}{\Phi_0} \right)^2 \psi^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{HH_{cm}}{4\pi} + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \right\} dx \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь формулой (16.3) и получим окончательно

$$\sigma_{ns} = \frac{H_{cm}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi^2 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{H(H - H_{cm})}{2H_{cm}^2} \right] dx. \quad (16.9)$$

Проанализируем полученный результат. Прежде всего, отметим, что поле, проникшее в сверхпроводящую область, всегда меньше поля на ее границе, т.е. поля H_{cm} , поэтому второе слагаемое в квадратных скобках всегда отрицательно.

Теперь понятно, что в теории Лондонов $\sigma_{ns} < 0$, так как там не учитываются квантовые эффекты и слагаемое $\xi^2(d\psi/dx)^2$ отсутствует.

Из (16.9) следует также, что теория ГЛ снимает эту трудность теории Лондонов. Учет квантовых эффектов приводит к появлению положительного слагаемого $\xi^2(d\psi/dx)^2$, которое может обеспечить положительность энергии σ_{ns} .

Проведем теперь некоторые оценки. В области перехода от N к S -фазе параметр порядка меняется от нуля до единицы. Это изменение происходит на расстоянии порядка длины когерентности ξ . Поэтому $d\psi/dx \sim 1/\xi$ и $\xi^2(d\psi/dx)^2 \sim 1$. Это слагаемое отлично от нуля в области границы на длине $x \sim \xi$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2(d\psi/dx)^2 dx \sim \xi \quad (16.10)$$

Слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ в области перехода достигает значения порядка -1 и обращается в нуль как в S -, так и в N -фазе. Область, где это слагаемое отлично от нуля, простирается на расстояние порядка глубины проникновения магнитного поля λ . Поэтому вклад этого слагаемого в интеграл в (16.9) будет порядка $-\lambda$.

Рассмотрим два предельных случая.

- Случай $\kappa \ll 1$, т. е. $\lambda \ll \xi$. Тогда, согласно (16.10), главный вклад в интеграл (16.9) дает градиентный член и

$$\sigma_{ns} \sim H_{cm}^2 \xi > 0.$$

Точный расчет интеграла (16.9) по теории ГЛ дает

$$\sigma_{ns} = 1.89 \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \xi \quad (16.11)$$

- Случай $\kappa \gg 1$, т.е. $\lambda \gg \xi$. Тогда главный вклад в интеграл (16.9) дает слагаемое $H(H - H_{cm})/2H_{cm}^2$ и энергия границы будет

$$\sigma_{ns} \sim -H_{cm}^2 \lambda.$$

Точный расчет дает

$$\sigma_{ns} = -\frac{H_{cm}^2}{8\pi} \lambda \quad (16.12)$$

Теперь займемся физической интерпретацией полученных результатов.

- Случай $\kappa \ll 1, \lambda \ll \xi$. На рис. 16.2 показано изменение параметра порядка ψ в области $NS-границы и изменение магнитного поля. Первое происходит на расстоянии ξ , а второе на расстоянии λ . В этом случае возникает область толщиной порядка ξ , где параметр порядка уже достаточно мал, а магнитное поле отсутствует. Этот участок пользуется "привилегиями" сверхпроводника - свободен от магнитного поля, но по сравнению со сверхпроводником имеет очень малый параметр порядка, что должно увеличить энергию этого участка по сравнению с юлее далекими влево участками сверхпроводника. Другими словами, энергия этого участка больше энергии сверхпроводящих участков на ту величину энергии, которую нужно было затратить, чтобы разорвать электронные (куперовские) пары в этой области и, тем самым, понизить величину параметра порядка ψ . | Плотность этой энергии равна $H_{cm}^2/8\pi$, а энергия участка имеет величину порядка $H_{cm}^2 \xi / 8\pi$, что хорошо согласуется с формулой (16.11).$

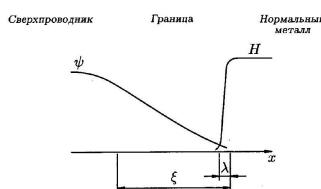


Рис. 16.2. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области NS -границы для случая $\kappa \ll 1$.

Немного по-другому это можно объяснить так. Для образования области с малой величиной ψ (т.е. близкой по энергии к "энергии нормального металла") и свободной от магнитного поля

нужно было совершить работу по удалению магнитного поля из этой области. Для этого надо было преодолеть давление магнитного поля $H_{cm}^2/8\pi$ и отодвинуть его границу вправо на расстояние ξ . При этом была совершена работа $(H_{cm}^2/8\pi) \xi$.

- Случай $\kappa \gg 1, \lambda \gg \xi$. Функции $\psi(x)$ и $H(x)$ для этого случая показаны на рис. 16.3. Теперь ψ изменяется значительно быстрее, чем магнитное поле, и возникает область толщиной порядка λ , в которой еще сохраняется и сравнительно высокое магнитное поле, и величина $\psi \sim 1$. Присутствие магнитного поля заставляет сравнивать этот участок с нормальным металлом. В отличие от последнего, электроны в нем соединены в куперовские

пары ($\psi \sim 1$) и поэтому его энергия меньше энергии правой нормальной области на эту энергию конденсации. Поскольку размер этой области порядка λ , а плотность энергии конденсации равна $H_{cm}^2/8\pi$, ясно, что $\sigma_{ns} \sim -(H_{cm}^2/8\pi) \lambda$.

Посмотрев с другой точки зрения, можно сказать, что в случае $\kappa \gg 1$ в области NS -границы существует область толщиной порядка λ с $\psi \sim 1$, в которую проникло магнитное поле. Это значит, что энергия всей системы уменьшилась на величину работы, которая была совершена при продвижении поля H_{cm} на расстояние λ .



Рис. 16.3. Пространственное изменение параметра порядка ψ и магнитного поля H в области NS -границы для случая $\kappa \gg 1$.

Итак, подведем итог.

Если $\kappa \ll 1$, то $\sigma_{ns} > 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками первого рода (СП1).

Если $\kappa \gg 1$, то $\sigma_{ns} < 0$. Такие материалы называются сверхпроводниками второго рода (СП2).

Ясно, что при каком-то значении $\kappa \sim 1$ энергия σ_{ns} должна обратиться в нуль. Точный расчет показывает, что это произойдет при $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

Таким образом:

СП1	СП2
$\kappa < 1/\sqrt{2}$	$\kappa > 1/\sqrt{2}$
$\sigma_{ns} > 0$	$\sigma_{ns} < 0$

III-з.

16.1. Сверхпроводящее олово при $T = 0.9T_c$ имеет $\lambda = 8.70 \times 10^{-6}$ см и $\xi = 4.35 \cdot 10^{-5}$ см. Найти энергию границы раздела нормальной и сверхпроводящей фаз σ_{ns} .

Решение Поскольку $\lambda \ll \xi$, используем формулу (16.11). Находя H_{cm} из формулы (15.8) и подставляя в (16.11), получим $\sigma_{ns} = 1.24 \cdot 10^{-2}$ эрг/см².

5.2.5 17. Критическое поле тонкой пленки

Тонкая сверхпроводящая пленка, толщина которой меньше глубины проникновения, может сохранить сверхпроводимость "параллельном ей магнитном поле, даже если величина этого поля существенно больше H_{cm} . Магнитное поле, при котором ее сверхпроводимость пропадает, обозначим H_K .

Рис. 17.1. Схема эксперимента по измерению критического магнитного поля пленки.

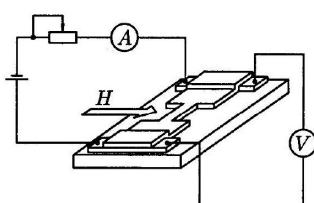


Схема эксперимента представлена на рис. 17.1. На чистую поверхность стеклянной пластиинки производится вакуумное распыление исследуемого материала. Затем к пленке подсоединяются токовые и потенциометрические провода измерительной схемы. Приготовленный так образец помещается в криостат и ориентируется так, чтобы внешнее магнитное поле было параллельно поверхности образца. Увеличивая внешнее магнитное поле, регистрируют момент появления сопротивления пленки. Это и будет критическое поле пленки. На рис. 17.2 приведены результаты эксперимента. Из вышеизложенного (3) нам уже известно, что массивный сверхпроводник во внешнем магнитном поле, равном H_{cm} , совершают фазовый переход первого рода. Действительно, на толстых пленках, согласно рис. 17.2, обнаружено явление переохлаждения. Это означает, что если пленка была помещена в достаточно сильное магнитное поле так, что она находилась в нормальном состоянии, то при уменьшении поля переход в сверхпроводящее состояние при поле, соответствующем равенству свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз, может не произойти. Он может задержаться до более слабых полей - полей переохлаждения. Эти поля на рис. 17.2 указаны штриховой линией.

Итак, мы видим, что с уменьшением толщины пленки переохлаждение становится все слабее, и, начиная с некоторой толщины, явление переохлаждения пропадает. Естественно предположить, что переход пленок этой и меньшей толщины в сверхпроводящее состояние - фазовый переход второго рода.

Пусть толщина пленки $d \ll \xi, \lambda$. Это значит, что изменением величины ψ пленки можно пренебречь, а поле можно считать почти полностью проникшим в пленку. Мы предполагаем, что поверхности пленки совпадают с поверхностями $x = \pm d/2$. Поскольку пленка - тело односвязное, мы выбираем такую калибровку вектор-потенциала \mathbf{A} , чтобы ψ была вещественным числом. Учитывая все это, запишем первое уравнение ГЛ в следующем виде:

$$-\left(1 - (2\pi\xi A/\Phi_0)^2\right)\psi + \psi^3 = 0 \quad (17.1)$$

$$d^2 A / dx^2 = (\psi^2 / \lambda^2) A \quad (17.2)$$

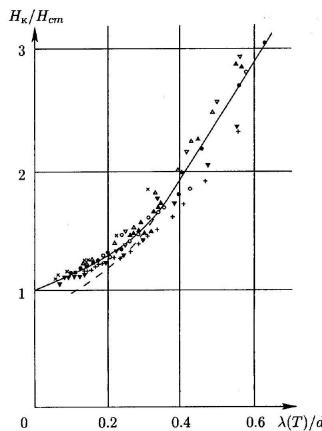


Рис. 17.2. Результаты эксперимента по измерению критического магнитного поля пленок олова различной толщины [33], d -толщина пленки. Сплошная линия - результат теории Гинзбурга-Ландау.

При этом вектор \mathbf{A} направлен вдоль оси y , на магнитное поле положены граничные условия

$$H(\pm d/2) = H_0 \quad (17.3)$$

где H_0 - внешнее, параллельное поверхности пленки, магнитное поле. Решаем сперва уравнение (17.2):

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x / \lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x / \lambda)$$

где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования.

Магнитное поле H в нашем случае находится простым дифференцированием A :

$$H = A_1(\psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + A_2(\psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda)$$

Учитывая граничные условия (17.3), получаем

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{H_0 \lambda}{\psi \operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}$$

Отсюда имеем

$$H = H_0 \frac{\operatorname{ch}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)}, \quad A = \frac{H_0 \lambda}{\psi} \frac{\operatorname{sh}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda)} \quad (17.4)$$

Применим теперь эти результаты к тонкой пленке ($d \ll \lambda$). В этом случае $\psi x/\lambda$ и $\psi d/2\lambda$ будут много меньше единицы, и можно воспользоваться формулами разложения гиперболических функций в ряд Тейлора, ограничившись лишь линейными членами:

$$\operatorname{ch}(\psi d/2\lambda) = 1, \quad \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) = \psi x/\lambda$$

Подставляя эти разложения в (17.4), имеем $A = H_0 x$, и из (17.1) получим

$$\psi^2 = 1 - (2\pi\xi/\Phi_0)^2 H_0^2 x^2$$

Усредним это выражение по толщине пленки (пронтегрируем по x от $-d/2$ до $+d/2$):

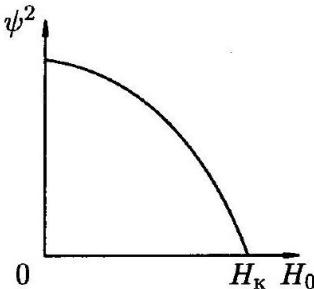
$$\psi^2 d = d - H_0^2 \frac{1}{12} d^3 \left(\frac{2\pi\xi}{\Phi_0} \right)^2$$

Учитывая формулу (15.8), получим окончательно зависимость величины параметра порядка в пленке от приложенного магнитного поля:

$$\psi^2 = 1 - \frac{1}{24} \frac{H_0^2 d^2}{H_{cm}^2 \lambda^2}$$

Эта зависимость изображена на рис. 17.3. Мы видим, таким образом, что параметр порядка ψ в тонкой пленке сильно зависит от

Рис. 17.3. Зависимость параметра порядка от внешнего параллельного магнитного поля H_0 в случае тонкой пленки ($d \ll \lambda$).



приложенного поля H_0 и плавно обращается в нуль при поле, равном $2\sqrt{6}H_{cm}\lambda/d$. Естественно это поле принять за критическое поле пленки H_k . Ясно, что при этом происходит фазовый переход второго рода.

Итак, критическое поле тонкой пленки толщины d в параллельном внешнем поле H_0 равно

$$H_K = 2\sqrt{6}H_{cm}\frac{\lambda}{d} \quad (17.5)$$

Из этой формулы следует, что с уменьшением толщины пленки ее критическое поле увеличивается. Так, если толщина пленки на порядок меньше ее глубины проникновения, $\lambda/d \sim 10$, а $H_{cm} \sim 10^3$ Э, то $H_K \sim 40000$ Э. Физически это вполне понятно. Поскольку магнитное поле проникает в пленку, она имеет существенно меньший диамагнитный момент на единицу объема, чем массивный образец. Но малый диамагнитный момент во внешнем поле - это маленькая магнитная стрелка, ориентированная навстречу полю. Такая ситуация энергетически более выгодна, чем в случае большого диамагнитного момента. Поэтому пленка оказывается во внешнем поле гораздо более устойчивой, чем массивный образец, и может сохранить сверхпроводимость в существенно больших полях.

III-з.

17.1. На стеклянную подложку нанесена оловянная пленка толщиной $d = 1000\text{\AA}$. Пленка внесена во внешнее, параллельное поле, магнитное поле $H_0 = 10$ Э при температуре $T = 0.9T_c$. Найти поле в центре пленки и диамагнитный момент M_0 , приходящийся на единицу площади поверхности пленки.

Решение Поскольку $\lambda(T = 0.9T_c) = 870\text{\AA}$ (см. условие задачи 16.1), имеем, согласно (17.4), $H(x = 0) = 8.55$ Э. Здесь предполагается, что параметр порядка ($\psi = 1$) не изменился под влиянием магнитного поля, которое достаточно мало ($H_0 \ll H_{cm}$ ($T = 0.9T_c$) ~ 60 Э).

Плотность диамагнитного момента $M(x) = (1/4\pi)(H(x) - H_0)$. Приняв, согласно (17.4), $H(x) = H_0(\operatorname{ch}(x/\lambda))/(\operatorname{ch}(d/2\lambda))$, и интегрируя момент по толщине пленки, находим M_0 :

$$M_0 = \frac{H_0 d}{4\pi} \left(\frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} - 1 \right) \quad (17.6)$$

Из этой формулы следует, что $M_0 = -7.74 \cdot 10^{-7}$ Гс·см.

III-з.

17.2. Толстая оловянная пленка толщиной 1 мкм находится в параллельном ее поверхности магнитном поле при $T = 0.9T_c$. Найти критическое поле пленки H_K , предполагая, что параметр порядка ψ от поля не зависит и равен единице (фазовый переход первого рода).

Решение Из формулы (17.6) следует, что средняя плотность диамагнитного момента $\bar{M} = (1/4\pi)H_0[(2\lambda/d)\operatorname{th}(d/2\lambda) - 1]$. Работа, совершенная источником магнитного поля, равна

$$W(H_0) = - \int_0^{H_0} \bar{M} dH_0$$

Переход в нормальное состояние произойдет, когда эта работа станет равна $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/(8\pi)$. Отсюда

$$H_K = H_{cm} \left(1 - \frac{2\lambda}{d} \operatorname{th} \frac{d}{2\lambda} \right)^{-1/2}.$$

Учитывая, что $\lambda \ll d$, имеем $H = H_{cm}(1 + \lambda/d) = 1.087H_{cm}$.

5.2.6 18. Критический ток тонкой пленки

Теперь рассмотрим случай, когда пленка не находится во внешнем поле, но по ней течет некоторый ток I . При этом мы снова предполагаем, что поверхности пленки совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, ток течет в направлении оси y , и под током I мы понимаем полный ток в пленке, приходящийся на единицу длины вдоль оси z .

Этот ток будет создавать на поверхностях пленки магнитное поле H_I , таким образом, мы имеем следующие граничные условия:

$$H(\pm d/2) = \mp H_I \quad (18.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы используем односвязность пленки и выберем такую калибровку \mathbf{A} , чтобы ψ было вещественным. Кроме того, предполагаем, что пленка тонкая: $d \ll \lambda, \xi$. Тогда изменением параметра порядка по толщине пленки можно пренебречь, и мы приходим к уравнениям ГЛ в виде (17.1) и (17.2). Поэтому мы снова будем анализировать эти уравнения, но уже с граничными условиями (18.1). Общее решение уравнения (17.2) будет

$$A = A_1 \operatorname{ch}(\psi x/\lambda) + A_2 \operatorname{sh}(\psi x/\lambda).$$

Поскольку для нашей задачи $H = dA/dx$, имеем

$$H = (A_1 \psi/\lambda) \operatorname{sh}(\psi x/\lambda) + (A_2 \psi/\lambda) \operatorname{ch}(\psi x/\lambda)$$

Подставляя сюда граничные условия (18.1), получим два уравнения с двумя неизвестными (A_1 и A_2). Их решение будет

$$A_1 = \frac{\lambda H_I}{\psi \operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}, \quad A_2 = 0$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H = H_I \frac{\operatorname{sh}(\psi x/\lambda)}{\operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}, \quad A = \frac{\lambda H_I \operatorname{ch}(\psi x/\lambda)}{\psi \operatorname{sh}(\psi d/2\lambda)}. \quad (18.2)$$

Учтем теперь малость толщины пленки, т. е. $\psi d \ll \lambda$. Это значит, что для \mathbf{A} в (18.2) мы положим $\operatorname{ch}(\psi x/\lambda) \simeq 1, \operatorname{sh}(\psi d/2\lambda) \simeq \psi d/2\lambda$, т. е.

$$A = 2\lambda^2 H_I / \psi^2 d$$

Подставляя это выражение в (17.1) и используя (15.8), получим

$$2\lambda^2 H_I^2 / (d^2 H_{cm}^2) = \psi^4 - \psi^6. \quad (18.3)$$

График зависимости величины H_I^2 от ψ^2 показан на рис. 18.1. "Жирной" линией выделена та часть графика, которая соответствует устойчивым состояниям. Действительно, когда никакого тока в пленке нет, уравнение (18.3) имеет два решения: $\psi = 0$ и $\psi = 1$. Из общих соображений ясно, что в этом случае сверхпроводящее состояние ($\psi = 1$) является энергетически более выгодным и именно оно и будет реализовываться. Если мы включим очень слабый ток через пленку, то опять будут два решения уравнения (18.3): одно, соответствующее $\psi \lesssim 1$, другое, соответствующее $\psi \ll 1$. Из соображений непрерывности ясно, что именно первое решение соответствует устойчивому сверхпроводящему состоянию.

Какой же максимальный ток может пропустить пленка, находясь в сверхпроводящем состоянии?

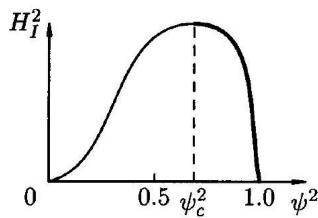


Рис. 18.1. Зависимость параметра порядка в тонкой сверхпроводящей пленке от пропускаемого через пластинку тока. "Жирная" область кривой соответствует устойчивой сверхпроводимости.

Ответ непосредственно следует из графика на рис. 18.1. Это, очевидно, тот ток, который соответствует максимуму на графике. Найдем этот ток. Для этого определим значение ψ_c , соответствующее максимуму величины H_I^2 :

$$\frac{d}{d\psi} (2\lambda^2 H_I^2 / d^2 H_{cm}^2) = 4\psi_c^3 - 6\psi_c^5 = 0$$

отсюда $\psi_c^2 = 2/3$.

Следовательно,

$$H_{Ic} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{cm} \frac{d}{\lambda} \quad (18.4)$$

Из (18.4) легко получить среднюю по пленке критическую плотность тока j_c , воспользовавшись формулой $2H_{Ic} = (4\pi/c)I_c$, следующей из (18.1) и уравнений Максвелла,

$$j_c = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{3}} \frac{cH_{cm}}{\lambda} \quad (18.5)$$

Суммируем главные результаты этого параграфа.

- Поле, созданное критическим током на поверхности пленки, оказывается пропорциональным ее толщине: $H_{Ic} \propto d$, т. е. падает с уменьшением толщины пленки, в то время как критическое поле пленки $H_K \propto 1/d$, т. е. растет с уменьшением толщины. Так, если $d/\lambda \sim 0.1$, а $H_{cm} = 1000 \text{ Э}$, то $H_K \sim 4 \cdot 10^4 \text{ Э}$, а $H_{Ic} \sim 30$. значит, что для тонкой пленки разрушение сверхпроводимости током никак нельзя сводить к разрушению сверхпроводимости магнитным полем этого тока.

- Критическая плотность тока j_c , согласно (18.5), не зависит от толщины пленки. Из этой формулы следует, что j_c просто является характеристикой токонесущей способности данного материала.

- Отметим, наконец, еще один очень важный момент. Разрушение сверхпроводимости током не сопровождается каким-либо фазовым переходом. При этом мы, конечно, имеем в виду, что пленка с током хорошо омывается жидким гелием и все выделяющееся в ней тепло сразу отводится, т. е. ее температура остается равной температуре гелиевой ванны. В этом случае даже при токе I_c свободная энергия сверхпроводящего состояния все еще остается меньше свободной энергии нормального состояния.

Что же происходит при токе $I = I_c$? Почему по пленке не может течь бездиссипативно ток, больший критического?

Для ответа на эти вопросы воспользуемся анализом, который предложил Дж. Бардин. Поскольку пленка тонкая, можно пренебречь энергией магнитного поля тока и записать плотность свободной энергии пленки в виде

$$F_s = F_n - |\alpha|n_s + \frac{\beta}{2}n_s^2 + n_s \frac{m}{2}v_s^2.$$

Здесь n_s - плотность сверхпроводящих электронов, α и β - известные коэффициенты теории ГЛ, четвертое слагаемое дает кинетическую энергию сверхпроводящих электронов, v_s - скорость их упорядоченного движения, "сверхтекущая" скорость.

Зависимость равновесного значения $n_s(v_s)$ от величины v_s найдем из условия минимума свободной энергии при равновесии:

$$\partial F_s / \partial n_s = -|\alpha| + \beta n_s + mv_s^2/2 = 0$$

Отсюда сразу получим

$$n_s = (|\alpha| - mv_s^2/2) / \beta \quad (18.6)$$

Плотность тока j_s в этом случае определяется известным выражением

$$j_s = n_s e v_s. \quad (18.7)$$

Зависимости $n_s(v_s)$ и $j_s(v_s)$, даваемые формулами (18.6) и (18.7), изображены на рис. 18.2. Снова та часть кривой $j_s(v_s)$, которая соответствует устойчивым состояниям, показана жирной линией. О чём говорит этот график? По мере увеличения плотности сверхпроводящего тока увеличивается скорость электронов. Но это сопровождается уменьшением их плотности $n_s(v_s)$. Происходит разрыв электронных пар. Возникает так называемое распаривание электронов. Наконец, наступает такое состояние, когда дальнейшего увеличения сверхпроводящего тока произойти не может просто потому, что сильно снизилась плотность сверхпроводящих электронов. Не хватает носителей, чтобы перенести заданный ток. Этот критический ток и дается формулой (18.5). Часто его называют критическим током распаривания.

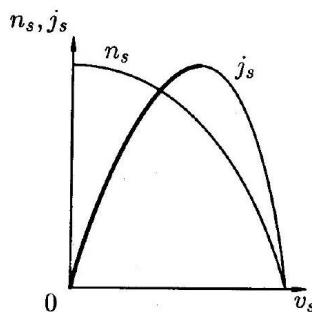


Рис. 18.2. Зависимость плотности сверхпроводящих электронов n_s и плотности сверхтока j_s в тонкой пленке от скорости движения сверхпроводящей компоненты электронной плотности.

III-з.

18.1. На стеклянную подложку нанесена свинцовая пленка толщины $d = 200\text{\AA}$. Глубина проникновения магнитного поля при $T = 0$ будет $\lambda(0) = 390\text{\AA}$, а критическое термодинамическое поле $H_{cm}(0) = 803$ Э. Найти напряженность магнитного поля на поверхности пленки, созданного критическим током. Сравнить с продольным критическим полем этой же пленки.

Отвем. $H_{I_c} = 12.5$; $H_\kappa = 1015$ Э.

III-з.

18.2. Найти плотность критического тока пленки из предыдущей задачи.

Ответ. $j_c = 2.30 \cdot 10^8 \text{ A/cm}^2$.

III-з.

18.3. Тонкая ($d \ll \lambda$) сверхпроводящая пленка индия имеет постоянную теории ГЛ $\varkappa = 0.1$. Глубина проникновения $\lambda = 800\text{\AA}$. Найти критическую скорость сверхпроводящих электронов.

Решение Критическая плотность тока определяется формулой (18.5), а критическая скорость - формулой (18.7). Используя (5.7) и (15.7), имеем

$$v_c = \hbar\varkappa(3\sqrt{3}m\lambda) = 2.81 \cdot 10^3 \text{ cm/c.}$$

III-з.

18.4. Сравнить плотность мейсснеровского тока j_M на поверхности массивного сверхпроводника первого рода, когда он находится в критическом внешнем поле H_{cm} , с критической плотностью тока j_c тонкой пленки из того же материала.

Решение Согласно (6.4), $j_M = cH_{ct}/4\pi\lambda$, откуда $j_M/j_c = 3\sqrt{3}/2\sqrt{2} = 1.837$. Плотность мейсснеровского тока при поле H_{cm} на поверхности оказалась в 1.84 раза больше критического тока распаривания. Это произошло потому, что в формуле (6.4) не учтено уменьшение плотности сверхпроводящих электронов n_s в магнитном поле H_{cm} .

5.2.7 19*. Флуктуационные эффекты вблизи сверхпроводящего перехода

19.1. Оценка ширины флуктуационной области.

Теория Гинзбурга - Ландау оперирует с распределением параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$, предполагая, что оно реализует минимум свободной энергии $G(\Psi)$ (при заданных температуре и магнитном поле), т.е. при его определении уже проведено усреднение по всем термодинамическим флуктуациям. Как представить себе такие флуктуации? Самый наглядный пример - критическая точка жидкость-пар: вблизи критической точки плотность пара флюктуирует во времени и пространстве, $n(\mathbf{r}, t) = \bar{n} + \delta n(\mathbf{r}, t)$. Явления вблизи критической точки тоже можно, до известной степени, представлять себе как аналогичные фазовому переходу II рода; здесь роль параметра порядка играет отклонение Δn средней плотности \bar{n} от ее значения в критической точке n_0 . Таким образом, флуктуации плотности $\delta n(\mathbf{r}, t)$ приводят к появлению "флуктуационных зародышей" жидкости в паре (когда $\Delta n + \delta n(\mathbf{r}, t) > 0$) и наоборот. Чем ближе система к критической точке, тем больше оказывается амплитуда характерных флуктуаций плотности и характерное время t_c существования таких зародышей. Аналогичным образом, выше точки сверхпроводящего перехода возникают и исчезают зародыши сверхпроводящего состояния, т.е. на большое (в микроскопическом масштабе - по сравнению с $\hbar/k_B T_c$) время возникают локально сверхпроводящие области. Параметр порядка, описываемый теорией Гинзбурга - Ландау, возникает после усреднения по всем таким флуктуациям. При этом считается, что можно усреднять по различным флуктуациям независимо, т.е. пренебрегая корреляциями между ними. Такое предположение в любом случае оправдано, пока пространственный размер L рассматриваемых флуктуаций мал по сравнению с корреляционной длиной параметра порядка $\xi(T)$, однако при $L \sim \xi(T)$ оно справедливо лишь при условии $|\delta\Psi(\mathbf{r}, t)| \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi| \ll |\Psi|$. Более точно это же условие записывается как

$$\langle \delta\Psi^*(\mathbf{r})\delta\Psi(0) \rangle |_{r \sim \xi(T)} \ll |\Psi^2(T)| \quad (19.1)$$

В теории Гинзбурга-Ландау предполагается, что условие (19.1) выполнено. Из общей теории фазовых переходов II рода [28], [34] известно, что это предположение становится

неверным достаточно близко к точке фазового перехода. Окрестность температуры перехода $(\Delta T)_{\text{флукт}} = T - T_c$, где флуктуации оказываются сильными, называется флуктуационной областью. Поскольку теория Гинзбурга - Ландау строилась для окрестности точки перехода, $|\Delta T| \ll T_c$, область ее применимости существует лишь при условии $(\Delta T)_{\text{флукт}} \ll T_c$, или, иначе говоря, при условии малости так называемого параметра Гинзбурга $Gi \equiv (\Delta T)_{\text{флукт}} / T_c$. Величина параметра Гинзбурга определяется микроскопической природой взаимодействия, приводящего к фазовому переходу II рода.

В некоторых случаях, как, например, при фазовом переходе ${}^4\text{He}$ в сверхтекучее состояние (который с точки зрения феноменологической теории фазовых переходов очень похож на сверхпроводящий фазовый переход), $Gi \sim 1$, и область применимости теории Гинзбурга - Ландау вообще отсутствует. В большинстве сверхпроводников, напротив, флуктуационные эффекты очень слабы в объемных образцах. Исключение составляют ВТСП и некоторые другие сильно анизотропные сверхпроводники, например, NbSe_2 [35]. Кроме того, даже в «обычных» сверхпроводниках величина флуктуаций сильно возрастает при переходе от объемных образцов к тонким пленкам или проволокам. Ниже мы найдем связь между относительной шириной флуктуационной области Gi и микроскопическими параметрами сверхпроводника для различных размерностей $d = 1, 2, 3$ образца.

Начнем с простой качественной оценки: изменение свободной энергии $F_{sn} = F_{s0} - F_n$ вследствие перехода в сверхпроводящее состояние в области размером с длину корреляции $\xi(T)$ имеет порядок $F_{sn}(T) \sim H_{cm}^2(T)\xi^3(T) \sim H_{cm}^2(0)\xi_0^3 \cdot (1 - T/T_c)^{1/2} = F_{sn}(0)(1 - T/T_c)^{1/2}$. Это изменение свободной энергии положительно при $T > T_c$, т.е. сверхпроводящие области возникают лишь флуктуационно; напротив, при $T < T_c$ устойчиво сверхпроводящее состояние, а флуктуации приводят к его временному разрушению, т.е. появлению зародышей нормальной фазы. Вероятность флуктуационного образования зародышей с пространственным масштабом $L \sim \xi(T)$ определяется соотношением $F_{sn}(T)$ и тепловой энергии $k_B T$: если $k_B T \ll F_{sn}(T)$, то зародыши размера порядка $\xi(T)$ образуются экспоненциально редко, и условие (19.1) выполнено. Таким образом, получаем условие

$$\left|1 - \frac{T}{T_c}\right| \geq \left(\frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0)\xi_0^3}\right)^2 \equiv Gi \quad (19.2)$$

Убедимся, что величина Gi , определяемая правой частью (19.2), действительно очень мала. Для этого воспользуемся формулой (15.8) для H_{cm} и оценкой $\xi_0 \simeq \hbar v_F / 2\pi k_B T_c$, которая будет обсуждаться ниже. Используя также выражение (6.3) для глубины проникновения $\lambda(0)$ и считая, что плотность сверхпроводящих электронов n_s порядка полной их плотности $n \sim k_F^3$, окончательно получим

$$Gi \sim (k_F \xi_0)^{-4} \ll 1. \quad (19.3)$$

Во всех известных сверхпроводниках длина когерентности ξ_0 велика по сравнению с межэлектронным расстоянием k_F^{-1} , что связано со слабостью куперовского притяжения; напротив, межатомное взаимодействие в жидком ${}^4\text{He}$ очень сильное, и аналогичная длина когерентности $\xi_{\text{ст}}(0)$ для сверхтекучего состояния близка к межатомному расстоянию. Для сверхпроводников наименьшее известное значение параметра $k_F \xi_0 \simeq 10$ относится к ВТСП и некоторым органическим сверхпроводникам [36]. Здесь надо заметить, что формулы (19.2), (19.3) неприменимы непосредственно к упомянутым сильно анизотропным материалам, т.к. были получены для изотропных трехмерных сверхпроводников. ¹⁾ В большинстве «классических» сверхпроводников $k_F \xi_0 \geq 100$, так что ширина флуктуационной области Gi пренебрежимо мала. Надо, однако, заметить, что сделанное при выводе оценки (19.3) предположение, что $n_s \sim k_F^3$, применимо (по порядку величины) лишь для чистых сверхпроводников с длиной свободного пробега на примесях $l \gg \xi_0$. В «грязном» пределе $l \ll \xi_0$ (что иначе может быть выражено как условие $k_B T_c \tau / \hbar \ll 1$, где $\tau = l/v_F$) -

время свободного пробега) длина когерентности существенно уменьшается: $\xi_{0d} \simeq \sqrt{\xi_0 l} \simeq \sqrt{\hbar D / 2\pi k_B T_c}$, где $D = \frac{1}{3} v_F l$ -коэффициент диффузии в металле с примесями. В то же время термодинамическое критическое поле H_{cm} и температура перехода T_c не зависят (в основном приближении) от концентрации примесей (доказательство этого утверждения, называемого иногда "теоремой Андерсона", мы обсудим в 45). Приведенные выше оценки для ξ_0 и ξ_{0d} можно понять следующим образом: масштаб времени, соответствующий по соотношению неопределенности энергии связи пары $\Delta \sim k_B T_c$ (см. §§44, 45), есть $\tau_p \sim \hbar / \Delta \sim \hbar / k_B T_c$ и по порядку величины определяет время прохождения электроном области размером в длину когерентности. Учитывая независимость Δ от беспорядка, получаем в чистом случае $\xi_0 \sim v_F \tau_p \sim \hbar v_F / k_B T_c$, а в грязном $-\xi_{0d} \sim (D \tau_p)^{1/2} \sim (\hbar D / k_B T_c)^{1/2}$, т. е. $\xi_{0d}^2 \sim \xi_0 l$.

Влияние примесей на ширину флуктуационной области Gi_d в грязном пределе проще всего усмотреть тогда из уравнения (19.2):

$$Gi_d \simeq Gi \left(\frac{\hbar}{k_B T_c \tau} \right)^3 \sim \frac{1}{(k_F^2 \xi_{0d})^2} \quad (19.4)$$

Перейдем теперь к оценке параметра Gi для низкоразмерных сверхпроводников - тонких пленок толщиной d и проволок поперечным сечением S . Теперь в качестве объема характерного «зародыша» следует брать либо $\xi^2(T)d$, либо $\xi(T)S$; будем также считать, что T_c и ξ_0 не меняются при уменьшении d или S . В результате для чистого сверхпроводника вместо (19.2) получим

$$Gi^{(2D)} = \frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0) \xi_0^2 d} \sim \frac{1}{k_F^2 \xi_0 d} \quad (19.5)$$

$$Gi^{(1D)} = \left(\frac{k_B T_c}{H_{cm}^2(0) \xi_0 S} \right)^{2/3} \sim (k_F^2 S)^{-2/3}. \quad (19.6)$$

Разумеется, формулы (19.5) и (19.6) имеют смысл постольку, поскольку получающиеся из них значения $Gi^{(2D)}, Gi^{(1D)} \gg Gi$. При выводе этих оценок мы предполагали, что толщина пленки d или поперечный размер проволоки $S^{1/2}$ малы по сравнению с длиной корреляции $\xi(T)$ в интересующей нас окрестности вблизи точки перехода - чем и вызвано эффективное уменьшение размерности образца. При этом низкотемпературная длина когерентности ξ_0 может быть и меньше $d, S^{1/2}$, и тогда при низких температурах сверхпроводник эффективно трехмерен. Как правило, низкоразмерные сверхпроводники имеют (по технологии их приготовления) довольно малую длину пробега $l \ll \xi_0$, т. е. реализуется грязный предел. Для оценки ширины флуктуационной области можно

в этом случае использовать первые из равенств (19.5), (19.6), заменяя ξ_0 на ξ_{0d} и учитывая независимость H_{cm} от беспорядка. В результате получим

$$Gi_d^{(2D)} \sim (k_F^2 l d)^{-1} \sim g^{-1} \quad (19.7)$$

$$Gi_d^{(1D)} \sim \left(\frac{\xi_{0d}}{k_F^2 S l} \right)^{2/3} \quad (19.8)$$

где $g = \frac{\hbar}{e^2} \sigma_{2d}$ -безразмерная проводимость пленки на квадрат, а σ_{2d} - проводимость пленки на квадрат в нормальном состоянии. Интересно, что оценки (19.6) и (19.7) для Gi

- Формулу (19.2) можно обобщить с учетом анизотропии, если заменить ξ_0^3 на произведение длин когерентности ($\xi_{0x} \xi_{0y} \xi_{0z}$) по всем трем направлениям.

в одномерном чистом и двумерном грязном случаях оказались не зависящими от ξ или других собственно сверхпроводящих параметров, они определяются чисто металлическими свойствами - числом каналов проводимости $N_{\text{кан}} \sim S/\lambda_F^2 \sim k_F^2 S$ в проволоке, либо безразмерной проводимостью g пленки, соответственно. Для совсем тонких пленок и проволок оценки (19.7), (19.8) должны быть уточнены, т. к. рассеяние электронов на поверхности образца может в этом случае оказаться наиболее сильным источником беспорядка, уменьшающим длину когерентности ξ_0 и тем самым увеличивающим Gi . Наконец, необходимо заметить, что формулы (19.3), (19.5) - (19.8) были получены лишь как порядковые оценки, указывающие на зависимость Gi от параметров, но не содержащие правильных численных коэффициентов; более аккуратное вычисление показывает, например, что $Gi_d^{(2D)} \simeq 0.1g^{-1}$ (см. (19.17)).

19.2. Флуктуационные эффекты в окрестности T_c . Обсудим теперь, к каким наблюдаемым физическим эффектам приводят флуктуации параметра порядка, причем начнем со

²⁾ Дело в том, что при решении задач по электропереносу вдоль тонких пленок удобно пользоваться величинами сопротивления на квадрат R^{2D} и проводимости на квадрат σ^{2D} , т.е. величинами для пленки с толщиной d и одинаковыми планарными размерами $L \times L$. Легко видеть, что эти величины от размера квадрата L не зависят и связаны с удельными сопротивлением и проводимостью соотношениями $R^{2D} = \rho/d$, $\sigma^{2D} = \sigma d$.

случая трехмерного сверхпроводника. Самый универсальный из таких эффектов, присутствующий при всех фазовых переходах II рода - изменение поведения теплоемкости $C(T)$ при $T \simeq T_c$ по сравнению с предсказанием теории Ландау. Например, при сверхтекучем фазовом переходе в ${}^4\text{He}$ (где $Gi \sim 1$) теплоемкость логарифмически расходится в точке перехода, $C(T) \propto -\ln |1 - T/T_c|$, вместо того чтобы испытывать конечный скачок при $T = T_c$. Общая теория фазовых переходов II рода [34] предсказывает, что в непосредственной окрестности T_c поведение системы описывается лишь симметрией параметра порядка и пространственной размерностью. Сверхтекущий фазовый переход в ${}^4\text{He}$, как и обычный сверхпроводящий, описывается комплексным однокомпонентным параметром порядка, поэтому такая же логарифмическая аномалия теплоемкости должна наблюдаться и в сверхпроводниках в узкой окрестности точки перехода $|1 - T/T_c| \leq Gi$. Однако, из-за крайней малости Gi в объемных сверхпроводниках это явление почти никогда не наблюдается. Исключение представляют высокотемпературные сверхпроводники; в частности, на рис. 19.1 приведен график теплоемкости, измеренной вблизи сверхпроводящего перехода в YBaCuO в работе [37]. Вне флюктуационной области (т. е. при $|1 - T/T_c| \geq Gi$) поправки к теплоемкости, обусловленные флюктуациями, малы:

$$\frac{\delta C(T)}{C_0} \sim \begin{cases} \left(\frac{Gi}{|1-T/T_c|} \right)^{1/2} & \text{при } d = 3, \\ \frac{Gi^{(2D)}}{|1-T/T_c|} & \text{при } d = 2, \end{cases} \quad (19.9)$$

где $C_0 \equiv C_s - C_n = T_c \tilde{\alpha}^2 / \beta$ - скачок теплоемкости при сверхпроводящем переходе (см. (3.12), (13.5) и (13.6)). Как видно из (19.9), в случае $d = 2$ поправки к теплоемкости растут заметно быстрее с приближением к T_c , однако измерять теплоемкость тонких пленок очень сложно из-за их малого объема. Интересный компромисс обнаруживается, если рассмотреть квазидвумерный (слоистый) объемный сверхпроводник с очень слабой связью между слоями (например, ВТСП семейства BiSrCaCuO): с понижением температуры в довольно широкой окрестности T_c взаимодействие между слоями несущественно и применима вторая из формул (19.9), описывающая "двумерные" флюктуации параметра порядка.

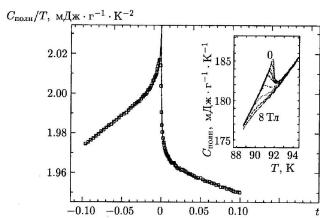


Рис. 19.1. Критическая аномалия теплоемкости монокристалла YBaCuO[37], близкая по форме к «-особенности» при сверхтекущем переходе в ${}^4\text{He}$.

Взаимодействие критических флюктуаций меняет в области $\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \leq G_i$ вид температурных зависимостей и других величин, помимо теплоемкости. Так, длина корреляции $\xi(T) \propto (T - T_c)^{-\nu}$, а глубина проникновения $\lambda \propto (T - T_c)^{-\nu/2}$, где критический показатель ν близок к $2/3$ для трехмерной системы с комплексным параметром порядка [34].

Другая интересная для наблюдения флуктуационных поправок величина - диамагнитная восприимчивость $\chi(T)$. Действительно, в нормальном металле χ очень мала (обычно $\chi \leq 10^{-5}$); в то же время в сверхпроводнике имеется полный диамагнетизм, $\chi = -(4\pi)^{-1}$, т.е. в узкой окрестности перехода происходит скачок диамагнитной восприимчивости на несколько порядков. Поэтому следует ожидать, что сверхпроводящие флюктуации будут давать относительно заметный вклад в χ и при $(1 - T/T_c) \gg G_i$. Магнитный момент сверхпроводника $M = -\partial G/\partial H_0$, где G - свободная энергия во внешнем поле H_0 , определяемая согласно общим правилам статистической физики как

$$\exp(-G/k_B T) = \int \mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \exp(-G[\Psi(\mathbf{r})]/k_B T) \quad (19.10)$$

где значок \mathcal{D} обозначает интегрирование по всем возможным конфигурациям параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ с весом, определяемым свободной энергией Гинзбурга-Ландау $G[\Psi(\mathbf{r})]$ (см. уравнение (14.1)). При $\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) > G_i$ членом $|\Psi|^4$ в (14.1) можно пренебречь, и функциональный интеграл (19.10) сводится к произведению независимых интегралов

$$\exp(-G/k_B T) = \prod_{\mu} da_{\mu} d\bar{a}_{\mu} \exp(-E_{\mu} |a_{\mu}|^2) \quad (19.11)$$

где использовано разложение $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} a_{\mu} \psi_{\mu}(\mathbf{r})$ поля параметра порядка по собственным функциям оператора

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{4m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \alpha$$

соответствующего квадратичной части функционала Гинзбурга-Ландау (здесь $\alpha = \tilde{\alpha}(T - T_c)$, где $\tilde{\alpha} = \text{const}$); величины E_{μ} - соответствующие собственные значения. Интеграл по каждой паре переменных a_{μ}, \bar{a}_{μ} дает множитель $\pi k_B T/E_{\mu}$. В результате диамагнитный момент равен

$$M = -\frac{\partial G}{\partial H_0} = -k_B T \sum_{\mu} \frac{\partial \ln E_{\mu}}{\partial H_0} \quad (19.12)$$

Вычислим флуктуационную диамагнитную восприимчивость для самого простого случая [38] - шарика радиуса $R \ll \xi(T)$, когда в сумме (19.12) достаточно оставить лишь член с наименьшим собственным значением E_0 , соответствующим постоянной по объему шарика собственной функции $\psi_0 = (4\pi R^3/3)^{-1/2}$ с нормировкой $\int d^3r \psi_0^2(\mathbf{r}) = 1$. Величину E_0 найдем просто как среднее значение оператора \mathcal{H}_2 :

$$E_0 = \alpha + \psi_0^2 \int_{r < R} d^3 r \frac{e^2}{mc^2} A^2(\mathbf{r}) = \alpha + \frac{e^2 H_0^2 R^2}{10mc^2} \quad (19.13)$$

При вычислении интеграла в (19.13) мы выбрали векторный потенциал в виде $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0 \mathbf{r}]$; при этом \mathbf{A} везде перпендикулярен нормали к поверхности шара, что необходимо для удовлетворения граничного условия $(-i\nabla\psi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A})_{r=R} = 0$ при $\psi_0 = \text{const}$ внутри шара. Комбинируя уравнения (19.12) и (19.13), получаем

$$M(H_0) = -\frac{e^2 T_c R^2 H_0}{5m^2 c^2 \left(\tilde{\alpha}(T - T_c) + \frac{e^2 H_0^2 R^2}{10mc^2} \right)} \quad (19.14)$$

Таким образом, линейная часть флуктуационной диамагнитной восприимчивости шарика на единицу его объема равна

$$\chi_{\text{флукт}}(T) = \frac{3e^2 T_c}{20\pi m c^2 R \tilde{\alpha}(T - T_c)} \quad (19.15)$$

Магнитная восприимчивость металла имеет порядок $\chi_0 \sim \frac{e^2 k_F}{mc^2}$; выражая по порядку величины $\tilde{\alpha}$ через ξ_0 и T_c с помощью (14.14), находим отношение флуктуационного вклада в восприимчивость к нормальному:

$$\frac{\chi_{\text{флукт}}(T)}{\chi_0} \sim \frac{\min(\xi_0, l)}{R} \frac{T_c}{T - T_c} \quad (19.16)$$

Как видно из (19.16), флуктуационный вклад в восприимчивость не выражается через число G_i , более того, он падает при уменьшении длины когерентности ξ_0 либо (в грязном пределе) примесной длины пробега l , несмотря на то, что число G_i

при этом растет. В случае объемного сверхпроводника отношение $\chi_{\text{флукт}}/\chi_0 \sim \left(\frac{T_c}{T-T_c}\right)^{1/2}$ (вычисление см. в [39]) вообще не зависит от параметров материала. Такое отличие флуктуационных поправок к магнитной восприимчивости (по сравнению с поправками к теплоемкости и проводимости - см. ниже) происходит из-за того, что диамагнитный отклик сверхпроводника нелокален в пространстве; иначе говоря, он определяется экранирующими токами, текущими по его поверхности. Именно поэтому, в частности, в выражение (19.16) входит радиус шарика R .

Флуктуации сверхпроводящего параметра порядка приводят также к росту проводимости металла с понижением температуры к T_c . Этот эффект был предсказан Асламазовым и Ларкиным [40] и надежно подтвержден экспериментально. Мы качественно обсудим происхождение эффекта Асламазова - Ларкина в следующем разделе, а здесь приведем лишь результаты вычислений отношения флуктуационных поправок к нормальной проводимости грязных сверхпроводников различных размерностей d вблизи T_c :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma} \right)^{(1D)} &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{k_F^2 l} \sqrt{\frac{T_c}{D}} \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)^{1/2} = \\
 &= \left(\frac{\text{Gi}_d}{T/T_c - 1} \right)^{1/2}, \\
 \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma} \right)^{(2D)} &= \frac{1}{16g} \frac{T_c}{T - T_c} = \frac{\text{Gi}_d^{(2D)}}{T/T_c - 1}, \\
 \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma} \right) &= \left(\frac{\Delta\sigma_{AL}}{\sigma} \right)^{(3D)} = \frac{5.4}{(T_c\tau)^{1/2}} \frac{1}{k_F^2 S} \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)^{3/2} = \\
 &= \left(\frac{\text{Gi}_d^{(1D)}}{T/T_c - 1} \right)^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{19.17}$$

Параметры Gi_d , $\text{Gi}_d^{(2D)}$ и $\text{Gi}_d^{(1D)}$, введенные в формулах (19.17), совпадают по порядку величины с оценками (19.4), (19.7) и (19.8);

мы выбрали флуктуационные поправки именно к проводимости, чтобы дать точное определение параметров Gi , поскольку проводимость удобнее всего измерять экспериментально. Микроскопическое вычисление поправок к теплоемкости [40] показывает, что численные коэффициенты в формулах (19.9) порядка единицы, т.е. ширина флуктуационной области, определенная по критическому поведению теплоемкости, такая же, как и при ее определении по проводимости.

19.3. Парапроводимость (эффект Асламазова-Ларкина). Флуктуационный вклад в проводимость металла вблизи сверхпроводящего перехода называют также парапроводимостью. Мы приведем сейчас качественное объяснение этого эффекта (см. также [41]), предсказанного Асламазовым и Ларкиным при помощи микроскопической теории [40]. Начнем с известной формулы Друде для остаточной (низкотемпературной) проводимости металла с примесями:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_{tr}}{m} \tag{19.18}$$

В этой формуле n_e - плотность электронов проводимости, τ_{tr} транспортное время свободного пробега электронов на примесях (т. е. время за которое электрон заметно меняет направление своего импульса), m - масса электрона. В окрестности сверхпроводящего перехода в металле имеются флуктуационно возникшие куперовские пары. Их дополнительный вклад в проводимость мы и оценим с помощью формулы типа (19.18). Для этого необходимо понять, чем следует заменить параметры n_e и τ_{tr} в случае переноса заряда флуктуационными парами.

Мы уже знаем, что при $T < T_c$ величина $\langle \Psi \rangle^2$ играет роль плотности куперовских пар. Выше точки перехода эта величина равна нулю, в соответствии с тем, что настоящих пар с бесконечным временем жизни здесь нет. Однако можно рассмотреть величину $n(p) = \langle \psi_p \psi_{-p} \rangle$, которая представляет собой плотность флуктуационных пар, имеющих импульс p . Величине $n_e \tau_{tr}$ в формуле (19.18) будет соответствовать теперь $\int d\mathbf{p} n(\mathbf{p}) \tau(\mathbf{p})$.

Здесь $\tau(\mathbf{p})$ - время жизни флуктуационной пары с импульсом p , которое, как мы покажем ниже, сильно зависит от величины импульса $|\mathbf{p}|$. Начнем с оценки зависимости $n(\mathbf{p})$. Для этого надо лишь представить квадратичную часть функционала Гинзбурга-Ландау в виде (19.11), где теперь собственными функциями $\psi_\mu(\mathbf{r})$ являются просто плоские волны $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$, а собственные значения $E_p = \hbar^2 p^2 / 4m + \alpha$. Соответственно, для $n(\mathbf{p}) = \langle \psi_{\mathbf{p}} \psi_{-\mathbf{p}} \rangle$ получаем

$$n(\mathbf{p}) = \frac{k_B T}{\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m} \tag{19.19}$$

Займемся теперь оценкой времени $\tau(\mathbf{p})$. В отличие от времени жизни τ_{tr} электрона с заданным импульсом, время жизни флуктуационной пары определяется не рассеянием на примесях, а распадом на отдельные электроны. Это время можно оценить без использования микроскопической теории, если произвести простейшее обобщение уравнений Гинзбурга-Ландау для слабонеравновесной ситуации, когда параметр порядка $\Psi(\mathbf{r})$ не совпадает со своим равновесным значением Ψ_0 . В этом случае вариация функционала ГЛ не равна нулю и (пределяет скорость возвращения величины параметра порядка к равновесному значению (в данном случае к нулю, т.к. $T >> T_c$):

$$\gamma \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial t} = - \frac{\delta F[\Psi]}{\delta \Psi(\mathbf{r})} \equiv \frac{\hbar^2}{4m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) - \alpha \Psi(\mathbf{r}) - \beta |\Psi(\mathbf{r})|^2 \Psi(\mathbf{r}) \quad (19.20)$$

де γ имеет смысл кинетического коэффициента; порядок величины этого параметра мы определим чуть ниже. Считая флуктуации малыми, пренебрегаем последним членом в (19.20), после чего это уравнение становится линейным. Теперь можно перейти к переменным $\psi(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} \Psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$, в которых уравнение (19.20) принимает простой вид:

$$\gamma \partial \psi(\mathbf{p}) / \partial t = - (\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m) \psi(\mathbf{p}) \quad (19.21)$$

Из уравнения (19.21) видно, что время релаксации флуктуаций параметра порядка с импульсом \mathbf{p} равно

$$\tau(\mathbf{p}) = \frac{\gamma}{\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m} \quad (19.22)$$

В результате, собирая вместе (19.19) и (19.22), получим

$$\sigma_{AL} \sim \frac{e^2}{m} \sum_{\mathbf{p}} \frac{k_B T \gamma}{(\alpha + \hbar^2 p^2 / 4m)^2} \quad (19.23)$$

Рассмотрим случай тонкой сверхпроводящей пленки (толщина $d \ll \xi$), когда выражение для паропроводимости имеет особенно простой и универсальный вид. Заменяя $\sum_{\mathbf{p}}$ на интеграл $(1/d) \int d^2 p / (2\pi)^2$, получаем для проводимости на квадрат пленки

$$\sigma_{AL}^{2D} = \sigma_{AL} \cdot d \sim \frac{e^2 k_B T_c \gamma}{\alpha \hbar^2} \sim \frac{e^2}{\hbar} \frac{T_c}{T - T_c} \quad (19.24)$$

Чтобы получить последнее выражение в правой части (19.24), мы учли, что при $(T - T_c) \sim T_c$ время релаксации сверхпроводящего параметра порядка $\tau_0 \sim \gamma / \tilde{\alpha} T_c$ должно быть порядка $\hbar / k_B T_c$, поэтому $\gamma \sim \hbar \tilde{\alpha}$. Таким образом, в двумерном случае вклад в проводимость от флуктуационных пар определяется только относительной близостью к точке перехода, и вообще не зависит от параметров сверхпроводника. Микроскопическое вычисление [40] подтверждает качественную оценку (19.24) и определяет численный коэффициент в правой части, равный 1/16.

Для тонких проволок и массивных сверхпроводников (размерность $d = 1, 3$) оценка, аналогичная (19.24), дает вклад в проводимость

$$\sigma_{AL}^{(d)} \sim \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)^{(4-d)/2} \quad (19.25)$$

Коэффициент перед этой зависимостью уже не является универсальным; используя выражения из 51 для параметра $\alpha(T)$

и оценку для γ , можно получить (по порядку величины) формулы (19.17). В заключение заметим, что в отличие от обычного стационарного уравнения Гинзбурга-Ландау, неравновесное его обобщение применимо, строго говоря, только при $T > T_c$. Дело в том, что наличие

конечной щели Δ в спектре нормальных возбуждений сверхпроводника при $T < T_c$ (см. 45) делает неверным предположение о простой релаксационной динамике параметра порядка, использованное в (19.20). Мы обсудим неравновесные процессы в сверхпроводящем состоянии в главе VII.

5.3 СЛАБАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

5.3.1 20. Фазовая когерентность и виды слабых связей

В 1962 г. появилась статья [13] никому до этого не известного автора Б. Джозефсона, в которой теоретически предсказывалось существование двух удивительных эффектов. Эти эффекты следовало ожидать в туннельных сверхпроводящих контактах. Первый эффект заключается в том, что через туннельный переход¹⁾ возможно протекание сверхпроводящего (бездисипативного) тока (сверхтока). Предсказывалось, что критическое значение этого тока будет весьма причудливым образом зависеть от внешнего магнитного поля. Если ток через такой переход станет больше критического тока перехода, то переход станет источником высокочастотного электромагнитного излучения. Это-второй эффект Джозефсона.

Прошло совсем немного времени, и эти эффекты были действительно экспериментально обнаружены [42, 14, 43]. Более того, скоро стало ясно, что эффекты Джозефсона присущи не только туннельным переходам, но и многим другим типам так называемых слабых связей, т. е. участкам сверхпроводящей цепи, в которых критический ток существенно подавлен, а размер участка - порядка длины когерентности [24, 44, 45].

В основе природы эффектов слабой сверхпроводимости лежат квантовые свойства сверхпроводящего состояния. Мы уже знаем, что сверхпроводящее состояние металла - это состояние, в котором существует бозе-кondенсат, или, иначе, состояние, в котором электронные пары находятся на одном квантовом уровне и описываются общей для всех волновой функцией. Их поведение взаимоусловлено, они когерентны.

Представим себе теперь, что имеются два массивных куска одного и того же сверхпроводника при одной и той же температуре, полностью изолированные друг от друга. Поскольку оба куска находятся в сверхпроводящем состоянии, в каждом из них будет своя волновая функция сверхпроводника. Так как материалы и температуры обоих кусков одинаковы, модули обеих волновых функций должны совпадать. Этого нельзя сказать о фазах, которые могут быть произвольны. Но это так только до тех пор, пока куски изолированы друг от друга. Установим между этими кусками слабый контакт, т.е. сделаем так, чтобы контакт не мог радикально изменить состояния обеих половинок, а сыграл бы роль возмущения. Теперь возникнет единая волновая функция всего сверхпроводника, которую можно рассматривать как результат интерференции волновых функций двух половинок. Мы уже говорили, что амплитуды волновых функций обеих половинок были одинаковы еще до установления слабой связи. Согласование же фаз волновых функций - это уже результат образования слабой связи. Поэтому говорят, что в слабосвязанных сверхпроводниках устанавливается фазовая когерентность.

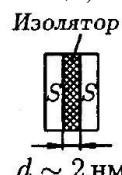
Здесь уместно отметить, что слабая связь между двумя сверхпроводниками - это просто удобное место для обнаружения интерференционных эффектов. Сами интерференционные эффекты в сверхпроводниках были известны задолго до открытия эффектов Джозефсона. Действительно, наиболее яркий тому пример - квантование магнитного потока в сверхпроводящем кольце. Замороженный в нем магнитный поток принимает квантованные значения потому, что квантуется сверхток, текущий по кольцу и создающий этот магнитный поток. Но квантование сверхтока в кольце - это типично интерференционный эффект. Ток может принимать только такие значения, при которых на длине кольца может уложиться целое число длин волн волновой функции сверхпроводящих электронов - полная аналогия с квантованием орбит электронов в атоме Бора.

Остановимся теперь на видах слабых связей. Прежде всего, отметим устройства без концентрации тока. Так, в туннельных переходах (рис.20.1,а) (с толщиной изоляционной прослойки до 2 нм) характерная плотность критического тока может иметь величину порядка нескольких сотен A/cm^2 , что на много порядков меньше критической плотности тока электродов.

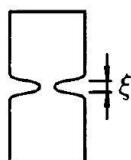
В сэндвичах сверхпроводник - нормальный металл - сверхпроводник толщина нормальной прослойки из чистого металла может достигать величины в несколько микрон (рис. 20.1, б). Волновые функции сверхпроводящих электронов проникают в нормальный металл за счет эффекта близости. В области их перекрытия возникает интерференция волновых функций, которая означает установление фазовой когерентности между электродами. Если амплитуда волновой функции сверхпроводника в области слабой связи мала, то и критический ток в этой области будет мал.

Того же эффекта можно добиться, помещая между двумя сверхпроводниками вместо слоя нормального металла слой легированного полупроводника или другого сверхпроводника с малой плотностью критического тока. Перекрытие узкой сверхпроводящей пленки узкой пленкой нормального металла (рис.20.1, в) приводит за счет эффекта близости к уменьшению амплитуды волновой функции сверхпроводящих электронов в пленке в области покрытия ее нормальным металлом. Это приводит к локальному уменьшению плотности критического тока, т.е. к появлению слабой связи.

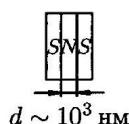
В устройствах с концентрацией тока плотность критического тока в области слабой связи такая же, как и вне ее, но полный критический ток существенно меньше. К таким устройствам относится пленка с сужением (мостик Дайема) (рис.20.1, г), если размер сужения будет порядка длины когерентности ξ материала пленки. Мостик переменной толщины, пленочные берега которого имеют толщину порядка сотен нм, а пленка собственно мостика - десятки нм (рис. 20.1, д), и, наконец, точечный контакт, возникающий в результате слабого касания острого конца сверхпроводящей проволоки и плоского участка поверхности другого сверхпроводника (рис.20.1,е) - тоже примеры слабых связей.



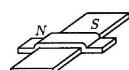
а)



2)



б)



в) 20 Изоляционная подложка



е)

Рис. 20.1. Виды слабых связей: а) туннельный переход; б) сэндвич; в) нормальная пленка N локально понижает параметр порядка сверхпроводящей пленки S ; г) мостик Дайема, вид в плане; д) мостик переменной толщины, продольный разрез; е) точечный контакт.

5.3.2 21. Стационарный эффект Джозефсона

Переходим теперь к изучению первого эффекта Джозефсона-стационарного эффекта. Физически он заключается в том, что достаточно слабый ток течет через слабое звено бездиссилиативно, т.е. при протекании такого тока на слабой связи не возникает падение напряжения. Поскольку рассматривается слабый ток, мы можем пренебречь создаваемым им магнитным полем. Поэтому можно сказать, что его плотность определяется градиентом фазы $\nabla\theta$ волновой функции сверхпроводящих электронов (согласно теории Гинзбурга-Ландау).

Характерное свойство слабой связи как раз заключается в том, что этот градиент очень велик внутри слабой связи по сравнению с величиной градиента фазы в сверхпроводниках, между которыми установлена слабая связь. (Будем называть их в дальнейшем "берегами".) Для туннельного перехода вообще нельзя говорить о градиенте фазы, а надо просто говорить о скачке фазы на переходе. Поэтому в дальнейшем всегда будем интересоваться скачком фазы φ на слабой связи:

$$\varphi = \theta_2 - \theta_1$$

где θ_1 - фаза волновой функции сверхпроводящих электронов первого берега, а θ_2 - второго берега.

Теперь нам предстоит установить, как связаны между собой ток через слабую связь I_s и разность фаз берегов перехода φ .

Установим некоторые самые общие и почти очевидные соотношения.

- Если ток через переход отсутствует, $I_s = 0$, то и разность фаз $\varphi = 0$.
- В силу того что изменение фазы θ одного из берегов на 2π ничего физически не изменяет, ясно, что функция $I_s(\varphi)$ периодическая с периодом 2π , т.е. $I_s(\varphi) = I_s(\varphi + 2\pi)$.
- Изменение знака тока должно изменить и знак разности фаз, поэтому $I_s(\varphi) = -I_s(-\varphi)$.

На рис. 21.1 показаны различные токо-фазовые соотношения, удовлетворяющие условиям 1) - 3).

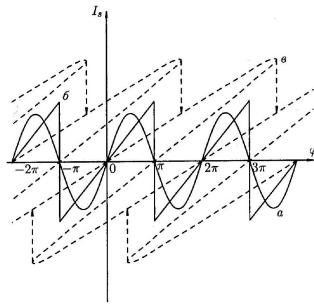


Рис. 21.1. Различные токо-фазовые зависимости: *a* - синусоидальная, *б* - пилообразная, *в* - многозначная.

Наиболее простым и часто встречающимся является синусоидальное токо-фазовое соотношение, показанное на рис. 21.1, *a*:

$$I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi \quad (21.1)$$

где I_c - максимальный бездиссипативный ток (иначе-критический ток). Такая зависимость $I_s(\varphi)$, как мы покажем ниже, характеризует обычный тунNELНЫЙ джозефсоновский переход при всех температурах, а также и другие типы слабых связей вблизи T_c , т.е. в области применимости теории Гинзбурга-Ландау.

Пилообразной токо-фазовой зависимостью, рис. 21.1, *б*, обладает при очень низких температурах *SNS*-сэндвич с прослойкой из чистого металла [46, 47, 48]. В этом случае в пределах одного периода (например, от $-\pi$ до π) ток линейно растет с увеличением разности фаз, т. е. прямо пропорционально градиенту фазы θ параметра порядка, наведенного в *N*-слое за счет эффекта близости. Для плотности сверхпроводящего тока тогда имеем

$$j_s(\varphi) = \frac{n_{sN}e}{2m}\hbar\nabla\theta = \frac{n_{sN}e\hbar}{2m}\frac{\varphi}{d_N} \quad (21.2)$$

где n_{sN} - плотность сверхпроводящих электронов в *N*-слое, а d_N -его толщина. Зависимость (21.2) имеет место для сэндвичей с толщиной, удовлетворяющей неравенству $\xi_0 \ll d_N \ll \xi_n$ при температурах $T \ll \hbar v_F/k_B d_N$. При увеличении температуры плотность сверхтока резко падает, см. [48].

Неоднозначная токо-фазовая зависимость типа изображенной на рис. 21.1, *в*, характерна для тонкопленочных сверхпроводящих мостиков с размерами сужения, заметно большими длины когерентности $\xi(T)$ в сверхпроводнике [44]. Срывы с одной ветви многозначной функции на другую, показанные на рис. 21.1, *в*, соответствуют изменениям разности фаз на 2π (или число, кратное 2π в общем случае) и связаны с проникновением в область мостика квантов магнитного потока, т.е. вихрей Абрикосова (см. следующую главу).

Приведем теперь два доказательства соотношения (21.1).

Но сперва - небольшое напоминание из квантовой механики [49]. Эволюция квантово-механической системы во времени определяется волновой функцией $\Psi(t)$, которая является решением уравнения Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \quad (21.3)$$

где \hat{H} - оператор Гамильтона рассматриваемой системы. Если эта система может находиться только в дискретных состояниях ψ_α (α - набор индексов, характеризующих данное дискретное состояние), то волновую функцию системы можно разложить по полному базису $\{\psi_\alpha\}$:

$$\Psi(t) = \sum_\alpha C_\alpha(t)\psi_\alpha. \quad (21.4)$$

Подстановка этого разложения в формулу (21.3) дает

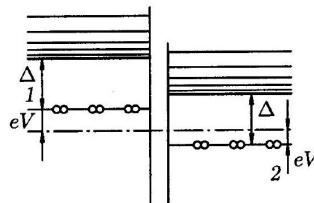
$$i\hbar \frac{dC_\beta}{dt} = \sum_{\alpha} H_{\beta\alpha} C_\alpha(t) \quad (21.5)$$

Здесь

$$H_{\beta\alpha} = \int \psi_\beta^* \hat{H} \psi_\alpha dV$$

При этом $H_{\beta\beta}$ - это энергия системы в состоянии ψ_β , а $H_{\beta\alpha}$ матричный элемент, характеризующий вероятность перехода системы из состояния ψ_α в состояние ψ_β . Функция $C_\alpha(t)$ представляет собой амплитуду состояния ψ_α , а $|C_\alpha|^2$ - вероятность найти систему в состоянии ψ_α .

Рис. 21.2. Энергетическая схема туннельного джозефсоновского перехода, к которому приложено напряжение V . Уровни 1 и 2 разделены интервалом 2eV.



Вернемся теперь к джозефсоновскому туннельному переходу. Пусть в общем случае ток через туннельный переход столь велик ($I_s > I_c$), что на переходе возникла разность потенциалов V . Энергетическая схема такого перехода изображена на рис. 21.2 (см. 46). Будем рассматривать (согласно Фейнману [50]) систему сверхпроводящих электронов (куперовских пар) как двухуровневую квантовомеханическую систему, т.е. положим, что пара может находиться или на уровне 1, или на уровне 2. Ее энергия будет тогда, соответственно, H_{11} или H_{22} , причем $H_{11} = eV$, $H_{22} = -eV$. Переход пары с уровня 1 на уровень 2 определяется величиной матричного элемента $H_{12} = H_{21} = K$. Уравнение (21.5) в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= eVC_1(t) + KC_2(t) \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= KC_1(t) - eVC_2(t) \end{aligned} \quad (21.5)$$

Здесь C_1 и C_2 - амплитуды состояний пар на уровнях 1 и 2, а $|C_1|^2$ и $|C_2|^2$ нормированы так, что $|C_1|^2 = |C_2|^2 = n_s$, где n_s плотность сверхпроводящих электронов в сверхпроводящих обкладках перехода. Для простоты предполагаем, что обе обкладки сделаны из одного и того же материала. Представляя амплитуды C_1 и C_2 в виде

$$C_1 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_1}, \quad C_2 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_2}$$

и подставляя в уравнения (21.5), получим после разделения вещественной и мнимой частей следующие выражения:

$$\frac{dn_s}{dt} = \frac{2Kn_s}{\hbar} \sin \varphi \quad (21.6)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi - \frac{eV}{\hbar} \quad (21.7)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi + \frac{eV}{\hbar} \quad (21.8)$$

где $\varphi = \theta_2 - \theta_1$.

Ток через туннельный переход пропорционален dn_s/dt . Действительно, при включении тока, в первый момент протекания тока, плотность сверхпроводящих электронов начнет изменяться со скоростью dn_s/dt и возникнет ток $I_s \propto dn_s/dt$. Конечно, этот уход электронов из сверхпроводящей обкладки будет тотчас же компенсирован приходом новых электронов из источника тока, поскольку переход включен в замкнутую электрическую цепь, и концентрация n_s будет оставаться постоянной из-за электронейтральности всей системы. Однако для определения сверхтока достаточно принять, что $I_s \propto dn_s/dt$. Тогда из формулы (21.6) сразу получаем уравнение стационарного эффекта Джозефсона

$$I_s = I_c \sin \varphi \quad (21.9)$$

Второй вывод

Другой вывод этого равенства, применимый к коротким пленочным мостикам, был сделан Асламазовым и Ларкиным [51].

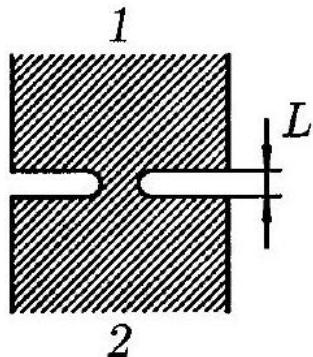
Пусть мостик (рис.21.3) настолько короткий, что его длина $L \ll \xi$. Применим к такому мостику первое уравнение теории Гинзбурга-Ландау (14.16), которое в отсутствие магнитного поля примет вид

$$-\xi^2 \nabla^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0 \quad (21.10)$$

В нашем коротком мостике существенное изменение параметра порядка происходит на длине мостика L . Сделаем оценку величины $\nabla^2 \psi$ для этого случая:

$$\nabla^2 \psi \sim \psi / L^2$$

Рис. 21.3. Короткий мостик с длиной $L \ll \xi$ соединяет широкие пленки 1 и 2.



С другой стороны, сама величина параметра порядка $|\psi| \sim \sim 1$. Поэтому первый член в (21.10) будет главным, так как его порядок будет

$$\xi^2 / L^2 \gg 1$$

а все остальные слагаемые порядка единицы. Поэтому уравнение (21.10) можно упростить:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (21.11)$$

Пусть далеко от мостика в пленке 1 параметр порядка ψ равен

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1}$$

а далеко от мостика в пленке 2

$$\psi = \psi_2 e^{i\theta_2}$$

Здесь ψ_1, ψ_2, θ_1 и θ_2 - постоянные, не зависящие от координат. Ясно, что на самом мостике происходит интерференция этих двух волновых функций; решение уравнения (21.11) ищем в виде

$$\psi = \psi_1 e^{i\theta_1} f(r) + \psi_2 e^{i\theta_2} (1 - f(r)), \quad (21.12)$$

причем $f(r) \rightarrow 1$ в глубине пленки 1 и $f(r) \rightarrow 0$ в глубине пленки 2.

Подставляя (21.12) в (21.11), получим уравнение относительно $f(r)$:

$$\nabla^2 f(r) = 0$$

Однако нам нет необходимости решать это уравнение. Достаточно знать, что решение существует, и перейти к вычислению сверхтока, который, согласно второму уравнению ГинзбургаЛандау, можно записать в виде

$$j_s = \frac{|\alpha| \hbar e}{\beta m} \operatorname{Im}(\psi^* \nabla \psi)$$

Подставляя сюда формулу (21.12), получим после простых преобразований выражение для плотности сверхтока через мостик в виде

$$j = j_c \sin \varphi \quad (21.13)$$

где $\varphi = \theta_1 - \theta_2$.

Таким образом, и для случая мостика мы снова приходим к тому же простому соотношению между сверхтоком и разностью фаз волновых функций сверхпроводников на "берегах" перехода.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполняется синусоидальное токо-фазовое соотношение.

5.3.3 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов

Если ток, задаваемый внешним источником, превысит критическое значение I_c , на слабой связи появится напряжение V . К каким это приведет последствиям?

22.1. Джозефсоновская генерация.

Поведение квантовомеханической системы определяется решением уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (22.1)$$

где \hat{H} - гамильтониан системы.

Волновая функция стационарного состояния ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\psi_1 = E\psi_1$$

где E -энергия этого стационарного состояния, $\psi = \psi_1 e^{i\theta(t)}$, причем ψ_1 не зависит от времени. Подставляя эту волновую функцию в (22.1), получим

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = E \quad (22.2)$$

5.3.3 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов

Если на слабой связи установилась разность потенциалов V , то это означает, что энергии куперовских пар в берегах перехода E_1 и E_2 связаны соотношением

$$E_1 - E_2 = 2eV \quad (22.3)$$

так как заряд одной пары равен $2e$.

Подставляя (22.3) в (22.2), получим второе фундаментальное соотношение Джозефсона

$$2eV = \hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (22.4)$$

Точно то же самое соотношение получится, если из формулы (21.8) вычесть формулу (21.7).

Что же происходит с джозефсоновским переходом, когда по нему течет заданный извне постоянный ток $I > I_c$? Поскольку сверхток не может быть больше I_c , ясно, что теперь, кроме сверхтока, возникнет ток нормальной компоненты, т.е. возникнет ток одиночных электронов. Это утверждение сразу приводит нас к так называемой резистивной модели, т.е. рассмотрению джозефсоновского перехода как параллельного включения собственно джозефсоновского контакта, пропускающего только сверхток, и нормального участка (рис. 22.1). Полный ток I равен сумме нормального тока V/R и сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (22.5)$$

где R -сопротивление перехода в нормальном состоянии. Это дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(t)$ элементарно интегрируется. Подставляя решение в (22.4), получим напряжение на переходе в виде

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t} \quad (22.6)$$

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2} \quad (22.7)$$

Так мы обнаруживаем удивительное свойство джозефсоновского перехода. Если заданный извне постоянный ток I больше критического тока перехода, на нем возникает напряжение V , периодически зависящее от времени. Это явление получило название джозефсоновской генерации. Схематическая зависимость $V(t)$ от времени дана на рис. 22.2. Частота колебаний напряжения зависит от того, насколько превышает ток через переход I его критическое значение I_c (см. (22.7)).

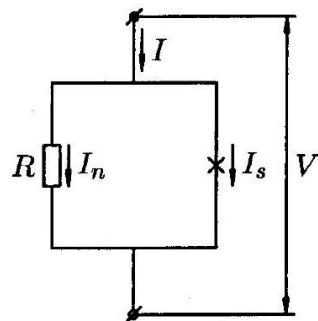


Рис. 22.1. Резистивная модель джозефсоновского перехода. Сверхток через собственно джозефсоновский переход равен $I_s = I_c \sin \varphi$.

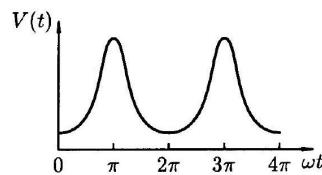


Рис. 22.2. Напряжение на переходе (джозефсоновская генерация).

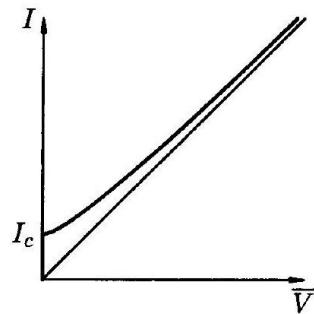
Вольтметр постоянного тока, подключенный к переходу, покажет, конечно, среднее по периоду значение \bar{V} . Усреднение по времени формулы (22.6) дает

$$2e\bar{V} = \hbar\omega. \quad (22.8)$$

Эта формула имеет совершенно ясную интерпретацию. Если среднее расстояние по энергиям между уровнями куперовских пар в двух половинках перехода равно $2e\bar{V}$, то при переходе одной пары через область слабой связи такая энергия выделяется в виде кванта электромагнитного излучения.

Вольт-амперная характеристика перехода, которая следует из формул (22.7) и (22.8), показана на рис. 22.3.

Рис. 22.3. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода.



При токе через переход $I = I_s + I_n$, достаточно близком к I_c , значительная его доля протекает в виде сверхпроводящего тока I_s через джозефсоновский элемент на эквивалентной схеме рис. 22.1. При $I \gg I_c$ практически весь постоянный ток течет через резистивный элемент ($I \simeq I_n$), и вольт-ампернал характеристика на этом участке выходит на характеристику перехода в нормальном состоянии. Чтобы подробнее пояснить такое поведение, представим скорость изменения разности фаз на переходе в таком виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar}V = \frac{2e}{\hbar}R(I - I_s) = \frac{2e}{\hbar}R(I - I_c \sin \varphi) \quad (22.9)$$

Можно заметить, что в течение первого полупериода джозефсоновского тока, когда $I_s = I_c \sin \varphi$ совпадает по направлению с полным током I через переход ($\sin \varphi > 0$), скорость изменения

разности фаз меньше, чем в течение второго полупериода, когда сверхпроводящий ток имеет обратное направление ($\sin \varphi < 0$). Усреднение по полному периоду даст сверхпроводящую компоненту, совпадающую по направлению с I , что обеспечит уменьшение доли нормальной компоненты I_n в полном токе. С увеличением I доля I_s в (22.9), ограниченная I_c , будет уменьшаться, и скорости изменения разности фаз на положительном и отрицательном полупериодах в конце концов сравняются. Это приведет к исчезновению сверхпроводящей компоненты в среднем по времени токе и выходу вольт-амперной характеристики на линейную зависимость $V = RI$.

5.3.3 22. Нестационарный эффект Джозефсона. Резистивные характеристики джозефсоновских переходов

Здесь необходимо отметить, что соотношения (22.4) и (22.8) являются совершенно фундаментальными и точными. Многочисленные эксперименты подтвердили их с громадной точностью.

Впервые джозефсоновская генерация наблюдалась советскими физиками И. К. Янсоном, В. М. Свищуновым и И. Д. Дмитренко [14] в 1964 г.

При нарастании тока через переход от нуля до величины I_s за время t в переходе запасается некоторая энергия:

$$E_{\text{CB}} = \int_0^t I_s V dt \quad (22.10)$$

Здесь V -это напряжение, возникающее на переходе в процессе нарастания тока согласно общей формуле (22.4). Подставляя сюда $I_s = I_c \sin \varphi$ и (22.4), после элементарного интегрирования получим

$$E_{\text{CB}} = E_J(1 - \cos \varphi), \quad (22.11)$$

где

$$E_J = \hbar I_c / 2e = \Phi_0 I_c / 2\pi \quad (22.12)$$

есть максимальная величина понижения энергии перехода за счет наличия слабой связи между сверхпроводящими берегами. Энергию (22.12) мы в дальнейшем будем называть просто джозефсоновской энергией. Джозефсоновский переход является фактически нелинейной индуктивностью, запасающей энергию при изменении тока через него.

При вычислении полной свободной энергии замкнутой системы, в которую включен джозефсоновский переход, нужно учитывать также энергию, затрачиваемую источником тока:

$$E_{\text{ист}} = \int_0^t IV dt = \frac{\hbar I}{2e} \varphi = \frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi \quad (22.13)$$

Таким образом, свободная энергия для рассматриваемого случая перехода с заданным током (т.е. потенциальный "рельеф" вдоль угловой координаты φ) определяется соотношением

$$E = E_J(1 - \cos \varphi) - \frac{\Phi_0}{2\pi} I \varphi \quad (22.14)$$

которое графически изображено на рис. 22.4. С увеличением тока через переход средний наклон изображенного рельефа (часто называемого "стиральной доской") возрастает, а глубина локальных минимумов, расположенных в точках $\varphi_0 = \arcsin(I/I_c) + +2\pi n$, уменьшается. При $I = I_c$ потенциальные барьеры U_0 на кривой (22.14) исчезают, что соответствует непрерывному изменению фазы и появлению напряжения на переходе.

22.2*. Критический ток и "ток возврата" джозефсоновского перехода с емкостью.

Механизмы токопереноса в туннельных сверхпроводящих переходах будут подробно рассмотрены в 46. Покажем здесь, что поведение туннельного джозефсоновского перехода, в котором два сверхпроводящих берега разделены тонкой прослойкой изолятора, как это изображено на рис. 20.1, а, сходно с поведением массивной частицы в потенциале, изображенном на рис. 22.4. Для описания туннельного перехода в рамках резистивной модели необходимо дополнить эквивалентную схему (рис. 22.1) параллельно включенной емкостью C . Ток

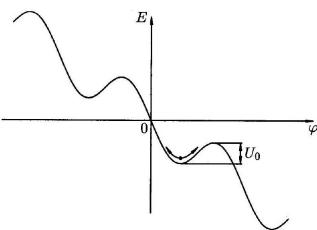


Рис. 22.4. Потенциальный рельеф $E(\varphi)$ джозефсоновского перехода с заданным током. смещения через емкостной элемент

$$I_D = C \frac{dV}{dt} = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (22.15)$$

должен быть добавлен в соотношение (22.5), которое примет вид

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi = I \quad (22.16)$$

или

$$\left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C \ddot{\varphi} + \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 R^{-1} \dot{\varphi} + E_J \sin \varphi = E_J \frac{I}{I_c} \quad (22.17)$$

где $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ означает производные φ по времени второго и первого порядка. Уравнение (22.17) - фактически уравнение движения маятника с моментом инерции $J = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C$, коэффициентом вязкости $\eta = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 R^{-1}$, максимальным гравитационным моментом $mgl = E_J$ и приложенным вращающим моментом $E_J (I/I_c)$; $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ - угловое ускорение и угловая скорость маятника. Легко видеть, что собственная частота малых колебаний $(mgl/J)^{1/2}$, называемая в джозефсоновском случае плазменной частотой перехода, выражается соотношением

$$\omega_p = \left(\frac{E_J}{J} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi I_c}{C\Phi_0} \right)^{1/2} \quad (22.18)$$

Плазменная частота может рассматриваться также как резонансная частота

$$\omega_p = (L_J C)^{-1/2} \quad (22.19)$$

высокочастотного контура с емкостью C и индуктивностью L_J . Сравнение (22.19) и (22.18) дает для собственной индуктивности джозефсоновского перехода следующее значение (для малых изменений φ):

$$L_J = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} \quad (22.20)$$

Выражение (22.17) часто бывает удобно представлять также как уравнение движения массивной частицы в периодическом потенциале, представленном на рис. 22.4. В этом случае величина $\left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C$ играет роль массы m частицы. С точностью до замены φ на линейную координату x мы получаем уравнение движения частицы в вязкой среде с $\eta = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 R^{-1}$ в одномерном периодическом потенциале $E_J(1-\cos x)$ под действием приложенной силы $E_J (I/I_c)$. «Масса», определяющая «инерционное» поведение перехода при изменении φ , связана с величиной емкости C . «Кинетическая энергия» $mv^2/2$ такой частицы, пропорциональная m и $\dot{\varphi}^2$, в точности равна электрической энергии $CV^2/2$, запасаемой в переходе при возникновении напряжения $V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$, пропорционального скорости изменения разности фаз φ на переходе.

Выше мы показали, что массивная частица начинает непрерывно двигаться при наклоне «стиральной доски», соответствующем $I = I_c$. Однако в связи с инерцией частицы остановить

ее можно только несколько уменьшив угол наклона по сравнению с критическим, т. е. при некотором «токе возврата» $I_r < I_c$.

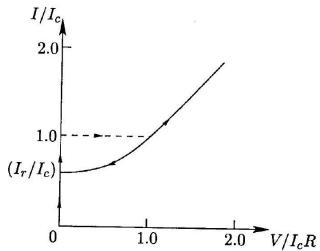


Рис. 22.5. Вольт-амперная характеристика перехода с $\beta_C = 4$.

Ток возврата (или «ток захвата») тем меньше, чем выше емкость («масса») и чем меньше вязкость, т.е. выше сопротивление туннельного перехода. Гистерезисное поведение вольт-амперной характеристики туннельного перехода показано на рис. 22.5. Количественно ток возврата и необратимость резистивных свойств определяются величиной параметра Маккамбера [52]:

$$\beta_C = (2e/\hbar)I_cCR^2 \quad (22.21)$$

Использование параметра β_C и характерной джозефсоновской частоты $\omega_c = (2e/\hbar)I_cR$ позволяет упростить (22.17):

$$I/I_c = \beta_C\omega_c^{-2}\ddot{\varphi} + \omega_c^{-1}\dot{\varphi} + \sin\varphi \quad (22.22)$$

При $\beta_C \leq 1$ можно пренебречь «емкостным» членом в (22.22) и получить снова (22.5). В этом случае вольт-амперная характеристика однозначна и описывается соотношением (22.7) для переходов с непосредственной проводимостью:

$$V = R\sqrt{I^2 - I_c^2} \quad (22.23)$$

При $\beta_C > 1$ вольт-амперные характеристики приобретают гистерезисный вид, показанный на рис. 22.5. Прямая ветвь представляет собой вертикальную ступеньку тока от 0 до I_c при нулевом

напряжении, после которой следует срыв на возвратную ветвь (называемую также часто «квазичастичной ветвью»). Численные расчеты [52, 53] дают зависимость тока возврата I_r от β_C , показанную на рис. 22.6. Для $\beta_C \rightarrow \infty$ имеем $I_r \rightarrow 0$. Это означает, что возвратная часть вольт-амперной характеристики линейна¹⁾ ($V = RI$), как показано на рис. 22.7, т.е. в эквивалентной схеме резистивной модели, которая представляет собой параллельное включение R, C и собственно джозефсоновского элемента (переносящего сверхпроводящий ток $I_c \sin\varphi$), транспортный ток течет только через нормальное сопротивление. Чтобы объяснить физическую природу изменения обратного хода характеристики при увеличении емкости перехода, представим β_C (см. (22.21)) через проводимость $\omega_c C$ емкостного элемента эквивалентной схемы на частоте ω_c и проводимости резистивного элемента $G = 1/R$:

$$\beta_C = \omega_c C/G \quad (22.24)$$

Легко видеть, что при $\beta_C \gg 1$ емкостной элемент полностью шунтирует переменный джозефсоновский ток, зануляя сверхпроводящую часть в полном транспортном токе через джозефсоновский контакт. При малых C среднее по времени значение сверхпроводящей компоненты не равно нулю, поэтому напряжения в интервале от нуля до нескольких $V_c = I_c R$ понижаются по сравнению со случаем нормального туннельного контакта.

III-з.

22.1. Два джозефсоновских перехода с критическими токами $I_{c1} = 500$ мА и $I_{c2} = 700$ мА включены параллельно в сверхпроводящую цепь. Полный ток через оба перехода равен 1 мА. Чему равны токи в каждом из переходов?

Решение Поскольку переходы включены параллельно, разности фаз φ_1 и φ_2 на переходах будут равны. Поэтому токи по переходам распределяются пропорционально их критическим токам: $I_1 = 0.417$ мА, $I_2 = 0.583$ мА.

• Мы пренебрегаем здесь для простоты щелью в энергетическом спектре нормальных носителей в сверхпроводнике и особенностью в плотности их состояний, которые будут обсуждаться в §§45–46. Вольт-амперные характеристики с квазичастичными (возвратными) ветвями, рассчитанные с учетом этих особенностей, приведены на рис. 46.7.

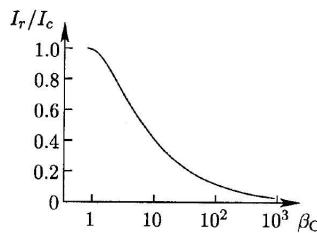


Рис. 22.6. Зависимость тока возврата от величины β_C [52].

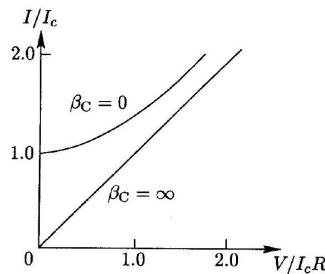


Рис. 22.7. Вольт-амперные характеристики джозефсоновских переходов, рассчитанные в рамках резистивной модели (см. примечание на с. 131) для случаев незначительной ($\beta_C = 0$) и доминирующей ($\beta_C = \infty$) емкостей.

III-з.

22.2. Найти разность между максимальным и минимальным значениями V на графике рис. 22.2.

Ответ. $V_{\max} - V_{\min} = 2I_c R$.

III-з.

22.3. Точечный контакт имеет критический ток $I_c = 1$ мА и сопротивление в нормальном состоянии $R = 2$ Ом. Найти величину постоянного напряжения на контакте \bar{V} и частоту джозефсоновой генерации ν , если через контакт течет ток $I = 1.2$ мА.

Ответ. $\bar{V} = 1.33$ мВ; $\nu = 641$ ГГц.

III-з.

22.4. Критический ток джозефсоновского перехода равен $I_c = 100$ мА. Через переход пропускается постоянный ток $I_0 = 70$ мА и слабый переменный ток с амплитудой $I_1 = 2$ мА и частотой $\nu = 10$ Мц, т.е. $I = I_0 + I_1 \sin 2\pi\nu t$. Найти напряжение на переходе, пользуясь СИ.

Решение Разность фаз на переходе ищем в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где φ_0 – разность фаз, создаваемая постоянным током I_0 . Напряжение на переходе $V = (\Phi_0/2\pi) d\varphi/dt = (\Phi_0/2\pi) d\varphi_1/dt$, но $d\varphi_1/dt = (dI/dt)(dI/d\varphi_1)^{-1}$. Подставляя это выражение в выражение для V , получим

$$V = \frac{\Phi_0}{I_c \cos \varphi_0} \nu I_1 \sin(2\pi\nu t + \pi/2)$$

При условиях задачи амплитуда переменного напряжения будет 0.58 нВ.

Замечание. Из решения задачи следует, что напряжение V опережает по фазе ток через переход на угол $\pi/2$. Это значит, что переход ведет себя как индуктивность $L = \Phi_0/(2\pi I_c \cos \varphi_0)$.

5.3.4 23*. Флуктуации критического тока. Макроскопическое квантовое туннелирование

23.1. Тепловые флуктуации критического тока в джозефсоновском переходе.

Величина I_c является фундаментальной характеристикой джозефсоновского перехода, определяемой энергией связи E_J (22.12). Мы видели выше, что при токе через переход $I = I_c$ исчезают барьеры (U_0) в потенциальном рельефе $E(\varphi)$. Однако и при несколько более низких токах возможен распад метастабильных состояний джозефсоновского перехода путем преодоления потенциальных барьеров за счет шума в измерительных цепях, за счет тепловых и квантовых флуктуаций фазы. Таким образом, реально наблюдаемый критический ток, выше которого начинается непрерывное изменение фазы во времени и возникает напряжение на переходе, несколько меньше, чем $I_c = \frac{2e}{\hbar} E_J = \frac{2\pi}{\Phi_0} E_J$. Здесь нужно оговориться, что если затухание велико (т.е. величина параметра Маккамбера β_C достаточно мала), то единичная флуктуация «перебросит» переход в состояние, соответствующее следующему локальному минимуму; возникающий короткий импульс напряжения, соответствующий отдельному флуктуационному процессу, зафиксировать практически невозможно. В переходах с малым затуханием ($\beta_C \gg 1$) изза большой инерции система не задержится в соседнем минимуме, а будет разгоняться пока $\dot{\varphi}$ (т. е. V) не достигнет стационарного значения за счет возрастания диссипативного члена в (22.17). Этому процессу соответствует скачок на вольт-амперной характеристике, показанный на рис. 22.5.

Рассмотрим термоактивационный распад метастабильного состояния джозефсоновского перехода с током, т.е. термоактивационное преодоление барьера U_0 , изображенного на рис. 22.4. Высота этого барьера при токах чуть ниже критического ($|I - I_c| \ll I_c$) невелика и определяется выражением [54, 55]

$$U_0(I) = \frac{4\sqrt{2}}{3} E_J (1 - I/I_c)^{3/2} \quad (23.1)$$

Частота собственных колебаний перехода на дне потенциальной ямы есть

$$\omega(I) = \omega_p [1 - (I/I_c)^2]^{1/4} \quad (23.2)$$

где ω_p – плазменная частота (22.18). Скорость распада состояния пропорциональна частоте попыток (23.2) и бульмановскому фактору $\exp(-U_0/k_B T)$. Вероятность распада при конечных температурах сильно возрастает с приближением I к I_c ($U_0 \rightarrow 0$). Дополнительные предэкспоненциальные множители, полученные из точных количественных расчетов, подробно обсуждались в работах [56, 57, 55]. На рис. 23.1 представлены расчеты [58] вольтамперных характеристик для переходов с $\beta_C \geq 1$, учитывающие тепловые флуктуации. (Параметр $\gamma = 2E_J/(k_B T)$.) Эксперименты, проведенные как на переходах со слабым затуханием [54], так и на переходах с сильным затуханием [59], показали хорошее согласие с расчетами.

В последней работе переход с сильным затуханием включался в сверхпроводящее кольцо, ток I через переход задавался путем приложения внешнего магнитного поля, а распад метастабильного состояния фиксировался по проникновению магнитного потока в кольцо. Для измерения магнитного потока использовался чувствительный сквид-магнитометр, описано работы которого посвящены последние разделы данной главы.

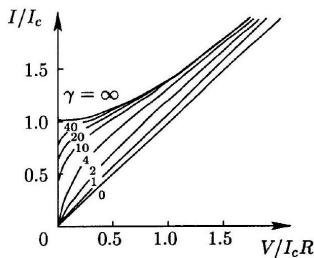


Рис. 23.1. Влияние тепловых флуктуаций на вольт-амперные характеристики джозефсоновских переходов с $\beta_C \geq 1$ ($\gamma = 2E_J/(k_B T)$). Расчеты взяты из работы [58].

23.2. Макроскопические квантовые эффекты.

Прежде чем обратиться к процессам квантового распада метастабильных состояний джозефсонового перехода, рассмотрим условия, при которых джозефсоновский контакт становится по-настоящему квантовым макроскопическим объектом, т.е. одна из макроскопических степеней свободы (сверхпроводящая фаза) становится настоящей квантовомеханической переменной.

Явление сверхпроводимости в целом невозможно описать без привлечения квантовой механики. Эффекты Джозефсона - наиболее яркий пример установления когерентных волновых свойств между двумя массивными слабосвязанными сверхпроводниками. Движение сверхпроводящих электронов является существенно квантовым, и фаза сверхпроводящей волновой функции явно проявляется в различных интерференционных эффектах. Тем не менее, в большинстве случаев изменение фазы во времени может быть достаточно точно описано классической механикой. Мы видели это в предыдущем разделе в случае динамики разности фаз в одиночном тунNELЬНОМ джозефсоновском переходе. При выводе другого важного квантовомеханического эффекта, квантования магнитного потока, мы также фактически пользовались квази классическими выражениями и правилами квантования. Главной особенностью квазиклассического приближения, справедливого для макроскопических объектов с огромным числом степеней свободы, является то, что канонически сопряженные переменные могут иметь одновременно точные значения. Однако существуют условия, при которых фаза параметра порядка становится настоящей квантовомеханической переменной. Это приводит к т. наз. макроскопическим квантовым эффектам [55].

Вернемся к случаю маятника, уравнение движения которого аналогично уравнению (22.17) для разности фаз в одиночном джозефсоновском туннельном переходе. В случае маятника канонически сопряженными переменными (аналогичными координате и импульсу) являются угловая координата φ и момент импульса M . Если масса маятника стремится к нулю, необходимо учитывать квантовые эффекты в динамике, вообще говоря, макроскопической степени свободы φ . Из соотношения неопределенности

$$\Delta\varphi\Delta M \sim \hbar \quad (23.3)$$

следует, что величины φ и M не могут быть определены точно одновременно. Даже при нулевой температуре центр масс маятника не может находиться в состоянии покоя, поскольку это означало бы, что и φ , и M точно определены ($\varphi = 0, M = 0$). Следовательно, в квантовом пределе центр масс маятника должен испытывать, кроме тепловых флуктуаций,

флуктуации квантовой природы. Таким образом, если обычные когерентные эффекты - это квантовое когерентное движение микрочастиц (например, электронов в сверхпроводнике), то в макроскопических квантовых эффектах проявляется квантовое поведение макрообъекта в целом [60, 61].

Для перехода к квантовому пределу в джозефсоновском случае к нулю должна стремиться емкость C тунNELьного контакта, играющая роль массы. Квантовые флуктуации становятся значительными при приближении электрической («кулоновской») энергии перехода

$$E_C = e^2/2C \quad (23.4)$$

к джозефсоновской энергии E_J (22.12). Для экспериментального наблюдения квантовых эффектов важно, чтобы тепловые флуктуации были малы, т.е. выполнялось неравенство $k_B T < E_C, E_J$. Необходимые условия достигаются в джозефсоновских тунNELьных переходах с субмикронными размерами и емкостью, меньшей примерно $10^{-15}\Phi$, при температурах ниже 0.1 К. Напряжению $V \sim 100$ мкВ в таких переходах соответствует разность зарядов на обкладках $Q = CV \sim 10^{-19}$ К, т.е. порядка одного заряда электрона.

В нормальном состоянии высокая электрическая энергия e^2/C , возникающая в тунNELьном переходе в связи с туннелированием одного электрона, приводит к «кулоновской блокаде» туннелирования при напряжениях $V \leq e/C$ [62, 63]. Появление дополнительного кулоновского члена $Q^2/2C$ в энергии джозефсоновского перехода (22.14) также сильно изменяет динамику туннелирования сверхпроводящих пар [64, 65]. На рис. 23.2 приведена экспериментальная вольт-амперная характеристика из [66], полученная при $T < 0.1$ К для джозефсоновского тунNELьного перехода с площадью 0.01 мкм², емкостью $5 \cdot 10^{-16}\Phi$, джозефсоновской энергией $E_J \simeq 10^{-4}$ эВ и кулоновской энергией $E_C \simeq 1.6 \cdot 10^{-4}$ эВ. Легко видеть, что «зарядовые эффекты» приводят к исчезновению джозефсоновского критического тока и появлению области кулоновской блокады туннелирования куперовских пар при напряжениях, близких к нулю (от нуля до V_b).

Рассмотрим подробнее, с какими канонически сопряженными макроскопическими квантовыми переменными мы имеем дело в случае джозефсоновского перехода. «Момент импульса» перехода $M = J\dot{\varphi}$ с учетом того, что $J = (\hbar/2e)^2 C$ (см. обсуждение (22.17)), равен

$$M = J\dot{\varphi} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\dot{\varphi} = \frac{\hbar}{2e} CV = \frac{Q\hbar}{2e} \quad (23.5)$$

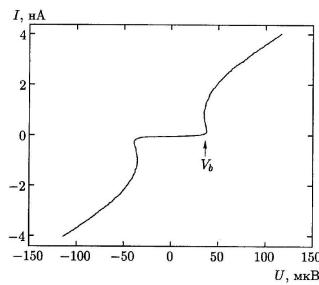


Рис. 23.2. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского туннельного перехода с субмикронными размерами [66]; V_b - критическое напряжение «кулоновской блокады».

где Q -электрический заряд на «обкладках» туннельного перехода, индуцированный напряжением V (пропорциональным $\dot{\varphi}$) на переходе. Таким образом, соотношение (23.3) принимает вид

$$\Delta\varphi\Delta Q \sim 2e \quad (23.6)$$

или

$$\Delta\varphi\Delta n \sim 1 \quad (23.7)$$

где $n = Q/2e$ – разбаланс количества сверхпроводящих пар, создающих заряд на обкладках туннельного перехода. В области величин токов и напряжений, где проявляются квантовые эффекты (рис. 23.2), через туннельный переход с $E_J \sim E_C$ проходят единицы электронов, т. е. величина n хорошо определена. Это означает, что разность фаз φ должна быть сильно размыта квантовыми флуктуациями, что и приводит к почти полному исчезновению критического тока. Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

Сильные флуктуации сверхпроводящей фазы могут возникать не только в туннельных переходах с кулоновской блокадой носителей. Локализация заряда возникает и в сверхпроводящих структурах с непосредственной проводимостью с увеличением беспорядка в области слабых связей и при приближении их нормального сопротивления к "квантовому сопротивлению"

$$R_Q \equiv \frac{h}{(2e)^2} \simeq 6.5 \text{КОМ} \quad (23.8)$$

В этом случае уменьшение подвижности носителей заряда, приводящее к затруднению переноса пар через высокоомную слабую связь, также должно сопровождаться увеличением квантовых флуктуаций сверхпроводящей фазы [67, 68].

23.3. Макроскопическое квантовое туннелирование и когерентность.

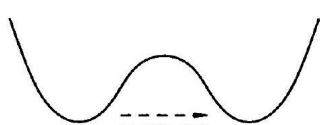
Если понижать температуру, скорость распада метастабильного состояния в потенциале, изображенном на рис. 22.4, выйдет на константу, которая определяется квантовыми флуктуациями. При таком распаде система в целом (как квантовая частица!) туннелирует под барьером U_0 (рис. 23.3, а). Впервые влияние квантовых флуктуаций на наблюдаемый критический ток туннельных джозефсоновских переходов малых размеров было вычислено в работе [69]. Скорость квантового распада при $T = 0$ можно оценить, полагая, что теперь в роли $k_B T$ в «больцмановском факторе» (ср. с обсуждением после (23.2)) выступает энергия нулевых колебаний, равная по порядку величины $\hbar\omega(I)$:

$$\tau_Q^{-1} = a_q \frac{\omega(I)}{2\pi} \exp\left(-\alpha \frac{U_0}{\hbar\omega(I)}\right) \quad (23.9)$$

Точные вычисления α и предэкспоненциального множителя a_q проведены в [55, 70, 71]. Наличие затухания в системе, $\eta = (\hbar/2e)^2 R^{-1}$, приводит к появлению в (23.9) дополнительного множителя [72] $\exp(-2\pi U_0 / (2eI_c R))$. Таким образом, вероятность квантовых процессов распада действительно должна возрастать с уменьшением емкости джозефсоновского перехода (в связи с возрастанием плазменной частоты перехода) и увеличением его сопротивления (в связи с уменьшением затухания), как это указывалось в предыдущем разделе.



а)



б)

Рис. 23.3. Макроскопическое квантовое туннелирование (а) и макроскопическая квантовая когерентность (б) в джозефсоновских системах.

Первые же эксперименты [73, 74] по измерению времени жизни метастабильного сверхпроводящего состояния малых джозефсоновских туннельных контактов подтвердили теоретические предсказания того, что ширина распределения плотности вероятности перехода в резистивное состояние таких контактов не зависит от температуры при достаточно низких ее значениях, причем температура выхода на квантовый режим преодоления барьера определяется величиной плазменной частоты контакта. Еще одним фактором, влияющим на время жизни метастабильного состояния туннельного перехода с током, является наличие квантованных уровней энергии джозефсоновского перехода [75] в ямах потенциала «стиральной доски» (рис. 23.4). Скорость распада с уровня E_i определяется как вероятностью заселенности данного уровня при конечной температуре, так и шириной потенциального барьера на этом уровне. Скорость распада можно увеличить, прикладывая к образцу высокочастотное электромагнитное поле $\hbar\Omega$, соответствующее расстоянию между уровнями, и, таким образом, увеличивая заселенность вышележащих уровней. Эксперименты [76] прекрасно подтвердили резонансное увеличение скорости распада при совпадении частоты приложенного высокочастотного поля и расстояния между квантованными уровнями энергии в джозефсоновских переходах с малой емкостью.

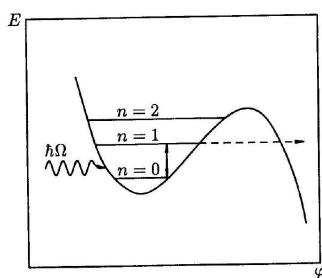


Рис. 23.4. Дискретные энергетические состояния в субмикронных туннельных джозефсоновских контактах и переходы между ними под действием высокочастотного электромагнитного поля.

Систематические экспериментальные исследования зависимости квантовых процессов в туннельных контактах от величины их сопротивления выполнены в работах [77, 78, 79]. Обнаружен фазовый переход из сверхпроводящего в диэлектрическое состояние при приближении сопротивления туннельного контакта к квантовому сопротивлению (23.8), который связывается с резким возрастанием флуктуаций сверхпроводящей фазы в контакте за счет макроскопического квантового туннелирования.

Еще одно важное понятие, которое возникло при исследовании структур с джозефсоновскими контактами, находящимися в "квантовом пределе", это понятие о макроскопической квантовой когерентности. В таких системах (например, сверхпроводящем кольце с тремя джозефсоновскими переходами во внешнем магнитном поле, равном половине кванта магнитного потока) джозефсоновская энергия может иметь два почти вырожденных минимума при значениях фазы φ_1 и φ_2 , разделенных потенциальным барьером (рис. 23.3, б).

Если диссипацию в контактах удается сделать очень слабой, становится возможным квантовомеханическое туннельное проникновение фазы из одного минимума в другой (обозначим амплитуду такого процесса \mathcal{T}), и правильными собственными состояниями системы являются смеси состояний, локализованных в первой и второй ямах. Иначе говоря, весь джозефсоновский контакт описывается волновой функцией $\Psi(\varphi)$, зависящей от фазы φ : $\Psi(\varphi) = a_1\Psi_1(\varphi) + a_2\Psi_2(\varphi)$, где волновые функции $\Psi_{1,2}(\varphi)$ соответствуют состояниям, локализованным в первой и второй ямах. Состояние с волновой функцией

$\Psi(\varphi)$, в котором обе амплитуды $a_{1,2}$ отличны от нуля, является когерентной смесью исходных (локализованных) состояний. Так, если энергии $E_{1,2}$ локализованных состояний 1,2 точно равны, то правильными собственными состояниями будут симметричное (основное) с $a_1 = a_2$ и возбужденное антисимметричное, $a_1 = -a_2$, а расщепление их энергетических уровней равно $2\mathcal{T}$. При увеличении исходного расщепления уровней $|E_1 - E_2|$ до величин, больших \mathcal{T} , роль туннелирования падает, а когерентные состояния становятся все более близкими к исходным локализованным. Экспериментальное подтверждение существования макроскопически когерентных состояний в системах джозефсоновских контактов было получено совсем недавно в работах [80, 81].

5.3.5 24. Отклик джозефсоновского перехода на внешнее магнитное поле

В этом параграфе мы ограничимся переходами, в которых нет концентрации тока, т.е. переходами типа сэндвич, или туннельными переходами. Пусть, например, такой переход представляет собой две массивные сверхпроводящие пластинки, разделенные тонким слоем диэлектрика (рис.24.1). Если такую систему поместить во внешнее магнитное поле, параллельное плоскости перехода, на внешней поверхности пластин возникнет экранирующий сверхток. Этот ток течет в слое порядка лондоновской глубины проникновения λ . Но при этом он должен пересечь плоскость джозефсоновского перехода, а плотность критического тока там очень мала (слабое место!). Поэтому, чтобы сохранить бездиссипативность течения, току приходится растекаться на значительной ширине вглубь перехода. Это и показано на рис. 24.1. Попробуем описать эту ситуацию математически.

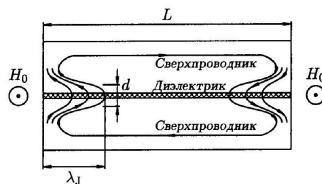


Рис. 24.1. Джозефсоновский туннельный переход, помещенный в магнитное поле H_0 . Показано распределение экранирующего (мейсснеровского) тока.

24.1. Уравнение Феррелла-Прейнджа.

Пусть ось x лежит в плоскости перехода, а магнитное поле направлено вдоль оси z . Область вдоль оси y , где протекает ток и существует магнитное поле, имеет размер d (см. рис. 24.1), причем $d = 2\lambda + t$. Здесь t -толщина изоляционной прослойки туннельного перехода. Рассмотрим две близкие пары точек (1, 2; 3, 4) на переходе (рис. 24.2). Эти точки выбраны вне области, занятой магнитным полем, а расстояние между ними принято равным dx .

Обобщенный импульс для куперовской пары запишем в виде

$$\hbar\nabla\theta = 2m\mathbf{v}_s + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \quad (24.1)$$

где θ - фаза волновой функции, \mathbf{v}_s - скорость пары, m - масса электрона, e -его заряд, \mathbf{A} - векторный потенциал магнитного поля. Проинтегрируем это уравнение по пунктирным участкам,

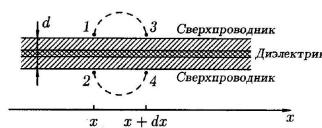


Рис. 24.2. Участок джозефсоновского перехода вблизи края перехода. Заштрихована область с магнитным полем.

показанным на рис. 24.2. Все точки этого контура находятся в области, где нет сверхтока, поэтому там $v_s = 0$:

$$\hbar \left[\int_1^3 \nabla \theta d\mathbf{l} + \int_4^2 \nabla \theta d\mathbf{l} \right] = \frac{2e}{c} \left[\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right] \quad (24.2)$$

Расстояние d будем в дальнейшем считать пренебрежимо малым. Тогда правую часть формулы (24.2) можно записать приближенно в виде

$$\frac{2e}{c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{2e}{c} d\Phi \quad (24.3)$$

где $d\Phi$ - магнитный поток, охватываемый пунктирным контуром, если этот контур дополнить отрезками 3 – 4 и 2 – 1. Теперь, очевидно, после интегрирования левой части в (24.2) получим

$$\hbar(\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4) = \frac{2e}{c} d\Phi$$

Учитывая, что $\theta_3 - \theta_4 = \varphi(x + dx)$, а $\theta_1 - \theta_2 = \varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{2e}{\hbar c} d\Phi$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dx}, \quad (24.4)$$

поскольку $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$.

Учитывая, что $(1/d)d\Phi/dx$ - это напряженность H магнитного поля в переходе в точке x в направлении оси z , имеем

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi}{dx} \quad (24.5)$$

Сверхток через переход в направлении оси y , согласно уравнениям Максвелла, равен

$$j_s = \frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx}.$$

Подставляя сюда (24.5) и учитывая основное джозефсоновское соотношение между током и разностью фаз $j_s = j_c \sin \varphi$, имеем окончательно так называемое уравнение Феррелла-Прейнджа [82]

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi \quad (24.6)$$

где λ_J равно

$$\lambda_J = \left(\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d} \right)^{1/2} \quad (24.7)$$

Решение $\varphi(x)$ уравнения (24.6) должно описать распределение разности фаз вдоль перехода. Рассмотрим случай очень слабого внешнего поля $H_0 \ll \Phi_0 / (2\pi\lambda_J d)$. В этом случае токи через переход тоже будут слабы и мала будет разность фаз φ . Поэтому уравнение (24.6) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_J^2}\varphi$$

которое элементарно решается:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \exp(-x/\lambda_J) \quad (24.8)$$

Подставляя это решение в (24.5), найдем магнитное поле в переходе:

$$H(x) = H_0 \exp(-x/\lambda_J)$$

Отсюда видно, что величина λ_J , имеющая размерность длины, представляет собой глубину проникновения слабого магнитного поля в джозефсоновский переход.

В практических расчетах величины λ_J удобно пользоваться СИ, поэтому приведем формулу (24.7) также в этой системе:

$$\lambda_J = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d} \right)^{1/2}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/М}$, $\Phi_0 = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ ВБ}$, j_c - критическая плотность тока через переход в $\text{А}/\text{м}^2$, d выражено в метрах. Если принять, что $d \sim 10^{-5} \text{ см}$, $j_c \sim 10^2 \text{ А}/\text{см}^2$, то λ_J оказывается порядка 0.1 мм, т.е. вполне макроскопической величиной.

24.2. Проникновение магнитного поля в переход.

Джозефсоновские вихри. В предыдущем параграфе мы изучили случай слабого внешнего поля, которое проникает в переход на величину λ_J - джозефсоновскую глубину проникновения. А что будет, если мы начнем увеличивать внешнее поле? Оказывается, что поведение джозефсоновского перехода во внешнем магнитном поле во многом напоминает поведение сверхпроводника второго рода. Здесь тоже, когда внешнее поле превысит некоторое характерное поле перехода H_{c1} , внутрь перехода начнут проникать сверхпроводящие вихри, несущие квант магнитного потока Φ_0 , так называемые джозефсоновские вихри.

Действительно, одно из решений уравнения Феррелла-Прайнджа (24.6) имеет вид

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \exp(x/\lambda_J) \quad (24.9)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что уравнение (24.6) этим решением удовлетворяется. Вид $\varphi_0(x)$, $d\varphi_0/dx \propto H$ и $d^2\varphi_0/dx^2 \propto j_s$ показан на рис. 24.3. Таким образом, джозефсоновский вихрь представляет собой так называемый солитон, единственное возбуждение широкого джозефсоновского перехода. Вдоль перехода вихрь имеет размер порядка $2\lambda_J$, а поперек перехода (вдоль оси y) - размер $d \ll 2\lambda_J$.

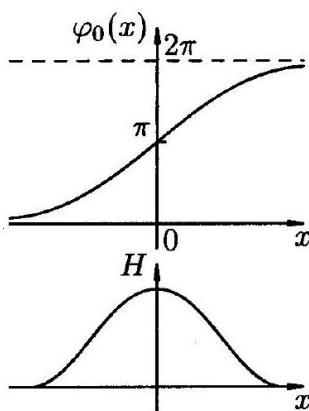
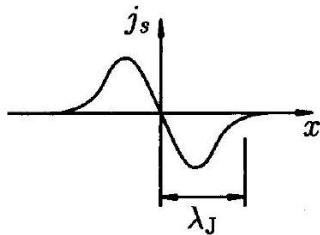


Рис. 24.3. Распределение разности фаз $\varphi_0(x)$, магнитного поля $H(x)$ и сверхтока $j_s(x)$ для джозефсоновского вихря.



Итак, начиная с поля H_{c1} , проникновение джозефсоновских вихрей в переход становится энергетически выгодным. Проникшие вихри образуют линейную цепочку, и контакт переходит в смешанное состояние. Пока - полная аналогия со сверхпроводником второго рода. Но полная ли? Оказывается - нет!

Все дело в том, что джозефсоновский вихрь, в отличие от абрикосовского (см. главу V), не имеет нормальной сердцевины. А второе критическое поле в сверхпроводниках второго рода H_{c2} связано с существованием этой нормальной сердцевины: сверхпроводимость пропадает, когда внешнее поле сжимает вихри настолько, что они начинают соприкасаться своими нормальными сердцевинами. Отсюда понятно, что для джозефсоновского перехода нет второго критического поля, хотя зависимость максимального тока перехода от магнитного поля, как мы вскоре увидим, может быть весьма причудливой.

Найдем теперь первое критическое поле перехода H_{c1} . Для этого надо рассмотреть свободную энергию перехода.

Как мы видели выше, джозефсоновский переход играет роль нелинейной индуктивности, в которой запасается энергия $E_{\text{св}}$ (см. (22.10) - (22.12)). Кроме этой энергии, в переходе еще присутствует магнитная энергия, которая в пересчете на единицу площади перехода будет

$$w_H = \frac{H^2}{8\pi} d \quad (24.10)$$

Суммируя $E_{\text{св}}$ (в расчете на единицу площади) и w_H и интегрируя вдоль всей длины перехода L (рис. 24.1), получим полную свободную энергию перехода, отнесенную к единице его длины вдоль магнитного поля (вдоль оси z):

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{H^2}{8\pi} d + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right].$$

Подставив сюда выражение для H из (24.5), можно превратить W в функционал относительно функции $\varphi(x)$:

$$W = \int_0^L dx \left[\frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi) \right] \quad (24.11)$$

Решая вариационную задачу на минимизацию этого функционала, снова приходим к уравнению Феррелла Прейнджа (24.6).

Используя выражение (24.11), легко найти свободную энергию одиночного джозефсоновского вихря W_0 в бесконечном переходе. Для этого достаточно подставить выражение (24.9) для $\varphi_0(x)$ в (24.11) и проинтегрировать. В результате получим

$$W_0 = \frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} \lambda_J \quad (24.12)$$

Если на переход наложено внешнее поле H_0 , гиббсовская свободная энергия одного джозефсоновского вихря в переходе будет, согласно (3.15), равна

$$\mathcal{G}_0 = W_0 - \Phi_0 H_0 / 4\pi \quad (24.13)$$

Из этой формулы видно, что при достаточно слабом внешнем поле $\mathcal{G}_0 > 0$, и существование джозефсоновского вихря внутри перехода энергетически невыгодно. Первое критическое поле H_{c1} это такое внешнее поле H_0 , при котором \mathcal{G}_0 становится равным нулю и начиная с которого существование вихря в переходе становится энергетически оправданным. Таким образом,

$$H_{c1} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\Phi_0}{\lambda_J d}. \quad (24.14)$$

Очевидно, что это поле меньше поля в центре вихря $H(0)$, которое, согласно (24.9) и (24.5), равно

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_J d}. \quad (24.15)$$

Поле $H(0)$ является полем перегрева мейсснеровского состояния перехода.

24.3. Максимальный бездиссипативный ток джозефсоновского перехода.

Сильное магнитное поле. Рассмотрим теперь случай сильных магнитных полей:

$$H_0 \gg \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_J d}. \quad (24.16)$$

Кроме того, предположим, что размер перехода $L \ll 2\lambda_J$, т.е. мы можем пренебречь собственным магнитным полем сверхтока, текущего через переход, по сравнению с H_0 . Неравенство (24.16) можно интерпретировать как условие того, что цепочка джозефсоновских вихрей в переходе сильно сжата, т.е. расстояние между соседними вихрями много меньше величины λ_J . В этих условиях поле внутри перехода можно считать постоянным и равным внешнему полю H_0 . Тогда из формулы (24.5) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0,$$

а интегрирование этого выражения дает

$$\varphi(x) = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_0 x + C, \quad (24.17)$$

где C -произвольная постоянная интегрирования. Подставляя (24.17) в джозефсоновское выражение для плотности тока (21.13), получим

$$j_s = j_c \sin \left(\frac{2\pi x}{a} + C \right) \quad (24.18)$$

где введено обозначение

$$a = \Phi_0 / H_0 d \quad (24.19)$$

Из выражения (24.18) следует, что действительно в рассматриваемом случае в переходе существует плотно сжатая цепочка вихрей. Она схематически изображена на рис. 24.4, a, а распределение туннельного сверхтока - на рис. 24.4, 6.

a)

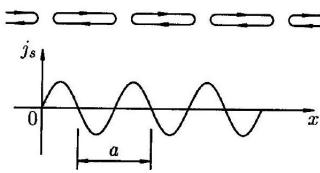


Рис. 24.4. а) Схематическое изображение смешанного состояния джозефсоновского туннельного перехода - плотно сжатая цепочка вихрей; б) распределение туннельного сверхтока через переход, которое при этом возникает.

Полный ток через переход можно найти, проинтегрировав j_s в (24.18) по x вдоль всего перехода:

$$I_s = j_c \int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\pi x/a + C) dx$$

В результате интегрирования имеем

$$I_s = j_c L \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \sin C \quad (24.20)$$

Из этой формулы следует, что при заданном магнитном поле изменение полного тока перехода I_s (задаваемого внешним источником) влечет за собой изменение константы C . Она подстраивается под каждое данное значение полного тока. Ясно, что максимальный бездиссипативный полный ток через переход I_{\max} будет равен просто модулю величины, стоящей перед $\sin C$ в формуле (24.20):

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi L/a)}{\pi L/a} \right| \quad (24.21)$$

где мы обозначили

$$I_c = j_c L.$$

Формуле (24.21) можно придать более удобный вид, если учесть, что, согласно (24.19),

$$\pi L/a = \pi \Phi / \Phi_0 \quad (24.22)$$

где через Φ мы обозначили полный магнитный поток в нашем джозефсоновском переходе:

$$\Phi = H_0 L d.$$

Подставляя (24.22) в формулу (24.21), получим окончательно

$$I_{\max} = I_c \left| \frac{\sin(\pi \Phi / \Phi_0)}{\pi \Phi / \Phi_0} \right| \quad (24.23)$$

Зависимость I_{\max} от внешнего магнитного поля $H_0 = \Phi / (Ld)$ изображена на рис. 24.5. Из формулы (24.23) и из рисунка следует, что смешанное состояние в переходе совершенно неустойчиво (достаточно ничтожного внешнего тока, чтобы его разрушить), когда в переходе укладывается целое число квантов потока. Наоборот, оно наиболее устойчиво, когда магнитный поток в переходе равен полуцелому числу квантов потока. Формула (24.23) прекрасно подтверждается экспериментом [83] (рис. 24.6).

III-з.

24.1. Найти критическое поле проникновения вихря в джозефсоновский туннельный переход H_{c1} и поле в центре этого вихря, если переход

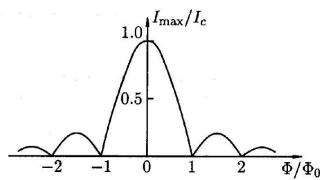


Рис. 24.5. Зависимость максимального бездиссипативного полного тока через джозефсоновский переход от внешнего магнитного поля, параллельного плоскости перехода.

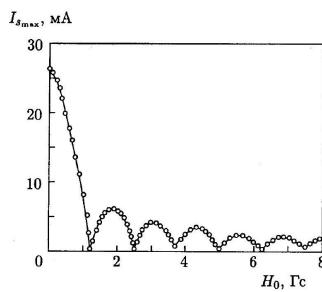


Рис. 24.6. Результаты экспериментального исследования зависимости максимального сверхтока через переход $\text{Sn} - \text{SnO}_x - \text{Sn}$ от магнитного поля [83].
образован двумя свинцовыми пленками. Лондоновская глубина проникновения магнитного поля в свинец $\lambda = 400\text{\AA}$, критическая плотность тока перехода равна $j_c = 10 \text{ A/cm}^2$.

Ответ. $H_{c1} = 0.290 \text{ Э}$; $H(0) = 0.455 \text{ Э}$.

III-з.

24.2. Пусть длина туннельного перехода, описанного в задаче 24.1, равна $L = 0.2 \text{ мм}$.
При каком внешнем поле будут наблюдаться первые два максимума критического тока?

Ответ. Первый максимум будет при поле $H_1 = 1.85$, второй-при $H_2 = 3.18 \text{ Э}$.

5.3.6 25. Сверхпроводящие квантовые интерферометры

(сквиды) В этом параграфе мы рассмотрим главные принципы работы так называемых сверхпроводящих квантовых интерферометров - сквидов. Это утвердившееся в русской научной и технической литературе слово возникло от английского сокращения SQUID (Superconducting Quantum Interference Device - сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Эти чрезвычайно простые по конструкции сверхпроводящие устройства открыли совершенно новые горизонты в технике низкотемпературных измерений. С их помощью можно создать магнитометры с чувствительностью порядка 10^{-11} Г с , вольтметры с чувствительностью порядка 10^{-15} В и другие приборы уникальной чувствительности. Несомненно, что в ближайшие годы сфера применения сквидов будет расширяться.

Итак, что же такое сквид?

Различают два типа сквидов - двухконтактный сквид (сквид на постоянном токе) и одноконтактный (высокочастотный) сквид.

25.1. Двухконтактный сквид. Это устройство представляет собой просто два джозефсоновских перехода, включенных параллельно (рис. 25.1). Включение осуществляется массивными сверхпроводниками, которые вместе с джозефсоновскими переходами a и b образуют замкнутый контур (кольцо). Внутрь этого

кольца введена катушка, создающая магнитный поток. Мы хотим понять, как будет зависеть максимальный бездиссипативный ток I_{\max} через такое устройство от величины полного магнитного потока Φ , заключенного внутри кольца интерферометра. Выделим внутри кольца две пары точек (1, 2) и (3, 4), близких к переходам a и b , и соединим их пунктирным контуром, как показано на рис. 25.1. Проинтегрируем выражение (24.1) для обобщенного импульса куперовской пары от точки 1 до точки 3 и от точки 4 до точки 2. В результате получим¹⁾

$$\theta_3 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 = \frac{2e}{\hbar} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right) \quad (25.1)$$

Слагаемое $2m\mathbf{v}_s$ при интегрировании опущено, так как все точки пунктирного контура проходят в области сверхпроводника, далекой от края. Там сверхток отсутствует и $\mathbf{v}_s = 0$. Поскольку расстояния между точками 1 и 2, так же как и между точками 3 и 4, малы по сравнению с длиной пунктирного контура, а векторный потенциал \mathbf{A} не имеет особенностей около джозефсоновских переходов, можно дополнить правую часть выражения (25.1) еще и интегралом по участкам 3 – 4 и 2 – 1. В результате получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{2e}{\hbar} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

Т.е.

$$\varphi_a - \varphi_b = 2\pi\Phi/\Phi_0 \quad (25.2)$$

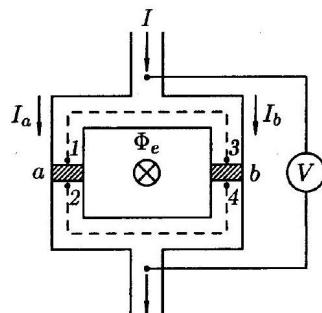
где Φ – полный магнитный поток, охватываемый кольцом интерферометра, $\varphi_a = \theta_2 - \theta_1$, $\varphi_b = \theta_4 - \theta_3$, а $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ – квант магнитного потока.

Так как согласно (21.1) ток через переход a равен

$$I_a = I_c \sin \varphi_a,$$

¹⁾ В этом параграфе мы будем пользоваться Международной Системой единиц (СИ).

Рис. 25.1. Два джозефсоновских перехода a и b , включенные параллельно сверхпроводящий интерферометр. В отверстие сквида введен некоторый магнитный поток Φ_e .



а через переход b

$$I_b = I_c \sin \varphi_b$$

(мы предполагаем, что оба перехода одинаковы, с одним и тем же критическим током I_c), полный ток I через интерферометр будет равен сумме токов I_a и I_b :

$$I = I_c (\sin \varphi_a + \sin \varphi_b) \quad (25.3)$$

Учитывая, что $\sin \varphi_a + \sin \varphi_b = 2 \sin [(\varphi_a + \varphi_b)/2] \cos [(\varphi_a - \varphi_b)/2]$, и используя формулу (25.2), преобразуем формулу (25.3) к виду

$$I = 2I_c \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \sin \left(\varphi_b + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (25.4)$$

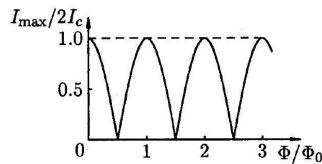


Рис. 25.2. Зависимость максимального тока через двухконтактный интерферометр от полного магнитного потока в его кольце.

При заданном полном магнитном потоке через кольцо интерферометра Φ единственным параметром, который подстраивается под заданный полный ток интерферометра I , является, согласно (25.4), величина φ_b . Отсюда (как и при выводе формулы (24.21)) следует, что максимальный бездиссипативный ток интерферометра равен

$$I_{\max} = 2I_c |\cos (\pi\Phi/\Phi_0)|. \quad (25.5)$$

Эта зависимость I_{\max} от Φ представлена на рис. 25.2. Видно, что наиболее устойчиво сверхпроводящее состояние кольца по отношению к внешнему току I будет в случаях, когда полный магнитный поток через интерферометр Φ будет равен целому числу квантов потока Φ_0 . Наоборот, случай, когда Φ равно полуцелому числу квантов потока, соответствует неустойчивому сверхпроводящему состоянию: достаточно приложить к интерферометру ничтожный ток I , чтобы прибор перешел в резистивное состояние и чтобы вольтметр (см. рис. 25.1) обнаружил напряжение на интерферометре.

Подчеркнем, что Φ - это полный поток в кольце интерферометра. Поток, созданный непосредственно катушкой, введенной в интерферометр, Φ_e , связан с Φ простым соотношением

$$\Phi = \Phi_e - LI_3$$

где L - индуктивность кольца интерферометра, I_3 - экранирующий ток, текущий по интерферометру. Критический ток интерферометра зависит от Φ_e тоже периодически и тоже с периодом Φ_0 . Эта зависимость показана на рис. 25.3.

Подробный анализ работы двухконтактного сквигда приведен в работе Кларка [84].

Двухконтактный сквид может быть использован как прибор необычайно высокой чувствительности во всех случаях, когда изменение наблюдаемой величины можно преобразовать в изменение магнитного потока. Ограничение чувствительности, определяемое лишь тепловыми шумами джозефсоновских переходов, по теоретическим оценкам может быть порядка нескольких единиц

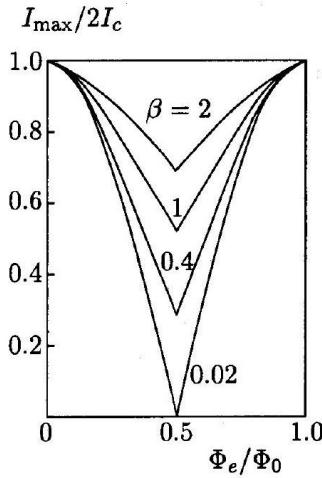


Рис. 25.3. Зависимость критического тока двухконтактного сквида от внешнего потока при разных значениях параметра $\beta = 2LI_c/\Phi_0$ [84].

на $10^{-5}\Phi_0$, если время измерения будет не меньше одной секунды. Это означает, что открывается возможность чувствовать изменения магнитного поля порядка $10^{-10} - 10^{-11}$ Гс. Для сравнения укажем, что магнитное поле Земли имеет величину около 0.5 Гс.

25.2. Одноконтактный сквид. Главным элементом одноконтактного сквида является сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом. Выделим пару точек (1, 2) вблизи перехода, как показано на рис. 25.4, и соединим их штриховым контуром, все точки которого лежат внутри массивного сверхпроводника и удалены от краев сверхпроводника на расстояния, большие по сравнению с глубиной проникновения λ . Это значит, что в любой точке пунктирного контура сверхток равен нулю, т.е. сверхтекущая скорость v_s отсутствует.

Вернемся теперь снова к выражению для обобщенного им-

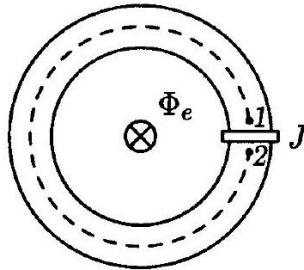


Рис. 25.4. Одноконтактный сквид: сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом J . Внутрь кольца введена катушка, создающая внешний поток Φ_e .

пульса куперовской пары (24.1) и проинтегрируем его по пунктирному контуру от точки 1 до точки 2. Учитывая, что $v_s = 0$, имеем

$$\hbar(\theta_2 - \theta_1) = 2e \int_1^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \quad (25.6)$$

Расстояние между точками 1 и 2 через переход значительно меньше расстояния между этими же точками по пунктирному контуру, а векторный потенциал \mathbf{A} никаких особенностей в области J не имеет. Поэтому правая часть формулы (25.6) существенно не изменится, если ее дополнить интегралом $\int_2^1 \mathbf{A} d\mathbf{l}$, проходящим через переход J . Тогда (25.6) можно будет переписать в виде

$$\hbar\varphi = 2e \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} \quad (25.7)$$

где φ - разность фаз на джозефсоновском переходе J . Формула (25.7) легко преобразуется к виду

$$\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0 \quad (25.8)$$

где Φ - полный магнитный поток, охваченный кольцом одноконтактного сквида.

Но полный поток Φ отличается от внешнего потока Φ_e , созданного катушкой в кольце, на величину, которая создается экранирующим током I_3 , текущим по кольцу:

$$\Phi = \Phi_e - LI_3 \quad (25.9)$$

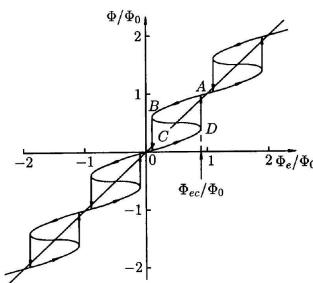


Рис. 25.5. Зависимость полного магнитного потока Φ в кольце одноконтактного интерферометра от внешнего потока Φ_e , введенного в это кольцо.

где L -индуктивность кольца. Поскольку этот экранирующий ток проходит по кольцу и по переходу, он связан с разностью фаз волновой функции сверхпроводящих электронов на переходе φ известным соотношением (21.1), которое вместе с (25.8) и (25.9) дает

$$\Phi_e = \Phi + LI_c \sin(2\pi\Phi/\Phi_0) \quad (25.10)$$

Эту формулу можно рассматривать как неявное выражение для зависимости полного потока Φ от внешнего потока Φ_e . Графически эта зависимость изображена на рис. 25.5.

Обсудим теперь физическую сторону дела. Начинаем увеличивать внешний поток Φ_e (т.е. ток в катушке, которая вставлена в кольцо сквида). Немедленно в кольце возникает экранирующий ток I_3 , который создает свой собственный поток, частично компенсирующий внешний поток Φ_e . Поэтому полный, результирующий поток Φ будет меньше Φ_e . Почему компенсация только

частичная? Если бы кольцо было сплошным (без слабой связи), компенсация была бы полной и Φ равнялось бы нулю. Это можно представить себе и немного по-другому.

Для задания внешнего потока Φ_e совсем не обязательно вводить катушку с током внутрь кольца интерферометра (это просто практически удобнее). Можно, наоборот, считать, что кольцо внесено во внешнее однородное поле, и тогда Φ_e - это просто произведение магнитной индукции этого внешнего поля на площадь кольца (предполагается, конечно, что плоскость кольца перпендикулярна внешнему магнитному полю). Теперь понятно, что если кольцо сплошное, без слабой связи, то полный поток Φ в нем равен нулю, а наличие слабой связи приводит к появлению такого места в кольце, через которое внешнее магнитное поле частично проникает внутрь кольца. Экранировка оказывается неполной.

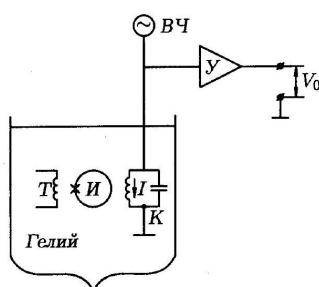
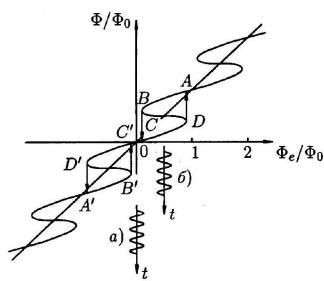


Рис. 25.6. Принципиальная блок-схема ВЧ-сквида. Обозначения: ВЧвысокочастотный генератор тока (с большим внутренним сопротивлением), - усилитель высокой частоты, - кольцо интерферометра с джозефсоновским переходом, T - вторичная катушка трансформатора потока, K -высокочастотный резонансный контур.

При дальнейшем увеличении внешнего потока Φ_e увеличивается и экранирующий ток. Он достигает критического значения при внешнем потоке Φ_{ec} (рис. 25.5). В этот момент (точка D на рис. 25.5) система становится неустойчивой и скачком переходит в следующее квантовое состояние (точка A на рис. 25.5). При этом полный магнитный поток кольца оказывается больше внешнего потока, и экранирующий ток изменяет свое направление (т.е. становится намагничивающим). Однако мы видим, что при дальнейшем увеличении Φ_e , когда внешний поток станет равен кванту потока Φ_0 , полный поток тоже станет равен кванту потока, и экранирующий ток исчезнет - ситуация вполне аналогичная случаю, когда $\Phi_e = 0$ (см. рис. 25.5). При дальнейшем увеличении Φ_e с периодичностью Φ_0 все процессы будут повторяться. При уменьшении Φ_e скачки будут происходить из точки B и аналогичных ей точек. Таким образом, циклическое изменение внешнего потока Φ_e может сопровождаться гистерезисным циклом $CDABC$. Площадь этой гистерезисной петли пропорциональна выделившейся в контакте энергии.

Рис. 25.7. Изменение внешнего потока со временем: а) при нулевом потоке, созданном входной катушкой ($\Phi_T = 0$) ;; при $\Phi_T = \Phi_0/2$.



Того, что мы знаем теперь о свойствах сверхпроводящего кольца, замкнутого на джозефсоновский переход, достаточно, чтобы понять, как работает высокочастотный сквид. Его принципиальная блок-схема изображена на рис. 25.6. Высокочастотный генератор с очень большим внутренним сопротивлением (генератор тока) питает током на частоте ν резонансный контур K . (Очень употребительны устройства, в которых $\nu \approx 10 \div 20$ МГц. Однако существуют и значительно более высокочастотные сквиды с рабочей частотой в несколько ГГц.) Катушка этого контура индуктивно связана с кольцом интерферометра И. Усилитель усиливает ВЧ-напряжение, которое падает на контуре K . Это усиленное напряжение V_0 и есть выход прибора. Вход прибора это катушка T , тоже индуктивно связанная с кольцом .

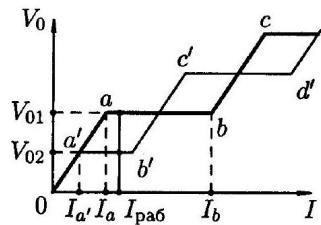


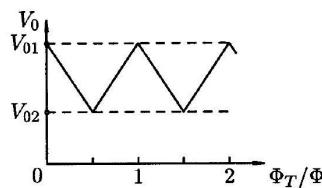
Рис. 25.8. Высокочастотная вольт-амперная характеристика сквида, жирная линия входной поток $\Phi_T = 0$ (кривая $0abc\dots$), тонкая линия $-\Phi_T = \Phi_0/2$ (кривая $0a'b'c'd'\dots$).

Выясним прежде всего, как зависит выход V_0 от величины тока I через индуктивность контура K . Пусть ток входной катушки T равен нулю. Тогда внешний поток Φ_e создается только катушкой контура K и колеблется с частотой ν . Это показано на рис. 25.7, а. Синусоидальное изменение потока Φ_e вызовет соответствующее изменение полного потока

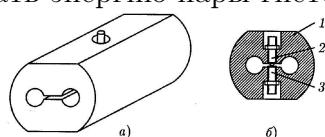
Φ (см. рис. 25.7), что приведет в конечном счете к появлению некоторого ВЧ-напряжения V_0 на выходе схемы. Увеличение тока накачки I пропорционально увеличит амплитуду Φ_e и соответственно Φ и V_0 . Таким образом, мы имеем линейную зависимость V_0 от I (начальный участок $0a$ высокочастотной вольт-амперной характеристики, рис. 25.8). Но так будет продолжаться только до тех пор, пока ток контура I не достигнет такой величины, что амплитуда Φ_e станет равной критической величине (см. рис. 25.5). В этот момент произойдет скачок полного потока, на графике зависимости Φ от Φ_e изображающая точка опишет петлю гистерезиса, выделится тепло, пропорциональное площади этой петли, на это потребуется много энергии, которая будет забрана из контура K . Амплитуда тока I резко упадет, и в течение сравнительно долгого времени (много периодов ВЧ-колебаний) эта амплитуда будет "дорастать" до своей прежней величины. Увеличение амплитуды тока накачки от ВЧ-генератора теперь не может привести

к увеличению выходного напряжения V_0 , так как все описанные только что процессы будут повторяться. Разница будет лишь в том, что восстановление амплитуды тока контура I будет происходить быстрее, за меньшее число ВЧ-периодов. Это значит, что мы вышли на горизонтальный участок ab вольт-амперной характеристики (рис. 25.8). Наконец, при некотором токе ВЧ-накачки ток контура I достигнет такой величины (I_b), когда за время одного периода ВЧ-генератор восстанавливает энергию контура K , которую этот контур отдал кольцу интерферометра для двух гистерезисных циклов $DABC$ и $D'A'B'C'$. Только теперь дальнейшее увеличение амплитуды тока контура I (соответственно внешнего потока Φ_e) приведет к увеличению полного потока Φ и выходного напряжения V_0 . Это увеличение будет продолжаться до тех пор, пока амплитуда Φ_e не достигнет второго критического значения. Как только это произойдет, вновь возникнут гистерезисные потери и весь описанный выше процесс повторится. На вольт-амперной характеристике появится второе плато.

Рис. 25.9. Зависимость выходного высокочастотного напряжения V_0 от постоянного потока Φ_T , созданного входной катушкой T .



Теперь нам надо рассмотреть случай, когда входная катушка T обтекается током и создает постоянный магнитный поток, равный $\Phi_T = \Phi_0/2$. В этом случае зависимость Φ_e от времени представлена на рис. 25.7, б. Ясно, что критическое значение Φ_{ec} будет теперь достигнуто при значительно меньшем токе контура $I = I_{a'}$ по сравнению со случаем $\Phi_T = 0$ (в том случае Φ_{ec} достигалось при $I = I_a$, рис. 25.8). Кроме того, теперь и длина первого плато должна быть в два раза меньше, так как теперь генератор должен восстановить энергию контура, ушедшую только на один гистерезисный цикл. Однако последующие плато на вольт-амперной характеристике вновь будут длинные, так как вновь нужно будет восстанавливать энергию пары гистерезисных циклов.



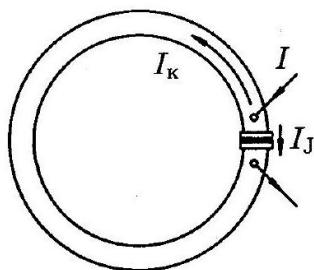
б)

Рис. 25.10. Одноконтактный сквид конструкции Циммермана: а) общий вид; б) разрез по центральной плоскости: 1 - ниобиевый корпус, 2 заостренный ниобиевый винт, 3 - ниобиевый винт.

Переходим теперь к завершающему этапу анализа работы высокочастотного сквида. Дадим прибору некоторый высокочастотный ток накачки так, чтобы рабочая точка по току соответствовала величине $I_{\text{раб}}$ (см. рис. 25.8). Если $\Phi_T = 0$, на выходе будет напряжение V_{01} , если $\Phi_T = \Phi_0/2$ - выходное напряжение будет V_{02} . А как будет меняться напряжение V_0 , если мы будем менять входной поток Φ_T от 0 до $\Phi_0/2$? Нетрудно сообразить, что мы будем иметь плавное уменьшение V_0 от V_{01} до V_{02} . Но если $\Phi_T = \Phi_0$, то, согласно рис. 25.7, должна возникнуть ситуация, полностью аналогичная случаю $\Phi_T = 0$, и выход будет снова равен V_{01} . В результате мы приходим к так называемой "треугольной" зависимости выходного напряжения V_0 от входного потока Φ_T (рис. 25.9). Из этого графика следует, что наша схема чувствует изменения измеряемого потока Φ_T с чувствительностью, много лучшей одного кванта потока. Теоретический анализ чувствительности современных ВЧ-сквидов показал, что возможно создание приборов с чувствительностью порядка $10^{-5}\Phi_0$ при времени измерения не меньше одной секунды.

Наиболее практически удобным (и наиболее распространенным) оказался одноконтактный сквид конструкции Циммермана

Рис. 25.11. К задаче 25.2. Внешний источник тока задает полный ток I , часть которого I_K идет по кольцу, а часть I_J - через джозефсоновский переход.



(рис. 25.10). Джозефсоновский переход в нем выполнен в виде точечного прижимного контакта. Приемная катушка T и катушка индуктивности контура K (см. рис. 25.6) вводятся в два отверстия сквида.

III-з.

25.1. Индуктивность кольца одноконтактного интерферометра равна $2 \cdot 10^{-9}$ Гн. До какой величины нужно уменьшить критический ток перехода, чтобы зависимость Φ от Φ_e стала безгистерезисной?

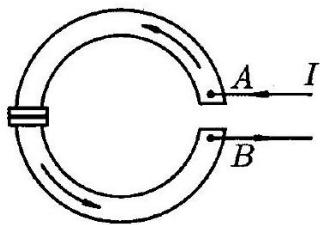
Ответ. Если критический ток перехода меньше величины $\Phi_0/(2\pi L) = 0.165\text{МКА}$, зависимость Φ от Φ_e будет безгистерезисной.

III-з.

25.2. Джозефсоновский SNS -переход с критическим током $I_c = 1\text{ мкА}$ замыкает сверхпроводящее кольцо с индуктивностью $L = 10^{-9}\text{Г н}$. Внешний источник задает полный ток, часть которого ($I_K = 0.4\text{мкА}$) течет по кольцу, а часть (I_J) - через джозефсоновский переход (рис. 25.11). Найти полный ток I .

Решение Разность фаз на переходе φ определяет величину тока по кольцу: $\varphi = 2\pi LI_x/\Phi_0$, а ток через переход равен $I_J = I_c \sin \varphi$. Полный ток $I = 1.34\text{мкА}$.

Рис. 25.12. К задаче 25.3.



III-з.

25.3. Сверхпроводящее кольцо, индуктивность которого $L = 10^{-9}\text{ГН}$, замкнуто на джозефсоновский SNS -переход с критическим током $I_c = 1 \text{ мкА}$. На противоположной стороне кольца (см. рис. 25.12) сделан разрез, к которому подключен источник тока, создающий в кольце ток $I = 0.4 \text{ мкА}$. Чему равна разность фаз волновой функции φ_{AB} между точками A и B ? Построить график зависимости тока от разности фаз φ_{AB} .

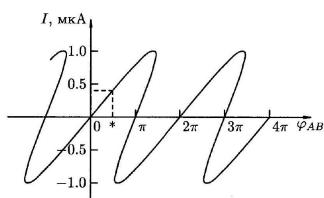


Рис. 25.13. Ответ к задаче 25.3. Зависимость тока от разности фаз точек A и B . Звездочкой отмечена искомая разность фаз $\varphi_{AB} = 1.60 \text{ рад}$.

Ответ. $\varphi_{AB} = 1.60 \text{ рад}$, см. рис. 25.13.

5.3.7 26. Применения слабой сверхпроводимости

Рассмотренное в этой главе удивительно красивое физическое явление - слабая сверхпроводимость - нашло множество способов практического использования. Рассмотрим некоторые из них.

Мы уже знаем, что если через джозефсоновский переход пропускать ток, больший критического, напряжение на переходе будет иметь переменную составляющую. Частота этой составляющей будет определяться соотношением (22.8). Нетрудно сообразить, что если теперь переход поместить во внешнее высокочастотное поле, то если частота этого поля совпадает с частотой джозефсоновской генерации, должен возникнуть какой-то резонанс. И действительно, в этом случае вольт-амперная характеристика для усредненных значений тока и напряжения будет иметь вид ступенчатой кривой (рис. 26.1), а расстояния между ступеньками в точности равны $\hbar\omega/2e$. Поскольку измерение частоты может быть произведено с очень высокой точностью, а величины \hbar и e являются мировыми постоянными, расстояние между ступеньками тока на вольт-амперной характеристике может быть очень точно определено. Это и есть принцип создания стандарта единицы электрического напряжения - вольта.

До открытия эффекта Джозефсона и квантового эффекта Холла стандарт частоты (стандарт времени), основанный на квантовомеханических переходах атомов газов, был единственным фундаментально точным стандартом. Эффекты с кулоновской блокадой в сверхмалых сверхпроводящих туннельных переходах (см. п. 23.2) позволяют связать частоту с электрическим током через величину заряда электрона. Создание на этой основе фундаментального эталона электрического тока вместе с калибровкой Ома с помощью квантового эффекта Холла позволит замкнуть "метрологический треугольник" Вольт - Ампер Ом и создать совершенную систему электрических стандартов.

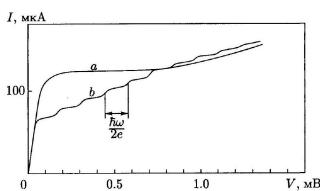


Рис. 26.1. Вольт-амперная характеристика джозефсоновского перехода: а) без внешнего высокочастотного электромагнитного поля; б) высокочастотное поле включено.
(!!!!!!!???????????????)

Начальный участок вольт-амперной характеристики не совпадает с осью ординат, потому что на самописец подавалось напряжение с джозефсоновского перехода и включенного с ним последовательно участка нормальной пленки [85].

Сверхпроводящие квантовые интерферометры (сквиды) используются прежде всего как магнетометры. Им доступны для регистрации изменения магнитного поля порядка 10^{-11} Гс при ширине полосы пропускания устройства, равной 1 Гц. Ведется разработка цифровых сквид-магнитометров и сверхмалошумящих сквид-усилителей с шумовой температурой 1.5 К на частоте 750 М Гц. Ясно, что использование столь чувствительных приборов открывает совершенно новые возможности в разных областях науки: геологии, геофизике, биофизике и др. Так, например, в последние годы начались исследования магнитных полей сердца и мозга человека - так называемых магнитокардиограмм и магнитоэнцефалограмм. Кардиоэнцефалограммы позволяют исследовать магнитограммы сердца и мозга человека и даже его плода в процессе развития (исследование плода совершенно недоступно электрокардиографии). На очереди создание магнитотомографии, использующей компьютерную обработку сигналов многочисленных датчиков, закрепленных на различных частях тела и фиксирующих биомагнитные поля человека. Магнитотомография способна предоставлять информацию не только о состоянии органов, но и о процессах их жизнедеятельности. Другим примером устройства для визуализации распределения магнитных полей, создаваемых различными физическими и биологическими объектами, является сканирующий сквид-микроскоп с разрешением по магнитной индукции лучше 0.1 Гс и пространственным разрешением лучше 100 мкм.

Использование сквигда в качестве нуль-прибора в обычной мостиковой схеме позволяет создать вольтметр с чувствительностью около 10^{-15} В. Такие приборы уже используются в физических лабораториях. Уже сейчас джозефсоновские элементы используются в различного рода СВЧ-приборах для приема и преобразования электромагнитного излучения в микроволновом диапазоне. Криоэлектронные генераторы и приемники излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазона волн, основанные на сверхпроводящих джозефсоновских переходах, необходимы для радиоастрономических исследований и мониторинга окружающей среды, осуществляемых с борта спутников или специальных самолетов. В этом случае вес, размеры и тепловыделение бортовых систем играют решающую роль, а создание низких температур не составляет проблем. Эти устройства, использующие движение квантов магнитного потока, обладают лучшими шумовыми характеристиками в диапазоне $100 \div 1000$ ГГц. Уровень шумов (шумовая температура) в современных сверхпроводящих туннельных приемниках близок к фундаментальному квантовому пределу и составляет около 600 К на частоте 500 ГГц. В частности, существует опыт использования джозефсоновского перехода в качестве чувствительного элемента в радиотелескопе.

Укажем, наконец, на возможность использования джозефсоновских переходов в качестве элементов памяти и логических элементов в электронных вычислительных устройствах и современных телекоммуникационных системах. Их применение открывает путь не только к очередному шагу в миниатюризации электронных элементов, но и к совершенно новым принципам обработки и передачи данных. Информационные технологии в настолщее время встречаются со множеством серьезных проблем, главными из которых являются увеличение интеграции и плотности размещения элементов без ухудшения характеристик,

понижение энергопотребления (энерговыделения), обеспечение простых архитектурных решений. Концепции схемного конструирования, используемые в традиционной полупроводниковой технологии, не могут бесконечно воспроизводиться во все меньших масштабах, и использование принципиально новых подходов становится неизбежным. Использование Быстрой Одноквантовой Логики (БОК, или в английской транскрипции RSFQ - rapid single flux quantum), основанной на сверхпроводящих контурах, включающих джозефсоновские переходы, позволяет вести обработку сигналов с рекордными тактовыми частотами, превышающими 100 ГГц, при экстремально низком уровне диссипации энергии. Единицей информации, переносимой при каждом переключении, является квант магнитного потока, и, таким образом, БОК-элемент является одновременно и логическим элементом, и элементом памяти. В области телекоммуникационной техники использование криоэлектронных генераторов и приемников, базирующихся на слабосвязанных сверхпроводниковых (джозефсоновских) структурах, позволит достигнуть предельно низких уровней шума и энергопотребления при рабочих частотах в терагерцовом (10^{12} Гц) диапазоне.

Длинномасштабная квантовая когерентность, демонстрируемая сверхпроводниковыми устройствами (см. п. 23.3), открывает качественно новые направления в разработке квантовых логических элементов для будущих поколений суперкомпьютеров. На основе двумерных сеток джозефсоновских переходов может быть создан также новый тип компьютерной памяти, строящийся не на основе традиционной бинарной логики, а использующий ассоциативную, распределенную по всей структуре, систему памяти (по типу нейронных сетей живых организмов). Такая структура будет способна сравнивать поступающее воздействие с наиболее близким аналогом из набора собственных состояний системы, т. е. распознавать образы и принимать оперативные решения без перебора вариантов, например, осуществлять экономическое прогнозирование в реальном времени. Прогресс в области технологии высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) позволяет надеяться на скорое появление более дешевых и простых в эксплуатации ВТСП-систем. Несомненно, что практическое использование слабой сверхпроводимости будет в ближайшие годы расширяться и вряд ли сейчас можно предсказать, какие удивительные результаты от этого последуют.

5.4 СВЕРХПРОВОДНИКИ ВТОРОГО РОДА

5.4.1 27. Введение

Впервые термин "сверхпроводник второго рода" был введен А. А. Абрикосовым [86] в его классической работе (1957), в которой на базе теории ГЛ была дана последовательная феноменологическая теория сверхпроводников второго рода и объяснены их магнитные свойства. Развитие физики сверхпроводников в последующие годы блестяще подтвердило теоретические предсказания.

Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда развитие очень мощного направления в физике сверхпроводников было предопределено теоретической работой. Больше того, сначала эта работа была встречена с некоторым недоверием, настолько необычны были ее предсказания. Только через несколько лет, когда оказалось, что сложное поведение в магнитном поле сверхпроводящих сплавов и химических соединений можно объяснить с единой точки зрения, когда получили объяснение огромные критические поля некоторых сплавов и соединений, теория Абрикосова получила всеобщее признание.

Мы уже знаем, что у сверхпроводников второго рода энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами $\sigma_{ns} < 0$. Это значит, что при определенных условиях им энергетически выгодно расслоиться в магнитном поле на области нормальной и сверхпроводящей фаз.

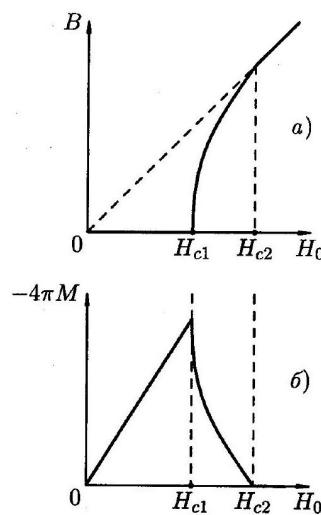
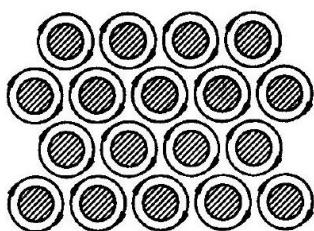


Рис. 27.1. Кривые намагничивания сверхпроводника второго рода: а) зависимость магнитной индукции B от внешнего поля H_0 ; б) зависимость плотности магнитного момента M от H_0 .

Действительно, кривая намагничивания длинного цилиндра из сверхпроводника второго рода в параллельном поле имеет вид, изображенный на рис. 27.1. Пока внешнее поле $H_0 < H_{c1}$, среднее поле внутри образца $B = 0$. Однако при $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ внутри сверхпроводника появляется магнитное поле B , но оно меньше поля H_0 , и сверхпроводимость все еще существует. При поле $H_0 = H_{c2}$ среднее поле B становится равным H_0 и сверхпроводимость в объеме пропадает. Таким образом, у сверхпроводников второго рода отсутствует эффект Мейсснера-Оксенфельда.

Проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода происходит весьма своеобразно - в виде квантованных вихревых нитей. Каждая такая нить (или вихрь) имеет нормальную сердцевину, которая представляет собой длинный тонкий нормальный цилиндр, вытянутый вдоль направления внешнего магнитного поля. Параметр порядка ψ в нем равен нулю. Радиус этого цилиндра - порядка длины когерентности ξ . Вокруг этого нормального цилиндра течет незатухающий сверхпроводящий ток (сверхток), ориентированный так, чтобы создаваемое им магнитное поле было направлено вдоль нормальной сердцевины и совпадало по направлению с внешним магнитным полем. Вихревой ток захватывает область радиуса порядка λ -глубины проникновения. Это может быть область, существенно превышающая размер ξ , т.к. у сверхпроводников второго рода может быть $\lambda \gg \xi$.

Рис. 27.2. Смешанное состояние сверхпроводника второго рода. Сверхпроводящие вихри образуют правильную треугольную решетку. Сердцевины вихрей нормальны (заштрихованы).



Один вихрь несет один квант магнитного потока. Проникновение вихрей в сверхпроводник становится энергетически выгодным при $H_0 > H_{c1}$. При этом вихри, проникнув в сверхпроводник, располагаются друг от друга на расстоянии порядка λ , образуя в поперечном сечении правильную треугольную решетку (рис. 27.2).

Возникает смешанное состояние, т.е. состояние, которое можно охарактеризовать частичным проникновением магнитного поля в образец. При этом в образце существуют вихревые

нити. Это состояние наблюдается в интервале полей от H_{c1} (первое критическое поле) до H_{c2} (второе критическое поле).

Возникнув при поле H_{c1} , вихревая решетка продолжает существовать и в более сильных полях H_0 . При этом ее период уменьшается, плотность вихрей увеличивается. Наконец, при поле H_{c2} их плотность становится так велика, что расстояние между ближайшими вихрями, т.е. период решетки, становится порядка ξ . Это значит, что вихри соприкасаются своими нормальными сердцевинами и параметр порядка ψ обращается в нуль по всему объему образца. Происходит фазовый переход второго рода в нормальное состояние.



Рис. 27.3. Картина смешанного состояния ниобия, полученная с помощью электронного микроскопа [87].

Существование смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода было надежно подтверждено экспериментально. Кроме различных косвенных подтверждений, существуют блестящие прямые эксперименты, поставленные немецкими физиками Эссманом и Тройблом [87]. Они нанесли тонкую органическую пленку на торцевую поверхность сверхпроводящего цилиндра из сверхпроводника второго рода и перевели его в смешанное состояние, наложив магнитное поле. Затем они напылили на торцевую поверхность тонкий слой ферромагнитного порошка. Частицы порошка оседали на поверхность более густо в местах выхода магнитных силовых линий, т.е. в центрах вихрей. Отделив затем органическую пленку от сверхпроводника и поместив ее в электронный микроскоп, они получили возможность любоваться картиной смешанного состояния в сверхпроводнике второго рода (рис. 27.3).

5.4.2 28. Поле одиночного вихря

Переходим к систематическому изучению смешанного состояния. Начнем с наиболее простой задачи - рассмотрим одиночный вихрь.

Итак, одиночный вихрь, помещенный в безграничный сверхпроводник, представляет собой нормальную сердцевину радиуса

порядка ξ и область вихревых токов, простирающуюся на расстояние порядка λ .

Пусть постоянная теории ГЛ $\varkappa \gg 1$. Значит, $\lambda \gg \xi$. На расстоянии $r \gg \xi$ имеем $|\psi|^2 = 1$. Будем заниматься именно этой частью вихря.

Уравнение ГЛ для вектора-потенциала (14.18) можно (учитывая, что $|\psi|^2 = 1$) записать в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) \quad (28.1)$$

Учитывая, что $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}$, получим из (28.1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right). \quad (28.2)$$

Взяв ротор от обеих частей этого уравнения, получим

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \operatorname{rot} \nabla \theta \quad (28.3)$$

В любой точке вихря, кроме его центра, $\operatorname{rot} \nabla \theta = 0$, т.к. ротор от градиента любой функции равен нулю. Но в центре вихря находится особая точка. Там $|\nabla \theta| \rightarrow \infty$. Чтобы понять, что такое $\operatorname{rot} \nabla \theta$ в центре вихря, возьмем интеграл от этого выражения по поверхности круга некоторого небольшого радиуса с центром в центре вихря:

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS$$

По теореме Стокса

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS = \oint \nabla \theta dl$$

где контурный интеграл берется по контуру нашего круга. Поскольку при обходе вокруг центра вихря фаза изменяется на 2π
(каждый вихрь несет один квант магнитного потока), имеем равенство

$$\int_{\odot} \operatorname{rot} \nabla \theta dS = 2\pi \quad (28.4)$$

Итак, $\operatorname{rot} \nabla \theta$ -это такая функция, которая всюду, кроме центра вихря, равна нулю. В центре вихря она равна бесконечности, но ее интеграл, согласно (28.4), равен 2π . Это полностью аналогично поведению δ -функции, и мы можем записать следующее равенство:

$$\operatorname{rot} \nabla \theta = 2\pi \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v,$$

где \mathbf{e}_v - единичный вектор, направленный вдоль вихря.

В результате вместо (28.3) мы имеем следующее уравнение:

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \Phi_0 \delta(\mathbf{r}) \mathbf{e}_v. \quad (28.5)$$

Границное условие для этого уравнения: $H(\infty) = 0$. Решение этого уравнения:

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda^2} K_0(r/\lambda) \quad (28.6)$$

где K_0 - функция Макдональда, или функция Ганкеля от мнимого аргумента.

Напомним асимптотическое поведение этой функции:

$$K_0(z) \propto \begin{cases} \ln(1/z) & \text{при } z \ll 1 \\ e^{-z}/z^{1/2} & \text{при } z \gg 1 \end{cases} \quad (28.7)$$

Таким образом, функция K_0 логарифмически расходится при малых значениях аргумента и экспоненциально стремится к нулю при больших. Из формул (28.6) и (28.7) следует, что в центре вихря магнитное поле стремится к бесконечности. В действительности, однако, это не так, поскольку эти формулы уже не справедливы вблизи нормальной сердцевины вихря (радиуса порядка ξ). Поэтому поле вихря в его центре можно получить с логарифмической точностью, обрезав логарифмическую расходимость формулы (28.6) на радиусе $r = \xi$:

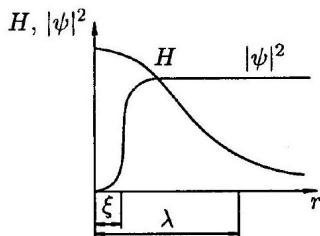
$$H(0) \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi \lambda^2} \ln \varkappa. \quad (28.8)$$

Более точно, учитывая изменение $\psi(r)$ в области сердцевины вихря, величину $H(0)$ можно получить, численно проинтегрировав уравнения ГЛ [88]:

$$H(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}(\ln \varkappa - 0.28) \quad (28.9)$$

Поправка малосущественна, так как вообще весь расчет ведется в предположении, что $\varkappa \gg 1$.

Рис. 28.1. Одиночный вихрь в бесконечном сверхпроводнике. Распределение параметра порядка и создаваемого вихрем магнитного поля.



Графически пространственное изменение поля одиночного вихря изображено на рис. 28.1.

5.4.3 29. Первое критическое поле

Найдем первое критическое поле H_{c1} , т.е. то внешнее поле, при котором впервые становится энергетически выгодным существование вихря внутри сверхпроводника второго рода (иногда его называют также нижним критическим полем).

Для этого надо сперва найти свободную энергию вихря, точнее-свободную энергию сверхпроводника с вихрем ϵ_1 , отсчитанную от свободной энергии сверхпроводника без вихря. Будет рассматриваться случай $\varkappa \gg 1$, т. е. $\lambda \gg \xi$. Это типично лондоновский случай, когда поправки за счет $\nabla\psi$ несущественны и поэтому можно воспользоваться лондоновским выражением для свободной энергии (5.8):

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2(\text{rot } \mathbf{H})^2] dV \quad (29.1)$$

где интеграл берется по пространству между двумя бесконечными параллельными плоскостями, перпендикулярными вихревой нити и отстоящими на единичное расстояние друг от друга. Выражение (29.1) - это просто сумма магнитной и кинетической энергий сверхпроводящих электронов вихря на единицу его длины. Воспользовавшись формулой

$$(\text{rot } \mathbf{H})^2 = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \text{div}[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$$

имеем

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} (\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot } \mathbf{H}) dV - \lambda^2 \int \text{div}[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, преобразуем второй интеграл в поверхностный:

$$\int \text{div}[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = \oint [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] d\mathbf{S},$$

где поверхностный интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности и по плоскостям $z = 0$ и $z = 1$ (предполагается, что вихрь направлен вдоль оси z). Поскольку вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскостям $z = 0$ и $z = 1$, то вектор $[\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ лежит в плоскостях $z = 0$

и $z = 1$, а вектор $d\mathbf{S}$ им перпендикулярен, поэтому подынтегральное выражение на этих плоскостях равно нулю. С другой стороны, $H \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому подынтегральное выражение равно нулю и на бесконечно удаленной поверхности. Поэтому

$$\int \operatorname{div}[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] dV = 0$$

и

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} (\mathbf{H} + \lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV$$

Учитывая, что \mathbf{H} должно удовлетворять уравнению (28.5), имеем

$$\epsilon_1 = \frac{\Phi_0}{8\pi} H(0). \quad (29.2)$$

Подставив сюда (28.8), получим

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \varkappa \quad (29.3)$$

При выводе этой формулы мы не учли дополнительный малый вклад в энергию вихря, который возникает за счет того, что сердцевина вихря нормальная. Действительно, плотность свободной энергии сердцевины больше плотности энергии окружающей ее среды на величину $F_n - F_{s0} = H_{cm}^2/8\pi$, т.е. на величину энергии конденсации. Поэтому дополнительная, неучтенная в формуле (29.3) энергия равна $(H_{cm}^2/8\pi)\pi\xi^2$, если радиус нормальной сердцевины вихря принять равным ξ . Используя формулу (15.8), нетрудно показать, что эта энергия равна

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ll \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \varkappa$$

Более точный учет вклада от энергии конденсации нормальной сердцевины дает следующую окончательную формулу для энергии вихревой нити [88, 89]:

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 (\ln \varkappa + 0.50)$$

Итак, из последней формулы следует, что энергия одиночного вихря положительна, т.е. без внешнего поля вихрю энергетически невыгодно оставаться внутри сверхпроводника. Следовательно, если на массивный сверхпроводник второго рода наложить слабое магнитное поле, вихри еще не образуются - невыгодно. Будет обычное мейсснеровское состояние, как и в сверхпроводнике первого рода. Найдем, при каком же поле станет впервые выгодным образование вихрей в сверхпроводнике второго рода.

Мы уже знаем, что для сверхпроводника в заданном внешнем магнитном поле в состоянии равновесия минимальной будет гибсовская свободная энергия \mathcal{G} , которая для единицы длины вихря будет равна

$$\mathcal{G} = \epsilon_1 - \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}_0}{4\pi} dV \quad (29.4)$$

где \mathbf{H}_0 - внешнее магнитное поле, а свободная энергия единицы длины вихря равна ϵ_1 . Действительно, согласно (3.15), плотность гибсовской свободной энергии равна

$$G = F - \mathbf{B}\mathbf{H}_0/4\pi,$$

где F - плотность свободной энергии. Поскольку \mathbf{H}_0 - это внешнее магнитное поле, его можно вынести за знак интеграла в (29.4). Тогда в силу того, что вихрь несет один квант магнитного потока Φ_0 , имеем

$$\mathcal{G} = \epsilon_1 - \Phi_0 H_0 / 4\pi \quad (29.5)$$

Из этой формулы ясно видно, что для достаточно слабого внешнего поля H_0 имеем $\mathcal{G} > 0$ и образование вихря энергетически невыгодно. Но существует такое поле H_{c1} , начиная с которого \mathcal{G} становится отрицательным, т. е. вихрь становится энергетически выгодным образованием. Из (29.5) следует, что

$$H_{c1} = 4\pi\epsilon_1/\Phi_0. \quad (29.6)$$

Воспользовавшись формулой (29.3'), получим первое критическое поле сверхпроводника второго рода:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}(\ln \varkappa + 0.50) \quad (29.7)$$

Сравнивая формулы (29.7) и (28.8), видим, что первое критическое поле примерно в 2 раза меньше поля в центре одиночного вихря. Учитывая соотношение (15.5) для $\lambda(T)$ вблизи T_c , получаем, что первое критическое поле линейно убывает при $T \rightarrow T_c$,

$$H_{c1}(T \rightarrow T_c) \sim H_{c1}(0)(T_c - T) \quad (29.8)$$

Подчеркнем еще раз, что эти оценки справедливы для сверхпроводников с $\varkappa \gg 1$ и имеют логарифмическую точность.

Поле H_{c1} - сравнительно слабое поле. Действительно, пусть $\varkappa \sim 100$, $H_{cm} \sim 10^3 \text{ Э}$, тогда $H_{c1} \sim 30$.

5.4.4 30. Взаимодействие вихрей

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства одиночного вихря. Но в смешанном состоянии их много и они сильно друг с другом взаимодействуют. Наша задача - понять, как они взаимодействуют.

Для этого рассмотрим пару параллельных вихрей одного направления в безграничном сверхпроводнике. Пусть, как и раньше, $\varkappa \gg 1$. Пока расстояние между ними больше λ , они не "чувствуют" друг друга. Но вот расстояние сократилось до величины, меньшей λ . Тогда сердцевина первого вихря оказывается в области сверхтоков другого вихря и наоборот. Эта ситуация изображена на рис. 30.1. Из этого рисунка видно, что скорости сверхтекучей компоненты электронной жидкости справа от первого вихря и слева от второго складываются, а между вихрями - вычитаются. Это значит, что в области, непосредственно примыкающей к сердцевине первого вихря (справа от нее), давление по закону Бернулли меньше, чем слева от сердцевины. Следовательно, на сердцевину первого вихря действует разность бернульиевских давлений слева направо. Проведя аналогичное рассмотрение для второго вихря, увидим, что одноименные параллельные вихри отталкиваются. При этом сила взаимодействия оказывается приложенной только к нормальной сердцевине.

Приведем теперь расчет силы взаимодействия двух вихрей. Пусть координаты сердцевин вихрей 1 и 2 будут соответственно \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Согласно (5.8), энергия системы двух вихрей в сверхпроводнике, отсчитанная от энергии этого же сверхпроводника

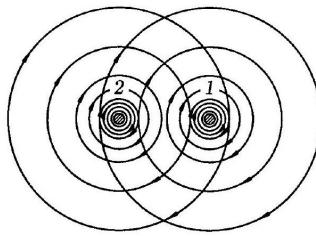


Рис. 30.1. Взаимодействие параллельных одноименных вихрей.
без вихрей, равна

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{H}^2 + \lambda^2(\text{rot } \mathbf{H})^2] dV \quad (30.1)$$

Здесь \mathbf{H} - полное магнитное поле, созданное системой двух вихрей. Это поле должно удовлетворять уравнению, которое для системы двух вихрей (по аналогии с уравнением (28.5)) будет

$$\mathbf{H} + \lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{H} = \Phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] \mathbf{e}_v$$

Проведя в точности все преобразования предыдущего параграфа, которые были проделаны при выводе энергии одиночного вихря, получим из (30.1) следующее выражение:

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{8\pi} (H(\mathbf{r}_1) + H(\mathbf{r}_2)) \quad (30.2)$$

Поле $H(\mathbf{r}_1)$ - это поле в центре первого вихря. Оно состоит из поля, созданного в этом центре самим первым вихрем, и из поля $H_{12}(x)$, созданного там вторым вихрем, отстоящим от первого на расстояние $x = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. То же можно сказать и о поле $H(\mathbf{r}_2)$.

Тогда из (30.2) следует, что

$$\mathcal{F} = 2\epsilon_1 + \frac{\Phi_0}{8\pi} 2H_{12}(x) \quad (30.3)$$

где ϵ_1 - энергия одиночного вихря, определяемая формулой (29.3').

Смысл формулы (30.3) очевиден: первое слагаемое - энергия двух невзаимодействующих вихрей, второе слагаемое - энергия их взаимодействия. Обозначим ее через $U(x)$:

$$U(x) = \frac{\Phi_0 H_{12}(x)}{4\pi} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0 \left(\frac{x}{\lambda} \right) \quad (30.4)$$

(мы использовали формулу (28.6)).

Сила взаимодействия двух вихрей, приходящаяся на единицу их длины, очевидно, равна

$$f = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{dH_{12}}{dx}.$$

Учитывая, что для двух параллельных вихрей, согласно уравнениям Максвелла,

$$\frac{dH_{12}}{dx} = \frac{4\pi}{c} j_{12}(x),$$

где $j_{12}(x)$ - плотность тока, наведенного первым вихрем в точке, где находится сердечника второго вихря (или наоборот), имеем

$$|f| = \frac{1}{c} j_{12} \Phi_0 \quad (30.5)$$

Эта формула справедлива и в значительно более общем случае: если вихрь обтекается каким-то сторонним током j , то на единицу длины его сердцевины действует сила (ее часто называют «силой Лоренца»)

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \Phi_0] \quad (30.6)$$

где \mathbf{j} - плотность стороннего тока в месте, где расположена сердцевина вихря, $\Phi_0 = \mathbf{e}_v \Phi_0$.

III-з.

30.1. Два параллельных сверхпроводящих вихря закреплены в точках a и b в безграничном сверхпроводнике на расстоянии d друг от друга (рис. 30.2). Третий вихрь того же энака может двигаться вдоль штриховой линии

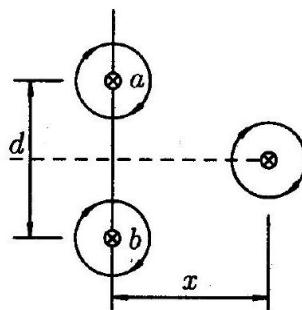


Рис. 30.2. К задаче 30.1. Два вихря закреплены на расстоянии d . Третий вихрь может двигаться вдоль штриховой линии.

линии, проведенной перпендикулярно отрезку ab через его середину. Найти силу, действующую на этот вихрь, когда он находится на расстоянии x от линии ab . Все расстояния между вихрями значительно меньше λ , а $\kappa \gg 1$.

Решение Поскольку магнитное поле, созданное одним вихрем на расстоянии r ($r \ll \lambda$) от него, равно, согласно (28.6) и (28.7),

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{r}$$

плотность созданного этим вихрем тока в точке на расстоянии r от центра будет

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}.$$

Используя теперь (30.6), получим окончательно, что вихрь будет отталкиваться от линии ab с силой

$$f = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\lambda^2} \frac{x}{x^2 + (d/2)^2}$$

направленной вдоль штриховой линии.

5.4.5 31. Второе критическое поле

В однородном сверхпроводнике второго рода смешанное состояние характеризуется правильной, обычно треугольной, вихревой решеткой. По мере увеличения внешнего поля период решетки уменьшается, и когда он уменьшается до величины порядка длины когерентности ξ , происходит фазовый переход второго рода из смешанного состояния в нормальное. Это происходит, когда внешнее поле достигает значения второго критического поля H_{c2} (его также называют верхним критическим полем).

Не проводя точного расчета, мы можем оценить порядок величины H_{c2} на основании следующих соображений. Для двух рядом расположенных вихрей, находящихся на расстоянии ξ друг от друга, это расстояние ξ будет шириной сверхпроводящего промежутка между двумя нормальными сердцевинами. Грубо говоря - это тонкая пленка толщины ξ . Но в 17 было показано, что тонкая пленка во внешнем параллельном магнитном поле совершает фазовый переход второго рода в нормальное состояние при поле $H_k \sim H_{cm}\lambda/d$, где d - толщина пленки. Если же, как в нашем случае, пленка имеет толщину ξ , то можно ожидать, что переход в нормальное состояние произойдет при внешнем поле, равном по порядку величины $H_{cm}\lambda/\xi$. Это и есть простая оценка второго критического поля:

$$H_{c2} \sim \kappa H_{cm}. \quad (31.1)$$

Точный расчет добавляет только численный коэффициент $\sqrt{2}$ [86]:

$$H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_{cm}. \quad (31.2)$$

Второе критическое поле может достигать значительных величин. Так, при $\kappa \sim 100$ и $H_{cm} \sim 10^3$ Э имеем $H_{c2} \sim 10^5$ Э.

Используя формулу (15.8) $\sqrt{2}H_{cm} = \Phi_0/2\pi\lambda\xi$, формулу (31.2) и выражение для $\kappa = \lambda/\xi$, легко получим

$$\Phi_0 = 2\pi\xi^2 H_{c2} \quad (31.3)$$

Эта формула очень удобна для определения длины когерентности ξ . Действительно, формула связывает ξ с легко экспериментально измеряемой величиной - вторым критическим полем.

Соотношение (31.3) выражает собой уже упомянутый факт при поле $B \sim H_{c2}$ расстояние между вихрями $\sqrt{\Phi_0/B}$ порядка длины когерентности ξ . Учитывая также (15.5), находим, что вблизи T_c второе критическое поле обращается в нуль линейным образом, $H_{c2}(T) \propto (T_c - T)$, так же, как и $H_{c1}(T)$.

Покажем теперь, как вывести (31.3) для температур вблизи T_c , где можно пользоваться теорией Гинзбурга-Ландау. Рассмотрим уравнение (14.16) - мы ожидаем, что его решение с отличным от нуля ψ появляется непрерывным образом, т.е. около линии перехода $B = H_{c2}$ величина ψ очень мала, и $\psi|\psi|^2 \ll \psi$. Тогда решение этого уравнения с $\psi \neq 0$ может существовать, если найдется такая функция $\psi_0(\mathbf{r})$, что

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi_0 = (1 + E_0) \psi_0 \quad (31.4)$$

с "собственным числом" $E_0 < 0$. Но уравнение (31.4) формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы с зарядом $e' = 2e$ и массой $m' = \hbar^2/2\xi^2$, находящейся в магнитном поле B . Наиболее низкий энергетический уровень такой частицы есть $\hbar e' B / 2m' c = 2eB\xi^2/\hbar c$, так что условие $E_0 < 0$ выполнено как раз при $B < H_{c2}$ (где H_{c2} определяется соотношением (31.3)). С приближением B к H_{c2} квадрат модуля параметра порядка убывает как $|\psi|^2 \sim -E_0 = 1 - B/H_{c2}$.

III-з.

31.1. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава равно 30 кЭ, а его критическое термодинамическое поле равно 1500 Э. Чему равна глубина проникновения магнитного поля у этого сплава?

$$\text{Ответ. } \lambda = \frac{1}{H_{cm}} \sqrt{\frac{\Phi_0 H_{c2}}{4\pi}} = 1.48 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

III-з.

31.2. Сверхпроводящий сплав ниобий -тантал имеет $H_{c2} = 4000$ и $\kappa = 3$. Оценить первое критическое поле.

Ответ. $H_{c1} = 244$ Э.

III-з.

31.3. Найти плотность вихревого тока на расстоянии $r = \xi$ от центра одиночного вихря в сверхпроводнике с $\kappa \gg 1$.

Решение Поскольку $\xi \ll \lambda$, поле на расстоянии $r \sim \xi$, согласно (28.6) и (15.8), равно

$$H(r) = \frac{\sqrt{2}H_{cm}}{\kappa} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right).$$

Тогда плотность тока будет $j = (c/4\pi)dH/dr$. Это дает

$$|j| = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{cH_{cm}}{\lambda}$$

Замечание. Из этого результата следует, что плотность тока на расстоянии ξ от центра вихря имеет порядок тока распаривания (ср. с (18.5)).

III-з.

31.4. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 150$ кЭ, $\kappa = 96$. Найти энергию одиночного вихря. Сравнить с энергией конденсации в сердцевине вихря.

Решение Зная H_{c2} , находим $\xi = 4.69 \cdot 10^{-7}$ см. Отсюда, зная κ , находим $\lambda = 4.50 \cdot 10^{-5}$ см. Теперь, используя (29.3), имеем $\epsilon_1 = 6.12 \cdot 10^{-7}$ эрг/см. Сердцевина вихря нормальная, поэтому плотность ее энергии больше плотности энергии окружающей среды на величину $H_{cm}^2/8\pi$. Поэтому энергия сердцевины равна $H_{cm}^2 \xi^2 / 8$, если считать радиус сердцевины равным ξ . Эта энергия в нашей задаче равна $3.33 \cdot 10^{-8}$ эрг/см, т.е. во много раз меньше электромагнитной энергии вихря ϵ_1 .

5.4.6 32. Обратимый магнитный момент сверхпроводника второго рода

Найдем выражение для магнитного момента единицы объема сверхпроводника второго рода, когда он находится в смешанном состоянии и когда внешнее поле $H_0 \gg H_{c1}$. Иными словами, мы будем искать зависимость $M(H_0)$.

Эту задачу, конечно, можно было бы решать обычным способом, варьируя энергию системы и находя равновесное значение магнитного момента. Но мы применим один несколько искусственный прием, который позволит нам существенно сократить выкладки.

Пусть массивный цилиндр из сверхпроводника второго рода, образующая которого параллельна оси z , помещен в продольное магнитное поле H_0 . Пусть длина когерентности ξ зависит от координаты x и пусть (для определенности) она монотонно возрастает с

увеличением x . Глубина проникновения λ от x не зависит. Это значит, что H_{c2} станет тоже зависеть от x и будет уменьшаться с увеличением x . При таких условиях плотность магнитного потока (или индукция) B тоже станет функцией x , а это значит, что по объему образца пойдет ток в направлении оси y :

$$j = \frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx}$$

Но $B = H_0 + 4\pi M$, поэтому ясно, что $M = M(x)$, т. е.

$$j = c dM/dx$$

Но тогда на каждый вихрь действует сила Лоренца

$$f_L = \frac{1}{c} j \Phi_0 = \Phi_0 \frac{dM}{dx} \quad (32.1)$$

С другой стороны, ясно, что система вихрей находится в равновесии, поэтому сила f_L должна быть уравновешена какой-то другой силой. Происхождение этой второй силы совершенно понятно: если $\xi = \xi(x)$, то и собственная энергия вихря ϵ_1 тоже становится функцией x , но тогда ясно, что на вихрь будет действовать сила $-\nabla \epsilon_1$, где (см. (29.3))

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \varkappa = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (32.2)$$

Дифференцируя (32.2) и приравнивая правой части (32.1) получим условие равновесия:

$$\Phi_0 \frac{dM}{dx} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

Интегрирование этого выражения дает

$$M = \frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \frac{\xi}{l}, \quad (32.3)$$

где l -константа интегрирования, имеющая размерность длины.

Мы ищем зависимость $M(H_0)$. В (32.3) единственная величина, зависящая от H_0 , - это l . Найдем эту зависимость так. Поскольку ξ монотонно возрастает с увеличением x , а H_{c2} монотонно падает, то ясно, что в некоторой точке x_0 поле H_{c2} станет равным внешнему полю H_0 . Это значит, что в этом месте $M(x_0) = 0$, т.е. $l = \xi(x_0)$. с другой стороны, нам известна формула, связывающая ξ и H_{c2} (31.3). Применяя ее к точке x_0 , имеем

$$2\pi l^2 H_0 = \Phi_0$$

откуда легко находим отношение ξ/l :

$$\xi/l = (H_0/H_{c2})^{1/2} \quad (32.4)$$

Подставляя (32.4) в (32.3), имеем

$$M = -\frac{\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2} \ln \left(\frac{H_{c2}}{H_0} \right)^{1/2}$$

или

$$M = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0} \quad (32.5)$$

Отсюда можно получить зависимость $B(H_0)$:

$$B = H_0 - \frac{\Phi_0}{8\pi\lambda^2} \ln \frac{H_{c2}}{H_0} \quad (32.6)$$

Полученные формулы справедливы при условии $\kappa \gg 1$ и верны с логарифмической точностью. Используем эти формулы, чтобы рассмотреть зависимость $M(H_0)$ для полей H_0 , близких к H_{c2} . Представив H_{c2}/H_0 в виде

$$\frac{H_{c2} - H_0}{H_0} + 1$$

получим вместо (32.5)

$$M = -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \ln \left(1 + \frac{H_{c2} - H_0}{H_0} \right) \simeq -\frac{\Phi_0}{32\pi^2\lambda^2} \frac{H_{c2} - H_0}{H_0}.$$

Используя (31.3), имеем

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{4\kappa^2}. \quad (32.7)$$

Таким образом, получено линейное уменьшение $|M|$ при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. А.А.Абрикосовым [86] был проведен точный расчет $M(H_0)$ для этой области полей и получен следующий результат:

$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H_0}{1.16(2\kappa^2 - 1)} \quad (32.8)$$

Легко видеть, что при $\kappa \gg 1$ можно пренебречь единицей в круглых скобках и тогда точная формула (32.8) отличается от приближенной (32.7) только коэффициентом порядка единицы.

Разъясним вопрос, который может вызвать недоумение. Что такое H_{cm} для сверхпроводника второго рода? В сверхпроводнике первого рода это критическое поле массивного материала. В этом поле сверхпроводник переходит в нормальное состояние. А что же происходит со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} ? Ответ состоит в том, что ничего особенного со сверхпроводником второго рода в поле H_{cm} не происходит. На кривой намагничивания точка $H_0 = H_{cm}$ никак не выделена. Для сверхпроводника второго рода величину H_{cm} надо рассматривать просто как меру выгодности сверхпроводящего состояния по сравнению с нормальным для данного материала в отсутствие магнитного поля:

$$F_n - F_{s0} = H_{cm}^2 / 8\pi$$

Эту же мысль можно пояснить по-другому. Переход сверхпроводника второго рода в нормальное состояние произойдет тогда, когда на его намагничивание будет затрачена работа, равная $F_n - F_{s0}$:

$$-\int_0^{H_{c2}} M dH_0 = H_{cm}^2 / 8\pi$$

Отсюда получим следующее определение H_{cm} для сверхпроводника второго рода:

$$H_{cm}^2 = 2 \int_0^{H_{c2}} (H_0 - B(H_0)) dH_0 \quad (32.9)$$

III-з.

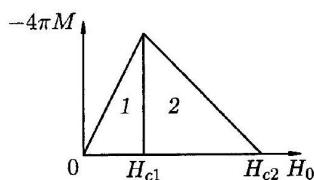
32.1. Сверхпроводящий сплав имеет $H_{c2} = 50\text{k}$, $\kappa = 60$. Вычислить магнитный момент единицы объема M при внешнем поле $H_0 = 10\text{k}$.

Ответ. $M = -0.445\text{Г г.}$

III-з.

32.2. Второе критическое поле сверхпроводящего сплава ниобий-тантал равно 4000 Э , а $\kappa = 3$. Аппроксимируя кривую намагничивания сплава $-4\pi M(H_0)$ двумя треугольниками, как показано на рис. 32.1, оценить первое критическое поле H_{c1} , критическое термодинамическое поле H_{cm} . Сравнить H_{c1} с ответом задачи 31.2, а H_{cm} с точным значением этой величины.

Рис. 32.1. Приближение кривой намагничивания двумя треугольниками. Треугольник (1) определен равенством $-4\pi M = H_0$, треугольник (2) равенством $-4\pi M = (H_{c2} - H_0) / [1.16(2\kappa^2 - 1)]$.



Решение Из рис. 32.1 ясно, что H_{c1} является решением уравнения $H_{c1} = k(H_{c2} - H_{c1})$, где $k^{-1} = 1.16(2\kappa^2 - 1)$. Отсюда $H_{c1} = 193\text{ Э}$. Из формулы (32.9) следует возможность оценить H_{cm} по площади под кривой намагничивания. Такая оценка дает $H_{cm} = [k/(1 + k)]^{1/2} H_{c2} = 879\text{ Э}$. Точное значение находится по формуле (31.2): $H_{cm} = 942\text{ Э}$.

5.4.7 33. Поверхностная сверхпроводимость. Третье критическое поле

Если внешнее магнитное поле H_0 уменьшается от значения $H_0 > H_{c2}$, то в тот момент, когда H_0 становится чуть меньшим H_{c2} , во всем объеме сверхпроводника второго рода возникают зародыши сверхпроводимости, появляется плотно упакованная решетка вихрей. При этом параметр порядка ψ мал ($|\psi| \ll 1$). Происходит фазовый переход второго рода из нормального состояния ($H_0 > H_{c2}$) в смешанное состояние ($H_0 \lesssim H_{c2}$).

Рассмотрим зародыши сверхпроводимости, о котором только что говорилось. Это участок ширины порядка $2\xi(T)$ между двумя нормальными сердцевинами двух соседних вихрей. Действительно, если радиус нормальной сердцевины мы принимаем равным ξ , то при плотной упаковке вихрей расстояние между их центрами будет порядка 2ξ . Зависимость параметра порядка от координаты на линии, соединяющей центры вихрей, схематично показана на рис. 33.1, а. В этом сечении зародыши имеют вид колоколообразной кривой. Так будет возникать сверхпроводимость при поле H_{c2} в объеме сверхпроводника второго рода.

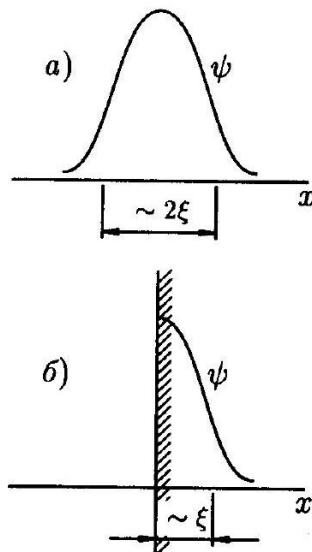


Рис. 33.1. Волновая функция ψ зародыша сверхпроводящего состояния а) в неограниченном сверхпроводнике, размер зародыша порядка 2ξ ; б) в сверхпроводящем полупространстве, размер зародыша порядка ξ .

Оказывается, однако, что на поверхности сверхпроводника, там где она параллельна внешнему полю, сверхпроводимость может существовать и при более высоких полях.

Итак, рассматривается полубесконечное сверхпроводящее пространство, занимающее область $x > 0$. Таким образом, плоскость $x = 0$ является границей нашего сверхпроводника. Внешнее магнитное поле H_0 параллельно оси z . В сверхпроводнике с поверхностью на плоскости $x = 0$ можно ожидать, что зародыш, образовавшийся вблизи поверхности, будет иметь эффективную ширину порядка $\xi(T)$, т.к. на поверхности $d\psi/dx = 0$. На рис. 33.1, б схематически изображен зародыш вблизи поверхности. Но из формулы (17.5) для критического поля тонкой пленки известно, что уменьшение размеров пленки увеличивает ее критическое поле. Поэтому во втором случае - зародыша вблизи поверхности - можно ожидать большего критического поля образования такого зародыша (приблизительно в два раза). Это новое критическое поле мы будем называть третьим критическим полем, или критическим полем поверхностной сверхпроводимости и будем обозначать H_{c3} . В рамках теории ГЛ величина H_{c3} может быть определена с помощью того же уравнения (31.4), использованного ранее для нахождения H_{c2} , вместе с условием $d\psi/dx = 0$ на поверхности (см. [7], с. 199). Машинный расчет показал [90], что

$$H_{c3} = 1.69 H_{c2}. \quad (33.1)$$

Итак, подведем некоторые итоги. Из проведенных рассуждений следует, что при уменьшении внешнего магнитного поля, когда оно достигает значения H_{c3} , на поверхности сверхпроводника возникает тонкий сверхпроводящий слой. Толщина этого

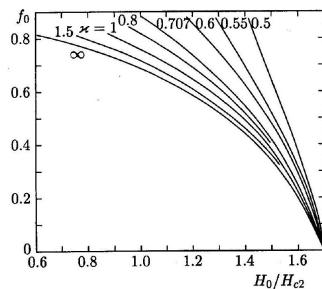


Рис. 33.2. Зависимость модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника от внешнего магнитного поля при различных значениях κ [91].

слоя имеет порядок $\xi(T)$. Внутри сверхпроводника сохраняется нормальное состояние и магнитное поле, равное внешнему полю. В поверхностном сверхпроводящем слое магнитное поле будет несколько ослаблено, как это бывает у тонких сверхпроводящих пленок во внешнем параллельном поле. Это означает, что по внешней и внутренней поверхностям сверхпроводящего слоя текут токи в противоположных направлениях.

Что будет происходить с поверхностным сверхпроводящим слоем по мере дальнейшего уменьшения внешнего поля ниже H_{c3} ? Расчеты показали, что по мере уменьшения поля будут увеличиваться модуль параметра порядка и ширина сверхпроводящего слоя Δ . На рисунках 33.2 и 33.3 показаны полевые зависимости модуля параметра порядка f_0 на поверхности сверхпроводника и ширины сверхпроводящего поверхностного слоя Δ при разных значениях параметра \varkappa .

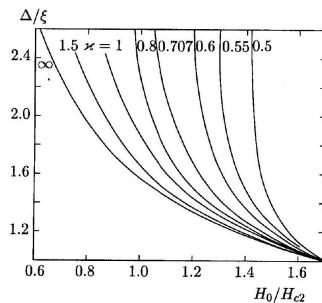


Рис. 33.3. Зависимость ширины сверхпроводящего слоя Δ от внешнего магнитного поля при различных значениях \varkappa [91].

Покрытие поверхности сверхпроводника нормальным металлом снижает H_{c3} до величины, очень близкой к H_{c2} .

Интересно отметить, что явление поверхностной сверхпроводимости может наблюдаться и у некоторых сверхпроводников первого рода. Действительно, во всех наших рассуждениях нигде не предполагалось, что $\varkappa > 1/\sqrt{2}$, и при этом получилось, что $H_{c3} = 1.69H_{c2} = 1.69\sqrt{2}\varkappa H_{cm}$. Поверхностная сверхпроводимость возникает в том случае, если H_{c3} будет больше H_{cm} , т.е. если

$$1.69\sqrt{2}\varkappa H_{cm} > H_{cm} \quad (33.2)$$

Таким образом, поверхностная сверхпроводимость может возникнуть у сверхпроводника первого рода, если

$$\varkappa > 1/1.69\sqrt{2} = 0.42.$$

III-з.

33.1. Найти третье критическое поле сверхпроводящего сплава, имеющего критическое термодинамическое поле $H_{cm} = 900$ Э и глубину проникновения $\lambda = 2500$ Å.

Ответ. $H_{c3} = 51900$ Э.

III-з.

33.2. Найти третье критическое поле сверхпроводника, имеющего длину когерентности $\xi = 90$ Å.

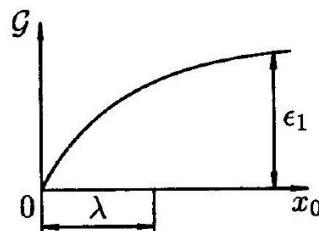
Ответ. $H_{c3} = 68700$ Э.

5.4.8 34. Поверхностный барьер. Перегрев мейсснеровского состояния

До сих пор мы рассматривали термодинамически равновесные ситуации. Так, например, считалось, что если при первом критическом поле становится энергетически выгодным проникновение вихрей в сверхпроводник второго рода, то вихри действительно туда проникают при этом поле.

Однако более внимательный анализ показывает, что для проникновения вихрей внутрь им нужно преодолеть некоторый энергетический барьер у поверхности сверхпроводника.

Рис. 34.1. Зависимость гиббсовской свободной энергии сверхпроводника с вихрем от расстояния между вихрем и поверхностью.



Рассмотрим плоскую идеально гладкую поверхность сверхпроводника и одиночный вихрь внутри образца, параллельный этой поверхности. Для удобства расчетов будем предполагать, что $\kappa \gg 1$. Внешнее поле предположим пока равным нулю. Гиббсовская свободная энергия \mathcal{G} такого сверхпроводника с вихрем изображена на рис. 34.1 как функция расстояния x_0 от сердцевины вихря до поверхности. Из этого рисунка следует прежде всего, что такой одиночный вихрь без внешнего поля, как и следовало ожидать, будет неустойчивым и что на достаточно больших расстояниях от поверхности \mathcal{G} будет просто равна свободной энергии одиночного вихря ϵ_1 . Здесь и ниже энергия сверхпроводника с вихрем отсчитывается от энергии сверхпроводника без вихря.

Поясним теперь, почему функция $\mathcal{G}(x_0)$ имеет такой вид. Если $x_0 < \lambda$, то линии токов вихря можно изобразить так, как показано на рис. 34.2, откуда видно, что слева от сердцевины сверхтекущая скорость больше, чем справа, поэтому на сердцевину вихря будет действовать разность бернульлиевских давлений. Это приведет к появлению силы, действующей на вихрь в сторону к поверхности. Итак, взаимодействие вихря с поверхностью приводит к его притяжению к поверхности. Ясно, что ту же силу $f(x_0)$ можно было бы получить, просто взяв производную

$$f = -d\mathcal{G}/dx_0 \quad (34.1)$$

Этим и объясняется та форма зависимости $\mathcal{G}(x_0)$, которая изображена на рис. 34.1.

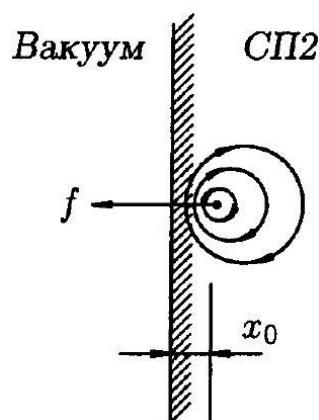


Рис. 34.2. Линии тока вихря вблизи поверхности сверхпроводника.

Для нахождения силы притяжения вихря к поверхности мы воспользуемся так называемым методом изображений. Поскольку предполагается, что $\kappa \gg 1$, поле, созданное вихрем, удовлетворяет линейному уравнению (28.5). При этом поле, созданное вихрем на поверхности сверхпроводника, всегда равно нулю (это можно доказать точно так же, как доказывается равенство нулю поля длинного соленоида вне этого соленоида). Таким образом, мы стоим перед линейным уравнением (28.5) с нулевым граничным условием на поверхности. Для линейных задач можно применять принцип суперпозиции. Заменим поэтому нашу задачу другой, ей эквивалентной. Рассмотрим безграничный сверхпроводник с двумя вихрями противоположного знака, расположенными в точках $\pm x_0$. Ясно, что в силу симметрии задачи поле на поверхности $x = 0$ всюду равно нулю, а при $x > 0$ должно выполняться уравнение (28.5). В силу однозначности решения дифференциального уравнения, поле, созданное этими двумя вихрями в полупространстве $x > 0$, в частности равно нулю, созданному одним вихрем, находящимся в точке x_0 , когда он расположен вблизи реальной поверхности сверхпроводника, совпадающей с плоскостью $x = 0$.

Теперь легко понять, что взаимодействие вихря с поверхностью (притяжение) можно трактовать и как взаимодействие вихря со своим изображением (притяжение, так как вихрь-изображение имеет противоположный знак).

Включим теперь внешнее поле H_0 параллельно поверхности сверхпроводника, как это показано на рис. 34.3. Сразу по поверхности пойдет мейсснеровский ток, который, взаимодействуя с вихрем, начнет отталкивать его от поверхности. В результате, с одной стороны, вихрь притягивается к поверхности своим собственным изображением, с другой стороны - отталкивается от поверхности мейсснеровским током. Вид гиббсовской свободной энергии вихря в этом случае показан на рис. 34.4. Видно, что при $H_0 < H_{c1}$ возможно метастабильное состояние вихря в сверхпроводнике, когда вихрю пребывать в сверхпроводнике энергетически невыгодно, но для выхода надо преодолеть энергетический барьер. По имени физиков, впервые рассмотревших такой барьер, он носит название барьера Бина-Ливингстона [92].

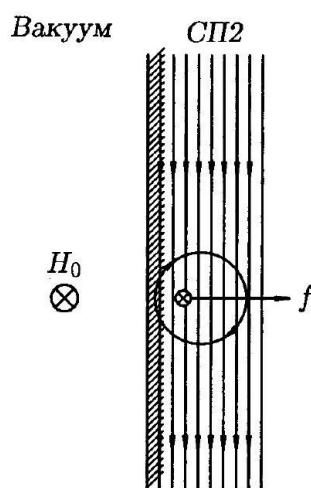


Рис. 34.3. Мейсснеровский ток, созданный внешним полем H_0 , отталкивает вихрь от поверхности.

При $H_0 = H_{c1}$ (см. рис. 34.4) вихрю впервые при увеличении поля становится энергетически выгодно существовать в сверхпроводнике, но проникновению вихря в сверхпроводник мешает барьер Бина-Ливингстона. Продолжаем увеличивать поле H_0 . Барьер понижается, но все еще существует, вихрь все еще не может проникнуть в сверхпроводник, по-прежнему (уже теперь метастабильно) существует мейсснеровское состояние. В этом случае говорят о перегреве мейсснеровского состояния.

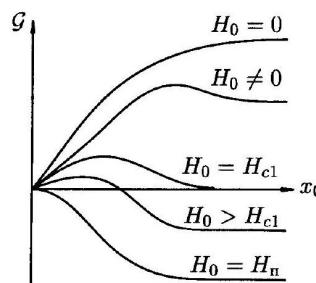


Рис. 34.4. Гиббсовская свободная энергия одиночного вихря как функция его расстояния до поверхности при разных значениях H_0 .

Барьер пропадает лишь при некотором поле $H_0 = H_\pi$, которое называется полем перегрева мейсснеровского состояния.

Рассчитаем это поле перегрева. Пусть сердцевина вихря находится в точке x_0 . Сила, которая притягивает его к поверхности это сила изображения, т. е. сила взаимодействия между вихрем и током, создаваемым изображением. Согласно (30.6), имеем

$$f_{\text{изобр}} = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{dH_v}{dx} \Phi_0 \quad (34.2)$$

где H_v -поле, создаваемое вихрем-изображением, а $(c/4\pi)(dH_v/dx)$ - ток изображения в точке $x = x_0$. Сила взаимодействия между вихрем и мейсснеровским током равна

$$f_M = \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{\lambda} e^{-x/\lambda} \Phi_0 \quad (34.3)$$

поскольку $(c/4\pi)(H_0/\lambda)e^{-x/\lambda}$ - это плотность тока в мейсснеровском состоянии.

Гиббсовская свободная энергия

$$G = - \int f dx \quad (34.4)$$

где $f = f_M + f_{\text{изобр}}$ - полная сила, действующая на вихрь.

Подставляя (34.2) и (34.3) в (34.4) и интегрируя, получим

$$G(x_0) = - \frac{\Phi_0}{4\pi} H_v(2x_0) + \frac{\Phi_0}{4\pi} H_0 e^{-x_0/\lambda} + \text{const.} \quad (34.5)$$

В этой формуле стоит $H_v(2x_0)$, так как это поле, созданное в точке x_0 вихрем-изображением, удаленным от этой точки на расстояние $2x_0$. Остается определить константу интегрирования.

При $x_0 \rightarrow \infty$ первые два члена в (34.5) обращаются в нуль. С другой стороны, при $x_0 \rightarrow \infty$ величина G становится просто гиббсовской свободной энергией одиночного вихря в безграничном сверхпроводнике, которая определяется выражением (29.5). Используя формулы (29.5) и (29.6), получим выражение для константы интегрирования в (34.5) в виде

$$\text{const} = G(\infty) = \frac{\Phi_0}{4\pi} (H_{c1} - H_0)$$

откуда

$$G = \frac{\Phi_0}{4\pi} [H_0 e^{-x_0/\lambda} - H_v(2x_0) + H_{c1} - H_0] \quad (34.6)$$

Нетрудно проверить, что эта формула дает ту серию кривых $G(x_0)$ при разных значениях H_0 , которая изображена на рис. 34.4.

Поле перегрева мейсснеровского состояния H_π можно определить из условия, очевидного из рис. 34.4:

$$d\mathcal{G} / dx_0|_{x_0=0} = 0 \quad (34.7)$$

Подставляя в это уравнение выражение для \mathcal{G} (34.6) и используя формулы (28.6) и (28.7), получим

$$H_\Pi \simeq H_{cm} \quad (34.8)$$

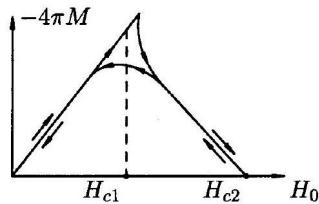
В процессе получения этой формулы при дифференцировании $H_v(2x_0)$ возникает расходимость в точке $x_0 = 0$. Это происходит потому, что при $x_0 = 0$ все рассмотрение становится неверным, так как мы не учитывали пространственные изменения параметра порядка ψ . Обойти эту трудность можно, считая, что вихрь выходит на поверхность не при $x_0 = 0$, а при $x_0 = \xi$, когда вихрь выйдет на поверхность своей сердцевиной. В этом предположении и получена формула (34.8). Точный расчет, проведенный Де Женом, подтвердил эту оценку:

$$H_\Pi = H_{cm} \quad (34.9)$$

Существование барьера Бина - Ливингстона доказано экспериментально. Прежде всего, этот барьер проявляется в небольшом гистерезисе кривой намагничивания однородного сверхпроводника второго рода вблизи H_{c1} . Схематический пример такой кривой показан на рис.34.5. От этого гистерезиса не удается избавиться никакими мерами по улучшению объемной однородности сверхпроводника.

Известны также и прямые эксперименты по измерению критического поля перегрева мейсснеровского состояния H_Π . Так,

Рис. 34.5. Гистерезис кривой намагничивания, обусловленный поверхностным барьером.



Де Блуа и де Сорбо [93] исследовали образцы ниобия с небольшой примесью кислорода и сплавы ниобий-тантал. Если образцы имели хорошую гладкую поверхность, полученную с помощью электрополировки, то для первого образца были получены следующие данные: $H_{c1} = 580$, $H_{c2} = 7000$, $H_{cm} = 1360$, $H_\Pi = 1330$ Э, а для второго образца $H_{c1} = 110$, $H_{c2} = 1600$, $H_{cm} = 310$, $H_\Pi = (180 \div 320)$ Э. Сопоставление этих данных показывает, что формула (34.9) достаточно надежно подтверждается экспериментом.

Во многих случаях, однако, барьер Бина-Ливингстона проявляется слабо. Так, в сверхпроводники с шероховатой поверхностью проникновение вихрей происходит при $H_0 < H_\Pi$.

Определим теперь величину магнитного потока, создаваемого вихрем, расположенным вблизи и параллельно плоскости поверхности сверхпроводника. Из общей формулы для гиббсовской свободной энергии следует, что гиббсовская свободная энергия сверхпроводника с вихрем равна

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \Phi H_0 / 4\pi \quad (34.10)$$

где \mathcal{F} - свободная энергия сверхпроводника с вихрем (не зависящая от внешнего поля H_0), Φ - магнитный поток вихря, расположенного вблизи поверхности. С другой стороны, эта же величина \mathcal{G} дается формулой (34.6). Выделяя в этой формуле члены, зависящие

от H_0 , и сравнивая их с (34.10), получим выражение для потока вихря, расположенного около поверхности:

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 - e^{-x_0/\lambda}\right). \quad (34.11)$$

Из этой формулы следует, что магнитный поток, создаваемый вихрем, стремится к нулю по мере приближения вихря к поверхности сверхпроводника. Это легко понять. Полный магнитный поток вихря можно записать в виде

$$\Phi = \int H dS$$

где интегрирование ведется по полуплоскости $z = 0, x > 0$, а H это истинное поле, созданное вихрем. Но это поле можно рассматривать как суперпозицию полей самого вихря и его изображения, а поле изображения имеет противоположное направление. В результате имеем

$$\Phi < \Phi_0$$

III-з.

34.1. Найти силу притяжения вихря к плоской поверхности сверхпроводника, если вихрь параллелен поверхности, находится от нее на расстоянии $l = 500\text{\AA}$, а глубина проникновения равна $\lambda = 3000\text{\AA}$.

Ответ. $f = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2/l = 6.03 \cdot 10^{-2}$ дин / см².

III-з.

34.2. Одиночный вихрь помещен вблизи поверхности сверхпроводника, которая образует прямой двугранный угол (рис. 34.6). Найти результирующую силу, действующую на вихрь со стороны поверхности, если $\lambda = 1500\text{\AA}$, $x_0 = 400\text{\AA}$, $y_0 = 600\text{\AA}$.

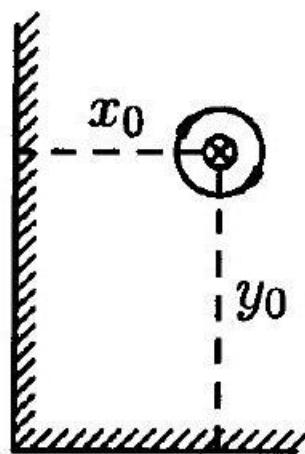


Рис. 34.6. К задаче 34.2.

Ответ. $f_x = -2.08 \cdot 10^{-1}$ дин / см, $f_y = -6.20 \cdot 10^{-2}$ дин / см.

III-з.

34.3. Найти силу взаимодействия вихря с мейсснеровским током, если вихрь параллелен плоской поверхности и находится от нее на расстоянии $l = 400\text{\AA}$. Сверхпроводник находится во внешнем поле $H_0 = 50$, $\lambda = 1000\text{\AA}$.

Ответ. $f = (\Phi_0 H_0 / 4\pi\lambda) e^{-1/\lambda} = 5.52 \cdot 10^{-2}$ дин / см.

III-з.

34.4. Найти поле перегрева мейсснеровского состояния, если $\kappa = 24$, $\lambda = 2000\text{ \AA}$.
Ответ. $H_{\Pi} = \Phi_0 \kappa / (2\sqrt{2}\pi\lambda^2) = 1.40 \cdot 10^3 \text{ Э.}$

5.4.9 35*. Анизотропные сверхпроводники II рода

Очень многие сверхпроводники II рода имеют сильно анизотропную (слоистую) кристаллическую структуру; таковы все представители семейства ВТС, NbSe₂ и многие другие соединения. Вследствие этого и их электронные свойства оказываются анизотропными. Энергия электрона может быть выражена через эффективные электронные массы поперек (m_{\perp}) и вдоль (m_{\parallel}) слоев:

$$E_p = \frac{p_z^2}{2m_{\perp}} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\parallel}}$$

причем $m_{\perp} \gg m_{\parallel} \sim m$, где m -обычная электронная масса. В результате оказываются зависящими от направления и параметры, характеризующие сверхпроводящее состояние - длина когерентности, лондоновская глубина проникновения, первое и второе критические поля. Если интересующий нас анизотропный сверхпроводник имеет $\kappa \gg 1$, можно применить простой прием, предложенный в работе [94], чтобы найти все эти угловые зависимости.

Начнем наше рассмотрение со свободной энергии Гинзбурга-Ландау для анизотропного случая:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{sH} = & \mathcal{G}_n + \int \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \right. \\ & + \frac{1}{4m_{\parallel}} \left| -i\hbar \nabla_{\parallel} \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_{\parallel} \Psi \right|^2 + \frac{1}{4m_{\perp}} \left| -i\hbar \nabla_z \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_z \Psi \right|^2 + \\ & \left. + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right] dV \end{aligned} \quad (35.1)$$

Далее удобно использовать параметр анизотропии ε , определенный как $m_{\parallel}/m_{\perp} = \varepsilon^2 \ll 1$. Сделаем в выражении (35.1) замену координат и компонент векторного потенциала:

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \varepsilon \tilde{z}, \quad A_x = \tilde{A}_x, A_y = \tilde{A}_y, \quad A_z = \frac{\tilde{A}_z}{\varepsilon}. \quad (35.2)$$

В новых переменных члены в (35.1), содержащие градиенты, станут изотропными, однако анизотропия появится в членах с магнитной энергией. Действительно, преобразования (35.2) для компонент вектора индукции $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ имеют вид

$$B_x = \frac{\tilde{B}_x}{\varepsilon}, \quad B_y = \frac{\tilde{B}_y}{\varepsilon}, \quad B_z = \tilde{B}_z \quad (35.3)$$

так что магнитная энергия запишется в виде

$$\mathcal{G}_M = \frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{\tilde{B}_{\parallel}^2}{\varepsilon^2} + \tilde{B}_{\perp}^2 - 2 \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}_{\parallel} \mathbf{H}_{\perp}}{\varepsilon} + \tilde{B}_{\perp} H_{\perp} \right) \right] dV. \quad (35.4)$$

Для сверхпроводников с очень большим параметром κ магнитную индукцию B можно часто считать постоянной по образцу, в то время как параметр порядка $\Psi(\mathbf{r})$ может быть сильно неоднороден (например, вблизи вихрей). Именно в таких случаях полезно преобразование (35.2): минимизируя G_M по компонентам вектора $\tilde{\mathbf{B}}$, найдем

$$\tilde{\mathbf{B}} = (\varepsilon H_x, \varepsilon H_y, H_z), \quad (35.5)$$

что соответствует равенству $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ для изотропной системы; такое приближение пригодно при $B \gg H_{c1}$. Преобразование (35.2) не меняет длин в плоскости слоев, поэтому мы сохраним обозначения ξ и λ за длиной когерентности в плоскости слоев и глубиной проникновения токов, текущих вдоль них.

В качестве примера найдем с помощью преобразования (35.2) зависимость второго критического поля H_{c2} от угла ϑ между вектором магнитной индукции \mathbf{B} и плоскостью слоев. Введем функцию $\varepsilon(\vartheta) \equiv \varepsilon_\vartheta$, определив ее равенством $\varepsilon_\vartheta^2 = \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta$. Тогда из соотношения (35.5) следует, что магнитное поле \mathbf{H} действует на анизотропный сверхпроводник так же, как поле $\varepsilon_\vartheta H$ на сверхпроводник изотропный. Отсюда немедленно находим:

$$H_{c2}(\vartheta) = \frac{\Phi_0}{2\pi\varepsilon_\vartheta\xi^2} \quad (35.6)$$

В частном случае, когда поле направлено параллельно слоям, второе критическое поле максимально, $H_{c2}^\parallel = \varepsilon^{-1} H_{c2}^\perp$. Этот результат можно также выразить как $H_{c2}^\parallel = \Phi_0 / (2\pi\xi\xi_\perp)$, где $\xi_\perp = \varepsilon\xi$ длина когерентности в поперечном к слоям направлении; это соотношение между ξ_\perp и ξ следует уже из вида свободной энергии (35.1).

Термодинамическое критическое поле H_{cm} не может зависеть от направления поля (поскольку оно просто определяет плотность энергии, выигранной при переходе в сверхпроводящее состояние, $G_n - G_s = H_{cm}^2/8\pi$). С другой стороны, обычно $H_{c1}H_{c2} = H_{cm}^2 \ln(\lambda/\xi)$, т. е. следует ожидать, что первое критическое поле будет зависеть от угла ϑ противоположным (по сравнению с (35.6)) образом. Для определения $H_{c1}(\vartheta)$ метод преобразования (35.2) непригоден, т.к. вблизи первого критического поля распределение $B(\mathbf{r})$ максимально неоднородно. Расчеты [95] в рамках лондоновского приближения дают

$$H_{c1}(\vartheta_H) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\theta_H}} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (35.7)$$

где $\theta_H = \pi/2 - \vartheta_H$, а ϑ_H - угол между направлением магнитного поля \mathbf{H} и плоскостью слоев (в полях порядка первого критического направления магнитного поля \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} , вообще говоря, отличаются). Первое критическое поле минимально в направлении слоев, что легко понять - плотность экранирующих токов, текущих в направлении поперек слоев, уменьшена по сравнению с токами вдоль слоев, так что длина экранирования возрастает, $\lambda_\perp = \varepsilon^{-1}\lambda$.

До сих пор мы подразумевали, начиная с выражения для свободной энергии (35.1), что сверхпроводник может быть описан как непрерывная трехмерная среда, хотя и анизотропная. Для того чтобы это было справедливо, поперечная длина когерентности $\xi_\perp(T)$ должна быть велика по сравнению с расстоянием d между сверхпроводящими слоями в слоистой структуре. Если и низкотемпературная длина когерентности $\xi_{0\perp} = \varepsilon\xi_0$ больше d , то сверхпроводник всегда можно считать непрерывным; в случае $\xi_{0\perp}/d < 1$ непрерывное описание пригодно достаточно близко к T_c , где длины когерентности $\xi(T)$ и $\xi_\perp(T)$ возрастают. В области $\xi_\perp(T)/d < 1$ материал естественно рассматривать как набор тонких сверхпроводящих слоев со слабыми (джозефсоновскими) связями между слоями. К этой категории относятся высокотемпературные сверхпроводники семейства $\text{Bi} - \text{Sr} - \text{Ca} - \text{Cu} - \text{O}$, у которых параметр анизотропии $\varepsilon^{-1} > 100$. В первом приближении при рассмотрении такого вещества джозефсоновской связью между слоями можно вовсе пренебречь и рассматривать его как набор двумерных сверхпроводящих слоев, связанных лишь магнитным взаимодействием. Мы не будем здесь останавливаться подробнее на

свойствах слоистых квазидвумерных сверхпроводников; их обсуждение можно найти, например, в обзоре [96].

5.4.10 36*. Разрушение сверхпроводимости в тонкой пленке тепловыми вихрями

36.1. Фазовый переход Березинского-Костерлица Таулеса. В тонких сверхпроводящих пленках (толщиной $d \ll \lambda$) вихри, аналогичные абрикосовским, могут не только рождаться внешним поперечным магнитным полем, но и возникать при $H_0 = 0$ (чисто флюктуационным образом). В этом случае плотности вихрей с положительной и отрицательной циркуляциями совпадают. Однако возникшие из-за тепловых флюктуаций вихри могут сильно влиять на сверхпроводящие свойства пленки; они приводят к ее переходу в нормальное состояние при температуре $T_{\text{ВКТ}}$, более низкой, чем определенная по теории Гинзбурга-Ландау температура перехода T_{c0} . Подобный фазовый переход был впервые предсказан (для целого ряда двумерных систем - магнетиков, кристаллов, сверхтекущих пленок) В.Л. Березинским [97], а затем подробнее исследован в работах [98, 99] и (специально для случая сверхпроводников) в [100]; с тех пор его существование подтверждено многочисленными экспериментами. Мы рассмотрим здесь качественную картину фазового перехода Березинского - Костерлица - Таулеса (сокращенно - БКТ-переход), а в следующем разделе - его наблюдаемые следствия для сверхпроводящих пленок.

В §30 было показано, что энергия взаимодействия (на единицу длины) двух абрикосовских вихрей на расстоянии $R \ll \lambda$, когда экранировкой можно пренебречь, равна $2q_1q_2\epsilon_0 \ln(R/\lambda)$, где $q_{1,2}$ принимают значения +1 для вихрей с положительной и -1 для вихрей с отрицательной циркуляцией соответственно, а $\epsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$. Главный вклад в ϵ_0 дает кинетическая энергия сверхтекущего движения вокруг каждого вихря $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} m n_s v_s^2(r)$, где сверхтекущая скорость $v_s(r) = \frac{\hbar}{2m} (\nabla\theta - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}) \propto \frac{\hbar}{2mr}$ на малых расстояниях от центров вихрей (где можно пренебречь вкладом векторного потенциала). В случае пленки экранирующей сверхтекущий ток сосредоточен в тонком слое толщины $d \ll \lambda$, в то время как магнитное поле распределено во всем трехмерном пространстве. Поэтому экранировка магнитного поля вихря в пленке оказывается гораздо слабее, чем в объемном сверхпроводнике. Точный расчет, изложенный в книге [7], дает эффективную длину экранировки

$$\lambda_{2d} = \frac{2\lambda^2}{d} \quad (36.1)$$

Этот результат можно угадать и из сравнения формул (10.4) и (10.7) для кинетических индуктивностей поверхности массивного сверхпроводника и тонкой пленки - обе эти формулы можно записать в виде $L_{\square}^k = 2\pi\lambda_{\text{эфф}}$, где $\lambda_{\text{эфф}}$ равно либо λ , либо λ_{2d} .

При расстояниях между вихрями в пленке $R \ll \lambda_{2d}$ экранировкой можно пренебречь, и полная энергия взаимодействия $U_2(R) = 2q_1q_2d\epsilon_0 \ln(R/\lambda_{2d})$, а собственная энергия каждого из вихрей равна $U_1 = d\epsilon_0 \ln(\lambda_{2d}/\xi)$, так что полная энергия пары вихрей противоположных циркуляций равна

$$U_{\text{пар}}(R) = 2\epsilon_0 d \ln \frac{R}{\xi} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 \lambda_{2d}} \ln \frac{R}{\xi} \quad (36.2)$$

В тонких пленках λ_{2d} может достигать макроскопических размеров. Так, при $\lambda = 3$ мкм (что легко достигается в близкой окрестности T_{c0}) и толщине пленки $d = 50\text{ \AA}$ получим $\lambda_{2d} \simeq 3.6$ мм. При этом энергия кора вихря, $U_{\text{кор}} = d\epsilon_0$, мала: $U_{\text{кор}}/k_B \simeq 10$ К, в то время как полная энергия гораздо больше, $U_1/k_B \simeq 100$ К (мы выбрали здесь для оценки $\xi \simeq 0.1$ мкм). Пусть, для примера, $T_{c0} = 5$ К. Тогда вероятность найти (на площади порядка размера кора ξ^2) отдельный вихрь, возникший вследствие тепловой флюктуации в бесконечной пленке, будет очень

мала, порядка $e^{-U_1/T} \leq 10^{-8}$. Казалось бы, это значит, что такими вихрями всегда можно пренебречь. Однако в бесконечной пленке и число мест, где может находиться каждый вихрь, бесконечно. Для аккуратного анализа надо рассмотреть случай пленки конечного размера L , где есть порядка $(L/\xi)^2$ возможных "посадочных мест" для вихрей.

Поскольку λ_{2d} может быть очень велико, имеет смысл рассмотреть случай размеров L , малых по сравнению с λ_{2d} (мы обсудим влияние конечности длины λ_{2d} позже, в самом конце этого раздела). Тогда энергия вихря равна $U_1(L) = d\epsilon_0 \ln(L/\xi)$, а среднее число вихрей во всей пленке порядка

$$n(L) \simeq (L/\xi)^2 \exp(-U_1(L)/T) = (L/\xi)^{2-\alpha}$$

где $\alpha = \epsilon_0 d / k_B T = \Phi_0^2 / (8\pi^2 \lambda_{2d} k_B T)$. При достаточно низких температурах $\alpha > 2$ и среднее число вихрей во всей пленке убывает с ростом L ; иначе говоря, в большой системе при $k_B T < \epsilon_0 d / 2$ отдельных флюктуационных вихрей нет. Напротив, при $\alpha < 2$ вероятность найти вихрь растет с L . Этот же результат можно выразить немного иначе, определив свободную энергию одиночного вихря по обычным правилам статистической механики как $F_1 = U_1 - TS_1$, где энтропия $S_1 = k_B \ln(L^2/\xi^2)$ есть просто логарифм числа доступных для вихря мест на пленке. Тогда условие $\alpha < 2$ означает, что свободная энергия в расчете на один вихрь отрицательна, то есть вихрям выгодно рождаться (до тех пор, пока их взаимодействие, пока еще нами не учтенное, не остановит этот процесс). Температура $T_{\text{ВКТ}} = \Phi_0^2 / (16\pi^2 k_B \lambda_{2d})$, при которой $\alpha = 2$, называется температурой перехода Березинского-Костерлitz-Таулеса.

Но состояние пленки со свободными вихрями уже не является сверхпроводящим! Это можно понять с помощью двух различных рассуждений. Во-первых, фаза параметра порядка $\theta(\mathbf{r}, t)$ в каждой точке сверхпроводника сильно зависит (в каждый данный момент времени) от положений всех вихрей, поскольку фаза меняется на 2π при обходе вокруг каждого вихря. Это означает, что вихри, передвигаясь подобно частицам жидкости, приводят к сильным флюктуациям фазы $\theta(\mathbf{r}, t)$. Нетрудно показать, что в случае двумерной жидкости вихрей флюктуации эти столь велики, что среднее значение $\langle e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \rangle$ обращается в нуль. Поэтому обращается в нуль и сверхпроводящий параметр порядка $\Psi \propto \langle e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \rangle$, так что с позиций теории Гинзбурга-Ландау сверхпроводимость отсутствует. Второе рассуждение имеет более "практический" характер. В том случае, когда вихри индуцируются в сверхпроводнике внешним магнитным полем, они обычно образуют решетку, которая зацепляется за примеси и потому остается неподвижной при достаточно малых токах (подробнее это обсуждается в §§38, 39, 41). Транспортный ток с плотностью j , большей критического значения j_c , приводит (как будет объяснено в 40) к движению вихревой решетки, при котором происходит диссипация энергии. Вихри же, возникающие в тонкой пленке вследствие тепловых флюктуаций, взаимодействуют между собой с энергией порядка тепловой и решетки не образуют. Поэтому они не могут и зацепиться за примеси, т. е. движение тепловых вихрей (и потому диссипация) вызывается сколь угодно малым током. Мы пришли к важному выводу: разрушение сверхпроводящего состояния в тонкой пленке происходит в действительности при более низкой температуре, чем это предсказывается в теории Гинзбурга-Ландау, не учитывающей флюктуаций, причем с приближением к температуре $T_{\text{ВКТ}}$ этого перехода снизу лондоновская глубина проникновения $\lambda(T)$ остается конечной:

$$\frac{1}{\lambda_{2d}(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{d}{2\lambda_-^2(T_{\text{ВКТ}})} = \frac{16\pi^2 k_B T_{\text{ВКТ}}}{\Phi_0^2}. \quad (36.3)$$

Иначе говоря, макроскопическая (с учетом вихрей) сверхтекучая плотность пленки $n_s^{(2)} = n_s d$ испытывает при повышении температуры скачок от значения $n_s^{(2),\min}$, универсальным образом связанного с температурой перехода:

$$n_s^{(2),\min} = \frac{8m k_B T_{\text{БКТ}}}{\pi \hbar^2} \quad (36.4)$$

до нуля. Найдем, используя теорию Гинзбурга-Ландау, насколько температура БКТ-перехода отличается от «затравочной» критической температуры T_{c0} . Вблизи T_{c0} сверхтекучая плотность $n_s(T) = \mathcal{A}n_s(0)(1 - T/T_{c0})$, где коэффициент \mathcal{A} равен 2 в чистом пределе и примерно 2.6 - в грязном (см. 51), так что получаем

$$\frac{T_{c0} - T_{\text{БКТ}}}{T_{c0}} \simeq \frac{32\pi^2 \lambda^2(0) k_B T_{c0}}{\mathcal{A} \Phi_0^2 d} \quad (36.5)$$

где $\lambda(0)$ - глубина проникновения при $T \rightarrow 0$. Оценка (36.5) совпадает (с точностью до численного множителя) с приведенной ранее в 19 оценкой ширины флюктуационной области в двумерной системе Gi^{2D} . Хотя в 19 мы использовали совсем другие аргументы, не имеющие отношения к вихрям, результат получился такой же. Фактически $T_{\text{БКТ}}$ всегда близко к T_{c0} даже в тонких пленках грязных сверхпроводников: используя (36.5) и формулы из §51, для грязного предела получим

$$\frac{T_{c0} - T_{\text{БКТ}}}{T_{c0}} \simeq 3\text{Gi}_d^{(2D)} = \frac{3}{16g} \quad (36.6)$$

где параметр $\text{Gi}_d^{(2D)}$ определен в (19.17). Правая часть (19.17) может стать порядка 1 лишь при g , заметно меньшем единицы, что происходит лишь в окрестности перехода металл - диэлектрик. Во всех остальных случаях зависимость $n_s(T)$ должна иметь вид, изображенный схематически на рис.36.1. Этот вывод подтвержден экспериментально - путем измерения кинетической индуктивности тонких пленок [101].

Аргументы, которые мы использовали выше, чтобы найти условие $\alpha = 2$ фазового БКТ-перехода, были не вполне строги, однако последовательная теория приводит к точно такому

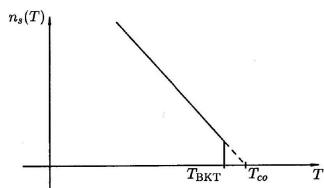


Рис. 36.1. Схематический вид характерной зависимости сверхтекучей плотности от температуры при БКТ-переходе в тонкой сверхпроводящей пленке.

же выводу. Тем не менее, мы сейчас опишем схематически этот более последовательный подход, т.к. эти идеи понадобятся нам ниже при обсуждении вида вольт-амперных характеристик вблизи точки БКТ-перехода.

При $T < T_{\text{БКТ}}$ в системе нет одиночных флюктуационных вихрей, однако существуют пары вихрей с противоположными циркуляциями ($q_1 q_2 = -1$), и вероятность найти такую пару с расстоянием R между вихрями есть $P(R) = \exp(-U_{\text{pair}}(R)/k_B T) \propto \propto (R/\xi)^{-2\alpha}$. Мы можем формально рассматривать вихри как заряженные частицы, а их пары - как нейтральные «вихревые молекулы». Эта аналогия тем более разумна, что в двумерном пространстве обычный кулоновский потенциал точечного заряда (определенный уравнением Гаусса $\varepsilon_v \nabla \mathbf{E} = -\varepsilon_v \nabla^2 \varphi = 2\pi\delta(\mathbf{r})$) логарифмически растет с расстоянием: $\varphi = \varepsilon_v^{-1} \ln(r)$. Здесь мы ввели обозначение ε_v для «диэлектрической постоянной» газа вихревых молекул. Тогда фазовый переход БКТ можно описать как переход между газом нейтральных вихревых молекул (где величина ε_v конечна) и «вихревой плазмой», состоящей из отдельных «заряженных» частиц, где $\varepsilon_v \rightarrow \infty$ и «электрическое» поле каждого отдельного «заряда» экранируется

другими «зарядами» - вихрями. Начнем с низкотемпературной фазы, где есть лишь малая плотность вихревых молекул. Они дают вклад в «диэлектрическую восприимчивость» среды $\kappa_v = (\epsilon_v - 1)/2\pi$, пропорциональный среднему квадрату "дипольного момента" вихревой молекулы:

$$\kappa_v \propto \int_{\xi}^L R^2 P(R) 2\pi R dR \propto \int_{\xi}^L \frac{dR}{R^{2\alpha-3}}; \quad \alpha = \frac{\epsilon_0 d}{T \epsilon_v} \quad (36.7)$$

Как видно из (36.7), при α , стремящемся к 2 сверху, интеграл, определяющий κ_v , начинает логарифмически расходиться как функция размера системы L . Второе равенство в (36.7) учитывает (самосогласованным методом), что параметр α сам зависит от взаимодействия между вихрями (мы здесь подразумеваем, что величина λ , входящая в ϵ_0 , определена в рамках теории Гинзбурга-Ландау и вихрей не учитывает). Самосогласованное уравнение типа (36.7) было выведено в работе Костерлица и Таулеса [98], а его аккуратное решение приведено в последующей работе Костерлица [99] (см. также [34]). Результат этого решения, как можно догадаться уже из (36.7), состоит в том, что $\alpha_{\min} = 2$ сохраняется как точное минимальное значение параметра α при учете всех поправок, что подтверждает универсальность скачка сверхтекущей плотности (36.4). Кроме того, это решение позволяет найти зависимость среднего расстояния между свободными вихрями $R_c(T)$ (т.е. масштаба длины, на котором разрушается сверхпроводимость) при $T > T_{\text{ВКТ}}$:

$$\ln \frac{R_c(T)}{\xi} = b \left(\frac{\text{Gi}^{(2D)} T}{T - T_{\text{ВКТ}}} \right)^{1/2} \quad (36.8)$$

где $\xi(T)$ - обычная сверхпроводящая длина корреляции, определяемая с помощью теории Гинзбурга - Ландау, а b - число порядка единицы. Появление множителя $\text{Gi}^{(2D)}$ в правой части (36.8) легко понять: при $\frac{T-T_{\text{ВКТ}}}{T} \geq \text{Gi}^{(2D)}$ температура уже столь близка к T_{c0} , что невозможно отличить флюктуационные вихри от обычных флюктуаций, поэтому $R_c(T) \sim \xi(T)$.

Весь предыдущий анализ был основан на логарифмической зависимости энергии пары вихрь-антивихрь от расстояния. На очень больших расстояниях $R \geq \lambda_{2D}$ энергия такой пары перестает расти с R ; иначе говоря, энергия единственного вихря остается конечной, а потому и отлична от нуля их концентрация при всякой отличной от нуля температуре. Формально говоря, это означает, что двумерный сверхпроводник всегда находится в резистивном состоянии. Однако фактически концентрация вихрей при $T < T_{\text{ВКТ}}$ имеет порядок $e^{-\alpha \ln(\lambda_{2D}/\xi)} < (\xi/\lambda_{2D})^2$, и ею можно пренебречь везде, кроме совсем узкой окрестности $T_{\text{ВКТ}}$, где корреляционный радиус, определяемый уравнением (36.8), мог бы оказаться больше λ_{2D} .

36.2. Вольт-амперные характеристики вблизи БКТперехода. В сверхпроводящем состоянии, реализующемся при $T < T_{\text{ВКТ}}$, по определению должно быть равно нулю линейное сопротивление, определяемое как $\rho_{\text{лин}} = (dV/dI)_{I=0}$. Это, однако, не означает, что напряжение должно быть равно нулю при малых токах. В тонкой пленке, как мы сейчас увидим, напряжение при низких температурах растет как высокая степень тока, $V \propto I^{\alpha+1}$. Действительно, рассмотрим «нейтральную» пару вихрей, повернутую перпендикулярно протекающему току с плотностью j , так что сила Лоренца стремится увеличить размер пары R . Полная энергия пары с учетом силы Лоренца равна

$$U_{\text{полн}}(R) = 2\epsilon_0 d \ln \frac{R}{\xi} - jd \frac{\Phi_0}{c} R \quad (36.9)$$

где j - плотность транспортного тока. При самых больших $R > R^* = (2c\epsilon_0/j\Phi_0)$ второй член в полной энергии всегда больше первого, т.е. внешний ток приводит к разрыву вихревых молекул на отдельные вихри. Иначе говоря, если по пленке протекает

транспортный ток, в ней создается ненулевая плотность неспаренных вихрей $n_v(j)$ на единицу площади пленки. Но движение этих вихрей под действием тока приводит к диссипации энергии, т. е. к конечному сопротивлению $\rho(j) \sim n_v(j)\xi^2(T)\rho_n$ (этую оценку легко получить, сравнивая с проведенным в §40 выводом сопротивления ρ_f в резистивном состоянии). Поэтому нам осталось найти стационарную плотность одиночных вихрей $n_v(j)$ (обоих знаков) при заданной плотности тока j .

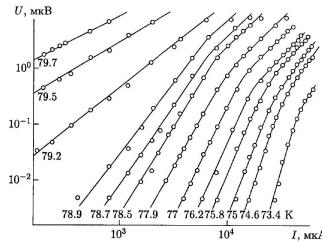


Рис. 36.2. Нелинейные вольт-амперные характеристики монокристалла $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_x$ при различных температурах $T \lesssim T_c$.

Стационарная величина $n_v(j)$ определяется равенством скорости рождения одиночных вихрей Γ_+ из-за разрыва пар током и скорости аннигиляции Γ_- уже имеющихся вихрей противоположных знаков. Величину Γ_+ оценим как вероятность термоактивационного процесса преодоления потенциального барьера $U_{\text{полн}}(R^*) = 2\epsilon_0 d \ln(2\epsilon_0 c/j\Phi_0\xi)$, определяемого максимумом по R выражения (36.9). Таким образом,

$$\Gamma_+ \sim \Gamma_0 \exp(-U_{\text{полн}}(R^*)/k_B T)$$

где Γ_0 - величина размерности частоты. Величина Γ_- определяется вероятностью (в единицу времени) того, что два вихря противоположных знаков приближаются на расстояние порядка размера кора $\xi(T)$, после чего аннигилируют. При малой концентрации вихрей, $n_v(j)\xi^2(T) \ll 1$, вероятность такого «столкновения» вихрей пропорциональна квадрату их концентрации,

$$\Gamma_- \sim \Gamma_0 (n_v(j)\xi^2(T))^2$$

Таким образом, приравнивая Γ_+ к Γ_- , получаем равновесную концентрацию вихрей

$$n_v(j)\xi^2(T) \sim \exp(-U_{\text{полн}}(R^*)/2k_B T)$$

и для сопротивления получаем

$$\rho(j) \sim \rho_n j \left(\frac{j}{j_T}\right)^\alpha \quad (36.10)$$

где

$$j_T = \frac{c\Phi_0}{16\pi^2\lambda^2(T)\xi(T)}$$

близко к плотности тока распаривания в теории Гинзбурга-Ландау.

Как мы уже знаем, минимальная величина параметра α в низкотемпературной фазе равна 2, так что показатель степени в вольт-амперной характеристике $V(I) \propto I^{1+\alpha}$ испытывает при понижении температуры скачок от 1 к 3. Пример измерения ВАХ, позволившего продемонстрировать существование БКТперехода в сильно анизотропном (слоистом) ВТСП монокристалле $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [103], показан на рис. 36.2

Зависимость линейного сопротивления от температуры при $T > T_{\text{БКт}}$ можно определить аналогично выводу точки перехода плотность вихрей n_v остается ненулевой при $j \rightarrow \rightarrow 0$: по порядку

величины $n_v \sim R_c^{-2}(T)$, где радиус корреляции $R_c(T)$ ведет себя согласно уравнению (36.8). Поэтому для сопротивления получаем

$$\rho(T) \sim n_v(T) \xi^2(T) \rho_n \sim \rho_n \exp\left(-2b\left(\frac{Gi_{2D}T}{T - T_{\text{ВКТ}}}\right)\right) \quad (36.11)$$

Зависимость сопротивления вида (36.11) была с хорошей точностью подтверждена на эксперименте [102].

5.4.11 37*. Плавление решетки вихрей

В теории Гинзбурга - Ландау - Абрикосова - Горькова фазовый переход в сверхпроводящее состояние в магнитном поле происходит при значении внешнего поля $H_0 = H_{c2}(T)$, когда одновременно появляется сверхпроводящий параметр порядка $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) \neq 0$, периодически зависящий от координат \mathbf{r}_\perp , и возникает решетка вихрей (в центрах которых $\Psi(\mathbf{r}_\perp, z)$ обращается в нуль). С точки зрения изменения симметрии на линии $H_0 = H_{c2}(T)$ одновременно происходят два разных фазовых перехода: нарушается и градиентная инвариантность (параметр порядка Ψ неинвариантен при градиентном преобразовании, см. п. 14.3), и трансляционная инвариантность - поскольку возникает периодическая структура.

В отличие от большинства обычных сверхпроводников, в случае ВТСП тепловыми флуктуациями вблизи фазового перехода пренебрегать нельзя. Даже в отсутствие магнитного поля в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ с температурой перехода около 90 К ширина флуктуационной области имеет порядок 1 К, т.е. параметр $Gi \sim \sim 10^{-2}$, и она еще больше в сильно слоистых соединениях типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$. Фазовый переход в сверхпроводящее состояние в магнитном поле еще более чувствителен к флуктуационным эффектам: помимо обычных флуктуаций параметра порядка, имеющихся и при $B = 0$, здесь возможны также флуктуации положений вихревых линий в пространстве, которые очень сильно меняют фазу параметра порядка в окрестности каждой такой линии.

Последовательной теории фазового перехода сверхпроводник-металл в магнитном поле, которая учитывала бы флуктуационные эффекты, не создано до сих пор, однако качественную картину происходящего в ВТСП можно понять, рассмотрев решетку вихрей в лондоновском приближении, справедливом при $B \ll H_{c2}(T)$ (подразумевается сверхпроводник с $\kappa \gg 1$, что характерно для ВТСП). В этом случае размер сердцевины вихря ξ мал по сравнению с расстоянием между вихрями $a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$, в большей части сверхпроводника абсолютная величина параметра

порядка $|\Psi|$ близка к ее значению в отсутствие магнитного поля, и решетку вихрей можно рассматривать как аналог обычной кристаллической решетки. Отличие лишь в том, что вихревая решетка состоит из линий (в среднем параллельных направлению z внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0). Известно, что всякий кристалл плавится при некоторой температуре, когда амплитуда $u_{\text{тепл}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle_{\text{тепл}}}$ тепловых флуктуаций атомов (или электронов - если речь идет о вигнеровском кристалле из электронов на поверхности гелия) становится сравнимой с постоянной решетки a_0 . Фактически отношение $u_{\text{тепл}}/a_0$ в точке плавления всегда остается численно малой величиной (называемой постоянной Линдеманна c_L , который и предложил использовать равенство $u_{\text{тепл}} = c_L a_0$ в качестве феноменологического критерия плавления обычных трехмерных кристаллов, где $c_L \simeq 0.1 \div 0.15$). Величину $u_{\text{тепл}}^2$ для вихревой решетки можно вычислить как сумму квадратов амплитуд флуктуаций с определенными волновыми векторами \mathbf{q} - аналогичных обычным фононам. Мы не будем приводить здесь этот вывод (см., например, обзор [96]) и дадим вместо этого простую оценку величины поля плавления решетки $B_m(T)$, качественно справедливую в широком интервале полей, $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$. Чтобы ее получить, приравняем по порядку величины тепловую энергию $k_B T$ и энергию $E_{\text{упр}}$ сильной ($|\delta\mathbf{u}| \sim a_0$) деформации вихревой решетки в объеме порядка

a_0^3 . Для таких коротковолновых возмущений нет существенного различия между деформациями сжатия и сдвига, и потому $E_{\text{упр}}$ можно оценить просто через характерное значение энергии взаимодействия вихрей на длине порядка постоянной решетки: $E_{\text{упр}} \sim \epsilon_0 a_0$, где $\epsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$. Приравнивая полученную таким образом величину $E_{\text{упр}}$ к тепловой энергии, получим для поля плавления решетки

$$B_m(T) \propto \frac{\Phi_0}{(k_B T)^2} \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^4 \propto (1 - T/T_c)^2 \quad \text{при} \quad T \rightarrow T_c. \quad (37.1)$$

Мы получили важный и несколько неожиданный результат: поле плавления решетки убывает с повышением температуры быстрее, чем верхнее (и нижнее) критическое поле, которое ведет себя линейно вблизи температуры перехода, $H_{c2} \propto (1 - T/T_c)$. Вспоминая определение ширины флюктуационной области Gi , данное в §19, оценку (37.1) для поля плавления решетки можно записать в виде

$$\frac{B_m(T)}{H_{c2}(T)} = \alpha_m \frac{1 - T/T_c}{Gi} \quad (37.2)$$

где α_m - численный коэффициент. Более аккуратные аналитические [96] и численные [104] расчеты тоже приводят к результату (37.2), а также показывают, что α_m весьма мало, $\alpha_m \sim 2 \cdot 10^{-2}$ (иначе этот результат может быть выражен в виде значения $k_B T_m(B)/\epsilon_0 a_0 \simeq 0.1$). Численные расчеты [104] позволяют определить и величину параметра Линдеманна для плавления вихревой решетки, $c_L \simeq 0.25$. Результат для линии плавления в форме (37.2) остается справедлив и для анизотропных сверхпроводников типа $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, когда исходное выражение (37.1) должно быть модифицировано для учета анизотропии (поскольку характерный пространственный масштаб деформаций в направлении вихрей z теперь отличается от a_0 и имеет порядок ϵa_0 , получаем $k_B T_m(B)/\epsilon_0 a_0 \simeq 0.1\epsilon$). Для сильно слоистых соединений типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ оценка для линии $B_m(T)$ несколько отличается от (37.2), но качественно картина остается той же.

Конечно, оценка (37.2) имеет смысл лишь вне области сильных флюктуаций параметра порядка, т.е. при $(1 - T/T_c) \geq Gi$. Кроме того, отношение B_m/H_{c2} должно быть мало, поскольку иначе энергия деформации оказывается [105] существенно меньше, чем использованная оценка $E_{\text{упр}} \sim \epsilon_0 a_0$. Эти два условия оказываются совместны в области температур $Gi \ll (1 - T/T_c) \ll Gi \cdot \alpha_m^{-1}$ в силу малости числа α_m . В результате мы приходим к важному выводу: в некотором интервале температур вблизи T_c смешанное состояние сверхпроводника II рода в форме решетки вихрей неустойчиво по отношению к тепловым флюктуациям - уже при полях B существенно меньших, чем H_{c2} . Обычно плавление кристаллической решетки - фазовый переход I рода (с ненулевым скачком энтропии и плотности). Плотность вихрей пропорциональна магнитной индукции B , поэтому если плавление вихревой решетки - переход I рода, то на линии перехода должен наблюдаться скачок равновесной намагниченности образца. Именно такой результат был получен в очень красивых экспериментах [106, 107], где фазовые переходы плавления вихревой решетки в очень чистых монокристаллах $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ были зарегистрированы по слабым скачкам локального значения равновесной намагниченности $\Delta M_{\text{плавл}}$. В полях $B > B_m(T)$ в смешанном состоянии вихревые линии образуют жидкость. Количественной теории этого нового состояния пока не существует; также не вполне ясно, какой смысл следует придавать верхнему критическому полю H_{c2} , когда оно заметно превышает поле плавления $B_m(T)$. В любом случае, эти вопросы имеют практический смысл почти исключительно для высокотемпературных сверхпроводников - в большинстве остальных материалов величина Gi очень мала и эффекты плавления решетки почти ненаблюдаются. В то же время для ВТСП наблюдаемые следствия плавления вихревой решетки весьма важны, они определяют

собой аномальное поведение вольт-амперных характеристик в смешанном состоянии при относительно высоких полях и температурах. Мы рассмотрим эти явления ниже в 42.

5.4.12 38. Критический ток в сверхпроводниках второго рода. Критическое состояние

Если сверхпроводник второго рода находится в смешанном состоянии и в направлении, перпендикулярном вихрям, идет транспортный ток (т.е. ток, созданный каким-то внешним источником), то на вихри действует сила Лоренца. Если бы сверхпроводник был совершенно однороден, бездефектен, то при любой, сколь угодно малой силе Лоренца, вихри бы начали свое движение под действием этой силы.

В 40 будет показано, что такое движение сопровождается диссипацией энергии. Это означает, что у такого абсолютно однородного образца критический ток равен нулю.

В неоднородном сверхпроводнике второго рода, когда существуют разные виды дефектов (границы зерен, включения другой фазы, дислокационные стенки, скопления дислокаций, поры и т.п.), вихри могут на них закрепиться. Тогда требуется уже конечный транспортный ток для начала движения вихрей. Этот ток создает такую силу Лоренца, действующую на вихри, которой достаточно для отрыва вихрей от дефектов. Эти дефекты часто называются центрами пиннинга, а закрепление на них вихрей - пиннингом.¹⁾ Плотность тока, при котором начинается отрыв вихрей от центров пиннинга, называется критической плотностью тока j_c .

Критическая плотность тока может очень сильно (на несколько порядков) меняться в результате термомеханической обработки материала, так как является чрезвычайно структурно чувствительным свойством. При этом критическая температура T_c и второе критическое поле H_{c2} могут практически не измениться. У некоторых сверхпроводников, предназначенных для использования в сверхпроводящих магнитах или других сверхпроводящих устройствах, величина критического тока может достигать значений порядка 10^6 A/cm^2 . Такого же порядка величины, до $5 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$, достигают критические токи в не очень чистых кристаллах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ и других ВТСП при низких температурах.

Рассмотрим механизм протекания критического тока через сверхпроводник второго рода, в котором имеется много центров пиннинга. Для того чтобы транспортный ток шел по всему сечению сверхпроводника, необходимо, чтобы существовало неоднородное распределение вихрей. Действительно, плотность полного тока, текущего в данном месте, равна

$$j_{\text{Tp}} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (38.1)$$

но $B = \Phi_0 n$ - среднее поле в данном месте, т. е. напряженность магнитного поля, усредненная по области, размер которой намного больше расстояния между вихрями, n - средняя плотность вихрей в данном месте. Из (38.1) следует, что j_{tp} отличен от нуля в данном месте, если плотность вихрей $n = n(\mathbf{r})$.

Теперь нам надо понять, как возникает такое состояние, когда по всему сечению сверхпроводника устанавливается критическая плотность тока.

Пусть бесконечная пластина толщины d содержит очень много дефектов, на которых сверхпроводящие вихри могут хорошо закрепляться, при этом $d \gg \lambda$. Поверхности пластин совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$. Внешнее магнитное поле H_0 пока отсутствует. Начнем пропускать транспортный ток через пластину (в направлении оси y). Сначала, как и у бездефектного сверхпроводника, ток пойдет по поверхности пластины (эффект Мейсснера Оксенфельда). Когда поле, созданное током на поверхностях, H_I , превысит

¹⁾ От английского слова pin - булавка. Дословно pinning - это пришивание.

поле H_{c1} материала пластины, внутрь пластины проникнут вихри. Они будут иметь разные направления на противоположных сторонах. Но далеко внутрь они не проникнут, так как закрепляются на неоднородностях пластины. При этом возникает градиент их плотности. Ясно, что это будет максимально возможный градиент, т.е. такой, который обеспечивает протекание критического тока. Итак, некоторая область вблизи поверхностей пластины будет нести критический ток, а остальная часть пластины вообще тока нести не будет. Это схематически изображено на рис. 38.1, а, где показано распределение магнитного поля внутри пластины при токе через пластину, равном I_1 (на единицу высоты пластины вдоль оси z).

Увеличим теперь ток до величины I_2 . Вихри, сохранив критический градиент плотности $(\nabla n)_c$, продвинутся ближе к центру. Теперь только центральная часть пластины свободна от транспортного тока, а остальная часть пластины несет ток, плотность которого равна критической. Если продолжать увеличивать ток через пластину, мы придем к такому току I_c , когда в любой точке пластины плотность тока будет критической. Все это изображено на рис. 38.1, а.

Такое состояние, когда в любом месте поперечного сечения пластины течет критический ток, называется критическим состоянием.

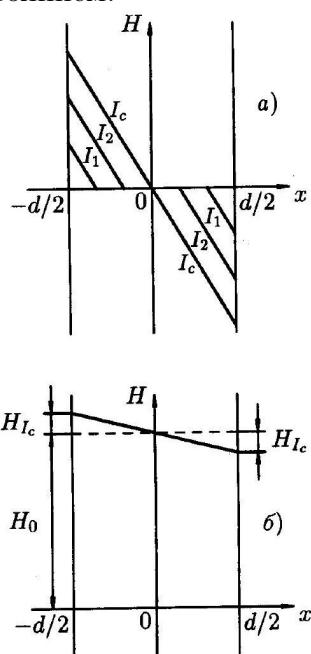


Рис. 38.1. Распределение поля в пластине (толщины d) с центрами пиннинга, когда по пластине течет ток I : а) внешнее поле отсутствует, $I_1 < I_2 < I_c$ - токи в пластине; б) случай пластины с током и во внешнем поле. Показано распределение в критическом состоянии.

Наложим теперь внешнее магнитное поле H_0 , параллельное поверхности пластины и перпендикулярное току, т.е. поле H_0 параллельно оси z . Предположим, что $H_0 \gg H_I$. Тогда распределение тока в пластине в критическом состоянии будет таким, как показано на рис. 38.1, б. Пренебрегая небольшой разницей в полях $H_0 + H_I$ и $H_0 - H_I$, можно считать, что все точки проводника находятся в поле H_0 . Плотность критического тока в поле H_0 меньше, чем в отсутствие поля, поэтому критический градиент плотности вихрей меньше.

Действительно, если сила Лоренца, действующая на единицу длины вихря, равна $f_L = j_{tr} \Phi_0/c$, то сила Лоренца, отнесенная к единице объема, равна $F_L = j_{tr} B/c$, поскольку суммарная длина всех вихрей в единице объема равна $n = B/\Phi_0$. Эта сила уравновешивается в стационарном состоянии силой закрепления вихрей на неоднородностях. Пусть удельная сила закрепления (пиннинга) вихрей в единице объема равна F_p . Тогда

критический ток должен удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{c} j_c B = F_p \quad (38.2)$$

Если предположить, что F_p не зависит от внешнего поля H_0 , то получим $j_c \propto B^{-1}$. Такая зависимость критического тока от внешнего поля наблюдалась во многих экспериментах.

Если дефекты структуры сверхпроводника, т. е. центры пиннинга, распределены хаотично, то абсолютно жесткая решетка вихрей на них не может закрепиться. Чтобы это стало понятно, сдвинем мысленно такую решетку на малое расстояние в направлении действия силы Лоренца. Очевидно, что энергия системы при этом не изменяется, так как новое хаотическое расположение центров пиннинга относительно жесткой вихревой решетки ничем не отличается в принципе от старого. А раз нет изменения энергии, то нет и возвращающей силы, нет и пиннинга.

Совсем другая картина возникает, если предположить, что решетка вихрей - это упругая среда. Тогда вихри каждый раз будут подстраиваться к данному хаотическому распределению центров пиннинга так, чтобы вся система вихрей имела минимум энергии. Поэтому теперь уже будет нужно некоторое усилие, чтобы, сдвинув вихри, превзойти предел возвращающей силы и оторвать их от центров пиннинга. Ясно поэтому, что чем "мягче" решетка вихрей, тем она податливее, тем больше сила пиннинга.

Расчеты [108] показали, что модули упругости вихревой решетки уменьшаются при $H_0 \rightarrow H_{c2}$. Решетка становится мягче, а пиннинг сильнее. Это приводит к довольно часто наблюдаемому пику критического тока при $H_0 \sim H_{c2}$ (рис. 38.2). Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в конце 41.

5.4.13 39. Взаимодействие вихрей с центрами пиннинга

Существует очень много видов дефектов, с которыми взаимодействуют сверхпроводящие вихри, и это взаимодействие обеспечивает высокие значения критического тока. В этом параграфе мы познакомимся с простейшими дефектами и рассмотрим физический механизм взаимодействия с ними сверхпроводящих вихрей. Необходимо, однако, учитывать, что не всякие дефекты эффективно взаимодействуют с вихрями. Так, вакансии, одиночные примесные атомы и подобные «мелкие» дефекты неэффективны. Это и понятно, ведь характерный размер вихря - длина когерентности - намного превосходит атомный размер - характерный размер такого "мелкого" дефекта. Вихрь просто «не замечает» такие мелочи.¹⁾

¹⁾ Это утверждение не является вполне точным: при достаточно большой концентрации мелкие дефекты могут приводить к пиннингу вихрей, действуя совместно. Это явление называется коллективным пиннингом и рассмотрено в 41.

Наоборот, структурные дефекты с размерами порядка ξ и больше являются весьма эффективными и могут обеспечить большие плотности критического тока.

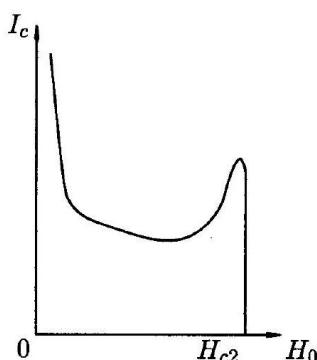


Рис. 38.2. Зависимость критического тока от поперечного магнитного поля. Виден сильный пик-эффект при $H_0 \simeq H_{c2}$.

39.1. Взаимодействие вихрей с плоской поверхностью сверхпроводника.

Рассмотрим для определенности плоскую идеально однородную пластину из сверхпроводника второго рода толщиной $d \gg \lambda$. Внешнее магнитное поле H_0 направлено параллельно плоскости пластины, причем $\kappa \gg 1$, $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$. Это значит, что в пластине существует треугольная вихревая решетка, причем период решетки $a_0 \ll d$. Подробный расчет показывает, что крайний вихревой ряд находится от края пластины на расстоянии порядка a_0 и что a_0 с достаточно хорошей точностью можно считать постоянным по всей пластине.

При включении слабого транспортного тока вдоль пластины перпендикулярно магнитному полю на одной из сторон пластины возникает магнитное поле $H_0 + H_I$, а на другой - соответственно, $H_0 - H_I$, где H_I - поле, созданное транспортным током. Нам уже известно, что устойчивого состояния с градиентом плотностей вихрей в однородном сверхпроводнике не может быть, поэтому реакцией всей вихревой структуры на такой транспортный ток должно быть жесткое смещение всей структуры как единого целого в направлении силы Лоренца. Поскольку вихри до смещения находились в состоянии устойчивого равновесия, после достаточно малого смещения должна возникнуть возвращающая сила. Вся структура будет упруго смещена на некоторое расстояние, определяемое равенством силы Лоренца и возвращающей силы. Если сила Лоренца сможет вопреки возвращающей силе сдвинуть вихри на расстояние порядка a_0 , то вихри будут двигаться уже непрерывно. Действительно, теперь с одной стороны пластинки крайний вихревой ряд выходит на край и уничтожается своим изображением, а с другой стороны пластинки - уходит на расстояние порядка a_0 и оставляет место для вхождения в пластинку нового вихревого ряда. Этот новый ряд незамедлительно в нее войдет, и вся структура под влиянием того же транспортного тока снова сместится на расстояние порядка a_0 и т. д. Отсюда можно заключить, что транспортный ток, который вызывает смещение структуры на величину порядка a_0 , естественно назвать критическим.

В состоянии термодинамического равновесия по поверхности сверхпроводника протекает ток намагничивания I_M , определяемый разностью между полем H_0 на поверхности и средним полем B внутри:

$$I_M = \frac{c}{4\pi} |B - H_0| = cM.$$

Плотность тока намагничивания можно записать в виде

$$j_M = \frac{c|M|}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad (39.1)$$

где x -расстояние данной точки от края пластины. На вихрь, находящийся на расстоянии x от края, действует, таким образом, сила Лоренца

$$f_M = \frac{1}{c} j_M \Phi_0 = \frac{|M|\Phi_0}{\lambda} e^{-x/\lambda}$$

Если вихрь сместился на малое расстояние δx , то f_M изменилась на величину δf_M :

$$|\delta f_M| = \frac{M\Phi_0}{\lambda^2} e^{-x/\lambda} \delta x$$

Сила f_M действует только на вихри, находящиеся на расстоянии порядка λ от края, поэтому полное изменение силы, действующей на вихри, при смещении их на расстояние δx будет

$$\frac{|M|\Phi_0}{\lambda^2} \delta x \frac{\lambda}{a_0}$$

Если теперь умножить это выражение на количество вихрей, лежащих на единичном отрезке вдоль направления транспортного тока, т.е. на $1/a_0$, и умножить на 2, чтобы учесть существование другого края пластины, то мы получим окончательное выражение для возвращающей силы $F_{\text{возвр}}$, приходящейся на единицу площади поверхности пластины:

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|\Phi_0}{\lambda a_0^2} \delta x \quad (39.2)$$

Учитывая, что $a_0^2 \simeq \Phi_0/B$, имеем

$$F_{\text{возвр}} = \frac{2|M|B}{\lambda} \delta x. \quad (39.3)$$

Условием равновесия, как мы уже отмечали, будет равенство этой силы силе Лоренца, тоже отнесенной к единице поверхности пластины:

$$\mathcal{F}_L = \frac{1}{c} I_{\text{Tp}} B \quad (39.4)$$

где I_{Tp} - транспортный ток, текущий по пластине и отнесенный к единице длины пластины в направлении, перпендикулярном току. Транспортный ток достигает критического значения, когда δx становится равным $a_0 \simeq (\Phi_0/B)^{1/2}$. Подставляя это выражение в (39.3) и приравнивая выражению (39.4), получим

$$I_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}} \quad (39.5)$$

Средняя по сечению пластины плотность критического тока будет

$$j_c = \frac{2c|M|\sqrt{\Phi_0}}{\lambda\sqrt{B}d} \quad (39.6)$$

Эта формула хорошо подтверждена экспериментом.

Итак, подведем некоторые итоги. Обрисуем кратко, как мы теперь себе представляем протекание транспортного тока по пластине, находящейся в смешанном состоянии. Если ток меньше критического, то вихревая структура как единое целое упруго смещается на некоторое расстояние $\delta x < a_0$ под действием силы Лоренца. При этом сила Лоренца уравновешивается возникшей возвращающей силой и вихревая решетка становится неподвижной. Период решетки всюду постоянен, поэтому в объеме пластины транспортный ток равен нулю. Следовательно, транспортный ток течет только вдоль поверхностей пластины в слое порядка глубины проникновения λ .

Оценим величину предельного транспортного тока, т.е. критический ток. Пусть $H_{c1} \sim 100\text{Э}, H_{c2} \sim 10^5\text{Э}, B \sim 10^4 \text{ Гс}, \lambda \sim 10^{-5}\text{см}, d \sim 10^{-4} \text{ см}$. Оценка для $|M|$ дает величину порядка 1 Гс. Подставляя эти значения в формулу (39.6), имеем

$$j_c \sim 10^5 \text{ А}/\text{см}^2.$$

Таким образом, даже однородные сверхпроводящие пластины в смешанном состоянии способны нести значительный транспортный ток. А теперь представим себе, что толстая массивная сверхпроводящая пластина представляет собой набор таких тонких сверхпроводящих пластин, отделенных друг от друга слоем диэлектрика или нормального металла. Теперь транспортный ток может течь по каждой из этих пластин (конечно, каждый раз в слое

толщиной порядка λ около краев этих пластин), и в целом по всему сечению нашего композитного сверхпроводника будет идти большой транспортный ток.

Формула (39.6) нашла надежное экспериментальное подтверждение в работе Кембелла, Иветса и Дью-Хьюза [109], в которой изучалось взаимодействие вихревых нитей с частицами нормальной фазы в эвтектическом сплаве Pb – Bi.

39.2. Взаимодействие вихря с полостью в сверхпроводнике.

Пусть в безграничном сверхпроводнике имеется дефект в виде цилиндрической полости. Как взаимодействует с такой полостью одиночный вихрь, расположенный параллельно полости?

Пусть диаметр полости d удовлетворяет неравенству $d > \xi(T)$. В этом случае оценка энергии взаимодействия проводится совсем просто. Если вихрь находится далеко от полости, то в его сердцевине (диаметра порядка 2ξ) сосредоточена положительная энергия (относительно состояния сверхпроводника без вихря), так как сердцевина вихря нормальна, а свободная энергия нормального состояния больше энергии сверхпроводящего состояния на величину $H_{cm}^2/8\pi$ на каждую единицу объема. Значит, в сердцевине вихря на каждую единицу его длины сосредоточена энергия, по порядку величины равная

$$\frac{H_{cm}^2}{8\pi}\pi\xi^2 \quad (39.7)$$

Если же вихрь проходит через полость, т. е. просто захвачен полостью, то у него нет нормальной сердцевины и, соответственно, энергия всей системы меньше на величину (39.7). Отсюда следует, что вихрь притягивается к полости. Силу взаимодействия на единицу длины f_p легко найдем, если учтем, что энергия меняется на величину (39.7) при смещении вихря около края полости на расстояние порядка ξ (подробнее см. в статье [110]):

$$f_p \simeq H_{cm}^2\xi/8 \quad (39.8)$$

Если в сверхпроводнике имеется не цилиндрическая полость, а пора в виде приблизительно шаровой полости (размер d), то силу закрепления вихря на полости f_{pd} получим из (39.8):

$$f_{pd} \simeq H_{cm}^2\xi d/8 \quad (39.9)$$

Чтобы оценить, насколько эта сила велика, найдем, какой ток нужно пропустить перпендикулярно вихрю, чтобы он создал силу Лоренца, которая преодолела бы эту силу f_{pd} .

Сила Лоренца, приходящаяся на единицу длины вихря, как известно, равна $j\Phi_0/c$. Следовательно, на часть длины вихря, которая взаимодействует с дефектом, придется сила $j\Phi_0d/c$. Приравнивая ее силе f_{pd} (39.9), получим

$$j = \frac{cH_{cm}^2}{8\Phi_0}\xi \quad (39.10)$$

Поскольку $H_{cm} = \Phi_0/(2\sqrt{2}\pi\lambda\xi)$ (см. (15.8)), легко получим из (39.10)

$$j = \frac{cH_{cm}}{16\sqrt{2}\pi\lambda}$$

Сравнивая эту формулу с критическим током распаривания, который мы изучали в 18, мы увидим, что получили величину того же порядка. Таким образом, чтобы оторвать вихрь от поры, нужно пропустить максимально возможный для сверхпроводника ток.

Если внутри сверхпроводника будут присутствовать микроскопические включения диэлектрика, то все предыдущие рассуждения сохранят свою силу. Если же это будут включения другого несверхпроводящего металла, то и в этом случае рассуждения останутся справедливыми (по крайней мере, по порядку величины), если размер включений будет больше ξ . Действительно, так называемый эффект близости существен, грубо говоря, только на расстояниях порядка ξ от границы. Таким образом, различные нормальные включения являются весьма эффективными центрами закрепления вихрей в сверхпроводнике, т.е. центрами пиннинга. Этим свойством широко пользуются на практике, когда с помощью металлургической обработки добиваются существенного увеличения токонесущей способности сверхпроводящего материала.

Рассмотрим пример сплава Nb – Ti, который используется во многих сверхпроводящих устройствах, где требуются большие критические токи. Закаленную при 800°C проволоку сплава подвергают кратковременному (порядка 30 минут) отжигу при температуре около 400°C . При этом сверхпроводящая матрица β -фазы начинает распадаться с выделением микроскопических включений несверхпроводящей α -фазы. В результате критический ток возрастает на несколько порядков.

Кроме перечисленных дефектов, эффективными центрами пиннинга являются также дислокации, дислокационные ячейки, границы зерен, границы между двумя различными сверхпроводниками.

При исследовании ВТСП часто используется метод облучения сверхпроводящих кристаллов тяжелыми ионами (например, свинца) с энергией в несколько ГэВ. Тяжелые ионы «прошибают» тонкие монокристаллы насекомь, создавая т. наз. колончатые («columnar») дефекты - цилиндрические области диаметром порядка 10 нм, в которых материал переведен в несверхпроводящее состояние. Такие дефекты резко увеличивают критический ток ВТСП-материалов, особенно при относительно высоких температурах.

III-з.

39.1. Идеально однородная пластинка имеет ширину $l = 5$ мм и находится во внешнем магнитном поле $H_0 \simeq B = 18\text{kГ}$, параллельном широкой стороне и перпендикулярном току, $H_{c2} = 75$ кЭ, $H_{c1} = 130$. Оценить критический ток пластинки.

Решение Используя формулы (29.7) и (31.3), находим $\varkappa = 31$. Из (29.7) находим $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-5}$ см. Аппроксимируя кривую намагничивания $|M|$ двумя треугольниками (рис. 32.1) и используя формулу (39.5), имеем окончательно

$$I_c = \frac{2c\sqrt{\Phi_0}l}{\lambda\sqrt{B}} \frac{H_{c1}}{4\pi} \frac{H_{c2} - B}{H_{c2} - H_{c1}} \simeq 13 \text{ A}$$

5.4.14 40. Резистивное состояние

Рассмотрим теперь, что происходит, когда сила Лоренца, созданная транспортным током, превзойдет силу пиннинга, и вихри придут в движение, т.е. когда начнется течение вихрей поперек транспортного тока.

Мы сейчас покажем, что в этом случае возникнет диссипация энергии, возникнет электрическое сопротивление. Поэтому такое состояние называется резистивным.

Возникшее течение магнитного поля создает по закону электромагнитной индукции Фарадея электрическое поле E . Это поле будет направлено по току.

¹⁾ Это значит, что в объеме сверхпроводника возникает диссипация энергии $Ej_{\text{тр}}$. Пусть установившаяся скорость течения вихрей в направлении силы Лоренца, т. е. перпендикулярно току и магнитному полю, будет v_L . Работа в единицу времени, затраченная внешним источником на это передвижение вихрей, будет равна $F_L v_L$, где F_L - плотность силы

Лоренца. Ясно, что это и есть та энергия, которая выделяется в единице объема в единицу времени, т.е.

$$F_L v_L = E j_{\text{Tp}} \quad (40.1)$$

Учитывая, что $F_L = j_{\text{Tp}} B / c$, получим

$$E = B v_L / c \quad (40.2)$$

Удельное сопротивление сверхпроводника, которое возникает при течении магнитного потока в направлении поперек транспортного тока, называется сопротивлением течения потока (fluxflow) и обозначается ρ_f :

$$\rho_f = E / j_{\text{Tp}} \quad (40.3)$$

Поскольку движение вихрей сопровождается, как мы видим, выделением энергии, можно считать, что вихри движутся в вязкой среде, и ввести некоторый коэффициент вязкого трения η по

- В этих рассуждениях мы пренебрегли влиянием эффекта Холла. обычной формуле

$$f_{\text{трения}} = -\eta v_L,$$

где $f_{\text{трения}}$ - это сила трения, которую испытывает один вихрь, движущийся со скоростью v_L . Пренебрегая массой вихря, имеем уравнение движения вихря в виде

$$f_{\text{трения}} + f_L = 0.$$

Переходя к силам, действующим в единице объема, получим

$$\frac{B}{\Phi_0} \eta v_L = \frac{1}{c} B j_{\text{Tp}} \quad (40.4)$$

Используя теперь формулы (40.2) и (40.3), преобразуем (40.4) к виду

$$\rho_f = \Phi_0 B / c^2 \eta \quad (40.5)$$

Если η не зависит от магнитного поля, то ρ_f будет линейной функцией B . При низких температурах эксперимент действительно дает такую зависимость ρ_f от поля.

Используя результаты эксперимента для $T \rightarrow 0$, имеем

$$\rho_n = \Phi_0 H_{c2} / c^2 \eta$$

что может служить для определения значения коэффициента вязкости η при низких температурах:

$$\eta = H_{c2}(0) \Phi_0 / c^2 \rho_n \quad (40.6)$$

Здесь ρ_n -это удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии.

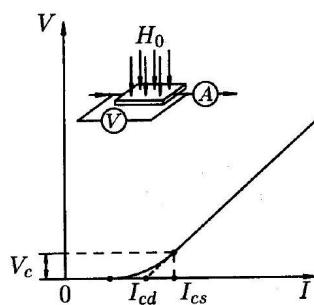
Интересно оценить порядок скорости движения вихрей в реальной экспериментальной ситуации. Пусть в сверхпроводнике, находящемся в резистивном состоянии, возникло электрическое поле $E \sim 10^{-6}$ В/ см при индукции $B \sim 10^4$ Гс. Тогда, согласно (40.2), имеем

$$v_L = \frac{cE}{B} = 3 \cdot 10^{10} \frac{10^{-6}}{300} \cdot \frac{1}{10^4} = 10^{-2} \text{ см/с}$$

Вольт-амперная характеристика сверхпроводника в резистивном состоянии показана на рис.40.1. Она начинается с некоторого значения тока (критического тока) и при малых напряжениях имеет нелинейный характер. В этой нелинейной области в сверхпроводнике еще нет сплошного установившегося течения вихрей. Они случайным образом перескакивают от одного центра пиннинга к другому, это область ползучести, крипа вихревой структуры.

При больших токах вольт-амперная характеристика становится линейной. Здесь уже имеет место течение вихревой структуры как целого.

Рис. 40.1. Вольт-амперная характеристика сверхпроводника второго рода со структурными дефектами. Показано два разных способа определения критического тока: I_{cs} - статический критический ток, I_{cd} – динамический.



Существуют два определения критического тока. Ток, при котором начинается срыв вихрей с центров пиннинга, т. е. ток I_{cs} , с которого начинается вольт-амперная характеристика, называется статическим критическим током. Его определение зависит от чувствительности того вольтметра, с помощью которого замечают первые признаки напряжения (обычно порядка 10^{-6} В) на образце. Были проведены специальные эксперименты [111], чтобы выяснить, насколько зависит определение критического тока от уровня чувствительности вольтметра. Оказалось, что при внешнем поле $H_0 \ll H_{c2}$ увеличение чувствительности на много порядков очень несущественно изменяет определение критического тока обычных низкотемпературных сверхпроводников. Для ВТСП дело обстоит заметно сложнее, мы обсудим этот вопрос ниже в 42.

Другое определение критического тока - динамический критический ток I_{cd} . Этот ток определяется по экстраполяции прямолинейного участка вольт-амперной характеристики до пересечения с осью токов.

Отметим в заключение некоторую общность, которую можно усмотреть между джозефсоновским переходом в режиме джозефсонской генерации и сверхпроводником второго рода в резистивном состоянии [112].

Пусть массивный сверхпроводник второго рода находится в резистивном состоянии со средней индукцией B . Примем для простоты (это никак не ограничивает общность наших рассуждений), что вихри образуют квадратную решетку (рис. 40.2).

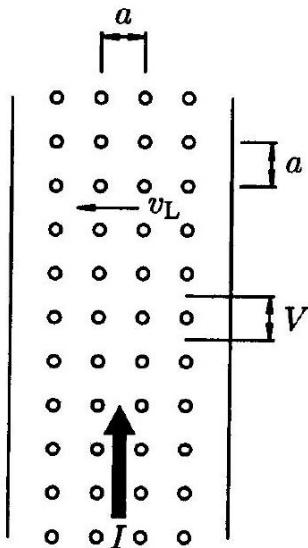


Рис. 40.2. Вихревая структура в сверхпроводнике второго рода движется под действием силы Лоренца со скоростью v_L .

Протекающий транспортный ток I создает силу Лоренца, под влиянием которой вся вихревая структура движется со скоростью v_L .

При этом в сверхпроводнике возникает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} B v_L$$

а средняя разность потенциалов \bar{V} на длине a_0 периода вихревой решетки (см. рис. 40.2) будет равна

$$\bar{V} = \frac{a_0}{c} B v_L \quad (40.7)$$

Ясно, что смещение вихревой решетки трансляционно симметрично с периодом a_0 , поэтому можно ожидать, что в напрлжении V будет присутствовать переменная составляющая с частотой

$$\omega = 2\pi \frac{v_L}{a_0} \quad (40.8)$$

Выражая отсюда v_L и подставляя в (40.7), имеем

$$\bar{V} = \omega B a_0^2 / 2\pi c$$

Но $B a_0^2$ - это магнитный поток, связанный с одним вихрем, т.е. квант потока Φ_0 ($\Phi_0 = \pi \hbar c/e$). Отсюда

$$\bar{V} = \hbar \omega / 2e,$$

т.е. получается формула (22.8).

В сверхпроводниках второго рода, находящихся в резистивном состоянии, такую генерацию трудно обнаружить потому, что из-за структурных неоднородностей сверхпроводника вихревая решетка движется не как единое целое, ламинарно, а весьма хаотичным образом, турбулентно. Однако если специально позаботиться об упорядочении движения решетки, можно наблюдать явления, характерные для нестационарного эффекта Джозефсона [113].

III-з.

40.1. Оценить сопротивление течения потока ρ_f , если внешнее поле $H_0 = 5 \cdot 10^3$, $T_c = 10$ К, $H_{c2}(4.2$ К) = 40κ , остаточное удельное сопротивление образца в нормальном состоянии $\rho_n = 3 \cdot 10^{-5}$ ОМ · см.

Решение Из формул (40.5) и (40.6) следует, что $\rho_f = \rho_n B / H_{c2}(0)$. Принимая приближенно $H_{c2}(T) = H_{c2}(0) (1 - T^2/T_c^2)$ и $B = H_0$, имеем $\rho_f = 3 \times 10^{-6}$ ОМ · см.

III-з.

40.2. С какой скоростью v_L движутся вихри в проволоке, находящейся в резистивном состоянии, если проволока длиной $l = 8$ см находится в магнитном поле $B = 5$ Тл и при этом на ней падает напряжение $U = 15$ мкВ.

Ответ. $v_L = U/lB = 3.75 \cdot 10^{-5}$ М/с.

5.4.15 41*. Коллективный пиннинг вихрей слабыми дефектами

41.1. Одиночный вихрь в поле слабых примесей. Как уже упоминалось выше в 39, дефекты кристаллической решетки с размером порядка атомного очень слабо взаимодействуют с вихрями, поскольку размер кора вихря ξ обычно весьма велик в атомном масштабе. Тем не менее, вихрь может быть эффективно зацеплен и такими дефектами, если их плотность достаточно велика. В таком случае говорят о коллективном пиннинге вихрей на многих дефектах одновременно. Такие слабые дефекты-это, например, кислородные вакансии в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) и атомные примеси Та (замещающие атомы Nb) в слоистом соединении NbSe₂. Теория коллективного пиннинга была развита в работах Ларкина и др. [114, 115, 96, 116]. В этом параграфе мы опишем качественный подход, позволяющий оценить величину критического тока при коллективном пиннинге.

Начнем с самого простого случая: одна вихревая линия в поле слабых дефектов. Как мы знаем (см. (29.3)), вихрь в изотропном чистом сверхпроводнике обладает определенной энергией на единицу длины, равной $\epsilon_1 = (\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda})^2 \ln \varkappa \equiv \epsilon_0 \ln \varkappa$. Это означает, что если вихревую линию изогнуть, то ее энергия увеличится, т. е. вихрь ведет себя как упругая струна. Добавка к энергии вихря из-за изгиба пропорциональна его удлинению и при плавных изгибах может быть записана как

$$E_{el} = \frac{\epsilon_1}{2} \int dz \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad (41.1)$$

где u -вектор смещения участка вихря, соответствующего координате z вдоль него. Предположим сначала, что коэффициент линейного натяжения ϵ_1 очень велик, так что можно считать вихрь совершенно прямым, и рассмотрим его взаимодействие с мелкими дефектами. Каждый такой дефект изменяет энергию вихря (если находится вблизи его кора) на величину порядка $e_{\text{прим}}$ и случайную по знаку (поскольку среднее изменение энергии вихря из-за дефектов не приводит к его зацеплению, мы можем считать, что среднее значение $\delta e_{\text{прим}} = 0$). При концентрации примесей $n_{\text{прим}}$ на длине L вдоль вихря в коре находится примерно $\mathcal{N} \sim n_{\text{прим}} \xi^2 L$ дефектов, так что при перемещении вихря в другое положение (на расстояние порядка ξ) энергия взаимодействия с дефектами изменится на величину порядка $E_{\text{пинн}}(L) \simeq e_{\text{прим}} \sqrt{\mathcal{N}} \simeq e_{\text{прим}} \xi (n_{\text{прим}} L)^{1/2}$. Заметим здесь, что именно размер кора вихря ξ определяет характерный пространственный масштаб, на котором меняется энергия взаимодействия вихря с мелкими дефектами. Как видно, возможный выигрыш в энергии взаимодействия с дефектами (из-за того, что вихрь передвинулся в более "подходящее" место) растет с длиной сегмента вихря (если он абсолютно жесткий)

как \sqrt{L} . Но сила Лоренца, действующая на тот же сегмент вихря со стороны транспортного тока, пропорциональна его длине: $F_L(L) = \frac{1}{c}\Phi_0 j L$, так что и выигрыш в энергии взаимодействия с этим током растет пропорционально L и при достаточно большой длине всегда превысит $E_{\text{пинн}}(L)$, каким бы слабым ни был ток j .

Казалось бы, мы получили "отрицательный" результат-отсутствие пиннинга, нулевой критический ток. Теперь, однако, надо вспомнить о сделанном в начале предположении, что вихрь можно считать совершенно жестким - оно и привело к такому странному результату. В действительности форма вихря определяется конкуренцией между его упругой энергией, возрастающей при изгибе, и выигрышем энергии при помещении его сегментов в наиболее подходящие "потенциальные ямы". Результат этой конкуренции и определяет характерную длину L_p вихревого сегмента, на которой он смещается в поперечном направлении на длину порядка ξ , т.е. «переползает» из одной потенциальной ямы в поле дефектов в другую. Чтобы найти L_p , приравняем по порядку величины упругую энергию $E_{el}(L_p) \epsilon_1 \frac{\xi^2}{L_p}$ и энергию связи с примесями $E_{\text{пинн}}(L_p) = e_{\text{прим}} \xi (n_{\text{прим}} L_p)^{1/2} \equiv (\gamma \xi^2 L_p)^{1/2}$:

$$\epsilon_1 \frac{\xi^2}{L_p} \simeq (\gamma \xi^2 L_p)^{1/2} \quad (41.2)$$

(мы здесь также ввели обозначение $\gamma = n_{\text{прим}} e_{\text{прим}}^2$, которое будет часто использоваться в дальнейшем). Уравнение (41.2) определяет "длину пиннинга" L_p , а с ее помощью и критический ток j_c , задаваемый соотношением $\frac{1}{c}\Phi_0 j_c \simeq E_{\text{пинн}}(L_p)/\xi$ (в правой части здесь стоит характерная сила, действующая на вихрь со стороны ансамбля примесей, расположенных на длине L_p):

$$E_{\text{пинн}}(L_p) \simeq (\gamma \epsilon_1 \xi^4)^{1/3} \simeq H_{cm}^2 \xi^3 \frac{\xi}{L_p}, \quad L_p \simeq \left(\frac{\epsilon_1^2 \xi^2}{\gamma} \right)^{1/3}, \quad (41.3)$$

$$j_c \simeq \frac{c}{\Phi_0} \left(\frac{\gamma}{L_p} \right)^{1/2} \simeq j_0 \left(\frac{\xi}{L_p} \right)^2, \quad (41.4)$$

где j_0 - "ток распаривания", определенный выше в (18.5) как критический ток для тонкой пленки. Все величины, входящие в формулу (41.4), подразумеваются зависящими от температуры, эти зависимости вблизи T_c следуют, как правило, из теории Гинзбурга-Ландау. Оценки (41.4) применимы, по смыслу их вывода, для случая слабого пиннинга, $j_c \ll j_0$, что и соответствует относительно большой длине $L_p \gg \xi$. Более того, буквальный вид формул (41.4), в которые входит параметр линейного натяжения* вихря ϵ_1 , справедлив лишь при более сильном условии $L_p \geq \lambda$; в противном случае множитель $\ln \kappa = \ln(\lambda/\xi)$ в выражении для ϵ_1 следует заменить на $\ln(L_p/\xi)$. Дело в том, что при коротковолновых ($q > \lambda$) деформациях вихря магнитное поле «не успевает» следовать за изгибом его края и эффективная жесткость вихря уменьшается, $\epsilon(q) = \epsilon_0 \ln(1/q\xi)$.

Длина L_p (называемая далее длиной пиннинга) имеет важный физический смысл - вихрь можно считать упругой струной лишь на масштабах $L \ll L_p$, в то время как на много больших масштабах отдельные сегменты длины L_p зацепляются примесями почти независимо один от другого. В результате полная энергия пиннинга сегмента большой длины $L \gg L_p$ оказывается пропорциональной длине: $E_{\text{пинн}}(L) \propto L(E_{\text{пинн}}(L_p)/L_p)$. Таким образом, пиннинг на слабых дефектах возникает из-за того, что вихрь слегка изгибаются в поле дефектов, выбирая конфигурации, реализующие локальные минимумы полной энергии. Соответственно, увеличение линейного натяжения ϵ_1 должно приводить и к увеличению L_p , и к уменьшению критического тока j_c , как и следует из формул (41.4).

41.2. Коллективный пиннинг вихревой решетки. В описанной выше картине шла речь о единичном вихре, т. е. предполагалось, что его взаимодействие с другими вихрями много слабее, чем с дефектами. Легко понять, в каких случаях такое представление справедливо: надо сравнить энергию пиннинга на единицу длины $E_{\text{пинн}}/L_p$ и повышение энергии (тоже на единицу длины) упругого взаимодействия вихрей в вихревой решетке, возникающее при относительном сдвиге соседних вихрей на расстояние порядка пространственного масштаба случайногопотенциала ξ , т.е. $\epsilon_0(\xi/a_0)^2$, где $a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$. Сравнивая эти две энергии, обнаруживаем, что упругостью вихревой решетки можно пренебречь, если решетка достаточно редкая, $a_0 \gg L_p$. В обратном случае взаимодействие между вихрями сильное и его надо учитывать с самого начала. Это можно сделать аналогично описанному выше случаю одиночного вихря, разница лишь в том, что вместо упругой линии надо теперь рассмотреть трехмерную упругую решетку. Мы будем сначала считать, что постоянная решетки $a_0 \gg \xi$, т.е. среднее магнитное поле $H \ll H_{c2}$, так что можно использовать лондоновское приближение (что имеет смысл для сверхпроводников "сильно II рода", т.е. имеющих параметр Гинзбурга-Ландау $\varkappa \gg 1$).

Теперь нам надо исходить из упругой энергии деформации трехмерной вихревой решетки, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{el}^{3D} = & \frac{1}{2} \int d^3r \left[(C_{11} - C_{66}) (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \right. \\ & \left. + C_{66} (\nabla_a u_b)^2 + C_{44} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dz} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (41.5)$$

Здесь \mathbf{u} - двумерный вектор локального смещения вихревой решетки, имеющий компоненты в плоскости (x, y) , перпендикулярной направлению внешнего поля H ; постоянные C_{11}, C_{44} , и C_{66} упругие модули вихревой решетки, соответствующие деформациям сжатия, изгиба и сдвига, соответственно. Заметим, что в (41.5) написан общий вид упругой энергии для треугольной решетки линий с осью симметрии шестого порядка [117]. Далее нам понадобятся значения всех трех упругих модулей:

$$C_{11} - C_{66} = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial B}, \quad C_{44} = \frac{BH}{4\pi}, \quad C_{66} = \frac{\Phi_0 B}{(8\pi\lambda)^2}. \quad (41.6)$$

Первые две формулы из (41.6) имеют общий характер и легко выводятся (см. ниже), результат же для модуля сдвига C_{66} приведен для наиболее интересного (при $\varkappa \gg 1$) случая $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$, когда вихри все еще сильно взаимодействуют на длинах гораздо больших, чем a_0 , а подавлением параметра порядка из-за близости к H_{c2} еще можно пренебречь. Формулы для C_{11} и C_{44} можно получить из простых макроскопических соображений. Действительно, $\nabla \mathbf{u} = \delta \mathbf{B}/B$ есть относительное изменение плотности вихрей, поэтому первый член в интеграле (41.5) можно записать как $\frac{1}{2}(C_{11} - C_{66})(\delta B)^2/B^2$, т.е. $B^{-2}(C_{11} - C_{66}) = \partial^2 F/\partial B^2 = (1/4\pi)\partial H/\partial B$. Чтобы получить второе из равенств (41.6), рассмотрим однородную деформацию вихревой решетки, при которой все вихри наклоняются на малый угол $\theta = \partial u_x / \partial z$ по отношению к исходному направлению поля вдоль оси z . При этом возникает поперечная компонента магнитной индукции $B_\perp = B\theta$ и сохраняется проекция индукции на ось z , т.е. $B_\parallel = B$. В результате полная величина магнитной индукции $B_{\text{полн}} = (B_\parallel^2 + B_\perp^2)^{1/2}$ изменяется на $\delta|B| = \frac{B}{2}(\partial u/\partial z)^2$, а свободная энергия - на величину $(\partial F/\partial B)\delta|B| = \frac{H}{4\pi} \cdot \frac{B}{2}(\partial u/\partial z)^2$. Сравнивая это выражение с соответствующим членом в (41.5), получаем результат для C_{44} из (41.6). Модуль сдвига C_{66} нельзя определить

из столь же общих соображений - его необходимо вычислять как некоторую бесконечную сумму по узлам вихревой решетки. Мы здесь не будем останавливаться на этом (в действительности не очень сложном) вычислении [105]; заметим лишь, что малость модуля сдвига C_{66} по сравнению с $C_{11} \simeq C_{44}$ (их отношение, как видно

из (41.6), порядка $(n\lambda^2)^{-1} \ll 1$) легко понять: дальнодействующий характер отталкивания между вихрями приводит к очень малой сжимаемости решетки, но слабо влияет на энергию деформаций, не меняющих плотность вихрей; поэтому модуль сдвига можно оценить как энергию взаимодействия ближайших соседей (порядка ϵ_0), умноженную на плотность вихрей $n = B/\Phi_0$, что совпадает по порядку величины с (41.6).

Теперь мы готовы воспроизвести для решетки вихрей оценку силы коллективного пиннинга (по аналогии с (41.2)). Будем считать, что деформация вихревой решетки, вызванная ее подстройкой под случайнй потенциал примесей, достаточно мала, так что относительное смещение вихрей $|\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$ достигает величины порядка ξ при $|z - z'| \geq L_p^{3D}$, либо $|\rho - \rho'| \geq R_p$ (здесь ρ и z - поперечные и продольная (к полю \mathbf{B}) компоненты вектора \mathbf{r}). Характерные длины пиннинга L_p^{3D} и R_p в продольном и поперечном направлениях существенно отличаются вследствие различия порядков величин упругих модулей C_{66} и C_{44} ; кроме того, продольная длина L_p^{3D} отличается и от ранее введенной «одновихревой» длины пиннинга L_p . Для характерной величины энергии взаимодействия с дефектами получим теперь $E_{\text{пинн}}^{3D} \sim (\gamma\xi^2 n V_p)^{1/2}$, где $V_p = L_p^{3D} R_p^2$ - объем области упругого пиннинга. Далее, неравенство $C_{11} \gg C_{66}$ означает, что деформациями сжатия можно пренебречь по сравнению с деформациями сдвига, так что достаточно приравнять по порядку величины энергию взаимодействия с дефектами $E_{\text{пинн}}^{3D}$ и энергии сдвиговых и изгибных деформаций:

$$\frac{C_{44}\xi^2}{(L_p^{3D})^2} V_p \simeq \frac{C_{66}\xi^2}{R_p^2} V_p \simeq (\gamma\xi^2 n V_p)^{1/2} \quad (41.7)$$

Кроме того, для определения критической плотности тока j_c следует, как и выше, приравнять силу Лоренца $j_c \frac{1}{c} B V_p$ (теперь действующую на единицу объема вихревой решетки) к максимальной объемной силе пиннинга $\mathcal{F}_{\text{пинн}} \simeq E_{\text{пинн}}^{3D} / \xi$. В результате получим

$$R_p \simeq \lambda \left(\frac{L_p}{a_0} \right)^3, \quad L_p^{3D} \simeq \frac{\lambda}{a_0} R_p \quad (41.8)$$

$$E_{\text{пинн}}^{3D} \simeq H_{cm}^2 \xi^3 \frac{\xi}{L_p} \left(\frac{\lambda}{a_0} \right)^2 \left(\frac{L_p}{a_0} \right)^4 \quad (41.9)$$

$$j_c^{3D} \simeq j_c \left(\frac{a_0}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{a_0}{L_p} \right)^4 \propto B^{-3}. \quad (41.10)$$

Как видно из (41.9), (41.10), с увеличением магнитного поля (а потому и жесткости вихревой решетки) характерная энергия пиннинга в объеме V_p растет (вместе с самим объемом), в то время как критическая плотность тока падает. Это происходит потому, что энергия $E_{\text{пинн}}^{3D}$ растет с полем медленнее, чем объем, в то время как полная сила Лоренца при заданном токе пропорциональна объему.

Результаты (41.4) и (41.10) не переходят один в другой при $a_0 \sim L_p$, как этого можно было бы ожидать - формулы для коллективного пиннинга решетки (41.8) приводят к большим длинам пиннинга ($R_p \sim \lambda \gg a_0$) и меньшему критическому току $j_c^{3D} \ll \ll j_c$ по сравнению с формулой (41.4) для пиннинга одиночных вихрей. Дело в том, что при выводе оценок (41.8) - (41.10) мы предполагали, что вихревая решетка описывается обычной теорией

упругости с постоянными упругими модулями (пока длина волны деформации много больше постоянной решетки). В действительности, это предположение справедливо для вихревой решетки лишь при длинах волн q^{-1} , больших чем лондоновская длина λ . При меньших длинах волн магнитное поле "не успевает" следовать за деформациями вихревых линий (оно не может меняться на длинах меньше λ) и макроскопический подход к выводу C_{11} и C_{44} отказывает. В области $q\lambda \geq 1$ вихревая решетка описывается нелокальной теорией упругости, в рамках которой упругие модули сжатия и изгиба следует рассматривать как функции волнового вектора деформации q (это похоже на ситуацию с нелокальным экранированием токов в пиппардовских сверхпроводниках, см. 7). В интервале волновых векторов $\lambda^{-1} \leq q \leq a_0^{-1}$ упругие модули $C_{11}(q)$ и $C_{44}(q)$ ведут себя при $B \gg H_{c1}$ одинаково [105, 115]:

$$C_{11}(q) = C_{44}(q) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{1}{1 + (q\lambda)^2} \quad (41.11)$$

Аккуратный расчет [115, 116] с использованием (41.11) показывает, что имеется промежуточная область магнитных полей, в которой длина пиннинга и критический ток экспоненциально резко зависят от поля:

$$R_p \simeq a_0 e^{(B/B^*)^{3/2}-1}, \quad j_c^{3D} \simeq j_c \frac{B}{B^*} e^{-2(B/B^*)^{3/2}+2} \quad (41.12)$$

где $B^* \simeq (j_c/j_0) H_{c2} < B < B^\dagger$. Результаты же (41.8) - (41.8) справедливы при еще больших полях $B > B^\dagger$, когда длина R_p , определяемая из (41.12), становится больше λ . Как видно из сравнения формул (41.8) - (41.8) и (41.12), величины B^* и B^\dagger всегда довольно близки.

Все полученные выше оценки показывают, что j_c монотонно убывает с ростом внешнего поля B ; однако, как уже упоминалось в конце §38, в эксперименте часто наблюдается (например, [118, 35]) пик критического тока при $B \simeq H_{c2}$. Дело в том, что использованные нами здесь формулы (41.6) справедливы лишь в области слабых полей, когда коры соседних вихрей не перекрываются между собой (фактически это условие имеет вид $B \leq 0.2H_{c2}$). Действительно, поскольку при $B > H_{c2}$ сверхпроводник непрерывно (фазовый переход II рода) переходит в нормальное состояние, где квантованных вихрей вовсе нет, то и упругие модули (41.6), и параметр взаимодействия вихрей с примесями γ уменьшаются при $b = B/H_{c2} \rightarrow 1$. Расчеты [115, 105] показывают, что эффект от "смягчения" решетки сильнее, чем от ослабления связи вихрей с дефектами (так, максимальное значение $C_{66}(b)$ достигается при $b \simeq 0.6$, а затем модуль сдвига убывает пропорционально $(1-b)^2$), поэтому с ростом b критический ток $j_c(b)$ растет, а длина коллективного пиннинга R_p падает вплоть до величины порядка a_0 - т.е. происходит переход к одновихревому пиннингу. В области $a_0 < R_p < \lambda$ существенна пространственная дисперсия упругих модулей (41.11), поэтому рост

критического тока происходит экспоненциально резко. При дальнейшем увеличении b взаимодействие между вихрями становится несущественным и $j_c(b)$ падает из-за ослабления взаимодействия каждого вихря с примесями ($\gamma_{\text{эфф}}(b) \propto (1-b)^2$). Таким образом, пик критического тока достигается (при слабом коллективном пиннинге) в полях B , близких к H_{c2} .

5.4.16 42*. Крип магнитного потока и нелинейная проводимость в ВТСП

До открытия высокотемпературных сверхпроводников было естественно рассматривать критическое (38) и резистивное (40) состояния вихрей независимо друг от друга. Подразумевалось, что в критическом состоянии плотность тока j , возникшего из-за неоднородного распределения

плотности вихрей при их проникновении в образец, равна критическому значению j_c , так что вихри неподвижны - в то время как в резистивном состоянии ток велик по сравнению с j_c , пиннингом вихрей можно вовсе пренебречь, и их движение характеризуется постоянным коэффициентом трения η . Однако ясно, что если потенциальные барьеры для движения вихрей обращаются в нуль при $j = j_c$ непрерывно, то при чуть меньших токах эти барьеры должны быть малы - и преодолимы для тепловых флюктуаций вихрей. Физическая причина, позволяющая провести упомянутое разделение явлений в обычных сверхпроводниках - очень большая при малых токах величина энергетических барьеров U_0 (по сравнению с тепловой энергией $k_B T$). Достаточно иметь плотность тока ниже j_c на малую величину порядка $k_B T/U_0$, чтобы пренебречь вероятностью тепловых перескоков вихрей через барьеры, созданные примесным потенциалом. В высокотемпературных сверхпроводниках характерные значения $k_B T/U_0$ на несколько порядков выше, и область термоактивированного движения (называемого обычно "крип" - от английского "sweep", т. е. "переползание") вихрей оказывается широко представленной в эксперименте. Ниже мы рассмотрим с единой точки зрения как релаксацию критического состояния вследствие крипа ви хрей, так и нелинейные вольт-амперные характеристики $V(j)$ в ВТСП.

Вернемся к рассмотренной в 38 задаче о проникновении магнитного поля в пластину сверхпроводника толщиной d . Теперь мы не будем считать постоянным возникший в пластине (при проникновении в нее вихрей) ток и выведем макроскопическое уравнение, определяющее временную эволюцию плотности тока. Удем считать магнитное поле направленным вдоль оси z , а ток плотности \mathbf{j} и возникающее из-за движения вихрей электрическое поле $\mathbf{E} = (1/c)[\mathbf{B}\mathbf{v}]$ - вдоль оси y . Используя уравнения Максвелла $\partial B/\partial t = -c\partial E/\partial x$ и $\partial B/\partial x = -(4\pi/c)j$, получим для скорости релаксации тока

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial^2(vB)}{\partial x^2} \quad (42.1)$$

В правой части этого уравнения содержится средняя скорость движения вихрей $v \simeq v_0 e^{-U(j)/k_B T}$, где $U(j)$ -соответствующий плотности тока j потенциальный барьер. Для простоты мы расмотрим сейчас случай, когда величина B мало меняется по толщине пластины (см. рис. 38.1, б), а отношение $k_B T/U(j)$ мало. Тогда распределение плотности тока по пластине оказывается почти однородным, $j(x, t) = j(t) + \delta j(x, t)$, где $\delta j/j \propto k_B T/U(j) \ll \ll 1$, и для величины $j(t)$ можно вывести [96, 119] замкнутое уравнение

$$\frac{\partial j}{\partial t} = - \left(\frac{j_c}{\tau_0} \right) e^{-U(j)/k_B T} \quad (42.2)$$

где $\tau_0 \sim d^2/c^2\rho_f$ имеет порядок времени диффузии магнитного поля в состоянии течения потока по толщине образца d . Соответствующий "коэффициент диффузии" для магнитного поля имеет вид $D_B = c^2\rho_f/4\pi$, как это видно из уравнения $\dot{B} = (c^2\rho_f/4\pi)\nabla^2 B$, которое получается комбинированием уравнений Максвелла с законом Ома $E = \rho_f j$. При большой величине показателя экспоненты уравнение (42.2) можно решить приближенно, как говорят в таких случаях - с логарифмической точностью:

$$U(j) = k_B T \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right),$$

$$\text{где } t_0 = \tau_0 \frac{k_B T}{j_c |\partial U / \partial j|} \sim \frac{k_B T}{U_c} \frac{d^2}{c^2 \rho_f}. \quad (42.3)$$

Физический смысл решения (42.3) очевиден-к моменту времени t после начала релаксации (крипа) величина плотности тока в образце устанавливается такой, что соответствующие этому току энергетические барьеры $U(j)$ как раз могут быть преодолены вихрями за время

порядка t . Важное и заранее неочевидное обстоятельство состоит в том, что характерное "время попыток" t_0 для крипа оказывается зависящим от размера образца и вполне макроскопическим - в интервале $(10^{-6} \div 10^{-2})$ с.

Для того чтобы извлечь из соотношения (42.3) явную зависимость плотности экранирующих токов от времени, необходимо использовать какую-то оценку для функциональной зависимости $U(j)$. Рассмотрим сначала случай токов, близких к критическому. Тогда естественно предположить, что $U(j \rightarrow j_c) \simeq U_c (1 - j/j_c)^a$, где a - число порядка единицы. Используя это соотношение вместе с (42.3), находим, что

$$\frac{j(t)}{j_c} = 1 - \left[\frac{k_B T}{U_c} \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]^{1/a}. \quad (42.4)$$

Зависимость вида (42.4) с $a = 1$ была впервые получена в работе [120]. В эксперименте обычно измеряется зависимость магнитного момента сверхпроводника в течение длительного времени после включения (или изменения) внешнего магнитного поля, которое вызвало формирование критического состояния. Измеряемый магнитный момент $M(t)$ (пропорциональный протекающему в образце экранирующему току) в обычных сверхпроводниках ведет себя, как правило, логарифмически со временем, что соответствует показателю $a = 1$ и очень малому значению отношения $k_B T/U_c \leq 10^{-3}$, так что полное изменение $M(t)$ при экспериментально достижимых временах остается много меньше

исходной величины $M(0)$. Иначе обстоит дело в ВТСП, где характерная величина $k_B T/U_c$ часто бывает порядка 0.1 при $T \sim 0.5T_c$. Поскольку логарифмический множитель в (42.4) имеет порядок $10 \div 20$ при характерных временах релаксационных измерений ($10^2 \div 10^4$) с, ток и намагниченность ВТСП должны релаксировать на величину порядка своих исходных значений, что и наблюдается экспериментально [121], рис. 42.1. Но в таком случае уже нельзя пользоваться формулой (42.4), выведенной в предположении малости изменения тока в процессе релаксации. Другой предельный случай, в котором можно ожидать простой зависимости $U(j)$, - случай малых токов $j \ll j_c$. В случае коллективного пиннинга вихревой решетки слабыми примесями (или пиннинга отдельных вихревых линий) удается показать, что эта зависимость должна быть степенной, $U(j) \simeq U_c (j_c/j)^\mu$. Полуколичественная теория, приводящая к такому результату, была развита в работе [122] и называется теорией коллективного крипа (см. также [96]). Значение показателя μ в теории коллективного крипа зависит от соотношения длины пиннинга R_p , постоянной решетки a_0 и лондоновской длины λ , а также от отношения j/j_c и может меняться от значений порядка 0.1 до больших единицы. Простейшая интерполяционная формула, содержащая в себе и область $j \ll j_c$, и область $j_c - j \ll j_c$, может быть написана в виде

$$U(j) \simeq U_c \left[\left(\frac{j_c}{j} \right)^\mu - 1 \right] \quad (42.5)$$

Используя формулу (42.5) вместе с (42.3), получаем закон релаксации тока в виде

$$j(t) = j_c \left[1 + \frac{\mu k_B T}{U_c} \ln \left(1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]^{-1/\mu} \quad (42.6)$$

В тех случаях, когда $\mu \ll 1$, как, например, в случае слабо взаимодействующих между собой вихревых линий (т.е. при низких полях и температурах), выражение (42.6) можно приближенно записать в виде $j(t) \simeq j_c \exp[-(k_B T/U_c) \ln(t/t_0)]$, т. е. измеряемый на некотором масштабе времени t экранирующий ток оказывается экспоненциальной функцией температуры и при этом степенной функцией времени t , что и наблюдалось экспериментально [123]. M , ед. СГСМ

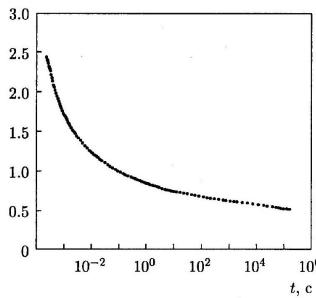


Рис. 42.1. Релаксация остаточной намагниченности в кристалле ВТСП на интервале времени в 9 порядков [121].

В общем случае величина, удобная для анализа экспериментальных данных по релаксации, - логарифмическая производная $S(t) = \partial \ln j(t) / \partial \ln t$. Используя (42.6), получаем предсказание для $S(t)$ в теории коллективного крипа:

$$S(t) = \frac{k_B T}{U_c + \mu k_B T \ln(1 + t/t_0)} \quad (42.7)$$

Важной чертой зависимости (42.7) является насыщение роста S как функции температуры при больших T и ее уменьшение как функции $\ln(t/t_0)$ в пределе больших времен. Оба эти предсказания, происходящие из картины роста энергетических барьеров крипа по мере "старения" системы и релаксации в ней тока, нашли экспериментальное подтверждение; подробное обсуждение этих экспериментов можно найти в обзоре [124].

В теории коллективного крипа энергетические барьеры $U(j)$ растут при стремлении плотности тока j к нулю неограниченно. Следовательно, скорость движения вихрей $v(j) \propto E(j)$, а дифференциальное сопротивление $dE/dj \propto \rho_f e^{-U(j)/k_B T}$ экспоненциально падает при уменьшении плотности тока. Это свойство очень важно - оно показывает, что равновесное состояние коллективного пиннинга вихревой решетки имеет нулевое линейное сопротивление, т.е. отличается от высокотемпературного состояния с конечной проводимостью качественным образом и потому должно быть отделено от него некоторым фазовым переходом.

Обычный способ нахождения линии перехода $H_{c2}(T)$ в сверхпроводящее состояние состоит в измерении линейного сопротивления $\rho(T, H)$ как функции температуры при различных значениях H : температура перехода $T_c(H)$ определяется по обращению $\rho(T, H)$ в нуль (функция же $H_{c2}(T)$ является обратной к $T_c(H)$). Фактически "нулевым" считается сопротивление ниже некоторой выбранной величины, например, 0.1 (или 0.01) от сопротивления в нормальном состоянии ρ_n , так что положение линии перехода определяется не вполне однозначно. У низкотемпературных сверхпроводников $\rho(T, H)$ очень резко падает с понижением температуры или поля ниже линии перехода, так что неоднозначность в определении $H_{c2}(T)$ очень мала. Совсем иначе дело обстоит в случае ВТСП; характерное семейство кривых $\rho(T, H)$ для $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ показано на рис. 42.2. С увеличением H температурный интервал, в котором происходит падение сопротивления, очень заметно уширяется (причем верхние части кривых $\rho(T)$ зависят от величины H гораздо слабее, чем нижние), так что различные варианты выбора "нулевого" сопротивления (например, 0.1 или 0.01 от ρ_n) привели бы к существенно различным значениям температуры перехода $T_c(H)$. Поэтому в экспериментах с ВТСП фазовый переход приходится регистрировать по изменению (с температурой или полем) вида вольт-амперных характеристик $V(j)$: измерение ВАХ в широком (несколько порядков) интервале токов и напряжений позволяет надежно определить точку обращения линейного сопротивления в нуль.

На рис. 42.3 приведен в двойной логарифмической шкале на-

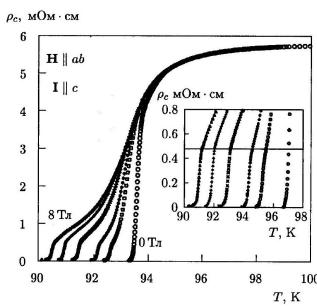


Рис. 42.2. Температурные зависимости сопротивления монокристалла YBaCuO при различных значениях H внешнего магнитного поля [125]. На вставке в более крупном масштабе показаны данные для области низких сопротивлений; участки кривых ниже сплошной линии практически совпадают для различных значений H .

бор вольт-амперных характеристик из эксперимента [126] на тонкой (толщина 0.4 мкм) пленке $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, соответствующих различным значениям температуры, во внешнем поле $H_0 = 1$ Тл. Весь набор вольт-амперных характеристик делится на две части с качественно различным поведением. На графиках для температур $T < T_g \approx 84.6$ К видна отрицательная кривизна в области малых токов, т.е. электрическое поле $E(j)$ убывает при $j \rightarrow 0$ по закону более быстрому, чем степенной, что качественно соответствует обсуждавшейся выше зависимости (42.5) энергии активации крипа. С другой стороны, кривые, соответствующие $T > T_g$,

E , В/м

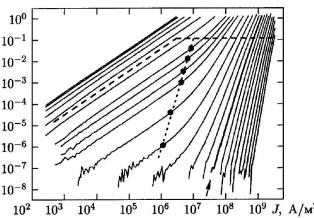


Рис. 42.3. Вольт-амперные характеристики тонкой пленки YBaCuO во внешнем магнитном поле 1 Тл [126] для различных температур в интервале между 80.5 и 91 К. Фазовый переход вихревая жидкость-вихревое стекло происходит при температуре $T_g = 84.6$ К, соответствующая вольт-амперная характеристика помечена стрелкой.

линейны в области малых токов, причем имеют единичный наклон, что означает линейную зависимость $E = \rho_{\text{эфф}} j$ при $j \rightarrow 0$. При этом значения эффективного сопротивления $\rho_{\text{эфф}}$ меняются на несколько порядков в довольно узком интервале температур чуть выше T_g . Наконец, в области не слишком малых токов $j > j_*(T)$ все кривые ведут себя примерно одинаково - линейно с наклоном больше единицы, что соответствует степенной зависимости $E(j) \propto j^{1+\alpha_j}$. С приближением T к T_g характерная величина тока $j_*(T)$ падает, так что семейства кривых соответствуют степенное поведение ВАХ при всех значениях плотности тока. Оказывается возможным [126] представить совокупность всех этих данных единым образом при помощи двух безразмерных функций $\mathcal{E}_{\pm}(x)$, соответствующих областям выше и ниже T_g :

$$\frac{E}{j\rho_f} \sim R \left(\frac{T - T_g}{T_g} \right) \mathcal{E}_{\pm} \left(\frac{j}{j_*} \right), \quad \text{где} \quad j_* \propto |T - T_g|^{\beta_j} \quad (42.8)$$

а безразмерные "скейлинговые" функции $\mathcal{E}_{\pm}(x)$ имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\pm}(x)|_{x \rightarrow \infty} &\propto x^{\alpha_j}, \quad \mathcal{E}_+(x \rightarrow 0) = \text{const}, \\ \mathcal{E}_-(x \rightarrow 0) &\propto e^{-1/x^\mu} \end{aligned} \quad (42.9)$$

Функция $R(y)$ также ведет себя степенным образом, а показатель степени определяется тем, что ВАХ универсальны (т. е. слабо зависят от $T - T_g$) при относительно больших токах: из условия сокращения зависящих от T множителей в (42.8) при $j \gg j_*$ получаем, учитывая (42.9), что $R(y) \propto y^{\alpha_j \beta_j}$. Анализ ВАХ из эксперимента [126] приводит к значениям показателей $\alpha_j \simeq 4.0$ и $\beta_j \simeq 3.3$.

Масштабно-инвариантное поведение (scaling) описанного выше типа характерно для фазовых переходов II рода с сильно развитыми флуктуациями [28, 34]. Обычно свойства таких фазовых переходов можно описать теоретически как следствие изменения симметрии и появления параметра порядка, характеризующего степень нарушения симметрии в одной из фаз. В данном случае такое описание весьма затруднено, поскольку свойства уже самой низкотемпературной фазы определяются неоднородностями (примесями), приводящими к пиннингу вихревой решетки и, как следствие, к разрушению ее периодичности: корреляции положений вихревых линий пропадают на достаточно больших расстояниях (см. 41). Иначе говоря, низкотемпературная фаза, сформированная взаимодействием решетки вихрей с примесями, представляет собой «вихревое стекло», находящееся в одном из многих возможных метастабильных состояний, как это характерно вообще для стекол.

Что же представляет собой состояние, реализующееся при $T > T_g$? Как было объяснено в 37, идеальная (беспримесная)

вихревая решетка плавится при $B = B_m(T) < H_{c2}(T)$, вследствие чего образуется жидкость из вихревых линий. Это фазовый переход I рода, но довольно близкий ко II роду (скачки энтропии и намагниченности малы). Пусть теперь в сверхпроводнике имеются примеси, создающие слабый случайный потенциал. В области на фазовой диаграмме сверхпроводника, достаточно удаленной (вверх) от линии плавления, выигрыш в свободной энергии за счет выгодного расположения вихрей в случайном потенциале меньше, чем разность свободных энергий твердого и жидкого состояний. Поэтому здесь беспорядок не меняет качественно состояния вихревой системы, однако он создает энергетические барьеры для течения вихревой жидкости [127]. Величины этих барьеров конечны при малых токах, $U(j, T, B) \xrightarrow{j \rightarrow 0} U_{\max}(T, B)$. В таком состоянии имеется ненулевое линейное сопротивление $(dE/dj)|_{j \rightarrow 0} = \rho_f e^{-U_{\max}/k_B T}$. При совсем слабом беспорядке род фазового перехода не может измениться, так что переход из вихревой жидкости в стекло происходит скачком. Именно такая ситуация реализовалась в очень чистых монокристаллах, использованных в экспериментах [106, 128, 107, 129, 125]. При этом величина U_{\max} может существенно превышать $k_B T$, так что сопротивление в таком состоянии (называемом «термоактивированное течение потока», а в англоязычной литературе "thermally assisted flux flow", или сокращенно - TAFF) хотя и отлично от нуля, но может быть на несколько порядков меньше, чем сопротивление течения потока ρ_f . В особенно широкой области полей и температур термоактивированное течение потока наблюдается в слоистых ВТСП-материалах типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, где зависимости $\rho_{taff}(T, B)$ хорошо описываются как следствие поведения максимального энергетического барьера $U_{\max}(T, B) \propto \propto (T_c - T) \ln(H_{c2}/B)$ (см., например, работу [130]).

В образцах с большим количеством дефектов (особенно в тонких пленках, как в [126]) линия фазового перехода сдвигается по сравнению с линией плавления идеальной решетки, поэтому мы и обозначаем температуру этого перехода $T_g(B)$ новым подстрочным индексом g (от английского "glass"-стекло). Более

того, скачки энтропии и намагниченности "размываются" беспорядком и фазовый переход становится непрерывным. В этом случае величина U_{\max} неограниченно возрастает с приближением к линии перехода сверху, а линейное сопротивление обращается в нуль пропорционально $(T - T_g)^{\alpha_j \beta_j}$, как было объяснено в связи с рис. 42.3. В некоторых случаях при "промежуточном" количестве дефектов фазовый переход принадлежит к I роду при малых B и $(T_c - T)$ и становится непрерывным в более сильных полях, когда относительная роль случайного потенциала увеличивается; фазовая диаграмма такого типа приведена, в частности, в

работе [131]. Теоретическое описание таких фазовых переходов еще недостаточно хорошо разработано.

5.5 МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

5.5.1 43. Введение. Электрон-фононное взаимодействие

Механизм явления сверхпроводимости стал понятен лишь спустя 46 лет после открытия сверхпроводимости, когда Бардин, Купер и Шриффер опубликовали свою теорию (теория БКШ) [132].

Чтобы понять, с какими трудностями столкнулись теоретики, достаточно сделать такие оценки. Разница между свободными энергиями нормального металла и сверхпроводника, приходящаяся на 1 см^3 , равна, как мы знаем, величине $H_{cm}^2/8\pi \sim \sim 10^5 \text{ эрг / см}^3$, если $H_{cm} \sim 10^3$. В 1 см^3 содержится приблизительно 10^{22} электронов проводимости. Значит, за сверхпроводимость отвечает энергия примерно $10^5/10^{22} = 10^{-17} \text{ эрг/электрон} \sim \sim 10^{-5} \text{ эВ/электрон}$. Эту энергию нужно сравнить с кулоновской энергией взаимодействия порядка 1 эВ, пренебрежение которой не мешает прекрасно описать многие свойства металла методами современной квантовой теории металлов. Таким образом, предстояло объяснить упорядоченное поведение электронов, когда соответствующая энергия на много порядков меньше энергии других взаимодействий, которыми обычно пренебрегают.

Первый намек на природу механизма сверхпроводимости был получен с открытием изотоп-эффекта. Явление заключается в том, что разные изотопы одного и того же сверхпроводящего металла имеют разные критические температуры T_c , причем выполняется такая зависимость:

$$T_c M^a = \text{const}$$

Степень a оказывается для большинства элементов близкой к 0.5.

Таким образом, стало понятно, что ионная решетка металла активно участвует в создании сверхпроводящего состояния. Теоретический анализ показал, что взаимодействие между электронами и колебаниями кристаллической решетки может вызвать дополнительное взаимодействие между электронами. При определенных условиях это взаимодействие будет давать притяжение между электронами. Если такое притяжение окажется сильнее кулоновского отталкивания, то в металле возникает эффективное притяжение электронов, результатом которого будет сверхпроводящее состояние.

Постараемся понять сперва, как взаимодействуют между собой электроны через колебания решетки. Кванты колебаний кристаллической решетки (фононы) характеризуются энергией $\hbar\omega_q$ и волновым вектором q .

Рассмотрим металл при $T = 0$. Ясно, что никаких фононов при абсолютном нуле нет. Как же тогда происходит взаимодействие между электронами через фононы?

Свободный электрон металла с волновым вектором k_1 распространяется по кристаллу. В какой-то момент времени он возбудил колебание решетки. Иначе это можно сказать так: в какойто момент времени он испустил фонон (которого до этого момента не существовало) и перешел в какое-то другое состояние k'_1 . Пусть волновой вектор рожденного фона на будет q . При этом должен выполняться закон сохранения импульса

$$k_1 = k'_1 + q$$

Почти в тот же момент времени этот фонон окажется поглощенным другим электроном k_2 , который в результате такого столкновения перейдет в состояние k'_2 . Что же получилось? Сначала

были два электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в конце эти электроны оказались в состояниях \mathbf{k}'_1 и \mathbf{k}'_2 . Значит, произошло рассеяние электронов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 друг на друге, причем

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2.$$

Но такое рассеяние двух частиц может происходить только в том случае, если они взаимодействуют. Отсюда мы и делаем вывод, что процесс, который мы можем изобразить диаграммой рис. 43.1, описывает эффективное взаимодействие между электронами. Теперь поговорим о знаке этого взаимодействия. В момент, когда электрон переходит из состояния \mathbf{k}_1 в состояние \mathbf{k}'_1 , возникает колебание электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}'_1}) / \hbar$, где $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1}$ и $\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}'_1}$ – соответственно энергии электрона в состояниях \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}'_1 ($\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$). Предположим, что в результате такого колебания электронной плотности в данном месте произошло локальное увеличение плотности электронов. Ионы начнут притягиваться к этому месту и, обладая большой массой, даже после того, как скомпенсируют избыток электронов, будут продолжать свое первоначальное движение, и произойдет перекомпенсация. Теперь в этом месте появится уже избыточный положительный заряд. Тогда вторая частица с импульсом \mathbf{k}_2 начинает притягиваться этому месту с перекомпенсированным локальным увеличением электронной плотности. Так возникает эффективное притяжение между частицами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Из проведенных рассуждений нетрудно сделать вывод, что такое притяжение может возникнуть, только если колебания решетки (рассматриваемые как вынужденные) происходят в фазе с вынуждающей силой (колебаниями электронной плотности с частотой $\omega = (\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}_1} - \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}_2}) / \hbar$). Но это будет только в случае, когда частота вынуждающей силы ω меньше собственной частоты ионной системы. Такой характерной частотой является дебаевская частота ω_D , т. е. максимально возможная,¹⁾ поэтому условие притяжения формулируется так: $\omega < \omega_D$.

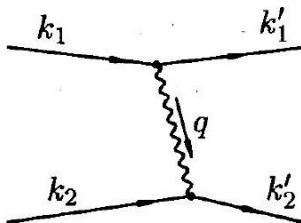


Рис. 43.1. Диаграмма, иллюстрирующая взаимодействие между двумя электронами посредством испускания и поглощения фонона с импульсом $\hbar\mathbf{q}$.

Действительно, рассмотрим простой осциллятор с массой m и собственной частотой колебаний ω_0 , который испытывает действие вынуждающей силы $f e^{i\omega t}$. Уравнение движения такой системы будет

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\omega t} \quad (43.1)$$

Ищем решение в виде $x = x_0 e^{i\omega t}$. Подставляя его в (43.1), имеем

$$x_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Отсюда следует, что пока $\omega^2 < \omega_0^2$, колебания $x = x_0 e^{i\omega t}$ происходят в фазе с вынуждающей силой f . В противном случае колебания будут происходить в противофазе.

Вернемся теперь к нашим электронам. Чтобы электрон мог перейти из состояния \mathbf{k}_1 в состояние \mathbf{k}'_1 , последнее должно быть свободно (принцип Паули!). Такое возможно лишь

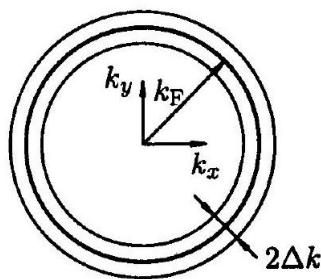
¹⁾ Существование предельной частоты колебаний атомов в кристалле лег-

вблизи поверхности Ферми, которую мы представляем себе в виде сферы радиуса k_F в \mathbf{k} -пространстве.

Вот теперь мы можем сформулировать закон взаимодействия электронов через фононы, который лежит в основе теории БКШ: электроны, энергии которых отличаются от энергии электрона на поверхности Ферми не больше чем на величину $\hbar\omega_D$, притягиваются друг к другу. Энергия их взаимодействия равна $-V$. Все остальные электроны не взаимодействуют.

ко понять: бессмысленно говорить о звуковой волне в кристалле, у которой длина волны меньше периода кристаллической решетки. Таким образом, существование минимальной длины волны очевидно. Отсюда сразу следует существование предельной частоты.

Рис. 43.2. Взаимодействуют через фононы по модели БКШ только электроны, лежащие в слое $2\Delta k$ около поверхности Ферми.



Запишем матричный элемент взаимодействия электронов в виде

$$V_{\mathbf{kk}'} = \begin{cases} -V, & |\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F| \leq \hbar\omega_D, \quad |\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_F| \leq \hbar\omega_D \\ 0, & |\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F| > \hbar\omega_D \text{ или } |\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_F| > \hbar\omega_D. \end{cases}$$

Таким образом, в модели БКШ притягиваются только электроны, лежащие в узком сферическом слое около поверхности Ферми, толщина которого $2\Delta k$ соответствует дебаевской энергии (рис. 43.2):

$$\Delta k/k_F \sim \hbar\omega_D/\varepsilon_F, \quad \varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$$

5.5.2 44. Основное состояние сверхпроводника

44.1. Распределение электронов в основном столении. В этом параграфе мы должны будем понять, в каком состоянии находится сверхпроводник, когда $T = 0$, т.е. найти состояние, соответствующее минимальной энергии сверхпроводника.

Здесь уместно напомнить некоторые основные положения квантовой механики, которые нам в дальнейшем понадобятся. Пусть $\psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ - полная система функций, если n пробегает какой-то набор значений, которыми мы нумеруем эти функции. Тогда любую волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ можно разложить по системе ψ_n :

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n \tag{44.1}$$

a_n мы будем называть амплитудой состояния ψ_n , а $|a_n|^2$ даст нам вероятность обнаружить систему в состоянии ψ_n .

Пусть теперь оператор Гамильтона \hat{H} равен

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{кин}} + \hat{V} \tag{44.2}$$

где $\hat{H}_{\text{кин}}$ - оператор кинетической энергии, \hat{V} - оператор энергии взаимодействия. Тогда среднее значение энергии \bar{E} в состоянии Ψ можно записать в виде

$$\bar{E} = \int \Psi^* \hat{H} \Psi d\tau \quad (44.3)$$

интегрирование ведется по всем N переменным. Подставляя в (44.3) формулы (44.1) и (44.2), имеем

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{кин}} + \bar{V},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \int \Psi^* \hat{V} \Psi d\tau = \\ &= \int \sum_n a_n^* \psi_n^* \hat{V} \sum_m a_m \psi_m d\tau = \sum_{n,m} a_n^* a_m V_{nm} \end{aligned} \quad (44.4)$$

Выражение V_{nm} называется матричным элементом перехода из состояния ψ_m в состояние ψ_n :

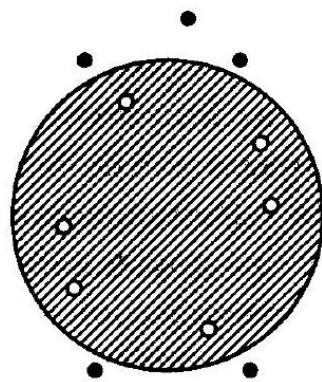
$$V_{nm} = \int \psi_n^* \hat{V} \psi_m d\tau \quad (44.5)$$

Возвращаемся к обсуждению основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле основное состояние хорошо известно. При $T = 0$ наименьшей энергии соответствует состояние, когда все электроны в импульсном пространстве (\mathbf{k} -пространстве) занимают состояния, лежащие внутри поверхности Ферми, а все состояния вне этой поверхности свободны. Действительно, очевидно, что этому соответствует минимальная кинетическая энергия. А потенциальной энергии в этой модели просто нет. Включим теперь энергию взаимодействия между электронами, которая обсуждалась в предыдущем параграфе. Поскольку она дает эффективное притяжение между электронами, то она будет давать отрицательный вклад и понижать общую энергию системы. Но для этого должна быть обеспечена возможность рассеяния электронов из состояния $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$. Ясно, что такое рассеяние окажется возможным, лишь если состояние $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ будет сначала заполнено, а состояние $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ будет сначала пусто.

Поэтому минимальной энергии при $T = 0$ перестает соответствовать полностью заполненная сфера Ферми в \mathbf{k} -пространстве.

Природа идет на некоторый проигрыш в кинетической энергии в надежде отыграться на энергии потенциальной. Теперь минимальной полной энергии будет соответствовать состояние с "размазанной" поверхностью Ферми, т. е. состояние, в котором над поверхностью Ферми некоторые ячейки \mathbf{k} -пространства заполнены, в то время как некоторые ячейки, лежащие под поверхностью Ферми, оказываются пустыми. При этом, как мы сейчас покажем, заполнение ячеек должно происходить попарно, т. е. если ячейка $\mathbf{k} \uparrow$ заполнена, то и ячейка $-\mathbf{k} \downarrow$ тоже должна быть заполнена, стрелками обозначены направления электронных спинов. Совершенно то же самое надо сказать о пустых ячейках. Это схематически изображено на рис. 44.1. Объясним теперь, почему наиболее выгодным спариванием электронов будет такое, когда в паре оказываются электроны с противоположными импульсами.

Рис. 44.1. Схематическое изображение состояния, полная энергия которого может оказаться меньше энергии состояния, в котором все ячейки \mathbf{k} -пространства под сферой Ферми заняты, а над ней - свободны.



0

При переходе пары электронов $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rightarrow (\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$ должен выполняться закон сохранения импульса $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{k}'_1 + \hbar\mathbf{k}'_2$, а суммирование в формуле (44.4) распространяется на все возможные такие переходы. Ясно, что чем больше окажется таких разрешенных переходов, тем больше должен быть отрицательный вклад \bar{V} в среднюю энергию \bar{E} сверхпроводника. Пусть, например, $\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \hbar\mathbf{q}$, как это изображено на рис. 44.2. Тогда, как это видно из рисунка, участвовать в переходах могут только те электроны, которые занимают ячейки заштрихованного участка \mathbf{k} -пространства. Начнем уменьшать q . Заштрихованная область будет увеличиваться. При $q = 0$ вклад в уменьшение средней энергии будут давать все электроны, состояния которых лежат в полосе шириной порядка $2\hbar\omega_{\text{D}}$ по энергии около поверхности Ферми в \mathbf{k} -пространстве. По принципу Паули электроны с одинаковыми проекциями спинов не могут оказаться в одной точке, поэтому их притяжение из-за обмена фононами обычно гораздо слабее, чем для электронов с противоположными спинами.

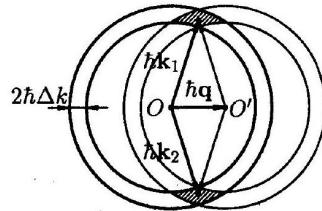


Рис. 44.2. Если спариваются электроны, имеющие суммарный импульс $\hbar\mathbf{q}$, то во взаимодействии участвуют лишь те электроны, которые заполняют заштрихованную часть \mathbf{k} -пространства.

Представим себе теперь всю возможную совокупность состояний, подобных тому, которое изображено на рис. 44.1. Занумеруем их индексом n . Они образуют полную систему функций, по которым можно разложить волновую функцию основного состояния сверхпроводника Ψ . Что означает на этом языке рассеяние друг на друге пары электронов $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ (спиновые индексы мы опускаем) в состояние $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$? Это означает переход из состояния ψ_n , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, в другое состояние ψ_m , которое полностью подобно состоянию ψ_n : двумя только исключениями: в состоянии ψ_m ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ свободны, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заняты.

Введем теперь в рассмотрение некоторую функцию $v_{\mathbf{k}}^2$ волнового вектора \mathbf{k} . Пусть это будет вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ занята. Тогда амплитуду состояния, в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ заняты, а $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ свободны, можно записать в виде

$$a_n = [v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2)]^{1/2} = v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}, \quad \text{где} \quad u_{\mathbf{k}}^2 = 1 - v_{\mathbf{k}}^2$$

Аналогично амплитуда состояния ψ_m , в котором ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ стали пустыми, а ячейки $(\mathbf{k}', -\mathbf{k}')$ заполнились, будет

$$a_m = v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}}$$

Используя (44.4), мы можем теперь записать полную энергию сверхпроводника в состоянии, описываемом распределением $v_{\mathbf{k}}^2$, в виде

$$E_s = \sum_{\mathbf{k}} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} \quad (44.6)$$

Первое слагаемое здесь дает полную кинетическую энергию системы, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ - энергия электрона в ячейке \mathbf{k} , отсчитанная от энергии Ферми, т.е.

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m = \bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F$$

Второе слагаемое, согласно (44.4), есть средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов, где матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ определяется формулой (43.2).

Теперь надо найти такую функцию $v_{\mathbf{k}}^2$, которая будет минимизировать полную энергию E_s . Это значит, что $v_{\mathbf{k}}^2$ должна удовлетворять уравнению

$$\partial E_s / \partial v_{\mathbf{k}}^2 = 0$$

Подставив сюда (44.6) и (43.2), получим

$$2\varepsilon_{\mathbf{k}} - V \frac{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2}{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}} \sum'_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} = 0$$

откуда

$$\frac{v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}}{1 - 2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_0}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \quad (44.7)$$

где

$$\Delta_0 = V \sum'_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} \quad (44.8)$$

Штрих при знаке суммы означает, что суммирование ведется только по тем состояниям \mathbf{k} , которые лежат в сферическом слое около поверхности Ферми, где отличен от нуля матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ (43.2).

Выражая $v_{\mathbf{k}}^2$ из (44.7), получаем квадратное уравнение относительно $v_{\mathbf{k}}^2$:

$$v_{\mathbf{k}}^4 - v_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2 / 4E_{\mathbf{k}}^2 = 0$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2} \quad (44.9)$$

Тогда

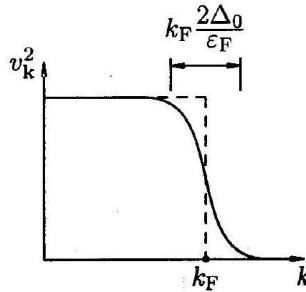
$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\mathbf{k}} / E_{\mathbf{k}}) \quad (44.10)$$

В этом равенстве мы поставим знак «минус», так как из физических соображений величина $v_{\mathbf{k}}^2$ должна стремиться к единице, а $\varepsilon_{\mathbf{k}} \rightarrow E_{\mathbf{k}}$ при $\mathbf{k} \rightarrow 0$.

График зависимости $v_{\mathbf{k}}^2$ от k изображен на рис. 44.3. Видно, что минимума полная энергия системы достигает тогда, когда распределение электронов около поверхности

Ферми "размазано" на некотором интервале энергии порядка $2\Delta_0$. Еще раз подчеркнем, что это происходит при абсолютном нуле температур! Таково основное состояние сверхпроводника.

Рис. 44.3. Зависимость v_k^2 от k . На уровне Ферми $\varepsilon_k = 0$. Область «размазанности» v_k^2 по энергии равна $2\Delta_0$.



44.2. Энергия основного состояния. Найдем теперь энергию основного состояния сверхпроводника. Для этого вычислим сперва величину Δ_0 . Подставим выражение для v_k^2 (44.10) в (44.8):

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= V \sum'_{k'} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right) \right]^{1/2} = \\ &= \frac{V}{2} \sum'_{k'} \left(\frac{E_k^2 - \varepsilon_k^2}{E_k^2} \right)^{1/2} = \frac{V \Delta_0}{2} \sum'_{k'} (\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли определение E_k (44.9).

Таким образом, мы приходим к уравнению относительно Δ_0 в виде

$$1 = \frac{V}{2} \sum'_{k'} (\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} \quad (44.11)$$

Если мы перейдем от суммирования по k к интегрированию по энергии ε по формуле

$$\sum'_{k'} \dots = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \dots N(\varepsilon) d\varepsilon$$

где $N(\varepsilon)$ - плотность состояний около энергии ε , то уравнение (44.11) превратится в уравнение

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon \quad (44.12)$$

Здесь $N(0)$ - плотность состояний около уровня Ферми (напоминаем, что энергия ε отсчитывается от уровня Ферми). ¹⁾ Поскольку подынтегральная функция в (44.12) четная и интегрирование ведется в симметричных пределах, имеем из (44.12)

$$1 = N(0)V \int_0^{\hbar\omega_D} (\varepsilon^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} d\varepsilon$$

Этот интеграл элементарно интегрируется, в результате получаем

$$1/N(0)V = \text{Arsh}(\hbar\omega_D/\Delta_0), \quad (44.13)$$

или

$$\hbar\omega_D/\Delta_0 = \text{sh}(1/N(0)V)$$

Поскольку $N(0)V$ для большинства сверхпроводников имеет величину порядка 0.3 или меньше, можно легко получить приближенное равенство

$$\Delta_0 \simeq 2\hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V) \quad (44.14)$$

Оценим величину Δ_0 : дебаевская температура $\hbar\omega_D \sim 100$ К, $N(0)V \sim 0.3$, тогда $\Delta_0 \sim 4$ К. Здесь мы энергии $\hbar\omega_D$ и Δ_0 выражаем в кельвинах.

Перейдем теперь к вычислению энергии основного состояния сверхпроводника. Общее выражение E_s для этой энергии дается формулой (44.6). Энергия основного состояния образца в нормальном состоянии, когда взаимодействие между электронами выключено и они заполняют все состояния под уровнем Ферми, дается формулой

$$E_n = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k \quad (44.15)$$

Здесь суммирование ведется сразу по парам состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, поэтому и появился коэффициент 2.

Энергию основного состояния сверхпроводника будем теперь отсчитывать от энергии основного состояния нормального металла, т. е. найдем величину

$$W = E_s - E_n$$

Используя (44.6) и (44.15), имеем

$$W = \sum_{k < k_F} 2\varepsilon_k (v_k^2 - 1) + \sum_{k > k_F} 2\varepsilon_k v_k^2 - V \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} \quad (44.16)$$

Штрих у последней суммы означает, что суммирование ведется в \mathbf{k} -пространстве по слою в интервале $\pm\hbar\omega_D$ около поверхности Ферми.

Подставляя сюда выражение для $v_{\mathbf{k}}^2$ (44.10), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k < k_F} |\varepsilon_k| (1 - |\varepsilon_k| / E_k) + \\ &+ \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k / E_k) - V \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} = \\ &= 2 \sum_{k > k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k / E_k) - V \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k'}}. \end{aligned}$$

Учитывая определение Δ_0 (44.8), находим

$$\sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} = \Delta_0^2 / V^2$$

Отсюда легко получаем

- При переходе к формуле (44.12) мы учли, что интегрирование ведется по малому интервалу энергий ($2\hbar\omega_D$) по сравнению с фермиевской энергией ε_F . Поэтому можно считать, что плотность состояний $N(\varepsilon)$ мало меняется на этом интервале и равна своему значению на уровне Ферми $N(0)$.

$$W = 2 \sum_{k>k_F} \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k/E_k) - \Delta_0^2/V$$

Переходя от суммирования к интегрированию, имеем

$$W = 2N(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} \right) d\varepsilon - \frac{\Delta_0^2}{V}$$

После интегрирования получим

$$W = N(0)\Delta_0^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2 - \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \left[1 + \left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right)^2 \right]^{1/2} + \text{Arsh} \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} \right\} - \frac{\Delta_0^2}{V}$$

Используя равенство (44.13) и неравенство $\hbar\omega_D \gg \Delta_0$, имеем окончательно

$$W = -\frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2 \quad (44.17)$$

Мы видим, таким образом, что разность W между энергиями сверхпроводящего и нормального состояний при $T = 0$ оказывается отрицательной, т.е. сверхпроводящее состояние энергетически более выгодно. А это значит, что именно такое состояние и будет реализовываться природой.

В самом начале курса было установлено, что разность свободных энергий нормальной и сверхпроводящей фаз равна $H_{cm}^2/8\pi$, где H_{cm} -критическое термодинамическое поле. Отсюда сразу следует, что при $T = 0$ должно выполняться следующее соотношение:

или

$$\frac{H_{cm}^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2$$

$$H_{cm}(0) = \Delta_0 \sqrt{4\pi N(0)} \quad (44.18)$$

Мы получили, таким образом, термодинамическое критическое поле при $T = 0$, выраженное через характерные параметры сверхпроводника - параметры его электронного спектра и электронфононного взаимодействия.

Проверим, насколько разумными окажутся численные оценки порядков величин, даваемые формулой (44.18). В 1 см³ металла содержится порядка 10^{22} электронов, а зона проводимости имеет ширину порядка 10 В = $10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}$ эрг, следовательно, оценка плотности состояний дает $N(0) \sim 10^{22}/(10 \times 1.6 \cdot 10^{-12})$ эрг⁻¹ см⁻³ $\sim 10^{33}$ эрг⁻¹ см⁻³. Согласно предыдущим оценкам, $\Delta_0 \sim 10$ К $\sim 10^{-15}$ эрг. Отсюда сразу получим $H_{cm} \sim \sim 10^{-15} (10^{34})^{1/2} = 100$ Э. Это вполне разумная оценка критического поля.

5.5.3 45. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника

45.1. Энергетическая щель.

Сейчас мы познакомимся с одним из важнейших понятий микроскопической теории сверхпроводимости - с энергетической щелью в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника.

Для этого зафиксируем наше внимание на какой-либо произвольной паре состояний ($\mathbf{q}, -\mathbf{q}$) в импульсном пространстве сверхпроводника, находящегося в основном состоянии.

Какой вклад в полную энергию вносит эта пара? Обозначим этот вклад через $w_{\mathbf{q}}$. Из (44.6) сразу видно, что

$$w_{\mathbf{q}} = 2\varepsilon_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}}^2 - 2Vv_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{q}} \sum'_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} \quad (45.1)$$

Действительно, первое слагаемое здесь - кинетическая энергия пары $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, а второе слагаемое - вклад в отрицательную часть энергии основного состояния, происходящий от того, что рассматриваемая пара участвует во всевозможных процессах взаимодействия, при которых она переходит в любые другие состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, и наоборот - когда любые другие пары $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ переходят в наше выделенное для рассмотрения состояние $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$.

Коэффициент 2 во втором слагаемом появился потому, что пара $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в сумме (44.6) встретится дважды - один раз при суммировании по \mathbf{k} , другой раз - при суммировании по \mathbf{k}' . Учитывая теперь выражение (44.8) для Δ_0 и формулы (44.9) и (44.10), получим

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{q}} &= 2\varepsilon_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}}) - 2 \left[\frac{1}{4} \left(1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}}^2 \right) \right]^{1/2} \Delta_0 = \\ &= \varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2/E_{\mathbf{q}} - \Delta_0^2/E_{\mathbf{q}} = \varepsilon_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (45.2)$$

Воспользуемся теперь полученным выражением. Предположим, что в основном состоянии сверхпроводника пара состояний (\mathbf{q}, \mathbf{q}) заведомо пуста. Введем в такой сверхпроводник один внешний электрон и поместим его в состояние \mathbf{q} . Какова будет теперь энергия системы? Поскольку мы ввели один электрон в состояние \mathbf{q} , то значит теперь пара состояний $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ не может участвовать в процессах рассеяния, т.е. не может давать вклад в энергию основного состояния сверхпроводника. Этот вклад мы только что вычислили, он равен $w_{\mathbf{q}}$. Следовательно, энергия сверхпроводника с одним «лишним» электроном в состоянии \mathbf{q} будет

$$W_{\mathbf{q}} = W - w_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}} \quad (45.3)$$

Этот «лишний» неспаренный электрон мы будем называть элементарным возбуждением нашей системы, или квазичастицей. В формуле (45.3) W - энергия основного состояния сверхпроводника, а третье слагаемое учитывает просто кинетическую энергию нашего илишнего" электрона. Подставляя (45.2) в (45.3), имеем

$$W_{\mathbf{q}} = W + E_{\mathbf{q}}. \quad (45.4)$$

Мы получили очень важную формулу. Поскольку, согласно (44.9),

$$E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{q}}^2 + \Delta_0^2}$$

ясно, что добавляя один электрон к сверхпроводнику, находящемуся в основном состоянии, мы повышаем энергию системы как минимум на величину Δ_0 (в том случае, если $\varepsilon_{\mathbf{q}} = 0$, т.е. если состояние \mathbf{q} находится на поверхности Ферми). Это значит, что спектр элементарных возбуждений сверхпроводника отделен от энергетического уровня, соответствующего основному состоянию сверхпроводника, энергетической щелью.



Рис. 45.1. Энергетическая щель Δ_0 отделяет область энергетических уровней элементарных возбуждений от уровня основного состояния (уровня конденсации электронных пар).

Действительно, вновь вернемся к сверхпроводнику в основном состоянии. Пусть в результате какого-то внешнего воздействия один из электронов пары ($q, -q$) переведен в соседнюю ячейку k -пространства. Напомним, что поскольку рассматривается основное состояние сверхпроводника, первоначально все ячейки в k -пространстве были или попарно заполнены, или попарно пусты. Перевод одного из электронов пары ($q, -q$) в соседнюю ячейку означает появление двух неспаренных (возбужденных) электронов: один остается в одном из состояний ($q, -q$), а второй появляется в соседней ячейке и, конечно, не имеет парного себе в противоположной точке k -пространства. Согласно только что проведенному рассуждению, на такой разрыв пары требуется энергия не меньше $2\Delta_0$. Это можно схематически изобразить с помощью диаграммы (рис. 45.1). Все парные состояния сконденсированы на уровне, характеризующем основное состояние сверхпроводника. Лишний электрон на этом уровне оказаться не может и должен занять первый незанятый уровень спектра элементарных возбуждений. При разрыве пары оба электрона пары должны подняться на уровни спектра элементарных возбуждений, и поэтому должна быть затрачена энергия, большая $2\Delta_0$.

Существование энергетической щели является очень важным свойством сверхпроводника и объясняет многие закономерности его поведения.

45.2. Плотность состояний элементарных возбуждений сверхпроводника и длина когерентности.

На рис. 45.1 была схематически показана нижняя часть спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Используя формулу (44.9), легко получить выражение для плотности состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника. Действительно, E_k - это энергия элементарного возбуждения (см. формулу (45.4)), т.е. это величина, на которую увеличивается энергия системы, если к сверхпроводнику добавляется электрон с импульсом $\hbar k$, причем

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2} = \sqrt{(\hbar^2 k^2 / 2m - \hbar^2 k_F^2 / 2m)^2 + \Delta_0^2}$$

Зависимость E_k от k , которая следует из приведенной выше формулы, изображена на рис. 45.2. Уже из рисунка видно, что уровни элементарных возбуждений сверхпроводника сгущаются при $E_k \rightarrow \Delta_0$. Плотность состояний, или число энергетических уровней, приходящихся на единичный интервал энергии и на 1 cm^3 материала, очевидно, равна

$$\rho(E) = d\nu/dE$$

где $d\nu$ - число уровней в энергетическом интервале dE около уровня E . Но $d\nu/d\varepsilon$ - это плотность состояний около уровня Ферми для металла в нормальном состоянии (в расчете на одну проекцию спина), т.е.

$$d\nu/d\varepsilon = N(0)$$

Поэтому

$$\rho(E) = \frac{d\nu}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dE} = N(0) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_0^2}} \quad (45.5)$$

Последняя формула показывает, что, действительно, плотность состояний для элементарных возбуждений сверхпроводника $\rho(E) \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow \Delta_0$. Эта ситуация изображена на рис. 45.2.

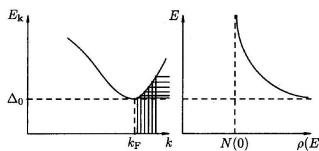


Рис. 45.2. Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника E_k и плотность состояний $\rho(E)$.

Рассмотрим теперь, как микроскопическая теория сверхпроводимости позволяет оценить длину когерентности сверхпроводника. Волновая функция основного состояния сверхпроводника нами уже рассматривалась в п.44.1. Основное состояние может быть изображено распределением спаренных электронов в \mathbf{k} -пространстве, что дается функцией $v_{\mathbf{k}}^2$. График зависимости $v_{\mathbf{k}}^2$ от k представлен на рис. 44.3. Видно, что область k -пространства, где функция $v_{\mathbf{k}}^2$ испытывает сильные изменения, имеет размер порядка

$$\Delta k \sim 2\Delta_0 \frac{k_F}{\varepsilon_F}$$

Отсюда следует, что область Δx в x -пространстве, где волновая функция основного состояния сверхпроводника будет существенно изменяться, должна определяться соотношением

$$\Delta x \Delta k \sim 1$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x \sim \frac{\varepsilon_F}{2\Delta_0 k_F} = \frac{1}{2\Delta_0 k_F} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar p_F}{4\Delta_0 m} = \frac{\hbar v_F}{4\Delta_0}. \quad (45.6)$$

Здесь p_F - импульс электрона на поверхности Ферми, v_F - фермиевская скорость электрона. Но по самому смыслу Δx -это как раз та величина, которую при изучении теории Гинзбурга-Ландау мы называли длиной когерентности ξ . Поэтому мы теперь можем говорить, что из (45.6) следует оценка для длины когерентности ξ_0 при $T = 0$:

$$\xi_0 \sim \hbar v_F / 4\Delta_0 \quad (45.7)$$

Скоро будет показано, что $\Delta_0 \sim k_B T_c$, где k_B - постоянная Больцмана, T_c -критическая температура. Точный расчет дает

$$\xi_0 = 0.18 \hbar v_F / k_B T_c \quad (45.8)$$

Эту величину ξ_0 можно также рассматривать как размер электронной пары, для оценки которого можно принять, что $v_F \sim \sim 10^8$ см/с, $T_c \sim 1$ К, тогда

$$\xi_0 \simeq 0.18 \frac{10^{-27} \cdot 10^8}{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 1} \sim 10^{-4} \text{ см}$$

Это очень большое, вполне макроскопическое расстояние.

III-з.

45.1. Во сколько раз плотность состояний в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника больше плотности состояний электронов в вormalьом металле около уровня Ферми для энергии возбуждений E , равных соответственно $1.01\Delta_0; 1.5\Delta_0; 2.0\Delta_0$?

Ответ. $\rho/N(0) = 7.12; 1.34; 1.15$.

45.3. Зависимость величины энергетической щели от температуры. Энергетическая щель Δ уменьшается с повышением температуры (обозначение Δ_0 мы сохраним только для случая $T = 0$). Это можно легко понять. Как мы уже знаем, для разрыва пары и

создания двух элементарных возбуждений требуется затратить энергию 2Δ . Если температура сверхпроводника T такова, что $k_B T \sim 2\Delta$, то ясно, что много электронных пар будет разорвано под влиянием теплового воздействия и, соответственно, в \mathbf{k} -пространстве будет уже много ячеек заполнено элементарными возбуждениями (одиночными электронами).

Но это значит, что эти состояния в \mathbf{k} -пространстве уже не будут участвовать во взаимных переходах пар и, соответственно, не будут участвовать в общем понижении энергии сверхпроводника, т.е. энергия сверхпроводника повысится. Эти же состояния, очевидно, не будут теперь участвовать и в формировании щели (см. (44.8)). Отсюда следует, что чем больше будет разорванных пар, тем больше элементарных возбуждений и тем меньше щель.

Теперь проведем количественный анализ.

Поскольку элементарные возбуждения подчиняются статистике Ферми - Дирака, вероятность заполнения состояния \mathbf{k} одиночным электроном равна

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1} \quad (45.9)$$

где $E_{\mathbf{k}}$ - энергия элементарного возбуждения. Легко видеть, что $f_{\mathbf{k}} \ll 1$ при $k_B T \ll E_{\mathbf{k}}$, $f_{\mathbf{k}} \simeq 1/2$ при $k_B T \gg E_{\mathbf{k}}$. Если хотя бы одно из состояний (\mathbf{k}) или $(-\mathbf{k})$ заполнено, то пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ не может участвовать в создании сверхпроводящего состояния. Вероятность этого равна $2f_{\mathbf{k}}$. Отсюда следует, что вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ может участвовать в рассеяниях, т. е. годится для участия в создании сверхпроводящего состояния, равна $1 - 2f_{\mathbf{k}}$.

Тогда выражение для полной энергии сверхпроводника при $T \neq 0$ может быть записано в виде (см. 44)

$$W = \sum_{\mathbf{k}} 2 |\varepsilon_{\mathbf{k}}| f_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum'_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v'_{\mathbf{k}'} u'_{\mathbf{k}'} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) (1 - 2f_{\mathbf{k}'}) \quad (45.10)$$

Здесь первое слагаемое - кинетическая энергия элементарных возбуждений, второе слагаемое - кинетическая энергия сверхпроводящих электронов, последний член - энергия взаимодействия сверхпроводящих электронов через фононы, которая и приводит к созданию сверхпроводящего состояния. Последние

два сомножителя учитывают вероятность такого взаимодействия.

Плотность свободной энергии сверхпроводника равна

$$F = W - TS \quad (45.11)$$

где S -энтропия материала. Функции $v_{\mathbf{k}}^2$, характеризующие распределение сверхпроводящих электронов по импульсам и соответствующие термодинамическому равновесию, определим из условия минимальности плотности свободной энергии F :

$$\partial F / \partial (v_{\mathbf{q}}^2) = 0 \quad (45.12)$$

Подставляя в (45.12) формулы (45.11) и (45.10), получим

$$\frac{v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}}{1 - 2v_{\mathbf{q}}^2} = \frac{\Delta}{2\varepsilon_{\mathbf{q}}} \quad (45.13)$$

где

$$\Delta = V \sum'_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \quad (45.14)$$

Формула (45.14) дает выражение для зависимости щели от температуры. При $T \rightarrow 0$ щель $\Delta \rightarrow \Delta(0)$, где $\Delta(0) = \Delta_0$ - щель при $T = 0$, полученная ранее (44.8).

Из (45.14) находим уравнение для щели. Для этого, как и в (44.10), запишем $v_{\mathbf{q}}^2$ в виде

$$v_{\mathbf{q}}^2 = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\mathbf{q}}/E_{\mathbf{q}}),$$

где

$$E_{\mathbf{q}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{q}}^2 + \Delta^2(T)}$$

Тогда уравнение (45.14) примет вид

$$\Delta = V \sum'_{\mathbf{k}} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \left(1 - \frac{2}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1} \right)$$

Переходя от суммирования к интегрированию, после несложных преобразований получим

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T} \quad (45.15)$$

Эта формула дает в неявной форме зависимость щели от температуры. Эта зависимость изображена на рис. 45.3. Вблизи T_c зависимость щели от температуры определяется формулой $\Delta \propto \propto (T_c - T)^{1/2}$. Из (45.15) можно теперь найти явное выражение для критической температуры T_c . Действительно, при $T = T_c$ щель $\Delta = 0$, поэтому, если написать в (45.15) T_c вместо T и положить $\Delta = 0$, мы получим уравнение относительно T_c :

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{th} \frac{\varepsilon}{2k_B T_c} \quad (45.16)$$

Проведя интегрирование, получим

$$k_B T_c = 1.14 \hbar \omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (45.17)$$

С другой стороны, нам уже известно (44.14), что

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}.$$

Отсюда сразу находим

$$2\Delta_0 = 3.52 k_B T_c \quad (45.18)$$

Эти соотношения находятся в хорошем количественном согласии с многочисленными экспериментами. Обсудим еще раз физический смысл полученных результатов.

Под влиянием тепла некоторые пары разрушаются и возникают неспаренные электроны, или нормальные электроны, или элементарные возбуждения. Это просто разные названия одного и того же физического объекта. Заполняя какие-то ячейки \mathbf{k} -пространства, эти одиночные электроны исключают соответствующие ячейки (и парные им) из суммы (44.8), которая определяет

$$\Delta(T)/\Delta(0)$$

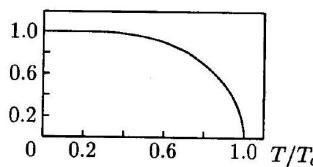


Рис. 45.3. Зависимость энергетической щели от температуры согласно теории БКИ. щель Δ . В результате щель сужается. Нормальное состояние достигается тогда, когда Δ становится равной нулю. Это позволяет определить критическую температуру согласно (45.17).

Замечательно, что формула (45.17) дает объяснение изотопического эффекта. Напомним, что изотоп-эффект заключается в том, что критическая температура разных изотопов одного и того же сверхпроводящего элемента определяется эмпирической формулой

$$T_c M^{1/2} = \text{const}$$

где M -масса атома изотопа. Поскольку дебаевская частота

$$\omega_D \propto M^{-1/2}$$

то из (45.17) сразу следует изотоп-эффект.

Остановимся теперь кратко на вопросе о влиянии примесей на спаривание электронов.

- 1) В присутствии примесей направление импульса электрона не сохраняется, поэтому строить пары из электронов с противоположными импульсами $\hbar\mathbf{k}$ и $-\hbar\mathbf{k}$, как мы это делали выше, затруднительно. Однако ничто не мешает использовать вместо электронных плоских волн $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ точные волновые функции $\chi_n(\mathbf{r})$ электронов с учетом потенциала примесей $U(\mathbf{r})$, описывающие диффузионное распространение электронных волн. Точный вид этих функций нам неизвестен, но он и не войдет в окончательные уравнения типа (44.11) и (45.15) на величину щели Δ . Единственное, но важное условие состоит в том, чтобы для всякого электронного состояния n с волновой функцией $\chi_n(\mathbf{r})$ имелось «парное» состояние \bar{n} с волновой функцией $\chi_{\bar{n}}(\mathbf{r}) = \chi_n^*(\mathbf{r})$, отвечающее движению электрона «вспять» по диффузионной траектории, соответствующей состоянию n . Комплексное сопряжение волновых функций в квантовой механике эквивалентно операции обращения времени, поэтому в одном и том же случайном потенциале $U(\mathbf{r})$ существуют одновременно точные состояния $\chi_n(\mathbf{r})$ и $\chi_{\bar{n}}^*(\mathbf{r})$, если $U(\mathbf{r})$ не меняется при замене $t \rightarrow -t$. Это условие выполнено для обычных примесей, которые поэтому очень слабо влияют на Δ_0 и другие термодинамические свойства сверхпроводника даже в «грязном» пределе, когда длина свободного пробега $l \ll \xi_0$ (т. наз. «теорема Андерсона», подробнее см. [7]). Совсем иначе обстоит дело, если в сверхпроводнике имеются магнитные примеси, непосредственно взаимодействующие со спинами электронов (или если к грязному сверхпроводнику приложено магнитное поле). В этом случае симметрия электронных состояний по отношению к обращению времени нарушается, и температура сверхпроводящего перехода резко падает с концентрацией таких примесей.

III-з.

45.2. Определить константу связи $g = N(0)V$ для олова, если $t'_c = 3.74$ К, а дебаевская температура равна $\Theta_D = 195$ К.

Решение Используя формулу (45.17), получим $g = 0.245$.

¹⁾ Материал, добавленный для 2-го издания.

III-з.

45.3. Критическая температура смеси изотопов ртути со средним атомным весом 199.7 г равна 4.161 К. На сколько и в какую сторону изменится критическая температура для смеси со средним атомным весом 200.7 г?

Ответ. Понизится на 0.01 К.

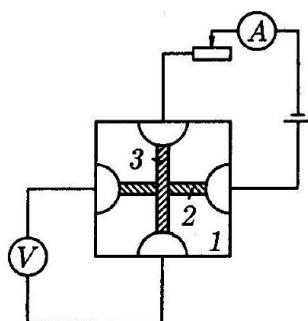
III-з.**45.4.**

Туннельный эксперимент (см. 46) дал для индия значение энергетической щели $\Delta_0 = 5.3 \cdot 10^{-4}$ эВ. Какой должна быть согласно теории БКШ критическая температура индия? Сравнить с T_c индия 3.37 К.

Ответ. $T_c = 2\Delta_0 / (3.52k_B) = 3.49$ К.

5.5.4 46. Туннельные эффекты в сверхпроводниках

Наиболее прямое измерение энергетической щели в сверхпроводниках может быть проведено с помощью туннельных экспериментов. Эту методику разработал Гевер в 1960 г. [133]. В принципе она очень проста (рис. 46.1). На стеклянную пластинку с заранее подготовленными контактами наносится узкая полоска пленки первого металла. Затем эта полоска окисляется так, чтобы пленка оказалась покрытой слоем изолирующего окисла толщиной в несколько десятков ангстрем (барьерный слой). После этого в поперечном направлении наносится узкая полоска пленки второго металла. Место пересечения этих двух полосок (площадью порядка $1m^2$) и представляет собой туннельный переход. Исследование заключается в изучении вольт-амперной характеристики такого перехода. Физика дела заключается в том, что здесь используется специфическое квантовомеханическое свойство электрона проходить тонкие потенциальные барьеры (в данном случае - слой окисла) посредством так называемого туннельного перехода.



46.1. Туннельные характеристики.

Обсудим теперь, какой вид будут иметь вольт-амперные характеристики для разных случаев туннельных переходов.

Простейший случай - когда и первый, и второй металлы нормальные металлы. При установлении контакта между металлами их уровни Ферми уравниваются за счет возникновения контактной разности потенциалов. Энергетическая диаграмма изображена на рис. 46.2, а. Если теперь на туннельный переход подать разность потенциалов V (рис. 46.2, б), то уровни Ферми металлов разойдутся на величину eV , и возникнет туннельный ток. Если предположить, что плотность состояний в интересующей нас области энергий остается постоянной ($N(0)$), то из рис. 46.2, б ясно, что сила тока будет пропорциональна eV , т. е. будет выполняться закон Ома.

Рассмотрим теперь случай, когда первый металл - нормальный, а второй - сверхпроводник. Мы уже знаем, какой вид имеет спектр элементарных возбуждений сверхпроводника (рис. 45.1 и 45.2). Энергия элементарных возбуждений отсчитывается от уровня основного состояния сверхпроводника. В нормальном металле энергия элементарного возбуждения отсчитывается от уровня Ферми. Поэтому при создании туннельного контакта между нормальным металлом и сверхпроводником за счет контактной разности потенциалов должны уравняться уровни Ферми нормального металла и уровень основного состояния сверхпроводника. Именно это состояние изображено на рис. 46.3, а.

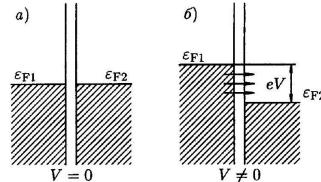
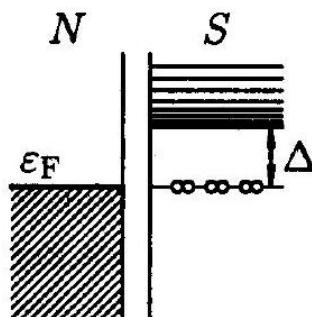


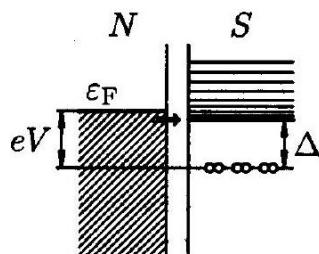
Рис. 46.2. Энергетическая диаграмма для случая контакта двух нормальных металлов:
а) $V = 0$; б) $V \neq 0$, идет туннельный ток, пропорциональный eV .

Рассмотрим сперва случай, когда $T = 0$.

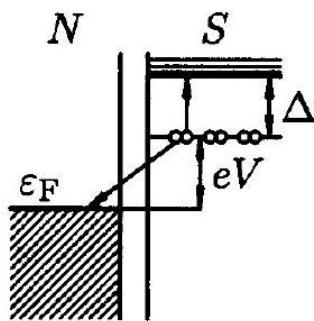
Приложим к туннельному переходу некоторую разность потенциалов V . Пусть в результате этого уровень Ферми нормального металла поднялся над уровнем основного состояния сверхпроводника на величину eV . Из рис. 46.3, б ясно, что туннельный ток электронов из N в S может начаться только тогда, когда величина eV станет равной энергетической щели Δ в S или «ревзойдет» ее. Тот же результат получится, если поменять полярность приложенного к переходу напряжения. Теперь туннелирование электрона из S в N будет происходить тогда, когда окажется энергетически допустимым разрыв электронной пары в S , т. е. когда энергия, выделившаяся при туннелировании одного электрона пары, окажется достаточной, чтобы закинуть второй электрон этой пары в область разрешенных энергий для одиночных электронов, т.е. выше щели (см. рис. 46.3, в).



а)



б)



в)

Рис. 46.3. Энергетическая диаграмма для туннельного NS -перехода: а) $V = 0$, уровень ε_F противостоит уровню основного состояния сверхпроводника; б) $V \neq 0, |eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из N в S ; в) $|eV| > \Delta$, идет туннельный ток электронов из S в N .

Таким образом, вольт-амперная характеристика такого туннельного перехода будет нечетной функцией V . Она изображена на рис. 46.4.

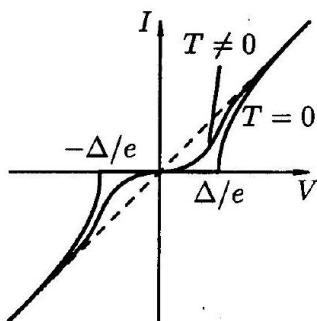


Рис. 46.4. Вольт-амперная характеристика туннельного NIS -перехода.

В случае, если $T \neq 0$, как нетрудно сообразить, вольт-амперная характеристика будет несколько размазанной.

Переходим к рассмотрению туннельных эффектов в S_1IS_2 переходах, когда оба металла (S_1 и S_2), разделенные туннельным слоем изолятора (I), являются сверхпроводниками.

Сперва рассмотрим случай $T = 0$. Согласно рис. 46.5, туннельный ток может возникнуть только тогда, когда к туннельному переходу будет приложено напряжение $V > (\Delta_1 + \Delta_2)/e$. Действительно, только в этом случае возможен процесс, изображенный на этом рисунке: электронная пара в S_1 разрывается, один из электронов этой пары туннелирует в S_2 с выделением энергии, равной или большей, чем Δ_1 . При этом второй электрон разорванной пары, поглощая эту энергию, возбуждается в состояния квазичастиц S_1 .

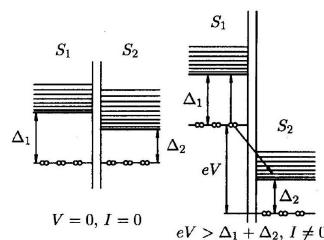
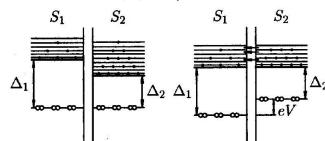


Рис. 46.5. Энергетические диаграммы для туннельного перехода S_1IS_2 , $T = 0$.

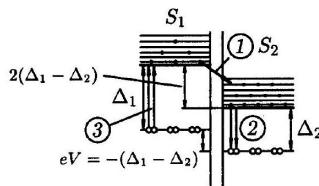
Для реального случая, когда $T \neq 0$, картина будет несколько более сложной. Теперь в каждом из сверхпроводников имеется какое-то количество возбужденных одиночных электронов, равновесное количество которых определяется температурой.

Энергетические диаграммы туннельного перехода в этом случае изображены на рис. 46.6. Количество возбуждений в данной области спектра схематично изображается количеством лек на данном энергетическом уровне. Видно, что если $V = 0$



а)

б)



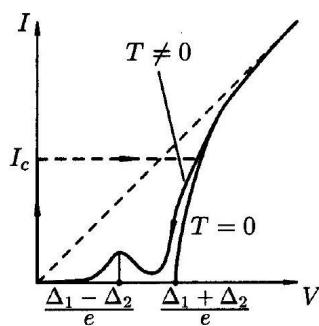
в)

Рис. 46.6. Туннелирование между двумя сверхпроводниками при $T \neq 0$: а) $V = 0$, концентрация возбуждений с одинаковой энергией в S_1 и S_2 одинакова, поэтому ток равен нулю; б) $eV = \Delta_1 - \Delta_2$, ток обусловлен переходом возбужденных частиц из S_2 в S_1 ; в) $eV = -(\Delta_1 - \Delta_2)$, возбужденная частица переходит из S_1 в S_2 , (процесс 1), объединившись с электронами в S_2 , она образует пару и попадает на основной уровень (процесс 2), выделившаяся энергии $2\Delta_1$ достаточно для разрыва пары в S_1 (процесс 3).

(рис. 46.6, а), то несмотря на то, что щели в S_1 и S_2 разные, количество возбуждений на противостоящих друг другу уровнях в S_1 и S_2 будет одинаково. Поэтому количество частиц, туннелирующих из S_1 в S_2 , будет равно тому же числу частиц, туннелирующих из S_2 в S_1 , т.е. как это и должно быть, в равновесных условиях полный туннельный ток $I = 0$.

Если теперь приложить даже небольшое напряжение V , то равновесие нарушится и возникнет ток квазичастиц из одного сверхпроводника в другой. Не будем, однако, забывать, что плотность состояний квазичастиц в сверхпроводнике имеет особен-

Рис. 46.7. Сверхпроводящие и квазичастичные ветви вольтамперных характеристик туннельного S_1IS_2 -перехода для $T = 0$ и $T \neq 0$.



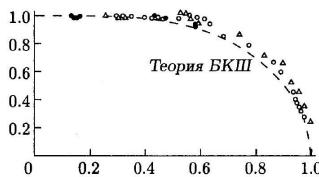
ность при $E = \Delta$ (см. (45.5) и рис. 45.2). Поэтому если приложить к переходу разность потенциалов V такую, что $eV = \Delta_1 - \Delta_2$ (рис. 46.6,), то друг против друга окажутся области с. плотностью состояний $\rho = \infty$ и в S_1 , и в S_2 . Естественно, это вызовет большой всплеск туннельного тока. Дальнейшее увеличение V приведет к тому, что уровни с $\rho = \infty$ разойдутся и полный туннельный ток уменьшится. Отсюда можно сделать вывод, что при $V = (\Delta_1 - \Delta_2)/e$ на вольт-амперной характеристике должен наблюдаться максимум тока (рис. 46.7). При изменении знака V возникнет диаграмма, изложенная на рис.

46.6, в. Здесь тоже возникнет всплеск тока при $|V| = (\Delta_1 - \Delta_2) /$. Таким образом, и в случае контакта двух сверхпроводников вольт-амперная характеристика будет нечетной функцией напряжения V .

В заключение приведем результат туннельного эксперимента Гевера и Мегерле [134] по изучению величины энергетической щели в различных сверхпроводниках и ее зависимости от температуры (рис. 46.8). Штриховой линией показана зависимость, следующая из теории Бардина-Купера-Шриффера.

46.2*. Энергия связи SIS -перехода и температурная

зависимость критического тока. Прежде чем приступить к исследованию SIS -перехода мы приведем вычисление проводимости туннельного перехода в нормальном состоянии. Это окажется полезно для дальнейшего, т.к. мы будем сейчас использовать в более простой ситуации тот же самый метод "туннельного $\Delta(T)/\Delta(0)$ "



$$T/T_c$$

Рис. 46.8. Экспериментальные результаты изучения температурной зависимости энергетической щели в индии (светлые кружки), олове (треугольники) и свинце (черные кружки). Штриховая линия - зависимость $\Delta(T)$ согласно теории БКШ.

гамильтониана", который нам понадобится для решения основной задачи. Рассмотрим два куска нормального металла, разделенных потенциальным барьером из изолятора. Электрон с импульсом $\hbar k$ в 1-м куске металла, подлетающий к барьеру, может протуннелировать под барьером и оказаться во 2-м куске уже с импульсом $\hbar q$. Заметим, что как правило $\mathbf{q} \neq \mathbf{k}$, поскольку туннельный барьер вовсе не обязан быть однородным. Квантовомеханическую амплитуду этого процесса мы обозначим через $t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$. Будем теперь считать, что к 1-му куску металла приложено напряжение V относительно 2-го, и вычислим вероятность перехода электрона в единицу времени из любого занятого состояния 1-го металла в любое свободное состояние 2-го. Для этого мы используем "золотое правило Ферми" для вероятности переходов (в единицу времени) в непрерывном спектре [49]:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rightarrow}(V) &= \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \sigma} |t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_q - eV) f(\varepsilon_k) (1 - f(\varepsilon_q)) \end{aligned} \quad (46.1)$$

где $\mathcal{V}_{1,2}$ -объемы двух металлов, $f(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/k_B T} + 1)^{-1}$ – фермиевская функция заполнения для электрона с энергией ε , а σ проекция электронного спина (подразумевается, что переворота спина при туннелировании не происходит). Переходя от суммирования по импульсам к интегрированию по энергиям электрона в начальном и конечном состояниях и считая туннельные матричные элементы и плотности состояний $N_{1,2}(\varepsilon)$ металлов не зависящими от энергии вблизи ферми-поверхности, получим (суммирование по спину дает лишнюю двойку):

$$\Gamma^{\rightarrow}(V) = \frac{4\pi}{\hbar} N_1(0) N_2(0) \langle |t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}|^2 \rangle \int d\varepsilon f(\varepsilon) (1 - f(\varepsilon + eV)), \quad (46.2)$$

где $\langle |t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}|^2 \rangle$ - усредненные по Ферми-поверхности матричные элементы. Для вычисления среднего тока при $T > 0$ надо также написать аналогичное выражение для вероятности перехода $\Gamma^-(V)$ в обратную сторону, однако в уже сделанном приближении $N(\varepsilon) = N(0)$ результат для туннельной проводимости от температуры не зависит, так что можно ограничиться вычислением интеграла (46.2) при $T = 0$, дающего $I(V) = e\Gamma^+(V)$. В результате

$$\frac{I(V)}{V} = \frac{1}{R_n} = \frac{4\pi e^2}{\hbar} N_1(0) N_2(0) \langle |t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}|^2 \rangle \quad (46.3)$$

Заметим, что мы определили плотности состояний $N(\varepsilon)$ в расчете на одну проекцию спина.

Вернемся к сверхпроводящему туннельному S_1IS_2 -контакту и покажем, что энергетические щели сверхпроводников и значение нормального сопротивления R_n определяют не только поведение квазичастичной (возвратной) ветви вольтамперной характеристики, но и величину ее прямой ветви, т. е. величину критического сверхпроводящего тока I_c (рис. 46.7). Для этого рассмотрим детально процесс парного туннелирования в S_1IS_2 -переходе.

Наличие туннельного взаимодействия между сверхпроводниками S_1 и S_2 приводит к тому, что полная энергия системы оказывается меньше суммы энергий отдельных сверхпроводников на величину энергии связи E_{cb} . Мы подробно обсудим вычисление этой величины при $T = 0$. Как и ранее, туннельный барьер можно рассматривать как источник упругого рассеяния, который переводит электрон из состояния с импульсом \mathbf{k} в сверхпроводнике S_1 в состояние с импульсом \mathbf{q} в сверхпроводнике S_2 . Однако теперь нам удобнее вычислять поправку к энергии системы, связанную с такими переходами, которая может быть определена с помощью второго порядка квантовомеханической теории возмущений [49]:

$$E_{cb} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{|H_t|_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}{E_0 - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} \quad (46.4)$$

Здесь H_t - туннельный гамильтониан, описывающий (точно так же, как и в нормальном состоянии) переход $(1, \mathbf{k}) \rightarrow (2, \mathbf{q})$ электрона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ из сверхпроводника S_1 в состояние с импульсом $\hbar\mathbf{q}$ в сверхпроводнике S_2 , а также обратный процесс $(2, \mathbf{q}) \rightarrow (1, \mathbf{k})$; через E_0 и E_{kq} обозначены соответственно энергии основного и возбужденного состояний системы. Возбужденное состояние возникает в связи с переходом одного электрона из состояния \mathbf{k} (или $-\mathbf{k}$) в S_1 в состояние $\mathbf{q}(-\mathbf{q})$ в S_2 , т. е. с возникновением возбуждений, по одному в каждом сверхпроводнике. Нужно отметить, что процесс парного туннелирования, по существу, не является двухчастичным, поскольку туннелирование электронов из состояний \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ происходит по одному и определяется одночастичными туннельными матричными элементами, а возбуждения в сверхпроводниках S_1 и S_2 являются виртуальными, т.е. существующим в течение короткого периода между туннелированием первого и второго электронов пары. Следуя [64] (см. также [112]), представим энергию связи (46.4) через матричные элементы одночастичного туннелирования $t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$ и факторы когерентности $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{q}}, v_{\mathbf{q}}$, смысл которых был подробно рассмотрен в 44:

$$E_{cb} = -2 \sum_{k,q} |t_{\mathbf{k},\mathbf{q}}|^2 \frac{|v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}}|^2}{E_k + E_q} \quad (46.5)$$

В (46.5) величина $v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}u_{\mathbf{k}}$ - амплитуда вероятности того, что при $T = 0$ состояния $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в S_1 заняты, а состояния $(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ в S_2 - свободны или наоборот, а множитель 2 учитывает вырождение виртуальных состояний по спину; наконец, $E_k + E_q$ - суммарная энергия двух виртуальных возбуждений, возникающих

в процессе парного туннелирования. Используя формулу (45.13) и следующие из нее соотношения

$$\begin{aligned} 2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}^* &= \frac{\tilde{\Delta}_1}{E_k}, & 2u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}}^* &= \frac{\tilde{\Delta}_2}{E_q} \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{\varepsilon_k}{E_k}, & |u_{\mathbf{q}}|^2 - |v_{\mathbf{q}}|^2 &= \frac{\varepsilon_q}{E_q} \end{aligned} \quad (46.7)$$

преобразуем (46.5) к виду

$$E_{CB} = - \sum_{k,q} \frac{|t_{k,q}|^2}{E_k + E_q} \left[1 - \frac{\varepsilon_k \varepsilon_q}{E_k E_q} + \operatorname{Re} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{\Delta}_2^*}{E_k E_q} \right] \quad (46.8)$$

Здесь Re - действительная часть. При записи соотношений (46.6) и (46.8) учитывалось, что $\tilde{\Delta}_{1,2}$ - комплексные функции, которые, по существу, представляют собой комплексные параметры порядка в сверхпроводниках S_1 и S_2 и могут быть выражены (аналогично тому, как это сделано в 21 при выводе джозефсоновского соотношения для мостика Асламазова - Ларкина) через амплитуду и фазу параметра порядка:

$$\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 e^{i\theta_1}, \quad \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 e^{i\theta_2}, \quad \tilde{\Delta}_2^* = \Delta_2 e^{-i\theta_2} \quad (46.9)$$

Здесь $\Delta_{1,2}$ - действительные величины, представляющие собой щели в берегах $S_1 IS_2$ -перехода.

Рассмотрим сначала последний член в квадратных скобках в (46.8) - единственный, который зависит от разности фаз $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ - и обозначим его через $-E_J \cos \varphi$. Переходя от суммирования по k и q к интегрированию по энергиям электронного спектра в S_1 и S_2 , с учетом (46.3) и (46.9) получим для E_J при $T = 0$:

$$E_J(T = 0) = \frac{\hbar}{4\pi e^2 R_n} \Delta_1 \Delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1 d\varepsilon_2}{E_1 E_2 (E_1 + E_2)} \quad (46.10)$$

Расширение пределов интегрирования в (46.10) до $\pm\infty$ допустимо, поскольку интегралы быстро сходятся при $\varepsilon_{1,2} \sim |\Delta|$. Заменой переменных $\varepsilon_{1,2} = \Delta_{1,2} \operatorname{sh} x_{1,2}$ и несложными выкладками интеграл в выражении (46.10) приводится к эллиптическому, и в результате получаем

$$\begin{aligned} E_J(T = 0) &= \frac{\hbar}{e^2 R_n} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} K \left(\frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{\pi \hbar}{2e^2 R_n} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}, \end{aligned} \quad (46.11)$$

где последнее равенство приближенно верно, когда Δ_1 и Δ_2 отличаются не более чем в 2 – 3 раза, и является точным при $\Delta_1 = \Delta_2$.

Второй член в квадратных скобках в уравнении (46.8) обращается в нуль (ввиду нечетности) при интегрировании по $\varepsilon_k, \varepsilon_q$, в то время как первый член формально расходится при $|\varepsilon_{k,q}| \rightarrow \infty$. Однако нас интересует только вклад в энергию, связанный с наличием сверхпроводимости в берегах контакта, поэтому мы вычтем из этого расходящегося интеграла его аналог, вычисленный для нормального состояния берегов. Обозначая полученное выражение через $E_1(T = 0)$, получаем

$$\begin{aligned} E_1(T = 0) &= \\ &= \frac{\hbar}{4\pi e^2 R_n} \Delta_1 \Delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \left(\frac{1}{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|} - \frac{1}{E_1 + E_2} \right) \end{aligned} \quad (46.12)$$

Легко проверить,¹⁾ что значение интеграла (46.12) совпадает со значением $E_J(T = 0)$, определенным в (46.10). Поэтому

1) Рассмотрим для примера случай одинаковых сверхпроводников, $\Delta_1 = \Delta_2$. Разность $E_1 - E_J$ приводится заменой переменных $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = \Delta y$ к выражению, пропорциональному интегралу

$$\int_0^\infty dxdy \left[\frac{1}{x+y} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}} \right],$$

который равен нулю.

полное выражение для энергии SIS -контакта $E_{\text{св}}$ (φ) совпадает с (22.11). Соответственно, величина критического тока туннельного S_1IS_2 -перехода связана со значениями энергетической щели в S_1 и S_2 следующим выражением:

$$I_c(T = 0) \simeq \frac{\pi}{e} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{R_n (\Delta_1 + \Delta_2)} \quad (46.13)$$

При отличных от нуля температурах вычисление $E_J(T)$ изложенным методом весьма усложняется, т.к. приходится учитывать фермиевскую функцию распределения квазичастиц, а также процессы их туннелирования между берегами S_1 и S_2 . Температурная зависимость критического тока SIS -перехода может быть вычислена аналитически для случая одинаковых сверхпроводящих берегов ($\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$). Эта зависимость получена Амбегоакаром и Баратовым [135] (см. [112, 136, 137]):

$$I_c(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right) \quad (46.14)$$

При стремлении T к нулю выражение (46.14) переходит в (46.13) (с $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$).

При $T \rightarrow T_c$ критический ток джозефсоновского перехода пропорционален $\Delta^2(T) \propto (T_c - T)$. Вывод о том, что вблизи точки перехода энергия связи симметричного перехода $E_J(T) \propto (T_c - T)$, можно было сделать и с помощью свободной энергии Гинзбурга-Ландау: вклад в энергию, связанный с наличием туннелирования между двумя сверхпроводниками, должен быть пропорционален произведению обоих параметров порядка, $E_J(T) \propto \psi_1(T)\psi_2(T)$. В случае одинаковых сверхпроводников получаем, как и выше, $E_J(T) \propto \psi^2(T) \propto (T_c - T)$. В то же время, если берега контакта имеют различные температуры сверхпроводящего перехода T_c , джозефсонская энергия и критический ток стремятся к нулю пропорционально $(T_c^{\min} - T)^{1/2}$. Все эти выводы о поведении вблизи T_c сделаны для случая SIS -перехода, когда туннелирование слабое, и потому мало влияет на параметры порядка обоих сверхпроводников. Иначе дело обстоит с SNS -переходами, когда параметр порядка вблизи NS -границы может быть сильно подавлен из-за эффекта близости (подробнее см. [136]).

Формулу (23.8) для случая SIS -перехода с одинаковыми сверхпроводящими берегами удобно также записать, используя определение квантового сопротивления, введенное в (23.8),

$$\frac{E_J}{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{R_Q}{R_n} \quad (46.15)$$

5.5.5 47*. Связь сверхпроводников через ферромагнетик

В разд. 15.2 было показано, что сверхпроводящие пары могут проникать через SN -границу в нормальный металл на глубину ξ_N . Более подробно процесс электропереноса в SNS -переходах будет рассмотрен в 55. Сейчас мы рассмотрим эффект близости в системе

сверхпроводник - ферромагнетик (*SF*) и необычные свойства джозефсоновских *SFS*-переходов. Но сначала вернемся к эффекту близости в *SN*-системе и покажем, как оценка длины когерентности ξ_N может быть получена из простых физических соображений. Очевидно, что время жизни τ_p сверхпроводящей пары в несверхпроводящем металле тем меньше, чем больше характерная энергия ΔE процессов, разрушающих пары. Величина τ_p может быть оценена с помощью соотношения неопределенностей:

$$\tau_p \Delta E \sim \hbar \quad (47.1)$$

В нормальном немагнитном металле распаривание происходит за счет тепловых флуктуаций (характерная энергия $\Delta E = k_B T$), т.е. $\tau_p \sim \hbar/k_B T$. В чистый металл пары могут распространяться на глубину порядка $v_F \tau_p \sim \hbar v_F/k_B T$ (ср. с формулой (15.13) для длины затухания параметра порядка в чистом металле). В "грязный" металл пары проникают на длину диффузии за время τ_p , т.е. длина затухания равна $\xi_N \sim \sqrt{D \tau_p} \sim (\hbar D/k_B T)^{1/2}$ (где $D = l_n v_F/3$), что с точностью до $\sqrt{2\pi}$ совпадает с (15.14). В случае *SF*-контакта в ферромагнетике появляется еще один распаривающий фактор - обменное взаимодействие, которое

пытается выстроить спины электроны в одном направлении, т.е. разрушить пару, которая образована из электронов с противоположно направленными спинами. Если температура Кюри ферромагнетика T_C много больше критической температуры T_c сверхпроводника, то средняя обменная энергия в ферромагнетике $E_{ex} \gg k_B T$, и обменное взаимодействие можно считать единственным распаривающим фактором, т.е. $\Delta E \sim E_{ex}$ в (47.1). В этом случае длина затухания параметра порядка в "грязном" ферромагнетике $\sqrt{D \tau_p}$ равна

$$\xi_{F1} = \left(\frac{\hbar D}{E_{ex}} \right)^{1/2}, \quad E_{ex} \gg k_B T \quad (47.2)$$

Мы присвоили величине ξ_{F1} дополнительный индекс «1», поскольку длина затухания, как будет показано ниже, - только реальная часть комплексной длины когерентности ξ_F куперовских пар в ферромагнетике. Если наведенный в нормальном металле вблизи *SN*-границы параметр порядка описывается затухающей экспонентой $\Psi_N(x) = \Psi_{N0} e^{-k_N x}$, где $k_N = 1/\xi_N$, то в *SF*-случае наведенный параметр порядка не только затухает, но и осциллирует:

$$\Psi_F(x) = \Psi_{F0} e^{-k_F x} = \Psi_{F0} e^{-k_{F1} x} e^{-i k_{F2} x} \quad (47.3)$$

Здесь Ψ_{F0} - параметр порядка в ферромагнетике на *SF*-границе, а комплексная величина $k_F = 1/\xi_F = k_{F1} + i k_{F2}$. Ее вещественная часть $k_{F1} = 1/\xi_{F1}$, где ξ_{F1} - введенная ранее длина затухания. Мнимая же часть $k_{F2} = 1/\xi_{F2}$ определяет собой длину волны $2\pi\xi_{F2}$ осцилляций параметра порядка в ферромагнетике, см. рис. 47.1. Можно показать, что в случае "грязного" ферромагнетика без спин-орбитального рассеяния и с $E_{ex} \gg k_B T$ величины ξ_{F1} и ξ_{F2} равны и описываются формулой (47.2). Комплексную длину когерентности можно тогда записать в виде

$$\xi_F = \left(\frac{\hbar D}{2i E_{ex}} \right)^{1/2} \quad (47.4)$$

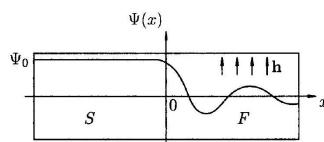
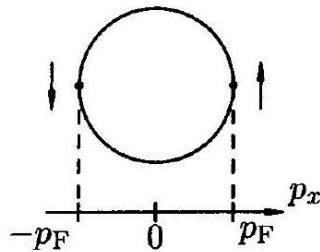


Рис. 47.1. Схематическое изображение поведения параметра порядка вблизи SF -границы; h - обменное поле в ферромагнетике.

S

a)



б)

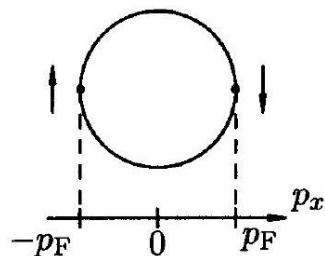
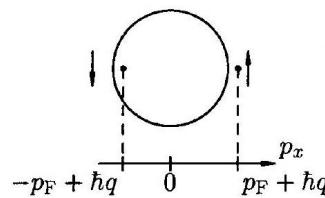
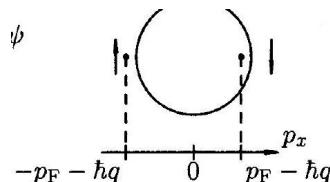
 ψ  ψ 

Рис. 47.2. Возникновение ненулевого суммарного импульса пары в ферромагнетике вблизи SF -границы в присутствии обменного поля h . Части а) и б) рисунка соответствуют различным направлениям спинов электронов с положительным и отрицательным импульсами относительно направления обменного поля.

Прежде чем перейти к случаю относительно малых обменных энергий $E_{ex} \geq k_B T$, попробуем понять физические причины возникновения в ферромагнетике знакопеременного параметра порядка $\Psi_F(x)$. В основе этого явления лежит возможность появления пар с ненулевым суммарным импульсом в присутствии обменного поля, предсказанная для магнитных сверхпроводников в 1964 г. в работах Ларкина и Овчинникова [138], а также Фульде и Феррела [139]. Объемные сверхпроводники с таким состоянием параметра порядка (обозначаемым обычно как LOFF-состояние) пока не обнаружены. Однако вполне реализуемой модификацией LOFF-состояния является осциллирующий параметр порядка вблизи SF -границы, предсказанный позднее в работах [140, 141]. Простая физическая

картина появления ненулевого суммарного импульса пары в ферромагнетике, предложенная в работе [142], показана на рис. 47.2. Обсудим здесь слу'ай чистых металлов - сверхпроводника и ферромагнетика. Тог'да пара образована электронами с противоположными (лежащими на ферми-поверхности) импульсами $\hbar\mathbf{k}$ и $-\hbar\mathbf{k}$, так что суммарный импульс пары $\hbar\mathbf{q} = 0$. В ферромагнитной области произойдет изменение энергий электронов пары за счет обменного взаимодействия: тот электрон (назовем его 1 -м), спин которого направлен параллельно обменному полю ферромагнетика, уменьшит свою энергию на E_{ex} , а второй электрон той же пары увеличит свою энергию на E_{ex} . Но энергии электронов, образующих куперовскую пару должны быть равны - казалось бы, это означает немедленное разрушение пары обменным полем! Однако эту проблему можно обойти: увеличим импульс 1 -го электрона до величины $\hbar k_1$ такой, что $\hbar^2 k_1^2 / 2m - \hbar^2 k^2 / 2m = E_{ex}$, т.е. $k_1 - k = q_1 \sim E_{ex}/\hbar v_F$, а импульс 2-го электрона уменьшим (по абсолютной величине) на такую же величину, - до $\hbar k_2 = \hbar k - \hbar q_1$. Тогда противоположные по знаку изменения обменной энергии двух электронов будут скомпенсированы изменениями их кинетических энергий, а полные энергии останутся одинаковыми, и пара не будет разрушаться. Но такая пара будет теперь иметь членулемой полный импульс $\hbar q = 2\hbar q_1$, так что ее вклад в параметр порядка будет пропорционален e^{iqx} . Кроме рассмотренной конфигурации спинов в паре возможна и такая, где 1-й электрон (со спином вдоль обменного поля) имеет импульс $-\hbar k$, а 2-й импульс $\hbar k$. Такая пара приобретет полный импульс $-\hbar q$, и полный параметр порядка будет вести себя как

$$\Psi_F(x) = \Psi_{F0} (e^{iqx} + e^{-iqx}) / 2 = \Psi_{F0} \cos(qx), \quad (47.5)$$

так что длина волны $2\pi\xi_{F2}$ осцилляций параметра порядка равна $2\pi/q \sim \hbar v_F/E_{ex}$. В грязном металле направление импульсов электронов быстро меняется из-за рассеяния на примесях, поэтому зависимость типа (47.5) должна быть усреднена по направлениям вектора \mathbf{q} . Аккуратное вычисление [142] показывает, как упоминалось выше, что наряду с осцилляциями параметра порядка появляется и их затухание, причем в грязном пределе $\xi_{F1} = \xi_{F2} = \sqrt{\hbar D/E_{ex}}$.

В связи со знакопеременностью параметра порядка (47.5) естественно ожидать, что в *SFS*-переходе с толщиной ферромагнетика $d_F \simeq \pi\xi_{F2}$ знаки параметра порядка на сверхпроводящих берегах будут разными, т. е. разность фаз на переходе будет равна π в отсутствие внешнего поля и тока (что не противоречит стационарному уравнению Джозефсона (21.1)). Такой джозефсоновский «л-контакт» был впервые предложен в работе [143] и подробно рассмотрен для *SFS*-случая в работе [144]. Другой тип π -контакта, возникающего из-за нетривиальной d -волновой симметрии параметра порядка в ВТСП, будет обсуждаться в 49.

На рис. 47.3 представлен результат расчета [145] распределения параметра порядка в грязной ферромагнитной прослойке для различных соотношений толщины слоя d_F и периода осцилляций параметра порядка $2\pi\xi_{F2}$. На следующем рисунке 47.4 изображены зависимости свободных энергий Гинзбурга-Ландау для состояний *SFS*-перехода с разностями фаз на берегах, равными 0 и π (будем их для краткости называть 0 -состояние и π -состояние). Видно, что π -состояние действительно становится более устойчивым при $d_F \simeq \pi\xi_{F2}$, а затем вновь сменяется обычным 0 -состоянием при дальнейшем увеличении d_F . На рис. 47.3 показано также (штриховой линией) распределение параметра порядка

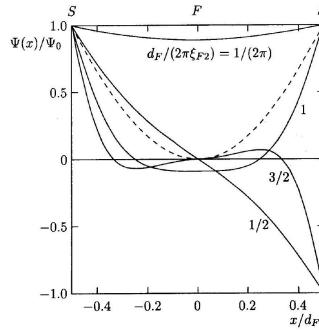


Рис. 47.3. Пространственное распределение параметра порядка в F слое SFS -перехода, вычисленное [145] для различных значений отношения $d_F/(2\pi\xi_{F2})$; для отношений, равных $1/2\pi$ и 1 , наимизшая энергия достигается в 0 -состоянии, а для отношений $1/2$ и $3/2$ более выгодным оказывается π -состояние.

для 0 -состояния при $d_F = \pi\xi_{F2}$, когда оно имеет более высокую энергию, чем π -состояние (как видно из рисунка, средний квадрат градиента параметра порядка в 0 -состоянии выше, чем в π состоянии, что и повышает энергию первого).

Рассмотрим теперь случай относительно малых обменных энергий $E_{ex} \geq k_B T$, когда в распаривание дают сравнимый вклад как тепловая энергия, так и обменное поле. Из сравнения выражений (15.14) и (47.4) довольно очевидно (и это можно строго показать), что общее выражение для комплексной длины F_Γ , отн. ед.

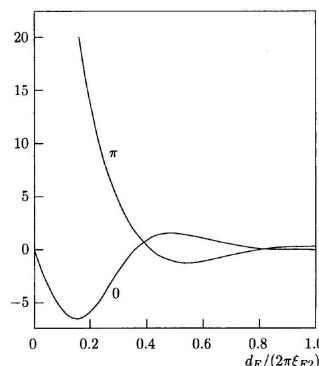


Рис. 47.4. Результат вычислений [145] свободной энергии Гинзбурга Ландау в F -слое для 0 - и π -состояний.

коherenceности будет теперь иметь вид

$$\xi_F = \left(\frac{\hbar D}{2(\pi k_B T + iE_{ex})} \right)^{1/2} \quad (47.6)$$

Выделяя из этого выражения вещественную и мнимую части для чего удобно записать

$$\pi k_B T + iE_{ex} = \sqrt{(\pi k_B T)^2 + E_{ex}^2} \exp(i \operatorname{arctg}(E_{ex}/\pi k_B T))$$

— получим окончательно

$$\xi_{F1,2} = \sqrt{\frac{\hbar D}{((\pi k_B T)^2 + E_{ex}^2)^{1/2} \pm \pi k_B T}}. \quad (47.7)$$

Это выражение переходит в (47.2) при $E_{ex} \gg k_B T$ и в (15.14) при $E_{ex} = 0$. Важно заметить, что в то время как длина затухания ξ_F растет с понижением температуры (как и для SN контакта), длина волны осцилляций $2\pi\xi_{F2}$ уменьшается. Это дает возможность

наблюдать переход *SFS*-контакта в π -состояние при понижении температуры. Такой эксперимент представлен в работе [145], где в качестве ферромагнитной прослойки был использован сплав CuNi с температурой Кюри около 20 К. На рис. 47.5 представлено семейство измеренных температурных зависимостей критического тока *SFS*-переходов Nb – CuNi – Nb с толщиной *F*-слоя d_F , близкой к $\pi\xi_{F2}$. При наименьшей толщине в 23 нм зависимость $I_c(T)$ не отличается качественно от обычной для *SNS*-переходов, $I_c \propto e^{-\alpha\sqrt{T}}$. При небольшом увеличении d_F наблюдается насыщение при низких температурах, а потом и немонотонная зависимость $I_c(T)$. Наконец, при толщине $d_F = 27$ нм наблюдается возвратное осциллирующее поведение $I_c(T)$ с обращением в нуль при $T = T_{\text{пер}} \simeq 2$ К. Такое поведение может являться только следствием перехода в π -состояние при $T < T_{\text{пер}}$. В точке этого перехода формальное выражение для $I_c(T)$ проходит через нуль и уходит в отрицательную область. Поскольку в эксперименте измеряется положительно определенная величина критического тока, на зависимости $I_c(T)$ возникает излом в точке $T = T_{\text{пер}}$.

Прямыми доказательством перехода *SFS*-контактов в π -состояние явилось измерение [146] критического тока интерферометра из пяти *SFS*-контактов, изображенного на рис. 47.6, в зависимости от приложенного магнитного поля. При переходе контактов в π -состояние в каждой ячейке сетки должен возникнуть набег фазы 3π , что в соответствии с (25.2) эквивалентно приложению к сетке магнитного поля с полуцелым потоком на ячейку. Как и в случае двухконтактного интерферометра, описанного

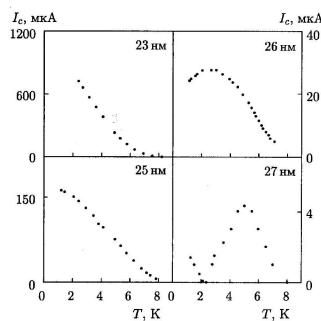


Рис. 47.5. Температурные зависимости критического тока *SFS*-переходов Nb – Cu_{0.48}Ni_{0.52} – Nb с толщинами ферромагнитного слоя Cu/Ni от 23 до 27 нм [145].

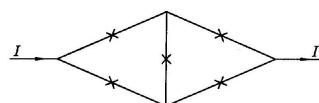


Рис. 47.6. Схематическое изображение треугольной сетки *SFS*-контактов, состоящей из двух ячеек.

в разд. 25.1, это приведет к смещению зависимости $I_c(H)$ на полпериода. Такой сдвиг, экспериментально обнаруженный при понижении температуры в работе [146], представлен на рис. 47.7.

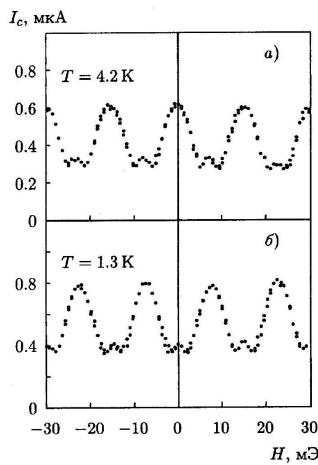


Рис. 47.7. Зависимости $I_c(H)$ двухячеистой сетки SFS -контактов до перехода контактов в π -состояние и после такого перехода ($T_{\text{пер}} = 2.2$ К). Ниже температуры перехода зависимости сдвигаются на полпериода.

5.5.6 48*. Эффект четности в сверхпроводниках

При температурах $T \ll T_c$ большая часть электронов в сверхпроводнике образует куперовские пары и лишь экспоненциально малая их доля (порядка $e^{-\Delta/k_B T}$) находится в возбужденных состояниях с энергией $E > \Delta$ (это следует из выражения (45.9) для функции распределения f_k). Это означает, что для изолированного островка сверхпроводящего металла имеет смысл вопрос о четности полного числа электронов на нем. Действительно, если число электронов четно, то при $T = 0$ все они образуют пары; в противном случае какой-то электрон остается неспаренным, т. е. энергия всего островка будет выше на величину минимальной энергии возбуждения Δ_0 . Напомним (см. (44.17)), что плотность энергии сверхпроводящего спаривания равна $|W_0| = \frac{1}{2}N(0)\Delta_0^2$, т.е. полное изменение энергии островка объема V из-за сверхпроводящего спаривания состояния имеет порядок $\mathcal{N}_{\text{полн}} \Delta_0^2/\varepsilon_F$, где $\mathcal{N}_{\text{полн}} \sim N(0)V\varepsilon_F$ - полное число электронов. Таким образом, изменение числа куперовских пар на единицу приводит к изменению энергии лишь на величину Δ_0^2/ε_F , много меньшую, чем Δ_0 . Пренебрегая этой малой поправкой, получаем, что при добавлении к "нечетному" островку еще одного электрона его полная энергия понизится на Δ_0 , т. к. квазичастица (возбуждение) исчезнет и образуется дополнительная куперовская пара (с энергией на уровне Ферми).

Можно ли экспериментально обнаружить периодическое изменение свойств сверхпроводящего островка с периодом $2e$? В работе [147] было впервые продемонстрировано, что это возможно, несмотря на то, что полное число $\mathcal{N}_{\text{полн}}$ электронов на островке было порядка 10^9 . Прежде чем описать этот эксперимент, мы выясним, как обобщить приведенное выше простое рассуждение, справедливое при $T = 0$, на случай отличных от нуля температур.

Самое простое соображение таково: полное число квазичастиц на островке есть

$$\begin{aligned} N_{qp} &= \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} = N(0)V \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\exp(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}/k_B T) + 1} \sim \\ &\sim \mathcal{N}_{\text{эфф}} e^{-\Delta/k_B T} \end{aligned} \quad (48.1)$$

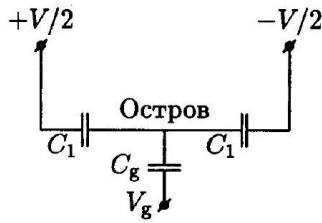
где $\mathcal{N}_{\text{эфф}} \approx N(0)V\sqrt{T\Delta}$ близко по порядку величины к числу электронов на островке, имеющих энергию в полосе порядка Δ_0 вблизи ферми-поверхности (действительно, электроны с энергиями, много большими Δ_0 , в любом случае "ничего не знают" о сверхпроводящем спаривании). Если величина N_{qp} окажется много меньше единицы, то вероятность найти

на островке хотя бы одно возбуждение мала и картина такая же, как при $T = 0$; отсюда получается условие $k_B T \ll \Delta_0 / \ln \mathcal{N}_{\text{эфф}}$. Более аккуратное рассмотрение необходимо, чтобы понять, что происходит при $k_B T \sim \Delta_0 / \ln \mathcal{N}_{\text{эфф}}$. Оно проводится следующим образом: при $T > 0$ вместо энергии неспаренного электрона следует использовать его свободную энергию $F_1(T) = \Delta - TS_1$, где соответствующая энтропия $S_1 = k_B \ln \mathcal{N}_{\text{эфф}}$. В таком случае эффект четности имеет место, если появление неспаренного электрона увеличивает свободную энергию островка, т.е. при $F_1(T) > 0$, что имеет место при температурах

$$T < T^* = \frac{\Delta_0}{k_B \ln \mathcal{N}_{\text{эфф}}} \quad (48.2)$$

Таким образом, можно ожидать (при $\ln \mathcal{N}_{\text{эфф}} \gg 1$), что эффект четности возникает при определенной температуре, как это бывает при фазовом переходе. В условиях экспериментов по эффекту четности [147] число $\mathcal{N}_{\text{эфф}} \sim 10^4$, так что ожидаемое $k_B T^* \simeq 0.1 \Delta_0$, что и было подтверждено экспериментально. Точное вычисление (приведенное, например, в книге [2]) показывает, что полученное выше из качественных соображений выражение для $F_1(T)$ является правильным с точностью до численного коэффициента в выражении для $\mathcal{N}_{\text{эфф}}$. Поскольку в ответ входит лишь логарифм $\mathcal{N}_{\text{эфф}}$, это отличие малосущественно.

Рис. 48.1. Электрическая схема электрометра с кулоновской блокадой.

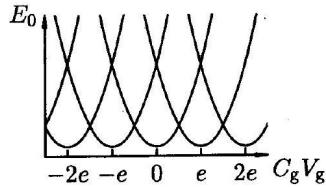


Перейдем теперь к описанию проведенных в [147, 148] экспериментов, где был использован прибор, называемый сверхпроводящим одноэлектронным транзистором (СОЭТ). Его электрическая схема изображена на рис. 48.1: алюминиевый островок в виде тонкой пленки (размерами $0.2 \times 0.6 \times 2$ мкм³ в условиях эксперимента [147]) соединялся со включенными в цепь алюминиевыми берегами высокоомными ($R_{1,2} \gg h/e^2 \simeq 26$ кОм, смысл этого условия будет прояснен ниже) тунNELьными контактами с емкостями C_1, C_2 . Кроме того, около островка располагался электрический затвор, позволявший создавать на островке заданный потенциал V_g , от которого зависит электростатическая энергия $U_{el}(n, V_g)$ островка с добавленными на него n электронами:

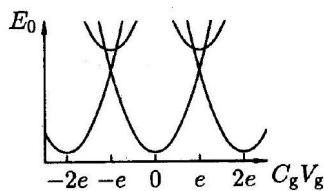
$$U_{el}(n, V_g) = \frac{(en)^2}{2C} - \frac{ne}{C} C_g V_g, \quad C = C_g + C_1 + C_2 + C_0 \quad (48.3)$$

(здесь C_0 -собственная емкость островка). Пусть $k_B T \ll E_C = e^2/2C$, а островок находится в нормальном состоянии (что достигается, например, приложением магнитного поля $H > H_c$, разрушающего сверхпроводимость). Число электронов на островке определяется из условия минимума энергии $U_{el}(n)$ по n и меняется на единицу при полуцелых значениях $C_g V_g / e = m + 1/2$, когда энергии состояний с $n = m, m + 1$ совпадают. Графически это удобно представлять как точки пересечения парабол $\tilde{U}_{el}(n, V_g) = \frac{(en - C_g V_g)^2}{2C}$, изображенных на рис. 48.2, a (добавление не зависящего от n члена $(C_g V_g)^2 / 2C$ к $U_{el}(n, V_g)$ не меняет результат минимизации энергии по n). Рассмотрим теперь ту же систему в сверхпроводящем состоянии, причем $T < T^*$, так что свободная энергия одного возбуждения велика: $F_1(T) > E_C \gg k_B T$. Теперь все кривые $\tilde{U}_{el}(V_g)$ с нечетными n поднимутся вверх на величину $F_1(T) > e^2/2C$, см. рис. 48.2, 6, так что минимум электростатической энергии всегда достигается на кривых с четным числом электронов $n = 2k$ и изменение этого числа

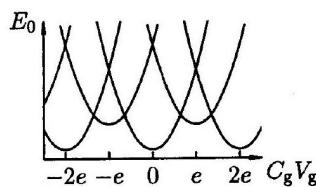
происходит при $C_g V_g / e = 2m+1$. Скачок заряда на островке при этих значениях потенциала означает, что эффективная дифференциальная емкость островка по отношению к затвору $C_{\text{эфф}} = d(en)/dV_g$ имеет резкие пики с периодом $\Delta V_g = 2e/C_g$ (вместо e/C_g в нормальном состоянии). Таким образом, измерение дифференциальной емкости позволяет пронаблюдать возникновение эффекта четности как переход от - к $2e$ -периодичности в зависимости $C_{\text{эфф}} (V_g)$. Этот метод был использован в работе [148].



а)



б)



в)

Рис. 48.2. Качественное поведение энергии островка в зависимости от заряда $C_g V_g$ на затворе: а) островок в нормальном состоянии; б) $F_1(T) > E_C \gg k_B T$; в) $E_C > F_1(T) \gg k_B T$.

В работе [147] использовался другой метод - измерялась зависимость критического джозефсоновского тока I_c через островок от V_g . Рассмотрим происхождение этой зависимости для случая $F_1(T) > E_C$, когда реализуются только "четные" состояния на островке. В отличие от обычного джозефсоновского контакта (с прямым туннелированием пары с одного берега на другой), здесь туннелирование куперовской пары с первого берега на второй происходит через промежуточное виртуальное (в квантовомеханическом смысле) состояние островка. Энергия этого промежуточного состояния $U_2 (V_g) = U_{el} (n_{\min} + 2) - U_{el} (n_{\min}) = 4E_C \min_k \left| 2k + 1 - \frac{C_g V_g}{e} \right|$ зависит от $C_g V_g$ периодически с периодом $2e$. В эксперименте с СОЭТ E_C много больше матричного элемента K туннелирования пары в каждом контакте; предполагая также, что $K \ll U_2 (V_g)$, получаем с помощью квантовомеханической теории возмущений энергию джозефсоновской связи между берегами $K^{\text{эфф}} = K^2/U_2 (V_g)$ (более подробный вывод, аналогичный фейнмановскому выводу выражения (21.9) для джозефсоновского тока, приведен в книге [2]). Поэтому максимальный джозефсоновский ток через СОЭТ равен

$$I_c (V_g) = \frac{2e}{\hbar} \frac{K^2}{U_2 (V_g)} \quad (48.4)$$

Электростатическая энергия $U_2 (V_g)$ зависит от $C_g V_g$ с периодом $2e$, что и приводит к такой же периодичности в $I_c (V_g)$ с резкими максимумами при $V_g = \frac{e}{C_g} (2m + 1)$, где $U_2 (V_g)$ обращается

в нуль (вблизи этих максимумов $U_2(V_g)$ становится меньше K , так что формула (48.4) там неприменима; критический ток в максимумах имеет порядок $I_c^{\max} \sim (2e/\hbar)K$, см. [149]).

При выводе (48.4) мы подразумевали, что $F_1(T) > E_C \gg k_B T$, так что "нечетные" состояния островка не реализуются ни при каких V_g . С повышением температуры величина $F_1(T)$ становится меньше E_C , и тогда вырожденными по полной энергии $U_{el}(V_g) + F_1(T) \frac{1-(-1)^n}{2}$ оказываются состояния различной четности (отличающиеся по заряду на e), см. рис. 48.2, в. Это означает, что состояния островка, переходящие друг в друга при туннелировании одной куперовской пары, т.е. отличающиеся на $2e$ по заряду, имеют разность кулоновских энергий порядка E_C при всех V_g . В результате "кулоновский знаменатель" в (48.4) всегда остается величиной порядка E_C , так что максимальное значение критического тока резко падает; при $F_1(T) \ll E_C$ эффектами четности можно полностью пренебречь, и зависимость $I_c(V_g)$ имеет период e с максимумами при $V_g = \frac{e}{2C_g}(2m+1)$. Последовательный микроскопический вывод зависимостей $I_c(V_g)$ во всех упомянутых случаях приведен в работах [149].

Остановимся в конце на вопросе о том, почему для наблюдения эффекта четности с помощью СОЭТ необходимо иметь высокоомные контакты островка с берегами, $R \gg h/e^2$. Рассмотрим сначала случай островка в нормальном состоянии, когда время релаксации неравновесного заряда на островке имеет порядок $\tau = RC$. Согласно соотношению неопределенностей величина $\Delta E \sim h/\tau$ характеризует ширину возбужденного уровня энергии островка (т.е. уровня с неоптимальным значением n). Требование малости этой ширины по сравнению с характерной энергией возбуждения $E_C = e^2/2C$ и приводит к условию $R \gg R_K = h/e^2$. Для сверхпроводящего состояния островка то же самое условие следует из требования малости тунNELЬНОГО матричного элемента: $\Delta > E_C \gg K \simeq \frac{\hbar}{Re^2}\Delta$, где для оценки K использовано соотношение (46.14).

5.5.7 49*. Сверхпроводники с нетривиальным спариванием

При обсуждении куперовского спаривания в §§44, 45 мы неявно предполагали, что матричный элемент межэлектронного взаимодействия $V_{k,k'}$, ответственный за спаривание, не зависит от направлений векторов k и k' на поверхности Ферми. В таком случае амплитуда спаривания v_k электронов с импульсами $\hbar k$ и $-\hbar k$ и противоположными спинами также не зависит от направления вектора k . Иначе говоря, два электрона, составляющие пару, находятся в состоянии взаимного движения с орбитальным угловым моментом $L = 0$, называемом также *s*-состоянием (по аналогии с классификацией электронных оболочек в атомах). Поскольку полная волновая функция двух электронов должна быть по принципу Паули антисимметрична при их перестановке, а орбитальное *s*-состояние симметрично, антисимметрия должна быть обеспечена за счет спиновой части волновой функции; поэтому электроны в паре находятся в синглетном по спину состоянии (полный спин куперовской пары $S = 0$) - это более точная формулировка уже упомянутого в §44 обстоятельства - электроны спариваются с противоположными спинами.

В действительности, синглетное *s*-спаривание - самый распространенный, но не единственный возможный тип куперовских пар. Прежде всего здесь надо напомнить о сверхтекущих фазах ${}^3\text{He}$, изотопа гелия с фермиевской статистикой атомов (изза полуделого спина ядра ${}^3\text{He}$). Объединение двух атомов ${}^3\text{He}$ в пару наподобие куперовской происходит аналогично обычному спариванию электронов, описанному в 44. Однако взаимодействие в ${}^3\text{He}$ устроено так, что в *s*-состоянии атомы отталкиваются, а притяжение возникает только в *p*-состоянии (взаимный орбитальный момент пары равен $L = 1$). Волновая функция этого орбитального состояния антисимметрична при перестановке, соответственно, и полный спин пары здесь равен $S = 1$ («спиновый триплет»). Такой вид куперовского состояния называется триплетным *p*-спариванием. Спаривание такого типа, по-видимому, реализуется

и в недавно открытом сверхпроводнике Sr_2RuO_4 (см., например, [150]). Мы не будем здесь обсуждать весьма интересные свойства состояний с p -спариванием (об этом можно прочитать в книге [2]), а остановимся на другом примере, связанном с высокотемпературными сверхпроводниками семейств $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ и $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$.

Прежде всего заметим; что при синглетном ($S = 0$) спаривании допустимо не только s -состояние, но и все высшие состояния с четными орбитальными моментами пары, $L = 2k$, поскольку такие волновые функции не меняют знака при повороте на угол 180° , т.е. симметричны при перестановке частиц в паре. Считается экспериментально установленным (мы обсудим соответствующие эксперименты позднее), что спаривание в этих ВТСП-соединения имеет такую же качественно структуру, какая получается в обобщении простой БКШ-модели на случай синглетного d -спаривания (орбитальный момент $L = 2$). Микроскопический механизм, приводящий к появлению сильного притяжения в ВТСП-соединениях, до сих пор не вполне ясен, и, скорее всего, он сильно отличается от обычного электрон-фононного механизма притяжения. Однако наиболее важные черты спаривания в ВТСП можно понять на примере «минимального обобщения» теории БКШ, которое состоит в постулировании сильно анизотропного потенциала притяжения $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ подходящего вида (он должен соответствовать тетрагональной симметрии кристаллов ВТСП и приводить к спариванию с моментом $L = 2$). Основные качественные свойства d -спаривания и вытекающие из них методы экспериментального обнаружения таких состояний мы и обсудим далее в этом параграфе.

В d -состоянии амплитуда (волновая функция) пары $v_{\mathbf{k}}$ меняет знак в зависимости от направления вектора k на поверхности Ферми. Поскольку ВТСП-кристаллы имеют слоистую структуру, в простейшем приближении можно считать поверхность Ферми почти цилиндрической и ограничиться рассмотрением "фермилиний" - сечения ферми-поверхности плоскостью сильной связи (x, y). Тогда соответствующая d -состоянию угловая зависимость волновой функции¹⁾ пары имеет вид

$$v_{\mathbf{k}} \propto (k_x^2 - k_y^2) \propto \cos 2\theta_k \quad (49.1)$$

где угол θ_k отсчитывается от направления кристаллографической оси x . Тем самым, в четырех точках на ферми-линии, задаваемых равенствами $k_x = \pm k_y$, волновая функция пары, а вместе с ней и вероятность $v_{\mathbf{k}}^2$ заполнения ячейки $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ с такими \mathbf{k} обращается в нуль. Это очень важное свойство d -спаривания сейчас мы покажем, что и спектр возбуждений в таком состоянии оказывается анизотропным, причем возбуждения с $k_x = \pm k_y$ могут иметь сколь угодно низкую энергию; о такой ситуации говорят как о нулях щели в спектре на линиях (линии появляются, если вспомнить о наличии импульса $\hbar k_z$).

Амплитуду спаривания вида (49.1) можно получить, выбрав потенциал притяжения электронов, например, в виде $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = -2V_d \cos 2\theta_{\mathbf{k}} \cos 2\theta_{\mathbf{k}'}$. Такой выбор означает, что наиболее сильно притягиваются электроны с импульсами, близкими к осям x и y , в то время как вблизи диагоналей $k_x = \pm k_y$ притяжение отсутствует. Проводя с таким потенциалом вывод, совершенно аналогичный сделанному в §44, получим вместо (44.8) - (44.9) следующие уравнения (выражение (44.10) для $v_{\mathbf{k}}^2$ при этом сохраняет свой вид) на спектр при температуре $T = 0$:

¹⁾ В действительности, влияние поля кристаллической решетки в ВТСП столь велико, что ферми-поверхность оказывается сильно анизотропной в плоскости (x, y) , так что классификация состояний пар по угловому моменту вообще отсутствует, и правильнее говорить просто о смене знака волновой функции пары при дискретных поворотах на угол 90° .

$$\Delta_{\mathbf{k}} = 2V_d \cos 2\theta_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} \cos 2\theta_{\mathbf{k}'} \quad (49.2)$$

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \quad (49.3)$$

Обозначив $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0 \cos 2\theta_{\mathbf{k}}$, получим уравнение на Δ_0 почти такого же вида, как (44.12),

$$1 = N(0) V_d \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0 \cos^2 2\theta}} \quad (49.4)$$

решение которого отличается от (44.14) лишь численным коэффициентом перед экспонентой. Зависимость парной амплитуды $\Delta_{\mathbf{k}}$ от направления вектора \mathbf{k} относительно осей кристалла наглядно изображена на рис. 49.1 в виде "розетки", аналогичной обычной электронной d -орбитали в атоме.

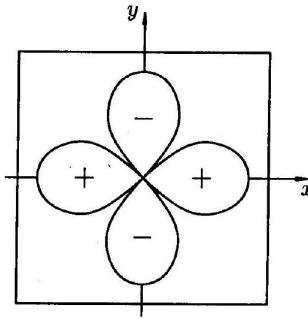


Рис. 49.1. Схематическая зависимость d -волнового параметра порядка $\Delta_{\mathbf{k}}$ от направления импульса пары $\hbar\mathbf{k}$ на фермиповерхности.

Уравнения (49.2), (49.3) имеет важное следствие, проявляющееся при малых энергиях - плотность квазичастичных состояний $\rho(E)$ нигде не обращается в нуль, а лишь плавно убывает при $E \rightarrow 0$. Действительно, рассмотрим квазичастичное состояние с $\mathbf{k} = (k_F + q_{\perp})$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + q_{\parallel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, где обе компоненты вектора q малы по сравнению с k_F . Согласно (49.3), его энергия равна

$$E_{\mathbf{q}} = \hbar \sqrt{v_F^2 q_{\perp}^2 + \left(\frac{2\Delta_0}{\hbar k_F}\right)^2 q_{\parallel}^2} \quad (49.5)$$

Как видно из выражения (49.5), энергия возбуждения стремится к нулю при $q \rightarrow 0$, т.е. при импульсе $\hbar\mathbf{k}$ вблизи точки $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Всего таких выделенных точек на ферми-линии четыре: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдем теперь плотность состояний $\rho(E)$ при $E \ll \Delta_0$. Вводя вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \left(q_{\perp}, q_{\parallel} \frac{2\Delta_0}{v_F k_F}\right)$, запишем энергию возбуждения (49.5) в приведенном к изотропному виде: $E_{\tilde{q}} = \hbar v_F \tilde{q}$. Переписывая элемент фазового объема $d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3$ в виде

$$\frac{dk_z dk_x dk_y}{2\pi (2\pi)^2} = \frac{dk_z dq_{\perp} dq_{\parallel}}{2\pi (2\pi)^2} = \frac{v_F k_F}{2\Delta_0} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}}{(2\pi)^2} = \frac{k_F}{2v_F \Delta_0} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{EdE}{2\pi}$$

Сравнивая с выражением для плотности состояний $N(\varepsilon)$ в нормальном металле и умножая на четыре, получаем низкоэнергетическую плотность состояний в сверхпроводнике с d -спариванием:

$$\rho(E) = N(0) \frac{2E}{\Delta_0} \quad (49.6)$$

Иначе говоря, плотность состояний в d -сверхпроводнике лишь на множитель порядка $E/k_B T_c$ меньше, чем в нормальном металле. Это означает, что число элементарных возбуждений $\nu_{qp}(T)$ при низких температурах не является, в отличие от обычного сверхпроводника (см. (48.1)), экспоненциально малым:

$$\nu_{qp}(T) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} = V \int_0^{\infty} dE \rho(E) f(E) \sim N(0) V \frac{T^2}{\Delta_0} \quad (49.7)$$

Поэтому условие $\nu_{qp}(T) \ll 1$, необходимое для наблюдения эффекта четности (см. 48), очень трудно выполнить для d -сверхпроводника - оно требует температур $T < T_d^* \simeq (\Delta_0 \delta E)^{1/2}$, где $\delta E = (N(0)V)^{-1}$ - расстояние между электронными уровнями в образце в нормальном состоянии, имеющее порядок 10^{-4} К в экспериментах по эффекту четности [147]. Более того, при низких температурах $T \ll T_d^*$ связанная с присутствием неспаренного электрона дополнительная свободная энергия $F_1(T)$ очень мала, $F_1(0) \sim \delta E$. Дело в том, что квазичастица может занять ячейку \mathbf{k} -пространства, сколь угодно близкую к одной из четырех точек вырождения. Можно показать (см. [2]), что максимальная величина $F_1^{\max}(T)$ для d -сверхпроводников имеет порядок $k_B T_d^*$ и достигается при $T \simeq T_d^*$. Таким образом, отсутствие (или аномальная слабость) эффекта четности может служить одним из доказательств аномальной природы спаривания.

Другое важное свойство d -сверхпроводника - относительно большая величина низкотемпературной электронной теплоемкости $C_s(T)$. Используя комбинаторное выражение (см. [28]) для энтропии ферми-газа

$$S(f_{\mathbf{k}}) = - \sum_{\mathbf{k}} [(1 - f_{\mathbf{k}}) \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) + f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}}]$$

и выражения (45.5) и (49.6) для $\rho(E)$, получим теплоемкость сверхпроводника в следующем виде (окончательные выражения написаны для $T \ll T_c$):

$$\begin{aligned} C_s(T) &= T \frac{\partial S}{\partial T} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial T} = N(0) \int_0^{\infty} dE \rho(E) \frac{(E/T)^2}{(e^{E/T} + 1)^2} = \\ &= \begin{cases} N(0) \frac{\pi^2 T}{6} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^5}} e^{-\Delta_0/T} & \text{для } s\text{-спаривания,} \\ 0.55 N(0) \frac{T^2}{\Delta_0} & \text{для } d\text{-спаривания.} \end{cases} \end{aligned} \quad (49.8)$$

Отсутствие щели в спектре при d -спаривании приводит к возбуждению большего количества квазичастиц и к существенно более быстрому, чем при s -спаривании, убыванию параметра спаривания $\Delta_0(T)$ с температурой. Обобщение уравнения (49.4) на ненулевые температуры производится так же, как при выводе (45.15), и имеет вид

$$\begin{aligned} 1 &= N(0) V_d \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0(T) \cos^2 2\theta}} \times \\ &\quad \times \operatorname{th} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0(T) \cos^2 2\theta}}{2T}. \end{aligned} \quad (49.9)$$

Основной вклад в зависимость $\Delta(T)$ при низких температурах дают низколежащие возбуждения с $\varepsilon \sim k_B T$ и $\cos 2\theta \sim k_B T \Delta_0 \ll \ll 1$. Вычисляя приближенно разность интегралов (49.4) и (49.9), получаем

$$\Delta_0 - \Delta_0(T) \simeq \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{T}{\Delta_0} \quad (49.10)$$

в отличие от экспоненциально малых поправок порядка $e^{-\Delta/T}$ при s -спаривании. В эксперименте бывает удобнее измерять температурную зависимость лондоновской глубины проникновения, которая тоже оказывается линейной [151] : $(\lambda(T)/\lambda(0) - 1) \sim T/\Delta_0$. Соответствующие расчеты проведены в работах [152].

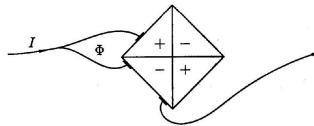


Рис. 49.2. Двухконтактный сквид, подсоединеный к соседним граням тетрагонального кристалла с противоположными знаками параметра порядка.

До сих пор мы обсуждали особые свойства d -сверхпроводника, связанные с наличием в нем бесщелевых возбуждений.

Другая важная черта d -спаривания - зависимость знака парной амплитуды Δ_k от направления вектора k относительно кристаллических осей.²⁾ Это свойство и было использовано [153] для доказательства существования d -спаривания в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$. В работе [153] измерялся критический ток двухконтактного сквид-интерферометра с контактами между обычным сверхпроводником (свинец) и двумя соседними гранями монокристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, см. рис. 49.2. Если спаривание в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ имеет вид d -волны, типа изображенной на рис. 49.1, то знаки волновых функций куперовских пар, проходящих через контакты a и b , будут противоположны. Рассмотрим (аналогично 25) зависимость критического тока сквида $I_{\max}(\Phi)$ от проходящего через его кольцо магнитного потока Φ . Различие знаков Δ_k на гранях a и b приведет к замене уравнения (25.2) на $\varphi_a - \varphi_b = 2\pi\Phi/\Phi_0 + \pi$, что эквивалентно сдвигу Φ на величину $\Phi_0/2$. Таким образом, d -спаривание в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ должно приводить к зависимости $I_{\max}(\Phi)$ вида

$$I_{\max}(\Phi) = 2I_c \left| \sin \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right| \quad (49.11)$$

с максимумами при полуцелых значениях магнитного потока. Именно такая зависимость и была обнаружена в эксперименте [153].

²⁾ По этой причине для сверхпроводников с d -спариванием (как и с другими типами нетривиального спаривания) неверна "теорема Андерсона" об отсутствии влияния потенциальных примесей на сверхпроводимость-рассеяние перепутывает состояния с разными направлениями импульса, имеющие теперь разные знаки парных волновых функций, так что спаривание подавляется [2].

5.5.8 50. Незатухающий ток и эффект Мейсснера-Оксенфельда

В этой главе были изложены основы современных представлений о природе сверхпроводящего состояния. Было описано основное состояние сверхпроводника, исследован спектр элементарных возбуждений, доказано существование энергетической щели. Но у читателя давно, по-видимому, возник вопрос: "А где доказательство того, что все, что было изложено, имеет хоть какое-то отношение к сверхпроводимости?" Ведь, в конце концов, все, что мы сейчас знаем по микроскопической теории сверхпроводимости, сводится к следующему.

Наличие электрон-фононного взаимодействия в некоторых металлах может привести к эффективному притяжению электронов металла друг к другу. Это приводит к понижению энергии основного состояния, которое теперь представляет собой размазанное около поверхности

Ферми распределение электронов в \mathbf{k} -пространстве. Спектр элементарных возбуждений такого материала имеет энергетическую щель, т.е. первые разрешенные уровни спектра элементарных возбуждений отделены от уровня основного состояния энергетической щелью. Но мы до сих пор никак не показали, что материал, обладающий этими свойствами, - сверхпроводник.

Сейчас мы покажем, как из существования энергетической щели следует возможность незатухающего тока - основного свойства сверхпроводника. Для того чтобы это лучше понять, обратимся сперва к нормальному металлу. Нас будет интересовать распределение электронов нормального металла в \mathbf{k} -пространстве, когда по металлу идет постоянный ток. Если тока нет, то при $T = 0$ все электроны заполняют состояния внутри сферы Ферми, и все состояния вне этой сферы пусты. Создадим в металле электрическое поле (пусть в направлении оси x), тогда электроны начнут ускоряться в этом направлении, а ускоренному движению электронов в x -пространстве будет отвечать равномерное движение с постоянной скоростью электронов в \mathbf{k} -пространстве. В результате вся сфера Ферми начнет с постоянной скоростью перемещаться в \mathbf{k} -пространстве в направлении оси k_x . Так будет происходить до тех пор, пока мы можем пренебречь процессами соударений электронов с примесями и дефектами кристаллической решетки. Если эти процессы учесть, то окажется, что в результате рассеяния электроны, имеющие максимальное значение компоненты импульса k_x , будут перекидываться в свободные ячейки \mathbf{k} -пространства и, в конце концов, возникнет динамическое равновесие. Это значит, что, несмотря на электрическое поле и равномерное движение электронов в \mathbf{k} -пространстве в направлении оси k_x , рассеяние на дефектах приводит к тому, что в целом распределение электронов в \mathbf{k} -пространстве становится стационарным. Сфера Ферми оказывается несколько сдвинутой относительно начала координат, что естественно для токового состояния. Рассеяние электронов приводит к передаче энергии решетке, к разогреву проводника.

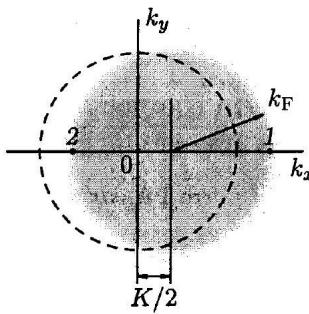
Теперь рассмотрим сверхпроводник. Ток в сверхпроводнике (в отсутствие электрического поля!) может возникнуть, если все электронные пары будут иметь один и тот же импульс $\hbar \mathbf{K}$. Пусть ток течет вдоль оси x сверхпроводника, т.е. $\mathbf{K} = (K, 0, 0)$. Это значит, что "размазанная" сфера Ферми будет сдвинута в k -пространстве на величину $K/2$ в направлении оси k_x . Это схематически изображено на рис. 50.1. Проследим за поведением показанной там электронной пары $(1, 2)$, имеющей состояние $(\pm k_F + K/2, 0, 0)$. Электрону 1, имеющему наибольшую кинетическую энергию $(\hbar^2/2m)(k_F + K/2)^2$, конечно, было бы выгодно перейти в свободную ячейку где-нибудь около электрона 2. При этом энергия системы понизится на величину

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F + \frac{K}{2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(k_F - \frac{K}{2} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{m} k_F K$$

Но тогда пара $(1, 2)$ будет разрушена и, как мы уже знаем, энергия системы повысится на 2Δ , где Δ -энергетическая щель, m -масса электрона, k_F - радиус сферы Ферми.

Отсюда ясно, что при достаточно маленьких токах (достаточно малых K) выигрыш в энергии $\hbar^2 k_F K / m$ не может скомпенсировать проигрыш 2Δ , и пара разрываться не будет. Конечно, в целом такое состояние энергетически менее выгодно, чем состояние без тока ($K = 0$), но оно может оказаться метастабильным и существовать бесконечно долго. Примером тому служит замкнутое сверхпроводящее кольцо с током. Разрушение такого состояния начнется тогда, когда разрыв пар станет энергетически оправданным. Правильную оценку мы получим, если

Рис. 50.1. Токовое состояние в сверхпроводнике. Вся "размазанная" сфера Ферми сдвинута на $K/2$.



напишем

$$\hbar^2 k_F K_c / m \simeq 2\Delta,$$

где $\hbar K_c$ - критический импульс пары. Следовательно, критический импульс пары равен

$$P_c = \hbar K_c \simeq 2m\Delta/p_F = 2\Delta/v_F \quad (50.1)$$

здесь v_F - скорость электрона на поверхности Ферми.

Оценим, какой плотности тока соответствует такой критический импульс. Поскольку критическая скорость пары

$$v_c = P_c / 2m \quad (50.2)$$

то критическая плотность тока, согласно (50.1) и (50.2), будет

$$j_c = n_s e v_c = n_s e \frac{\Delta}{mv_F} \quad (50.3)$$

где n_s -плотность сверхпроводящих электронов, которая при $T = 0$ просто равна электронной плотности металла. Выражая n_s через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ , согласно (5.7), и Δ_0 через длину когерентности ξ_0 , согласно (45.7), получим окончательно плотность критического тока при $T = 0$ в виде

$$j_c = \frac{\hbar c^2}{16\pi e} \frac{1}{\lambda^2 \xi_0} \quad (50.4)$$

Оценим порядок получившейся величины. Пусть $\lambda \sim 10^{-5}$ см, $\xi_0 \sim 10^{-4}$ см, тогда

$$j_c \sim \frac{10^{-27} (3 \cdot 10^{10})^2}{16\pi \cdot 4.8 \cdot 10^{-10}} \frac{1}{(10^{-5})^2 10^{-4}} \text{ абс. ед.} \sim 4 \cdot 10^{15} \text{ абс. ед.}$$

Учитывая, что 1 А содержит $3 \cdot 10^9$ абс. ед. силы тока, имеем

$$j_c = \frac{4 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^9} \text{ А}/\text{см}^2 \simeq 1.3 \cdot 10^6 \text{ А}/\text{см}^2.$$

Выразим критическую плотность тока j_c в формуле (50.3) через $H_{cm}(0)$ и λ . Воспользовавшись выражением для плотности состояний у поверхности Ферми $N(0) = k_F m / (\pi^2 \hbar^2)$, формулой (44.18), выражением для электронной плотности $n_s = k_F^3 / 3\pi^2$ и формулой (45.7), получим

$$j_c = \frac{1}{\sqrt{34}\pi} \frac{c H_{cm}(0)}{\lambda}. \quad (50.5)$$

Интересно сравнить результат (50.5) с плотностью критического тока, полученной в теории Гинзбурга-Ландау (18.5). С точностью до численного коэффициента эти результаты

совпадают (если, конечно, формулу (50.5) проэкстраполировать в область температур, близких к T_c). Расхождение в численном коэффициенте вполне естественно, так как формула (50.5) носит оценочный характер.

Следовательно, мы можем сформулировать теперь важный физический вывод: критический ток (18.5), даваемый теорией Гинзбурга-Ландау, имеет смысл критического тока распаривания, т. е. такого тока, при котором теряется устойчивость электронных пар, образующих сверхпроводящий конденсат.

Обсудим теперь, как существование щели в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника объясняет выталкивание слабого магнитного поля, т. е. эффект Мейсснера - Оксенфельда. Существуют строгие расчеты, выходящие за рамки настоящего курса, из которых следует, что существование энергетической щели является достаточным условием для эффекта Мейсснера.

Тем не менее, мы попытаемся все же проинтерпретировать эффект Мейсснера на языке микротеории. Следуя Лондону [154], можно предположить так называемую "жесткость" волновой функции электронов сверхпроводника. Это значит, что наличие энергетической щели, когерентное поведение всего коллектива электронов приводят к тому, что слабое магнитное поле не может сколь-нибудь существенно изменить эту волновую функцию. Но отсюда эффект Мейсснера следует мгновенно.

Действительно, пусть $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ - волновая функция N электронов сверхпроводника. Заметим, что здесь Ψ -это не эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов теории Гинзбурга - Ландау (которая, кстати, зависит только от одной переменной \mathbf{r}), а истинная волновая функция. Тогда из общих соотношений квантовой механики следует такое выражение для тока при наличии магнитного поля:

$$\mathbf{j}(r) = \sum_{n=1}^N \int \dots \int \left\{ \frac{e\hbar}{2im} [\Psi^* \nabla_n \Psi - \Psi \nabla_n \Psi^*] - \right. \\ \left. - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A}(r_n) |\Psi|^2 \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N \quad (50.6)$$

здесь \mathbf{A} - векторный потенциал магнитного поля. Если магнитного поля нет ($\mathbf{A} = 0$), то, конечно, и тока в сверхпроводнике нет, и тогда интеграл от первого слагаемого должен равняться нулю:

$$\sum_{n=1}^N \int \dots \int [\Psi^* \nabla_n \Psi - \Psi \nabla_n \Psi^*] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N = 0 \quad (50.7)$$

Но мы предполагаем "жесткости" волновой функции, т. е. ее неизменность под действием магнитного поля. Это значит, что и при наличии магнитного поля равенство (50.7) сохраняется. Опуская поэтому первое слагаемое в (50.6), получим после элементарного интегрирования

$$\mathbf{j}(r) = -\text{const} \cdot \mathbf{A}(r) \quad (50.8)$$

А это равенство есть математическое выражение эффекта Мейсснера, поскольку оно является известным уравнением Лондонов (5.17).

III-з.

50.1. Найти критический импульс пары электронов K_c для сверхпроводящего олова, если $v_F = 0.65 \cdot 10^8 \text{ см/с}$, $\Delta_0 = 0.58 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Сравнить K_c и k_F .

Ответ. $K_c = 2\Delta_0 / (\hbar v_F) = 2.61 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, $k_F = mv_F/\hbar = 5.6 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$.

5.5.9 51. Связь микротеории с теорией Гинзбурга-Ландау

Теория Гинзбурга - Ландау (ГЛ), как мы знаем, - феноменологическая теория, т.е. она не содержит расшифровки на микроскопическом уровне входящих в нее коэффициентов. Создание строгой микроскопической теории сверхпроводимости Бардина - Купера - Шриффера позволило дать полную интерпретацию величин, входящих в теорию ГЛ. Эта работа была выполнена Л. П. Горьковым [155]. Приведем окончательные результаты. Они различны для "чистого" и "грязного" сверхпроводников. Все величины, относящиеся к "чистому" сверхпроводнику, будут снабжены индексом p , к "грязному" - d . Чистым считается сверхпроводник, у которого $l \gg \xi_0$, где l - длина свободного пробега электрона. Неравенство $l \ll \xi_0$ характеризует грязный материал.

Как и следовало ожидать, энергетическая щель $\Delta(T)$ представляет собой параметр порядка в сверхпроводнике и поэтому при $T \rightarrow T_c$ должна быть пропорциональна параметру порядка Ψ теории ГЛ. Действительно, точный результат таков:

$$\begin{aligned}\Psi_p &= \left[\frac{7\zeta(3)m v_F^2 N(0)}{2\pi^2 k_B^2 T_c^2} \right]^{1/2} \Delta(T), \quad \zeta(3) \simeq 1.202 \\ \Psi_d &= \left[\frac{\pi m v_F N(0) l}{12\hbar k_B T_c} \right]^{1/2} \Delta(T)\end{aligned}$$

здесь $\zeta(x)$ - функция Римана.

При $T \rightarrow T_c$ имеем

$$\Delta(T) = \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2}$$

или

$$\Delta(T) \simeq 3.1 k_B T_c (1 - T/T_c)^{1/2}$$

Длина когерентности и глубина проникновения магнитного поля равны соответственно

$$\begin{aligned}\xi_p &= 0.74 \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \xi_d &= 0.85 (\xi_0 l)^{1/2} (1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda_p &= \frac{\lambda(0)}{\sqrt{2}} (1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda_d &= 0.615 \lambda(0) (\xi_0/l)^{1/2} (1 - T/T_c)^{-1/2}, \\ \lambda^2(0) &= \frac{3c^2}{8\pi e^2 v_F^2 N(0)}.\end{aligned}$$

Коэффициенты α и β разложения свободной энергии по степеням параметра Ψ в теории ГЛ:

$$\begin{aligned}\alpha_p &= 1.83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right), \quad \alpha_d = 1.36 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0 l} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right), \\ \beta_p &= 0.35 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2} \\ \beta_d &= 0.2 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0 l} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}.\end{aligned}$$

Параметр теории ГЛ:

$$\varkappa_p = 0.96\lambda(0)/\xi_0, \quad \varkappa_d = 0.725\lambda(0)/l.$$

Установим теперь область применимости уравнений теории ГЛ. В разложении (14.1) плотности гиббсовской свободной энергии G_{sH} по степеням $|i\hbar\nabla\Psi - (2e/c)\mathbf{A}\Psi|^2$ учтен только первый член. Это означает, что предполагаются медленные изменения Ψ и \mathbf{A} на расстояниях, сравнимых с характерным размером неоднородности в сверхпроводнике, т. е. с размером куперовской пары.

В случае чистого сверхпроводника, когда длина свободного пробега электрона $l \gg \xi_0$, имеем поэтому следующее условие применимости теории ГЛ: $\xi(T), \lambda(T) \gg \xi_0$. Поскольку $\xi(T) = \xi_0(1 - T/T_c)^{-1/2}$, то при $T \sim T_c$ величина $\xi(T)$ всегда больше ξ_0 , и первое условие применимости удовлетворяется автоматически.

Рассмотрим второе условие: $\lambda(T) \gg \xi_0$. Это есть требование справедливости локальной электродинамики, требование того, чтобы сверхпроводник был лондоновским. Поскольку $\lambda(T) = \lambda(0)(1 - T/T_c)^{-1/2}$, а $\varkappa \sim \lambda(0)/\xi_0$, условие $\lambda(T) \gg \xi_0$ превращается в условие

$$\varkappa^2 \gg 1 - T/T_c. \quad (51.1)$$

Это довольно жесткое условие, поскольку в сверхпроводниках первого рода \varkappa может быть малой величиной. Так, $\varkappa(\text{Al}) = 0.01$, $\varkappa(\text{Pb}) = 0.23$.

В "грязных" сверхпроводниках ($l \ll \xi_0$) область применимости теории ГЛ значительно шире. Теперь характерный масштаб неоднородности распределения параметра порядка - «грязная» длина когерентности $\xi_d \sim (\xi_0 l)^{1/2}$, так что условия применимости теории Г имеют вид $\xi(T) \gg \xi_d$ и $\lambda(T) \gg \xi_d$. Первое из этих условий выполнено при $(T_c - T) \ll T_c$. Второе же условие приводит к тому же неравенству (51.1) что и в чистом пределе (при выводе надо учесть, что в грязном случае $\lambda(T) \sim \lambda(0)(\xi_0/l)^{1/2}(1 - T/T_c)^{-1/2}, \varkappa \sim \lambda(0)/l$). Поскольку в грязных сверхпроводниках обычно $\varkappa \gg 1$, окончательно находим для них область количественной применимости теории в виде $(T_c - T) \ll T_c$. Качественно же она обычно применима для грязных сверхпроводников во всей области температур, сравнимых с T_c , - существенные отклонения возникают лишь при $T \ll T_c$.

5.6 НЕКОТОРЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Вопрос о том, что происходит со сверхпроводником, когда он выведен из равновесия, как он релаксирует к равновесному состоянию, обсуждается в очень многих работах последнего времени. Сейчас это, по-видимому, один из самых актуальных вопросов физики сверхпроводников.

В чем же дело? Почему проблема изучения неравновесных свойств сверхпроводников вдруг оказалась столь важной и интересной? Думается, что это произошло, потому что в сверхпроводнике существуют "разные коллективы" электронов: сверхпроводящие электроны, электроноподобные возбуждения, дырки. То, что стало понятно после появления теории БКШ, относилось к случаю, когда эти "коллективы" находились в равновесии друг с другом, да вдобавок еще и с решеткой. Картина становится значительно богаче, если равновесие нарушить. Понимая, как протекает процесс установления равновесия, мы значительно лучше начинаем понимать самые основы теории, вырабатываем более адекватные природе представления. Кроме того, нельзя упускать из виду, что многие успешно работающие устройства криогенной электроники функционируют в условиях, далеких от равновесия, и поэтому изучение неравновесных процессов имеет еще и чисто прикладное значение.

В этой главе мы рассмотрим несколько случаев, когда неравновесное состояние сверхпроводника становится определяющим для протекающих в нем физических процессов.

5.6.1 52. Квазичастицы: электроны и дырки

В главе VI мы уже говорили об элементарных возбуждениях (квазичастицах) в сверхпроводниках. Теперь мы уточним это понятие.

Начнем с нормального металла. Основное состояние (без элементарных возбуждений, при $T = 0$) - это такое, при котором все свободные электроны металла заполняют все ячейки \mathbf{k} -пространства внутри сферы Ферми, а все ячейки вне этой сферы свободны. Введем теперь в нормальный металл один лишний электрон. Он займет какую-то ячейку \mathbf{k} в \mathbf{k} -пространстве ($k > k_F$, где k_F - радиус сферы Ферми), и энергия всей системы электронов увеличится на $\hbar^2(k^2 - k_F^2)/2m$. При этом мы условимся отсчитывать энергию от энергии Ферми $\hbar^2 k_F^2/2m$. Это и будет энергия элементарного возбуждения. А импульс всей системы будет равен $\hbar\mathbf{k}$. Это и будет импульс элементарного возбуждения.

Снова рассмотрим основное состояние нормального металла, удалив теперь оттуда один электрон из ячейки \mathbf{k} ($k \ll k_F$). Такое состояние тоже можно рассматривать как элементарное возбуждение системы, так как энергия этого состояния больше энергии основного состояния оставшейся системы электронов на величину $\hbar^2(k_F^2 - k^2)/2m$. Действительно, основное состояние получится, если взять один электрон из ячейки на поверхности Ферми и положить его в пустую ячейку \mathbf{k} . Импульс такого элементарного возбуждения равен импульсу всей системы электронов, т.е. равен $-\hbar\mathbf{k}$. Это элементарное возбуждение (квазичастица) ведет себя подобно положительному заряду и называется дыркой. Энергетический спектр элементарных возбуждений нормального металла показан на рис. 52.1 тонкими прямыми линиями.

В сверхпроводнике все будет несколько сложнее. Мы уже знаем (глава VI), что в сверхпроводнике основное состояние характеризуется функцией $v_{\mathbf{k}}^2$, которая представляет собой вероятность заполнения электронами парных ячеек $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Вид этой функции показан на рис. 44.3. Введем в сверхпроводник один лишний электрон. Он займет ячейку в \mathbf{k} -пространстве с вероятностью $u_k^2 = 1 - v_k^2$, поскольку с вероятностью v_k^2 она уже была занята до того. В сверхпроводнике такая ячейка может быть как вне, так и внутри сферы Ферми, поскольку $u_k^2 > 0$ для k как больших, так и меньших k_F .

Однако заполнение ячейки \mathbf{k} электроном еще не означает, что возбуждение в сверхпроводнике возникло. Пара состояний $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ теперь не может использоваться для перерассеяния динамических куперовских пар, поскольку состояние \mathbf{k} занято с вероятностью 1. Это значит, что состояние $-\mathbf{k}$ должно с вероятностью 1 оставаться пустым, т.е. с вероятностью v_k^2 должен был произойти процесс удаления электрона из состояния $-\mathbf{k}$.

Ясно поэтому, что возбуждение в сверхпроводнике, когда ячейка \mathbf{k} занята, а ячейка $-\mathbf{k}$ свободна, обладает одновременно свойствами как электрона, так и дырки. Все дело в вероятности заполнения ячеек с данным \mathbf{k} , а точнее, в знаке разности $v_k^2 - u_k^2$, который и определяет знак заряда возбуждения в сверхпроводнике, как мы покажем подробнее в следующем параграфе. Однако из сказанного выше следует, что ячейки с импульсом $|k| > k_F$ скорее пусты чем заполнены (поскольку $v_k^2 < 1/2$), и возбуждение является электроноподобным. Наоборот, при $|k| < k_F$ вероятность v_k^2 больше $1/2$, и для создания возбуждения надо в среднем убирать электронный заряд, т.е. возбуждение является дырочноподобным.

Можно сказать, что в сверхпроводнике квазичастица типа электрон (почти в чистом виде) - это квазичастица с импульсом $\hbar\mathbf{k}$, если $|k - k_F|/k_F \gg \Delta/\varepsilon_F, k > k_F$. А почти в чистом виде дырка - это возбуждение с импульсом $\hbar\mathbf{k}$, удовлетворяющим тому же неравенству, но при $k < k_F$.

Электронная и дырочная ветви спектра квазичастиц в сверхпроводнике показаны на рис. 52.1.

Остается добавить, что скорость распространения квазичастицы в реальном пространстве - это групповая скорость, кото-

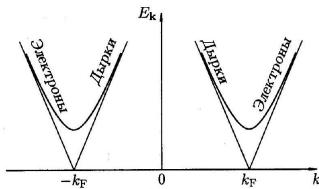


Рис. 52.1. Энергетический спектр частиц в сверхпроводнике. Тонкими прямыми линиями показан спектр нормального металла.

рая, как известно, равна

$$\mathbf{s}_k = \frac{dE_{\mathbf{k}}}{dp_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{\mathbf{k}}}{dk}$$

Поэтому для $k > 0$ (см. рис. 52.1) дырки движутся налево, а электроны направо.

5.6.2 53. Заряд квазичастицы в сверхпроводнике

Итак, квазичастица в сверхпроводнике - это элементарное возбуждение, которое является в какой-то степени электроном и в какой-то степени дыркой. Причем если двигаться по кривой спектра элементарных возбуждений, то переход от электрона к дырке будет происходить непрерывно. Уже это рассуждение наводит на мысль, что квазичастице надо приписать дробный электрический заряд. Здесь мы будем следовать работе Петика и Смита [156], которые, по-видимому, первыми пришли к таким представлениям. Мы сейчас увидим, насколько это удобно и как это облегчает качественное рассмотрение неравновесных процессов в сверхпроводниках. Для простоты условимся считать в дальнейшем заряд электрона равным +1. Иными словами, мы в дальнейшем будем все заряды измерять в относительных единицах, приняв за единицу заряда заряд электрона.

Рассмотрим сверхпроводник, находящийся при некоторой конечной температуре, когда имеются как спаренные (сверхпроводящие) электроны, так и элементарные возбуждения. Пусть последние распределены по ячейкам \mathbf{k} -пространства согласно функции распределения $f_{\mathbf{k}}$, т.е. $f_{\mathbf{k}}$ -это вероятность того, что возбужденный электрон заполнит ячейку \mathbf{k} . Поскольку вероятность того, что до этого она была свободна от сверхпроводящего электрона, есть $u_{\mathbf{k}}^2$, то полная вероятность обнаружить в ячейке \mathbf{k} возбужденный электрон равна $f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2$. С другой стороны, эта ячейка может быть заполнена электроном, принадлежащим к сверхпроводящим электронам. Для этого должны быть одновременно выполнены два условия: первое-в этой ячейке нет электрона, создающего возбуждение (вероятность этого равна $1 - f_{\mathbf{k}}$), и второе - здесь есть сверхпроводящий электрон (вероятность равна $v_{\mathbf{k}}^2$). Итак, полная вероятность обнаружить в ячейке электрон, принадлежащий сверхпроводящему коллективу, равна $(1 - f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2$. Поэтому полный заряд, находящийся в ячейке \mathbf{k} , равен $f_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^2 + (1 - f_{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}^2$. Отсюда полный заряд всех электронов сверхпроводника равен

$$Q_{\text{полн}} = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}} (1 - f_{\mathbf{k}}) v_{\mathbf{k}}^2 \quad (53.1)$$

Пусть в результате какого-то внешнего воздействия изменилось как распределение квазичастиц (на величину $\delta f_{\mathbf{k}}$), так и распределение сверхпроводящих электронов (на величину $\delta v_{\mathbf{k}}^2$). В результате произошло изменение полного заряда электронов сверхпроводника на величину

$$\delta Q_{\text{полн}} = \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \delta f_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \delta v_{\mathbf{k}}^2 \quad (53.2)$$

Первое слагаемое здесь - это, очевидно, изменение полного заряда квазичастиц. Конкретно: вероятность пребывания квазичастицы в ячейке \mathbf{k} изменилась на величину $\delta f_{\mathbf{k}}$. В результате заряд этой ячейки изменился на $(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \delta f_{\mathbf{k}}$. Ясно, что тогда величина

$$q_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 \quad (53.3)$$

играет роль заряда квазичастицы, имеющей импульс $\hbar\mathbf{k}$. Согласно (44.10),

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}) \quad (53.4)$$

Тогда

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}), \quad (53.5)$$

откуда

$$q_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}/(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2} \quad (53.6)$$

Зависимость $q_{\mathbf{k}}$ от k изображена на рис.53.1. Таким образом, оказывается, что заряд квазичастицы может принимать любое значение от +1 (чистый электрон) до -1 (чистая дырка). Все зависит от того, в какой ячейке \mathbf{k} -пространства находится квазичастица.

Довольно странный на первый взгляд результат! Внесем в сверхпроводник один лишний электрон и поместим его в ячейку \mathbf{k} .

Сверхпроводник в целом получил заряд +1 (напоминаем, что это и есть, по нашему условию, заряд электрона), а в ячейке \mathbf{k} оказался заряд $q_{\mathbf{k}}$. Куда же девалась разница $1 - q_{\mathbf{k}}$? Ведь полный заряд должен сохраниться! Ответ состоит в том, что заряд $1 - q_{\mathbf{k}}$ ушел к сверхпроводящим электронам, и их заряд при этом увеличился. Этим учитывается такой процесс. Электрон вносится в сверхпроводник. Он забирает парный себе электрон, принадлежащий конденсату, ¹⁾ из ячейки $-\mathbf{k}$, и эта пара попадает в

- Весь коллектив сверхпроводящих электронов, которые описываются единой волновой функцией, мы называем конденсатом. Это, однако, не совсем точно. Оказаться на самом низком энергетическом уровне (т.е. перейти в бозе-конденсат в строгом понимании этого слова) могут не все электронные пары, которые являются бозе-частицами. Часть таких бозевских частиц изза взаимодействия между собой должна образовать систему надконденсатных частиц. Однако и конденсатные, и надконденсатные частицы все вместе образуют коллектив сверхпроводящих электронов. Надконденсатные частицы ни в коем случае нельзя рассматривать как элементарные возбуждения.

конденсат, но тогда электрон в ячейке \mathbf{k} оказывается лишним партнером, т.е. образуется дырка.

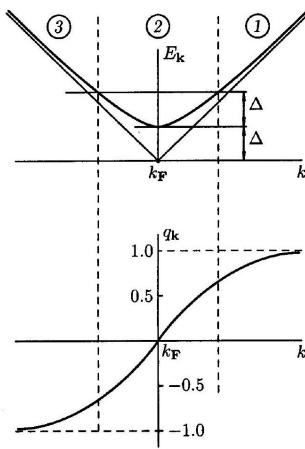


Рис. 53.1. Энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике E_k и их заряд q_k . В области 1 заряд квазичастиц очень близок к +1, в области 3 – К – 1, а в области 2 заряд q_k принимает любые значения от +1 до -1.

Таким образом, между возбуждениями в сверхпроводнике и конденсатом существует теснейшая связь. При установлении равновесия эти две системы нельзя рассматривать как независимые. При переходах возбуждений из одних ячеек k -пространства в другие меняется их заряд q_k , а следовательно, и заряд конденсата, т.е. число электронов в конденсате.

5.6.3 54. Время релаксации заряда квазичастиц

Попытаемся теперь оценить время, в течение которого происходит релаксация заряда квазичастиц, т.е. время установления равновесного заряда в системе квазичастиц, если предварительно какое-то возмущение вывело его из равновесия. На этом этапе мы предполагаем, что полное количество квазичастиц остается неизменным. Тогда элементарным актом релаксации заряда является переход квазичастицы из одной ячейки k -пространства в другую. Но это должно сопровождаться излучением или поглощением фононов. Пусть время релаксации будет τ_E . Обратная величина τ_E^{-1} представляет собой частоту неупругих столкновений электронов с фононами в металле и не зависит от того, находится металл в нормальном состоянии или сверхпроводящем. Эта частота имеет порядок величины [157]

$$\tau_E^{-1} \sim \frac{k_B T}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^2$$

где k_B – постоянная Больцмана, Θ_D – дебаевская температура металла. Пусть температура сверхпроводника близка к T_c . Это значит, что $\Delta \ll k_B T_c$. Возникает вопрос: все ли электрон-фононные столкновения приведут к релаксации заряда? Очевидно нет. Действительно, если до столкновения электрон находился в области 1 (см. рис. 53.1) и конечное его состояние тоже находится в области 1, то изменения заряда квазичастицы практически не произошло. То же можно сказать относительно области 3. Иное дело – электроны, находящиеся в области 2. Их переходы в результате электрон-фононных столкновений меняют заряд квазичастицы на величину порядка единицы. При температуре T доля возбуждений, лежащих в области 2, по сравнению с общим количеством возбуждений будет иметь порядок $\Delta/k_B T$, так как по определению область 2 – это область, в которой энергия возбуждений E_k лежит в интервале $\Delta \leq E_k \leq 2\Delta$. Поэтому частота переходов, меняющих заряд квазичастиц на величину порядка единицы, равна

$$\tau_Q^{-1} \sim \frac{\Delta}{k_B T} \tau_E^{-1}$$

Точный расчет времени релаксации заряда квазичастиц при $T \simeq T_c$ [158] дает

$$\tau_Q = \frac{4 k_B T_c}{\pi \Delta} \tau_E \quad (54.1)$$

Из этой формулы следует, что время релаксации заряда квазичастиц расходится при $T \rightarrow T_c$. Приведем некоторые характерные значения: времена энергетической релаксации τ_E имеют порядок около 10^{-10} с. Так, для олова можно принять $\tau_E = 3 \cdot 10^{-10}$ с, а для свинца $\tau_E = 10^{-11}$ с. Приведенные значения τ_E взяты при критических температурах указанных материалов. Время релаксации заряда квазичастиц может оказаться значительно больше. Все зависит от того, как близко мы подойдем к критической температуре.

III-з.

54.1. Найти время релаксации заряда квазичастиц в олове, если температура олова ниже критической температуры (3.8 К) на 0.01 К.

Ответ. Используя выражение для щели (при $T \simeq T_c$) $\Delta(T) = 1.74\Delta(0) \times (1 - T/T_c)^{1/2}$, получим для олова $\tau_Q \simeq 2.4 \cdot 10^{-9}$ с.

5.6.4 55. Андреевское отражение. Андреевские уровни в SNS-переходе

Перейдем теперь к изучению того, как происходит переход нормального тока в сверхток. Попробуем разобраться в том, какие процессы происходят на границе нормальный металл-сверхпроводник, как далеко от этой границы происходит процесс преобразования нормального тока в сверхток.

Оговорим прежде всего, что мы понимаем под словом «граница». В наиболее чистом виде это будет граница между нормальной и сверхпроводящей фазами в сверхпроводнике, находящемся в промежуточном состоянии. Параметр порядка - щель будет иметь максимальное значение $\Delta(T)$ в глубине сверхпроводника и равняться нулю в глубине нормальной области. Переход от одного значения к другому произойдет на длине когерентности $\xi(T)$. Эту переходную область мы и будем называть NS -границей. В случае механического контакта между двумя металлами - нормальным и сверхпроводником - качественно все будет так же. Если $T \simeq T_c$, то ширина границы ($\xi(T)$) достаточно велика. Тогда мы можем провести следующее рассмотрение. Нас будет интересовать, что произойдет с электроном нормального металла, энергия которого меньше величины энергетической щели сверхпроводника, когда этот электрон налетает на NS -границу со стороны нормального металла. Это схематически изображено на рис. 55.1. По мере приближения к сверхпроводнику электрон нормального металла, находясь в точке x , оказывается уже в сверхпроводящей области, но с малой величиной щели $\Delta(x)$. При этом он становится электроноподобной частицей сверхпроводника и будет занимать ячейку \mathbf{k} -пространства, соответствующую его энергии E_k . В следующий момент, оказавшись в другой точке границы, более близкой к сверхпроводящей области, электрон окажется в области сверхпроводника с большей величиной щели, что приведет к его перемещению в новую ячейку \mathbf{k} -пространства, более близкую к k_F .

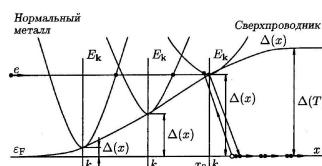


Рис. 55.1. Иллюстрация процесса андреевского отражения. Попав в область NS -границы, квазичастица (электрон) перемещается из одной ячейки \mathbf{k} -пространства в другую, постепенно меняя свой заряд по мере приближения к сверхпроводящей области.

Это приводит к уменьшению заряда такой квазичастицы. Итак, электроноподобное возбуждение, налетая из нормального металла на NS -границу, постепенно уменьшает свой заряд. Из рис. 55.1 понятно, что дойдя до точки x_0 , в которой величина щели равняется энергии квазичастицы, последняя должна будет иметь импульс, равный $\hbar k_F$, нулевую групповую скорость и, согласно (53.6), нулевой заряд ($q_{k_F} = 0$). В этой точке возбуждение отражается от границы и переходит на левую, дырочную ветвь спектра элементарных возбуждений. Его групповая скорость будет теперь направлена влево, т.е. от сверхпроводника к нормальному металлу, а заряд уже будет отрицательный. Но движение отрицательного заряда налево эквивалентно движению положительного заряда направо. Поэтому рассмотренное отражение приводит к переносу заряда из нормального металла в сверхпроводник, т.е. к течению электрического тока.

Этот процесс был впервые теоретически предсказан А.Ф.Андреевым [159] и поэтому называется андреевским отражением.

Уменьшение заряда квазичастицы по мере ее приближения к сверхпроводящей области ясно указывает на то, что и конденсат оказывается вовлеченным в процесс андреевского отражения. Заряд квазичастицы не пропадает, а передается конденсату! А физически это означает, что на границе налетающая квазичастица находит себе парную частицу и вместе с ней переходит в конденсат, а образовавшаяся дырка возвращается в нормальный металл. Так происходит переход через NS -границу той части электрического тока, которая переносится возбуждениями с энергией, меньшей энергии щели $\Delta(T)$.¹⁾ Однако, некоторое изменение энергетического спектра квазичастиц при переходе возбуждения из нормальной области в сверхпроводящую происходит и для квазичастиц с энергиями $E_k > \Delta$. Анализируя рис. 55.1, можно заметить, что замедление движения электроноподобных возбуждений и уменьшение их заряда происходит и для энергий выше щели, пока их спектр отличается от спектра возбуждений в нормальном металле. Это означает, что и при $E_k > \Delta$ только часть заряда переходит в сверхпроводник в виде квазичастичного тока, а оставшаяся часть уходит в конденсат. Иначе говоря, для электрона с энергией $E_k > \Delta$ вероятность андреевского отражения отлична от нуля, но меньше единицы. Сейчас мы покажем, как вычислить эту вероятность [160, 161].

Пусть электрон с импульсом $\hbar q^+$ и энергией $E > \Delta$ налетает на NS -границу со стороны нормального металла (так что его волновая функция есть $\psi_{\text{пад}} = e^{iq^+x}$) и с вероятностью $a^2 < 1$ отражается в виде дырки. Амплитуда такого процесса равна a , и отраженную волну можно представить в виде $\psi_{\text{отр}} = ae^{iq^-x}$, где $q^\pm = \sqrt{2m(E_F \pm E)/\hbar} \simeq k_F$. Прошедшая с вероятностью $b^2 = 1 - a^2$ в сверхпроводник квазичастица имеет как электронную $\psi_{\text{проп}}^e = bu e^{ik^+x}$, так и дырочную ($\psi_{\text{проп}}^h = bv e^{ik^+x}$) компоненты, которые могут быть записаны в виде двухкомпонентного вектора:

$$\Psi_{\text{проп}} = b \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{ik^+x} \quad (55.1)$$

Происхождение амплитуд состояний bv и bu легко понять, если заметить, что $b^2 v_k^2$ – произведение вероятности прохождения квазичастицы через NS -границу, и вероятности заполнения ячеек $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ в основном состоянии. В той же двухкомпонентной форме падающая и отраженная волны имеют вид

$$\Psi_{\text{пад}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iq^+x}; \quad \Psi_{\text{отр}} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iq^-x} \quad (55.2)$$

• Далее до конца параграфа следует материал, добавленный для 2-го издания.

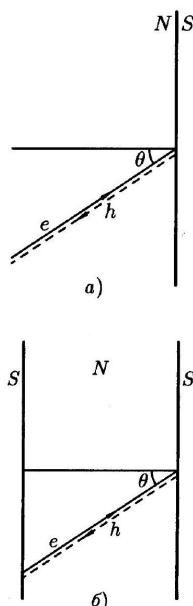
Учитывая, что все импульсы близки к $\hbar k_F$, и приравнивая амплитуды электронной и дырочной компонент справа и слева от NS-границы, получим $b = 1/u$ и $a = bv = v/u$. В результате, учитывая обсуждение в начале этого параграфа, получим для вероятности андреевского отражения:

$$A(E) = \begin{cases} a^2 = \left| \frac{v}{u} \right|^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E + \sqrt{E^2 - \Delta^2}} & \text{при } E \geq \Delta, \\ 1 & \text{при } E < \Delta. \end{cases} \quad (55.3)$$

Преобразование нормального тока в сверхток в процессе андреевского отражения происходит внутри области размером

порядка $\xi(T)$. Совсем по-другому будут себя вести возбуждения с энергией $E > \Delta$, не испытавшие андреевского отражения. Как мы скоро увидим, они могут проникать вглубь сверхпроводника на расстояния, значительно превышающие длину когерентности $\xi(T)$.

Но перед этим рассмотрим процесс андреевского отражения чуть более подробно.



б)

Рис. 55.2. а) Отражение электрона от NS-границы; б) замкнутая электрон-дырочная траектория в SNS-контакте.

Пусть электрон с энергией (относительно уровня Ферми) $E < \Delta$ налетает на NS-границу под углом θ , как показано на рис. 55.2, а). Удивительное свойство андреевского отражения состоит в том, что отраженная дырка вылетает «вспять» по траектории налетавшего электрона-т. е. при отражении меняется не только знак перпендикулярной компоненты скорости v_\perp (как при обычном отражении) но и энаки параллельных компонент \mathbf{v}_\parallel ! При этом продольные компоненты импульса частицы \mathbf{p}_\parallel не меняются вовсе (система однородна вдоль NS-границы), а поперечная компонента p_\perp изменяется лишь на величину $E/v_F \leq \hbar/\xi_0 \ll p_F$, как следует из приведенной выше на рис. 55.1 картины превращения электрона в дырку. Эта же картина позволяет понять, почему меняют знак все компоненты скорости. Действительно, скорость частицы может быть найдена ка производная от ее энергии по импульсу:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2}}{\partial p} = v_F \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\varepsilon_p}{E_p}$$

Для электронов с $p > p_F$, т.е. с $\varepsilon_p = v_F(p - p_F) > 0$, скорость \mathbf{v} направлена вдоль импульса \mathbf{p} , однако для дырок $\varepsilon_p = v_F(p - p_F) < 0$, и потому при превращении электрона

в дырку все компоненты скорости меняют знаки. Это необычное свойство андреевского отражения имеет важные следствия, одно из которых существование дискретных энергетических уровней квазичастиц с энергией $|E| < \Delta$, заключенных в нормальной области толщины d между двумя сверхпроводниками (внутри *SNS*-контакта).²⁾

Как видно из рис. 55.2, 6, теперь отраженная от правой *NS* границы дырка долетит до левой *NS*-границы, превратится на ней обратно в электрон, и полетит назад. В результате возникнет замкнутая траектория с периодом движения по ней, равным $t_{\text{пер}} = 2d/v_F|\cos\theta|$. Согласно квантовой механике, такие траектории соответствуют квантованным уровням энергии E_n , причем расстояние между соседними («андреевскими») уровнями равно

$$E_0 = E_{n+1} - E_n = 2\pi\hbar/t_{\text{пер}} = \pi\hbar v_F |\cos\theta|/d \quad (55.4)$$

При выводе (55.4) мы подразумевали, что время пролета $t_{\text{пер}}$ велико по сравнению со временем \hbar/Δ , за которое происходит каждый процесс андреевского отражения; иначе говоря, соотношение (55.4) верно для длинных *SNS*-контактов (с $d \gg \xi_0$). При этом характерное расстояние между андреевскими уровнями имеет порядок $\hbar v_F/d \ll \Delta$; подробнее о вычислении спектра андреевских уровней см. в работе [46].3)

²⁾ Разумеется, уровни энергий электронов, локализованных в области конечного размера, дискретны и в отсутствие сверхпроводника, однако тогда расстояние между ними имеет порядок $1/N(0)V$, где V -объем области локализации. Эта величина столь мала, что ее можно почти всегда пренебречь, в отличие от обсуждаемого сейчас случая андреевского отражения.

³⁾ Необходимо отметить, что утверждение об осциллирующей зависимости $I_c(d)$ критического тока от толщины контакта, сделанное в [46], является результатом ошибки; она была позднее исправлена в работе [47].

Особо надо рассмотреть роль "касательных" траекторий квазичастиц, для которых $\cos\theta \ll 1$. Если бы их не было вовсе (как в случае узкой «закоротки» с шириной меньше d), то в спектре возбуждений была бы щель порядка $E_0 = \pi\hbar v_F/d$. Чтобы оценить вклад касательных траекторий в плотность состояний $\rho(E)$, напишем элемент фазового объема, соответствующего уровню с каким-либо номером n , в виде

$$d\Omega_n = S \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi\hbar)^2} = S \frac{2\pi p_{\parallel} dp_{\parallel}}{(2\pi\hbar)^2}$$

где S -площадь контакта. Далее, поскольку для состояний с энергией, очень близкой к уровню Ферми, должно быть выполнено равенство $\mathbf{p}^2 = p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 = p_F^2$, имеем $p_{\parallel}dp_{\parallel} = p_{\perp}dp_{\perp} = p_F^2 |\cos\theta| d\cos\theta = p_F^2 (E/E_0) d(E/E_0)$. Вклад в $\rho(E)$ при $E \ll E_0$ происходит от состояний с $n = 1$ и $\cos\theta \ll 1$. Сравнивая элемент фазового объема $d\Omega_n$ с обычным трехмерным, $d\Omega = d^3 p / (2\pi\hbar)^3$, находим плотность состояний в N -области при $E \ll E_0$:

$$\rho(E) \sim N(0) \frac{E}{E_0} \quad (55.5)$$

Результат (55.5) важен для вычисления теплоемкости сверхпроводника I рода в смешанном состоянии (когда области нормального металла занимают долю B/H_{cm} полного объема) - при самых низких температурах теплоемкость приобретает малый множитель порядка $k_B T/E_0$, что и было обнаружено экспериментально [162].

Если нормальная прослойка состоит из «грязного» металла с длиной пробега $l \ll d$, понятие угла траектории θ теряет смысл направление импульса квазичастицы быстро меняется. Вместо прямолинейных траекторий теперь следует рассматривать траектории диффузационного характера, показанные на рис. 55.3. Характерное время диффузии в N -области (между последовательными отражениями от правой и левой *NS*-границ) оказывается

теперь порядка $t_{\text{дифф}} = d^2/D \gg d/v_F$, где $D = lv_F/3$ - коэффициент диффузии электронов в металле. Спектр андреевских состояний теперь оказывается непрерывным, т.к. есть непрерывный

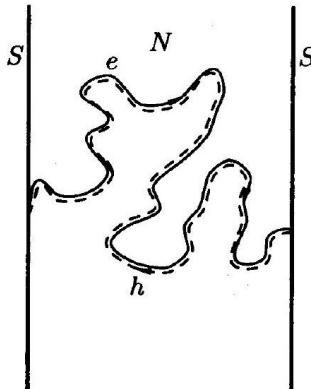


Рис. 55.3. Диффузные траектории электрона в N -области.

набор траекторий с различными периодами движения. У диффузионного движения имеется важное свойство - доля траекторий с периодами много больше $t_{\text{дифф}}$ экспоненциально мала. Соответственно, минимальная энергия квазичастицы оказывается порядка $\hbar/t_{\text{дифф}} = \hbar D/d^2 \equiv E_d$. Эта величина много меньше характерной энергии E_0 для контакта той же толщины из чистого металла, но если в чистом случае имелись (с плотностью (55.5)) состояния с энергией много меньше E_0 , то в грязном пределе уже нет выделенных траекторий, и в спектре возбуждений имеется щель величиной порядка E_d .

При ненулевой разности фаз $\varphi = \theta_\pi - \theta_\pi$ между берегами SNS -контакта положения всех андреевских уровней в нем сдвигаются [46], но расстояние между ними (55.4) остается неизменным. Особым является значение $\varphi = \pi$, при котором даже в грязном контакте щель в спектре возбуждений обращается в нуль [163].

При ненулевой разности фаз на переходе φ через него протекает сверхтекущий ток $I(\varphi)$, который представляет собой сумму токов, переносимых отдельными андреевскими уровнями, локализованными в переходе,⁴ и состояниями непрерывного спектра (с энергиями $E > \Delta$). В случае длинного контакта, $d \gg \xi_0$, существенный вклад в $I(\varphi)$ вносят оба типа состояний, соответствующие вычисления проделаны в работах [46, 47, 48]. В противоположном случае короткого контакта вклад непрерывного спектра мал, и для вычисления $I(\varphi)$ достаточно сосчитать сумму токов, переносимых андреевскими уровнями.

⁴ Обыкновенные локализованные состояния не могут переносить ток именно в силу своей локализации в пространстве. Андреевские состояния отличаются тем, что являются когерентной суперпозицией электрона и дырки, движущихся в противоположные стороны, приводя тем самым к суммарному переносу заряда.

Прежде всего заметим, что существует два различных семейства андреевских уровней - с положительными и отрицательными значениями компоненты импульса поперек перехода $p_\perp = \pm p_F \cos \theta$.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы вместо интегрирования по углу θ будем сразу считать площадь контакта S конечной, а движение в его плоскости - квантованным - состоящим из большого числа $\mathcal{M} \sim k_F^2 S$ независимых волновых мод (их также называют каналами прохождения). Ясно, что полный сверхток через контакт будет пропорционален его площади, или, что эквивалентно, числу каналов \mathcal{M} , поэтому достаточно изучить ток для отдельного j -го канала. В каждом канале будет свое семейство андреевских уровней $E_{n,(j)}^\pm$ (в дальнейшем индекс (j) будем иногда опускать).

При разности фаз $\varphi = 0$ (а также $2\pi m$ с любым целым m) энергии положительного и отрицательного уровня совпадают, $E_n^+(0) = E_n^-(0)$. Каждый из уровней несет ток

5.6.5 56*. Проводимость SIN -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

$I_n^\pm = \pm I_n$, где для длинного контакта абсолютная величина $I_n \simeq e\vartheta_F/d$. Вклады в ток от "положительных" и "отрицательных" уровней сокращаются, так что полный ток равен нулю, как и должно быть при $\varphi = 0$. При отличной от $2\pi m$ разности фаз φ вырождение уровней $E_n^\pm(\varphi)$ снимается, токи $I_n^\pm(\varphi) = (2e/\hbar)\partial E_n^\pm(\varphi)/\partial\varphi$ перестают сокращаться, и полный ток растет с увеличением φ .

В работе [164] показано, что при $T = 0$ максимальное значение $I_{(j)}^{\max}$ сверхтока в j -м канале чистого контакта произвольной длины достигается при разности фаз $\varphi \rightarrow \pi$. Величину $I_{(j)}^{\max}$ и полный критический ток контакта $I_c = \mathcal{M}I_{(j)}^{\max}$ также удается найти при произвольном соотношении d и ξ_0 :

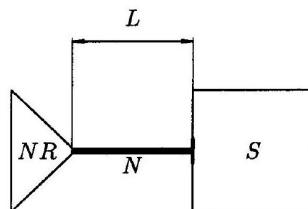
$$I_c = \mathcal{M} \frac{e}{d/v_F + \hbar/\Delta}. \quad (55.6)$$

Полный вид ток-фазового соотношения $I(\varphi)$ существенно зависит от типа контакта, соответствующие результаты получены в работах [47, 48, 165, 166, 167, 168].

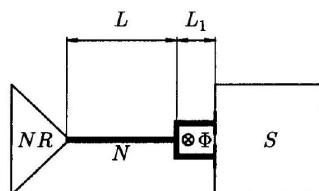
5.6.5 56*. Проводимость SIN -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

В этом параграфе мы рассмотрим удивительные явления, связанные с протеканием тока через «плохую» границу сверхпроводника с неупорядоченным нормальным проводником-т.е. границу, на которой и в нормальном состоянии происходит сильное рассеяние электронов назад. Иначе говоря, коэффициент прохождения электрона, падающего на границу двух металлов, мал (это может быть следствием как наличия изолирующего барьера, так и просто сильного различия скоростей Ферми двух проводников, что случается в контактах металлов с полупроводниками). Будет рассматриваться область температур, низких по сравнению с критической температурой сверхпроводника. Мы также ограничимся областью малых напряжений, $eV \ll \Delta$.

Мы увидим, что в такой системе (см. рис. 56.1, а) обычный закон сложения сопротивлений последовательно соединенных проводников нарушается самым возмутительным образом: полная проводимость системы растет при увеличении сопротивления нормальной проволоки, контактирующей со сверхпроводником. Кроме того, проводимость SIN -структуры резко убывает с ростом температуры или напряжения. Если же нормальный резервуар соединен со сверхпроводником «вилкой» из нормального металла с двумя контактами, как показано на рис. 56.1, б, то проводимость оказывается осциллирующей функцией магнитного потока в кольце, как бывает с критическим током в сквидах. Все



а)



б)

Рис. 56.1. а) Нормальный резервуар NR , соединенный со сверхпроводником S проволокой из неупорядоченного нормального проводника; б) нормальный резервуар NR , соединенный со сверхпроводником S «вилкой» из неупорядоченного нормального проводника.

Эти удивительные явления связаны с двумя обстоятельствами: а) перенос электронов из сверхпроводника в нормальный проводник происходит в результате андреевского отражения, которое можно представить себе как превращение куперовской пары, вылетевшей из сверхпроводника, в два невзаимодействующих электрона в нормальном проводнике; б) при низких температурах эти электроны в N -области длительное время двигаются квантово-когерентным образом и "помнят" о своем происхождении из куперовской пары.

Начнем с задачи о туннелировании (при $T = 0$) двух электронов из чистого металла через слой диэлектрика в сверхпроводник, где они образуют куперовскую пару. Процесс одноэлектронного туннелирования запрещен законом сохранения энергии (при малых $V \ll \Delta/e$), а квантовомеханическая амплитуда $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ парного туннелирования, при котором два электрона (с импульсами \mathbf{q} и \mathbf{q}') из нормального металла туннелируют в сверхпроводник, появляется во втором порядке теории возмущений по одноэлектронной туннельной амплитуде $t_{\mathbf{k},q}/\sqrt{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2}$, см. п.46.2. Эти два электрона могут образовать пару, занимающую любую из "ячеек" $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$, поэтому полная амплитуда имеет вид суммы по всем \mathbf{k} (общее выражение для амплитуды процесса второго порядка см. в 43 книге [49]):

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{1}{\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2} \sum_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{k},q} t_{-\mathbf{k},q'} u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_q - E_k} + \frac{1}{\varepsilon_{q'} - E_k} \right\}. \quad (56.1)$$

Энергетические знаменатели в формуле (56.1) равны разности энергии начального состояния $\varepsilon_q + \varepsilon_{q'}$ и виртуального возбужденного состояния (содержащего одну квазичастицу - с энергией E_k - в сверхпроводнике и один электрон - с энергией ε_q либо $\varepsilon_{q'}$ - в металле). Поскольку состояние сверхпроводника отвечает определенному значению фазы параметра порядка θ , амплитуда (56.1) должна содержать фазовый множитель $e^{i\theta}$; это обеспечивается факторами когерентности $u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}}$.

Вероятность переходов в единицу времени определяется формулой, похожей на (46.1):

$$\Gamma_A = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} |A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \delta(\varepsilon_q + \varepsilon_{q'} - 2eV) \quad (56.2)$$

Поступая по аналогии с выводом (46.3), получим для «андреевского» сопротивления SIN -границы

$$\frac{1}{R_A} = \frac{8\pi e^2}{\hbar} N^2(0) \left\langle |A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \right\rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \quad (56.3)$$

где угловые скобки означают усреднение по направлениям импульсов \mathbf{q} и \mathbf{q}' , $N(0)$ - плотность состояний на ферми-поверхности, которую считаем одинаковой для обоих металлов. Наша цель состоит в том, чтобы выразить (по порядку величины) сопротивление R_A через нормальное сопротивление границы R_n , определенное в (46.3):

$$\frac{1}{R_n} = \frac{4\pi e^2}{\hbar} N^2(0) \left\langle |t_{\mathbf{k},q}|^2 \right\rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \quad (56.4)$$

Полная проводимость границы $1/R_n$ пропорциональна ее площади S , и имеет размерность e^2/\hbar , поэтому можно написать $1/R_n \sim (e^2/\hbar) \mathcal{T} S / \lambda_F^2$, где $\lambda_F = 2\pi/k_F$ - фермиевская длина волн электрона, а $\mathcal{T} \ll 1$ - безразмерный коэффициент прохождения через барьер для падающей волны с заданным импульсом. Величина $\mathcal{M} = S/\lambda_F^2$ играет роль полного числа поперечно-квантованных мод электронных волн (так называемых "поперечных

каналов"), которые могут проходить через границу площади S . Для среднего квадрата матричного элемента $t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$, входящего в (46.3), получается оценка

$$N^2(0) \langle |t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}|^2 \rangle \sim \mathcal{T} \mathcal{M} \quad (56.5)$$

т. е. каждый канал вносит в проводимость вклад порядка $\mathcal{T} e^2 / \hbar$. Основное отличие нашего нового выражения (56.3) от формулы (46.3) состоит в том, что в него входит матричный элемент $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, который сам появляется лишь во втором порядке по туннельным матричным элементам $t_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}$. Поэтому выражение для $A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, аналогичное (56.5), имеет вид

$$N^2(0) \langle |A(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \sim \mathcal{T}^2 \mathcal{M} \quad (56.6)$$

Сравнивая эту оценку с (56.3), (56.4) и (56.5), приходим к выводу, что

$$\frac{1}{R_A} \sim \frac{e^2}{\hbar} \mathcal{T}^2 \mathcal{M} \sim \frac{\hbar}{e^2 R_n^2} \frac{1}{\mathcal{M}} \quad (56.7)$$

Первая оценка (56.7) показывает, что сопротивление SIN -границы для чистого N -металла много больше сопротивления той же туннельной границы в нормальном состоянии, если безразмерный коэффициент прохождения $\mathcal{T} \ll 1$. Вторая из оценок (56.7) означает, что при заданном нормальном сопротивлении границы R_n андреевское сопротивление уменьшается с уменьшением числа независимых каналов \mathcal{M} . Ниже мы увидим, что это сопротивление можно сильно уменьшить, добавляя в чистый нормальный металл примеси. Сравнивая это утверждение с оценками (56.7), видим, что оно эквивалентно тому, что примесное рассеяние в нормальном металле увеличивает эффективный коэффициент прохождения через SIN -границу, либо (используя вторую оценку) - что оно уменьшает количество независимых каналов \mathcal{M} .

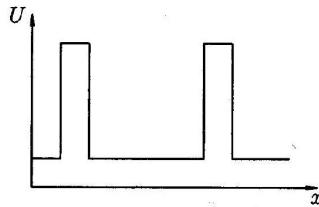


Рис. 56.2. Потенциал с двумя барьерами.

Мы проиллюстрируем происходящее на простом примере, использующем первую из оценок (56.7). Из нее следует, что в SIN системе каждый из каналов пропускает электрон с вероятностью порядка \mathcal{T}^2 , в то время как в нормальном состоянии берегов эта вероятность была $\mathcal{T} \gg \mathcal{T}^2$. Рассмотрим сначала один из таких каналов и зададимся вопросом из квантовой механики одномерного движения: можно ли увеличить коэффициент прохождения через туннельный барьер, поставив на некотором расстоянии от него еще один такой же барьер, как показано на рис. 56.2. Эту задачу легко решить, считая коэффициент прохождения \mathcal{T} через одиночный барьер малым (барьер можно аппроксимировать отталкивающим δ -функциональным потенциалом). Мы сразу приведем ответ для эффективного коэффициента прохождения при энергиях частицы вблизи резонансных значений E_n :

$$\mathcal{T}_{\text{эфф}} \simeq \frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{T}^2 + (E/E_n - 1)^2} \quad (56.8)$$

Вдали от резонансов $\mathcal{T}_{\text{эфф}} \sim \mathcal{T}^2$. Физический смысл результата (56.8) можно понять так: электрон с почти резонансной энергией $E \simeq E_n$ очень долго (в течение времени

5.6.5 56*. Проводимость SIN -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

порядка $1/\mathcal{T}$) находится на квазистационарном уровне между двумя барьераами. Поэтому «число попыток» проникнуть через каждый из барьеров возрастает в $\mathcal{T}^{-1} \gg 1$ раз, причем этот множитель относится к амплитуде прохождения через систему двух барьеров, вероятность же умножается на \mathcal{T}^{-2} , что полностью компенсирует нерезонансное значение коэффициента прохождения порядка \mathcal{T}^2 через два последовательных барьера. Заметим, что если усреднить

(56.8) по большому интервалу энергий, получится $\overline{\mathcal{T}_{\text{эфф}}} \sim \mathcal{T}$, как при классическом сложении сопротивлений.

Механизм усиления андреевской проводимости рассеянием на примесях в нормальном проводнике по существу схож с описанным выше: при длине свободного пробега $l \ll \sqrt{S}$ из-за примесного рассеяния два электрона, протуннелировавшие из сверхпроводника в нормальный металл, не сразу улетают вглубь нормальной области, а медленно диффундируют (с коэффициентом диффузии $D = v_F l/3$). При этом электроны многократно испытывают отражение от NIS -границы, что и увеличивает эффективный коэффициент прохождения. Качественную оценку величины эффекта можно получить, умножив (56.7) на количество раз \mathcal{N} , которое электрон возвращается к границе со сверхпроводником, прежде чем уйти в нормальный резервуар (обозначенный через NR на рис. 56.1, a). Величину \mathcal{N} оценим как отношение полной длины диффузационной траектории $v_F t_D$, пройденной за время $t_D \sim L^2/D$ движения в проволоке до выхода в нормальный резервуар, к длине проволоки L . Получим фактор усиления проводимости $\mathcal{N} \sim v_F L/D \sim L/l$, так что вместо (56.7) имеем

$$G_A \equiv \frac{1}{R_A} \sim \frac{\hbar}{e^2 R_n^2} \frac{v_F L}{k_F^2 S D} \sim \frac{1}{R_n^2} \frac{L}{\sigma S} = \frac{R_D}{R_n^2} \quad (56.9)$$

где $\sigma = 2e^2 N(0)D$ – удельная проводимость проволоки, а R_D ее полное сопротивление; была также использована оценка $N(0) \sim k_F^2/\hbar v_F$ для плотности состояний.

Аккуратный вывод [169, 170] дает для R_A при низких температурах и напряжениях, $\max(eV, k_B T) \ll \hbar D/L^2$, выражение, из которого следует, что формула $G_A = R_D/R_n^2$ является в действительности точной, причем для любой геометрии грязного проводника:

$$G_A = \frac{g_n^2}{2e^2 N(0)} \int d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \int_0^\infty dt P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t) \quad (56.10)$$

где g_n – удельная проводимость границы в нормальном состоянии, интегралы по \mathbf{r} и \mathbf{r}' берутся по площади границы, а функция

$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t)$ представляет собой классическую вероятность распространения диффундирующей частицы из \mathbf{r} в \mathbf{r}' за время t . Физически эта частица представляет собой «бывшую» куперовскую пару, вылетевшую в нормальный проводник. Выражение (56.10) применимо в отсутствие магнитного поля (и тока в сверхпроводнике), когда фаза параметра порядка $\theta(\mathbf{r})$ постоянна в пространстве; влияние магнитного поля мы обсудим в конце этого параграфа.

Уравнение диффузии на $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t)$ имеет обычный вид $\partial P / \partial t = D \nabla^2 P$ и решается с начальным условием $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Кроме того, имеется следующее граничное условие: $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t)$ обращается в нуль, когда \mathbf{r}' попадает на границу с нормальным резервуаром. Это условие означает, что электрон, попавший в область нормального резервуара, с подавляющей вероятностью не возвращается назад к SIN -границе. Для одномерной геометрии типа проволоки, показанной на рис. 56.1, a, можно сразу заменить интегралы по площади границы умножением на S и написать решение одномерного уравнения диффузии в виде

$$P(x, x' | t) = \frac{2}{SL} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(q_m x) \cos(q_m x') e^{-Dq_m^2 t} \quad (56.11)$$

где $q_m = (\pi/L)(m + 1/2)$. В интеграл (56.10) входит значение ряда (56.11) при $x = x' = 0$:

$$\int_0^\infty dt P(0, 0 | t) = \frac{2L}{\pi^2 SD} \sum_{m=0}^\infty (m + 1/2)^{-2} = \frac{L}{SD} \quad (56.12)$$

откуда и следует выражение в правой части (56.9). Заметим, что теперь сопротивление *SIN*-границы выразилось только через «классические» параметры - сопротивления нормальной границы и проволоки, а специфически квантовые величины типа k_F выпали из ответа.

Обсудим теперь область применимости полученного результата. Ясно, что формула (56.9) не может оставаться справедливой при произвольном увеличении длины проволоки L , иначе можно было бы сделать R_A произвольно малым. В действительности результат (56.9) работает, пока $R_D \leq R_n$, т.е. усиление андреевской проводимости за счет интерференции многократных отражений позволяет увеличить проводимость *SIN* границы до значения нормальной проводимости границы. При $R_D \geq R_n$ полное сопротивление структуры определяется уже величиной R_D , см. [171]. Другое, уже упоминавшееся, условие применимости (56.9) состоит в малости температуры и напряжения, $\max(eV, k_B T) \ll \hbar D/L^2$. Смысл этого условия состоит в том, что интерференция многократных андреевских отражений может происходить до тех пор, пока не разрушена когерентность между электронной и отраженной дырочной волнами, т.е. в течение времени $t_{coh} \sim \hbar/E$, где E - модуль энергии электрона или отраженной дырки. При заданном напряжении и температуре основной вклад в проводимость дают пары с энергией $E \sim \max(eV, k_B T)$ и соответственно со временем когерентности $t_{coh} \sim \min(\hbar/k_B T, \hbar/eV)$. Если t_{coh} становится меньше $t_D = L^2/D$, формулу (56.10) следует обобщить, введя в нее множитель, быстро убывающий при $t \geq t_{coh}$. Для оценки удобно сначала вычислить в (56.11) сумму по q_m , заменив ее интегралом, что дает $P(0, 0 | t) \simeq 1/S\sqrt{Dt}$. Подставляя это выражение в (56.10) и интегрируя до t_{coh} , получим

$$\frac{1}{R_A} \simeq \frac{R_{coh}}{R_n^2} \quad (56.13)$$

где $R_{coh} = L_{coh}/S\sigma$ - сопротивление проволоки на длине когерентности $L_{coh} = \sqrt{\hbar D / \max(eV, k_B T)}$. Формула (56.13) верна и для структур более сложной геометрии, когда сопротивление когерентной области R_{coh} связано с длиной когерентности L_{coh} нелинейным образом. Таким образом, андреевская проводимость падает с ростом температуры и/или напряжения. Этот эффект наблюдался впервые в экспериментах [172] (где в качестве нормального проводника использовалась полупроводниковая гетероструктура на основе арсенида индия) и получил наименование аномалии при нулевом смещении, (в англоязычной литературе "zero-bias anomaly").

Описанная картина усиления проводимости наводит на мысль, что проводимость должна быть чувствительна к изменению фазы интерфецирующих процессов андреевского отражения. Проще всего проверить это на структурах типа «вилки» (рис.56.1,б), включив слабое поперечное магнитное поле, не проникающее в сверхпроводник, но создающее поток $\Phi \sim \Phi_0$ в кольце, образованном зубьями вилки и сверхпроводником [173]. В этом случае выражение (56.10) приобретает вид

$$G_A^{\text{вилка}} = \frac{g_n^2}{2e^2 N(0)} \int d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' e^{i\theta(\mathbf{r}) - i\theta(\mathbf{r}')} \int_0^\infty dt P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t) \quad (56.14)$$

где $\theta \equiv \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}') = 2\pi\Phi/\Phi_0$, если координаты \mathbf{r} и \mathbf{r}' относятся к различным туннельным контактам (в противном случае $\theta = 0$). Возникновение фазовых факторов $e^{i\theta(\mathbf{r})}$ отвечает тому обстоятельству, что куперовская пара, распавшаяся на два «нормальных» электрона, пришла из области сверхпроводника с определенным значением фазы параметра порядка. В вероятность процесса входит произведение амплитуды $A(\mathbf{r}) \propto e^{i\theta(\mathbf{r})}$ на комплексно

5.6.5 56*. Проводимость *SIN*-структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

сопряженную амплитуду $A^*(\mathbf{r}')$, поэтому если точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' совпадают, фазовые факторы сокращаются. Однако в силу диффузионного характера движения электронов в металле обратный процесс превращения двух электронов в куперовскую пару может произойти в другом контакте, и тогда полного сокращения не происходит. Уравнение диффузии для $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | t)$ надо теперь решать для всей области "вилки". На временах $t \geq t_{\text{int}} = L_1^2/D$ возникает заметная вероятность того что «частица» (т.е. два электрона, вылетевшие из сверхпроводника), начавшая движение от первого контакта (с фазой параметра порядка θ_1) окажется вблизи второго контакта и перейдет в другую куперовскую пару (с фазой θ_2). Поэтому полная андреевская проводимость будет состоять из трех слагаемых:

$$G_A^{\text{влка}} = G_A^{(1)} + G_A^{(2)} + G_A^{\text{int}} \cos \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (56.15)$$

В этой сумме $G_A^{(1)}$ описывает прохождение тока через первый контакт, (а $G_A^{(2)}$ - через второй), в то время как третий член соответствует интерференции амплитуд андреевского отражения на обоих контактах. Если время когерентности t_{coh} велико по сравнению с t_{int} , а нормальные сопротивления обоих контактов примерно равны, величина G_A^{int} должна быть порядка $G_A^{(1,2)}$. Именно это и наблюдалось в эксперименте [170], который подтвердил все выводы теории. Иначе говоря, хотя движение электронов в грязном проводнике происходит диффузионно, это не мешает им проявлять волновые свойства, необходимые для интерференции. Структура типа показанной на рис. 56.1, б получила название «андреевский интерферометр» или NS-QUID.

57. Разбаланс заселенностей ветвей спектра элементарных возбуждений и электрическое поле в сверхпроводнике

В условиях равновесия электронная и дырочная ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника заселены квазичастицами симметрично. Поэтому в равновесном сверхпроводнике число электронных квазичастиц равно числу дырок, и суммарный заряд равен нулю. Кроме того, в равновесном сверхпроводнике функция распределения квазичастиц-это функция распределения Ферми

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp(E_{\mathbf{k}}/k_B T) + 1}$$

В результате каких-либо внешних воздействий равновесное распределение квазичастиц может нарушиться. Если, например, сверхпроводник подвергается электромагнитному облучению, то симметрия в распределении электронов и дырок по ветвям не нарушается. Просто квазичастицы, поглощая электромагнитную энергию, переходят на более высокие энергетические уровни. При этом может измениться величина энергетической щели. Подобные типы неравновесных процессов мы здесь не будем рассматривать.

Равновесие будет также нарушено вблизи границы с нормальным металлом, если оттуда идет поток электронов. Действительно, электроны с энергией $E_{\mathbf{k}} > \Delta(T)$ проникают в сверхпроводник и занимают ячейки \mathbf{k} -пространства, принадлежащие электронной ветви спектра. В этом случае возникает разбаланс заселенностей двух ветвей. Наша задача теперь- понять, к каким последствиям приводит разбаланс заселенностей, как и на каких характерных расстояниях он релаксирует.

Существование разбаланса заселенностей, очевидно, приводит к появлению конечного заряда квазичастиц Q в данном месте сверхпроводника:

$$Q = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}$$

где $f_{\mathbf{k}}$ -какая-то (в общем случае - неравновесная) функция распределения электронов по ячейкам \mathbf{k} -пространства.

Но суммарный заряд всех электронов сверхпроводника в каждой точке должен быть одинаковым и равным по абсолютной величине заряду ионов кристаллической решетки. Этим обеспечивается электронейтральность материала. Таким образом, если в данном месте заряд квазичастиц увеличился на величину Q , то на такую же величину должен уменьшиться заряд конденсата. Это вызовет изменение функции распределения сверхпроводящих электронов v_k^2 . На рис. 57.1 штриховой линией показано старое распределение v_k^2 , соответствующее равновесному случаю, когда $Q = 0$ и когда химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s совпадает с энергией Ферми металла.¹⁾ Поскольку площадь под кривой v_k^2 пропорциональна числу сверхпроводящих электронов, их уменьшение должно вызвать смещение границы распределения влево, т.е. уменьшение химического потенциала μ_s на величину $\epsilon_F - \mu_s$. Новое распределение v_k^2 показано на рис. 57.1 сплошной линией. Теперь мы можем легко подсчитать количество энергетических уровней, освободившихся от сверхпроводящих электронов: $2N(0)(\epsilon_F - \mu_s)$, где $N(0)$ - плотность состояний на уровне Ферми, а коэффициент 2 учитывает, что на каждом энергетическом уровне находятся два электрона с противоположными спинами. Отсюда сразу следует, что конденсат потерял заряд

$$Q = 2N(0)(\epsilon_F - \mu_s) \quad (57.1)$$

который перешел к квазичастицам.

Посмотрим, к каким последствиям это приведет.

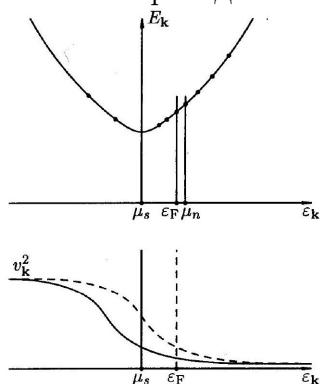


Рис. 57.1. Неравновесное распределение сверхпроводящих электронов v_k^2 и спектр квазичастиц в сверхпроводнике E_k в неравновесном состоянии. Штриховой линией показано равновесное распределение v_k^2 , когда $\mu_s = \epsilon_F$. Пель Δ сохранила свое значение, химический потенциал μ_n стал больше ϵ_F .

Поскольку неравновесный заряд квазичастиц Q будет функцией пространственной координаты x , ясно, что и неравновесный химический потенциал сверхпроводящих электронов μ_s тоже будет, согласно (57.1), функцией x . Но это означает, что в сверхпроводнике возможно существование электрического поля \mathbf{E} , которое, тем не менее, не будет ускорять конденсат. Действительно, в самом общем виде уравнение движения для сверхпроводящего электрона можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_s) = -\frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} - e\nabla\varphi - \nabla\mu_s \quad (57.2)$$

Здесь e -заряд электрона, m -его масса, \mathbf{v}_s - сверхтекущая скорость конденсата, φ -электростатический

• Функция распределения конденсатных электронов в неравновесном случае тоже будет иметь вид $v_k^2 = (1 - \epsilon_k/E_k)/2$, но $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m - \mu_s$ и $E_k = (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}$, т.е. мы считаем, что конденсат успевает подстроиться под данное неравновесное распределение квазичастиц. Легко проследить, что появление разбаланса заселенностей ветвей не изменяет величину энергетической щели.

потенциал, \mathbf{A} векторный потенциал, точка означает дифференцирование по времени. В стационарных условиях $d(m\mathbf{v}_s)/dt = \dot{\mathbf{A}} = 0$, поэтому сверхпроводящие электроны не ускоряются. Но это означает, что в стационарных условиях в сверхпроводнике должен быть постоянным в пространстве электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов φ_{ex}

$$\varphi_{Jx_s} = e\varphi + \mu_s = \text{const.} \quad (57.3)$$

Это, однако, не исключает существования электрического поля, которое, согласно (57.3), будет равно

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{e}\nabla\mu_s$$

Используя (57.1), имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2eN(0)}\nabla Q \quad (57.4)$$

Итак, мы приходим к выводу, что в неравновесных условиях, при наличии градиента заряда квазичастиц сверхпроводника, в нем возникает электрическое поле, которое, в то же время, не будет ускорять конденсат, так как компенсируется градиентом химического потенциала сверхпроводящих электронов. Подчеркнем еще раз, что на сверхпроводящие электроны действует градиент электрохимического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla\varphi_{3x_s}$, который, согласно (57.3), равен нулю.

Существование в данном месте сверхпроводника стационарного, но неравновесного заряда квазичастиц с плотностью Q означает, что в данное место непрерывно идет поток квазичастиц, приносящих некоторый заряд, который в то же время релаксирует, переходя в конденсат. Это условие выражается простым соотношением:

$$\text{div } \mathbf{j}_n = -eQ/\tau_Q \quad (57.5)$$

где \mathbf{j}_n - нормальная компонента полного тока. Это соотношение справедливо приближенно, когда щель мала ($\Delta \ll k_B T_c$), т. е. когда температура близка к критической. Более строго этот вопрос рассматривается в [156]. В этом же приближении, когда $T \simeq T_c$, мы можем пренебречь изменением химического потенциала квазичастиц по сравнению с изменением химического потенциала сверхпроводящих электронов, т.е. $\varepsilon_F - \mu_s \gg \mu_n - \varepsilon_F$ (см. рис. 57.1). Действительно, при $T \simeq T_c$ в конденсате электронов мало, а коллектив нормальных электронов велик. Поэтому удаление некоторого количества электронов из конденсата и перенос их в коллектив нормальных электронов приведет к значительно более сильному изменению свойств конденсата (уменьшение μ_s), чем свойств коллектива нормальных электронов.

Учитывая это, можно написать закон Ома для возбуждений в обычной форме:

$$\mathbf{j}_n = \sigma\mathbf{E}$$

где σ -нормальная проводимость при низких температурах: $\sigma^{-1} = \rho_{\text{ост}}$, где $\rho_{\text{ост}}$ - остаточное удельное сопротивление. ²⁾ Беря дивергенцию от правой и левой частей этого равенства и подставляя сюда формулы (57.4) и (57.5), получим

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q \quad (57.6)$$

где

²⁾ Остаточное удельное сопротивление проводника - это удельное сопротивление, экстраполированное к абсолютному нулю температуры.

$$\lambda_Q^2 = \frac{\sigma \tau_Q}{2e^2 N(0)} \quad (57.7)$$

Поскольку проводимость нормального металла σ можно записать в виде ³⁾

$$\sigma = \frac{2}{3} e^2 N(0) l v_F$$

где l - длина свободного пробега электрона, а v_F - скорость электрона на поверхности Ферми, имеем окончательно

$$\lambda_Q = \left(\frac{l v_F \tau_Q}{3} \right)^{1/2} = (D \tau_Q)^{1/2} \quad (57.8)$$

где D -коэффициент диффузии для электронов, $D = l v_F / 3$.

Рассмотрим теперь самый простой случай. Пусть образцом будет настолько тонкая проволока, что задачу можно считать одномерной. Направим ось x вдоль проволоки и будем считать материал проволоки нормальным для $x < 0$ и сверхпроводящим для $x > 0$. Пусть по проволоке течет ток в положительном направлении оси x . Тогда уравнение (57.6) примет вид

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_Q^2} Q \quad (57.9)$$

Ясно, что далеко от границы (при $x \rightarrow \infty$) $Q \rightarrow 0$, так как там будет просто равновесный сверхпроводник без какого-либо заряда квазичастиц. Тогда решением уравнения (57.9) будет функция

$$Q \propto e^{-x/\lambda_Q} \quad (57.10)$$

Соответственно, в сверхпроводнике возникнет электрическое поле, которое, согласно (57.4), будет равно

$$E = E_0 \exp(-x/\lambda_Q) \quad (57.11)$$

где E_0 - электрическое поле на границе. Если пренебречь андреевским отражением, а при $T \simeq T_c$ это можно сделать, поле E_0 на границе будет равно электрическому полю в нормальном металле, т.е. при $x < 0$.

Таким образом, λ_Q имеет смысл глубины проникновения электрического поля в сверхпроводник. Согласно (57.11), электрическое поле экспоненциально затухает на расстоянии λ_Q от границы. Оценим глубину проникновения электрического поля. Согласно (57.7), $\lambda_Q \propto \tau_Q^{1/2}$, а τ_Q , согласно (54.1), пропорционально Δ^{-1} . Поскольку $\Delta \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$, имеем

$$\lambda_Q \propto (1 - T/T_c)^{-1/4} \quad (57.12)$$

т. е. λ_Q расходится при $T \rightarrow T_c$. Таким образом, при достаточной близости к критической температуре электрическое поле может проникнуть в сверхпроводник на большое расстояние. Поскольку характерным значением для τ_Q является величина порядка $(10^{-10} \div 10^{-9})$ с, то для $v_F \sim 10^8$ см/с и, скажем, для $l \sim 10^{-5}$ см имеем $\lambda_Q \sim (1 \div 10)$ мкм, т. е. глубина проникновения электрического поля может превзойти все характерные длины сверхпроводника. Если не подходить слишком близко к T_c , то можно получить $\lambda_Q \gg \xi(T)$.

Итак, подведем итоги. Если через границу между нормальным металлом и сверхпроводником течет электрический ток, то в сверхпроводнике возникает электрическое поле. Оно затухает

³⁾ См., например, [7].

от границы в глубину сверхпроводника на расстоянии λ_Q , которое может быть макроскопически большим. В этой области существует дивергенция нормального тока ∇j_n (см. (57.5)). Но полный ток $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n$ (где \mathbf{j}_s - плотность сверхтока), конечно, в стационарных условиях не имеет дивергенции. Поэтому имеем

$$\nabla \mathbf{j}_n = -\nabla \mathbf{j}_s$$

т. е. в области сверхпроводника длиной λ_Q вблизи границы с нормальным металлом происходит преобразование нормального тока в сверхток. Это можно интерпретировать еще и так. Согласно рис. 57.1, в этой «неравновесной» области $\mu_n > \mu_s$. Поэтому можно сказать, что здесь идет "химическая реакция" по превращению вещества с химическим потенциалом μ_n в вещество с химическим потенциалом μ_s .

Все рассмотрение этого параграфа относится к случаю, когда поток электронов идет из нормального металла в сверхпроводник. Однако вся картина оказывается симметричной при обращении направления тока. Только теперь из нормального металла на сверхпроводник налетают дырки, а отражаются по-андреевски электроноподобные квазичастицы. А разбаланс заряда элементарных возбуждений сверхпроводника в области порядка λ_Q около границы такой, что заселенность дырочной ветви больше, чем электронной.

III-з.

57.1. Исходя из требования электронейтральности было получено существование электрического поля E в сверхпроводнике вблизи его границы с нормальным металлом, если через эту границу идет электрический ток. Согласно (57.11), $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$. Но тогда в области порядка λ_Q около границы должна существовать объемная плотность электрического заряда ρ , определяемая уравнением Пуассона $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Не противоречит ли это исходному предположению об электронейтральности?

Решение Покажем, что объемная плотность заряда ρ , которая действительно возникнет в переходной области размером λ_Q , будет на много порядков меньше объемной плотности заряда квазичастиц eQ . Уравнение Пуассона можно написать приближенно в виде $E/\lambda_Q \simeq 4\pi\rho$, или $\rho \simeq E/(4\pi\lambda_Q)$. С другой стороны, согласно (57.5), $Q \simeq j_n\tau_Q/(e\lambda_Q) = \sigma\tau_Q E/(e\lambda_Q)$, откуда $\rho/(eQ) \simeq (4\pi\tau_Q\sigma)^{-1} = (8\pi\tau_Q e^2 N(0) l_{v_F}/3)^{-1}$. Если принять, что $\tau_Q \sim 10^{-10}\text{с}$, $N(0) \sim 10^{33} \text{ эр}^{-1} \text{ см}^{-3}$, $l \sim 10^{-8}\text{сМ}$, $v_F \sim 10^8 \text{ см/с}$, то даже в этом случае будет $\rho/(eQ) \sim 10^{-5}$.

58. Экспериментальное исследование неравновесного состояния сверхпроводника около NS -границы

58.1. Опыты Ю и Мерсеро. В этом разделе будут описаны результаты необычайно изящных экспериментов Ю и Мерсеро [174]. Этими опытами было однозначно показано, что действительно в области сверхпроводника, прилегающей к границе с нормальным металлом, когда через эту границу идет электрический ток, электрохимические потенциалы сверхпроводящих электронов и нормальных электронов отличаются друг от друга.

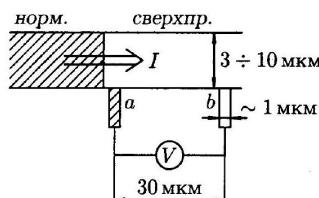


Рис. 58.1. Схема опыта Ю и Мерсеро [174]. Потенциометрические выводы a и b подсоединенены к вольтметру. Если a - нормальный вывод, вольтметр показывает разность электрохимических потенциалов квазичастиц и конденсата. Если a -сверхпроводящий вывод,

5.6.5 56*. Проводимость SIN -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

вольтметр ничего не показывает. Показания вольтметра не зависят от того, является вывод b нормальным или сверхпроводящим.

Пленка тантала толщиной около 250 \AA имеет критическую температуру около 4.1 K . Если часть этой пленки с помощью процесса анодизации сделать более тонкой (около 100 \AA), то критическая температура этой части пленки упадет до 3.5 K . Если температура пленки будет лежать между 3.5 K и 4.1 K , то одна часть пленки будет нормальной, а другая сверхпроводящей. Если теперь пропустить ток через пленку, то, согласно (57.3), электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов φ_{ex} будет постоянным в пространстве. Поэтому сверхпроводящие потенциометрические выводы a и b (рис. 58.1) подадут на зажимы вольтметра равные электрохимические потенциалы, и вольтметр ничего не покажет. Если, однако, потенциометрический вывод a , непосредственно прилежащий к NS -границе, сделать из нормального металла, то он подаст на левый зажим вольтметра электрохимический потенциал нормальных электронов, который здесь отличается от φ_{ex}_s . Это отличие релаксирует на расстоянии λ_Q от границы. Если расстояние между выводами a и b больше λ_Q , то вывод b подаст на правый зажим вольтметра электрохимический потенциал сверхпроводящих электронов (который здесь, в условиях равновесия, равен электрохимическому потенциальному квазичастицы). В результате вольтметр покажет разность между электрохимическими потенциалами нормальных и сверхпроводящих электронов в непосредственной близости от NS -границы.

Результат эксперимента, когда вывод a - нормальный, показан на рис. 58.2.

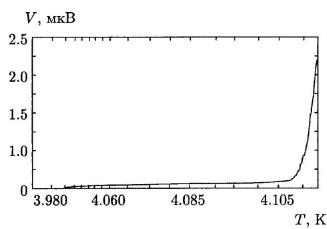


Рис. 58.2. Результат опыта Ю и Мерсеро [174]. Вольтметр измеряет разность электрохимических потенциалов сверхпроводящих и нормальных электронов в области неравновесности.

Однако наиболее элегантным оказался следующий эксперимент тех же авторов. Расположив оба потенциометрических вывода в неравновесной области сверхпроводника близко друг от друга (как показано на рис. 58.3), но так, чтобы к NS -границе прилегал сверхпроводящий вывод b , а нормальный вывод a был бы несколько удален от границы, Ю и Мерсеро наблюдали изменение знака показаний вольтметра при том же направлении тока через пленку.

Результаты этих опытов прекрасно подтверждают основные представления, развитые в предыдущих параграфах.

Действительно, если, как показано на рис. 58.3, ток в пленке течет из S в N , то в неравновесной области сверхпроводника около границы происходит «химическая реакция»: сверхпроводящие электроны \rightarrow нормальные электроны, т.е. химический потенциал μ_s в этой области больше химического потенциала μ_n . Поэтому ток в вольтметре пойдет от вывода b к выводу a (как показано на рис. 58.3). По этой же причине ток в вольтметре тоже пойдет от b к a , и показания вольтметра изменят знак.

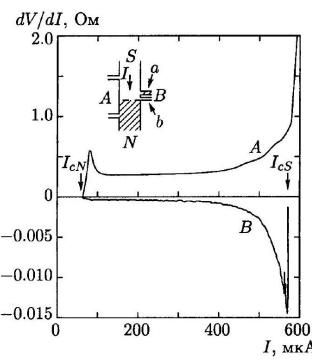


Рис. 58.3. Результаты опыта Ю и Мерсеро [174]: дифференциальное сопротивление как функция тока через пленку. Напряжение между выводами B имеет знак, противоположный знаку напряжения между выводами A . Ток идет от сверхпроводящего вывода к нормальному (заштрихован).

58.2. Избыточное сопротивление NS -границы. Другим интересным проявлением неравновесных процессов, возникающих в сверхпроводнике вблизи NS -границы, когда через эту границу течет ток, является избыточное электрическое сопротивление этой границы. Это очень легко понять физически. Действительно, рассмотрим для определенности случай, когда поток электронов идет из нормального металла N в сверхпроводник S . Те электроны в N , энергия которых меньше щели $\Delta(T)$ в S , отразятся по-андреевски, и их ток превратится в ток сверхпроводящих электронных пар. Это произойдет на расстоянии $\xi(T)$ от границы, и никакого вклада в сопротивление этот процесс не даст. Иное дело - те электроны в N , энергия которых больше щели $\Delta(T)$. Они, попадая в S , оказываются на электронной ветви спектра элементарных возбуждений сверхпроводника. Как было показано в предыдущем параграфе, это влечет за собой появление разбаланса заряда квазичастиц Q и появление электрического поля E , которое затухает на расстоянии λ_Q вглубь сверхпроводника. Однако существование электрического поля в области λ_Q сверхпроводника около NS -границы означает, что эта область дает вклад в общее падение напряжения, т.е. в полное сопротивление цепи. Это и будет так называемое избыточное сопротивление NS -границы. Если бы все электроны, переносящие ток, испытывали ускорение под действием этого электрического поля, то избыточное сопротивление было бы просто равно

$$R_{изб} = \rho \lambda_Q / S,$$

где ρ - удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном состоянии, а S - площадь его поперечного сечения. Учтем, однако, теперь, что не все электроны ускоряются под действием поля E . Действительно, те электроны, которые находятся в конденсате, как мы уже видели, под действием поля E не ускоряются, так как действие поля E в точности скомпенсировано действием градиента химического потенциала сверхпроводящих электронов $\nabla \mu_s$. Этим свойством будут обладать все электроны, идущие из N в S , с энергией, меньшей щели $\Delta(T)$ (отражаются по-андреевски), а также доля квазичастиц с энергией $E_k \geq \Delta(T)$. Эта доля определяется тем обстоятельством, что инжектированный из N в S электрон, оказавшись в S и имея заряд q_k , «потерял» часть заряда $1 - q_k$, которая ушла в конденсат. Эта часть заряда проходит NS -границу по-андреевски. Именно эта часть заряда $1 - q_k$ и не участвует в создании избыточного сопротивления. Поэтому избыточное сопротивление следует писать в виде

$$R_{изб} = Z(T) \rho \lambda_Q / S,$$

где коэффициент $Z(T)$ учитывает последнее обстоятельство, т.е. это доля всех электронов, которые переходят NS -границу не поандреевски. Ясно, что при $T \rightarrow 0$ все электроны

5.6.5 56*. Проводимость SIN -структур при низких температурах. Андреевский интерферометр

идут через NS -границу по-андреевски, и $Z(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Наоборот, при $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta(T) \rightarrow 0$, и подавляющее большинство электронов идет через NS -границу не по-андреевски, т.е. с созданием сопротивления. При этом $Z(T \rightarrow T_c) \rightarrow 1$. Поэтому $R_{\text{изб}}(T)$ будет представлять собой монотонную функцию температуры: ¹⁾

$$R_{\text{изб}}(T \rightarrow 0) = 0, \quad R_{\text{изб}}(T \rightarrow T_c) = \rho \lambda_Q / S$$

Температурная зависимость $R_{\text{изб}}$ в последнем случае ($T \rightarrow T_c$) определяется температурной зависимостью λ_Q (57.12):

$$\lambda_Q \propto (1 - T/T_c)^{-1/4}$$

Этот вывод неплохо согласуется с экспериментом.

В качестве примера на рис. 58.4 приведены результаты опытов с семью разными образцами типа SNS . По оси ординат отложено избыточное сопротивление NS -границы.

58.3. Центры проскальзывания фазы. В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены стационарные неравновесные процессы. Сейчас мы познакомимся с нестационарными неравновесными процессами.

В 18, где рассматривался критический ток в тонкой пленке, было показано, что при критическом токе распаривания не происходит фазового перехода в нормальное состояние. Было показано, что при $I = I_c$ просто становится недостаточно сверхпроводящих носителей (т.е. куперовских пар), готовых перенести

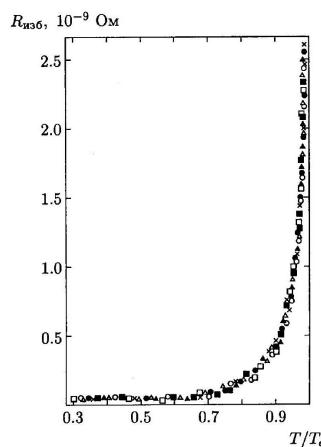


Рис. 58.4. Температурная зависимость избыточного сопротивления NS -границы в сэндвичах $Ta – Cu – Ta$ [177] по семи образцам.

заданный ток I . Значит, при $I > I_c$ возникает какое-то специфическое резистивное состояние, с которым мы сейчас и познакомимся.

Обратимся сперва к результатам эксперимента. Наиболее удобно это резистивное состояние изучать на квазиодномерных объектах, т.е. на тонких длинных сверхпроводящих нитях, диаметр которых $d \leq \xi(T)$. В этом случае размер нити столь мал, что в ней не сможет поместиться абрикосовый вихрь с нормальной сердцевиной (радиуса порядка $\xi(T)$), и изучаемое резистивное

¹⁾ Расчету $Z(T)$ посвящено несколько теоретических работ. См., например, работы [175, 176].

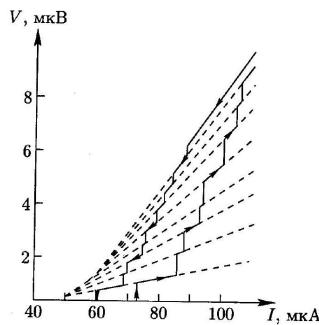


Рис. 58.5. Вольт-амперная характеристика монокристаллической оловянной нити: длина 0.8 мм, площадь поперечного сечения 1.93 мкм²[178].

состояние не будет маскироваться эффектами, характерными для резистивного состояния в сверхпроводниках второго рода. На рис. 58.5 приведена вольт-амперная характеристика тонкого монокристаллического вискера из олова. Видно, что напряжение на проводнике нарастает ступенями, причем после каждого скачка напряжения сопротивление образца (наклон характеристики) увеличивается.

Такое поведение образцов в резистивном режиме объясняется моделью, предложенной Скочполом, Бисли и Тинкхамом [179]. Это так называемая модель центров проскальзывания фазы.

Представим себе, что в каком-то месте нити критический ток немного меньше, чем в других местах этой нити. Тогда при увеличении тока через нить именно в этом месте будет впервые достигнут критический ток. При дальнейшем увеличении тока возникает движение нормальных электронов, а это приводит к появлению электрического поля, которое ускорит сверхпроводящие электроны до критической скорости. Пары распадутся, модуль параметра порядка $|\psi|$ в этом месте станет равным нулю, весь ток будет переноситься только нормальной компонентой. Но образование электронных пар по-прежнему выгодно, поэтому снова возникает $|\psi|$, снова часть тока будет переноситься сверхпроводящими электронами, т. е. сверхтоком, и весь процесс будет повторяться. При каждом таком цикле разность фаз волновых функций сверхпроводящих электронов с обеих сторон от рассматриваемого места будет меняться на 2π , и поэтому это место называется центром проскальзывания фазы. Размер этого центра - это, конечно, размер области, в которой происходит пульсация $|\psi|$, т. е. порядка $2\xi(T)$.

В момент, когда $|\psi| = 0$, эта область находится в нормальном состоянии, и поэтому электрическое поле проникает в прилежащие к ней области сверхпроводника на расстояние порядка λ_Q (см. 57). Поэтому при возникновении одного центра проскальзывания фазы появляется сопротивление $\rho \cdot 2\lambda_Q/S$, где ρ - удельное сопротивление материала нити, S - площадь ее поперечного сечения. Падение напряжения на этом сопротивлении будет давать только нормальная компонента тока $I_n = I - I_s$. Усредним это выражение по времени: I - заданный постоянный ток и от времени не зависит; сверхток I_s пульсирует во времени между I_c и нулем. Примем поэтому, что $\bar{I}_s = \beta I_c$, где $\beta \sim 0.5$. Тогда для среднего напряжения на одном центре проскальзывания фазы имеем

$$\bar{V} = 2\lambda_Q \rho (I - \beta I_c) / S \quad (58.1)$$

Эта формула, несмотря на свою простоту, хорошо описывает результаты экспериментов.

При дальнейшем увеличении тока появится второй центр проскальзывания фазы, потом третий и т.д. Каждый раз при появлении такого центра будет скачком увеличиваться полное напряжение на нити, и крутизна вольт-амперной характеристики будет увеличиваться, так как каждый раз будут включаться все новые и новые резистивные участки. Все это можно проследить на рис. 58.5.

5.6.6 59. Неравновесное усиление сверхпроводимости

В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда отклонение от равновесной функции распределения является симметричным, т.е. неравновесное распределение квазичастиц на обеих ветвях спектра элементарных возбуждений одинаково. Теперь, в противоположность всем ранее рассмотренным случаям неравновесных процессов, отклонение от равновесия сопровождается изменением энергетической щели Δ .

Создание симметричного неравновесного распределения можно осуществить, скажем, посредством электромагнитного облучения сверхпроводника на частоте $\omega < 2\Delta/\hbar$. Тогда энергии квантов, падающих на сверхпроводник, будет недостаточно для разрыва пар, но хватит, чтобы переместить элементарные возбуждения на более высокие уровни спектра элементарных возбуждений. Такое неравновесное распределение квазичастиц должно привести к увеличению щели и к повышению критической температуры.

Действительно, освобождая нижние уровни спектра элементарных возбуждений, мы открываем возможность электронным парам конденсата совершать переходы в эти состояния \mathbf{k} -пространства, и тем самым увеличиваем число слагаемых в сумме (45.14), определяющей энергетическую щель. Существует ряд экспериментальных результатов, подтверждающих эти представления. Так, в работе [180] было обнаружено увеличение критического тока сверхпроводящих мостиков, подвергаемых облучению на сверхвысоких частотах. Теоретическое рассмотрение этих эффектов содержится в работах Элиашберга [181].

60. Продольный термоэлектрический эффект (эффект Зеебека) в сверхпроводниках

Долгое время считалось, что в сверхпроводниках термоэлектрические эффекты отсутствуют. Однако это не так. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим сперва продольный термоэлектрический эффект в нормальном металле.

Пусть два конца массивного куска нормального металла имеют разные температуры T_1 и T_2 , т. е. внутри металла существует градиент температуры ∇T . Это значит, что на свободные электроны металла действует сила, стремящаяся переместить электроны от более нагретого конца к более холодному. Но накопление противоположных зарядов на противоположных концах образца приводит к появлению электрического поля внутри образца, которое будет действовать на электроны в противоположном направлении (от холодного конца к нагретому). В стационарных условиях эти силы уравниваются, и между концами образца устанавливается постоянная разность потенциалов V , которая и называется термоэлектродвижущей силой (термо-ЭДС):

$$V = \alpha (T_1 - T_2)$$

здесь α -абсолютная дифференциальная термо-ЭДС металла.

Процесс переноса тепла в сверхпроводнике сопровождается совсем другими электронными явлениями.¹⁾ Пусть опять два конца массивного куска металла, на этот раз сверхпроводника, находятся при разных температурах T_1 и T_2 . Снова под действием градиента температуры ∇T нормальные возбуждения сверхпроводника будут испытывать силу, которая создаст ток нормальных возбуждений:

$$\mathbf{j}_n = \sigma \alpha \nabla T \tag{60.1}$$

где σ -проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии. В ответ немедленно возникнет противоток сверхпроводящей компоненты \mathbf{j}_s , который полностью скомпенсирует нормальный ток \mathbf{j}_n . Действительно, согласно (60.1), ток \mathbf{j}_n - потенциальный ток, т. е. $\text{rot } \mathbf{j}_n = 0$. Это значит, что если полный ток \mathbf{j} равен

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$$

¹⁾ См. обзор [182].

то $\text{rot } \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{j}_s$. Сверхток \mathbf{j}_s должен удовлетворять в стационарных условиях уравнению Лондонов. Взяв ротор от обеих частей (5.17), получим

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c} \mathbf{H}$$

значит, в нашем случае справедливо уравнение

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \mathbf{H} \quad (60.2)$$

Используя теперь уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$, мы приходим к хорошо известному уравнению для магнитного поля:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H}$$

из которого следует эффект Мейсснера - Оксенфельда. Таким образом, и при потоке тепла через сверхпроводник полный ток в глубине массивного однородного изотропного сверхпроводника должен равняться нулю:

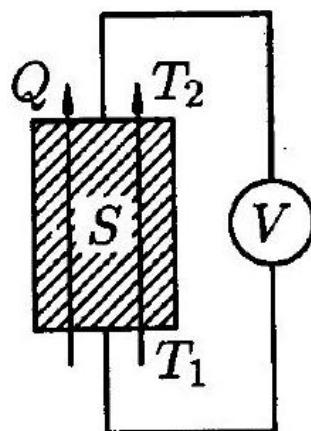
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s = 0$$

т. е. $\mathbf{j}_n = -\mathbf{j}_s$.

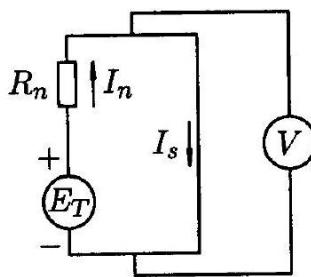
Это значит, что нормальные возбуждения сверхпроводника, гонимые градиентом температуры, подходя к краю сверхпроводника, превращаются в сверхпроводящие носители, т. е. электронные пары, и текут обратно, образуя противоток \mathbf{j}_s . Очень наглядно этот процесс можно изобразить с помощью эквивалентной схемы (рис. 60.1). Будем считать, что нормальные возбуждения испытывают действие электродвижущей силы E_T , созданной разностью температур:

$$E_T = \alpha (T_1 - T_2)$$

Под действием этой ЭДС в цепи возникает ток $I_n = E_T / R_n$, который протекает обратно по сверхпроводящему участку в виде сверхтока I_s . Теперь понятно, что вольтметр, изображенный на рис. 60.1, ничего не покажет, так как он зашунтируирован сверхтоком. Этим и объясняется, почему долгое время считалось, что в сверхпроводнике термоэлектрические эффекты отсутствуют.



a)



б)

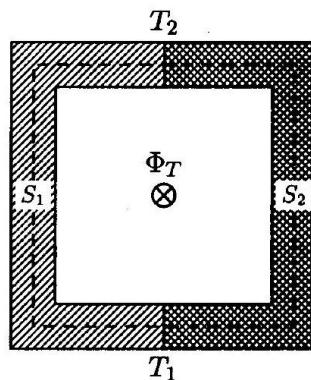
Рис. 60.1. а) Сверхпроводник, через который идет поток тепла $Q, T_1 > T_2;$) эквивалентная схема сверхпроводника, концы которого имеют разную температуру (R_n - сопротивление образца в нормальном состоянии, E_T - термо-ЭДС, действующая на нормальные возбуждения).

В 62 мы вернемся к обсуждению продольного термоэлектрического эффекта в сверхпроводниках II рода со слабым пиннингом и в джозефсоновских переходах, рассмотрев вначале обнаруженный первым в 1974 г. термоэлектрический эффект в биметаллическом сверхпроводящем кольце.

5.6.7 61. СП «термопара» и магнитный поток от потоков тепла

Сейчас мы увидим, что термоэлектрические эффекты в сверхпроводниках все-таки можно наблюдать. Рассмотрим два массивных сверхпроводника из разных материалов, которые приведены в контакт друг с другом и образуют замкнутый контур, как показано на рис.61.1. Пусть области контактов находятся при разных температурах T_1 и T_2 .

Рис. 61.1. Сверхпроводящая «термопара». Во внутренней полости возникает магнитный поток Φ_T , пропорциональный разности температур ($T_1 - T_2$).



В каждой из половинок S_1 и S_2 возникает свой ток $\mathbf{j}_n = \sigma\alpha\nabla T$. Ответный сверхток в глубине сверхпроводника $\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_n$ и, согласно второму уравнению Гинзбурга - Ландау (14.18), может быть записан в виде

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar n_s e}{2m} \nabla \theta - \frac{e^2}{mc} n_s \mathbf{A} \quad (61.1)$$

где n_s - плотность сверхпроводящих электронов, e и m -соответственно заряд и масса свободного электрона, θ - фаза волновой функции теории ГЛ, \mathbf{A} -векторный потенциал.

Учитывая (60.1), имеем

$$\nabla \theta = \frac{2m}{\hbar n_s e} (-\sigma\alpha\nabla T) + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}. \quad (61.2)$$

Проинтегрируем теперь это уравнение по штриховому контуру (рис.61.1), проходящему внутри нашего биметаллического сверхпроводящего кольца далеко (по сравнению с глубиной

проникновения λ) от его краев. Требование однозначности волновой функции теории Гинзбурга-Ландау приводит к известному уже равенству:

$$\oint \nabla \theta dl = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61.3)$$

Интегрируя правую часть равенства (61.2) и используя (61.3), имеем

$$2\pi n = -\frac{2m}{\hbar e} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}$$

Это значит, что полный магнитный поток внутри нашего биметаллического кольца можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 n + \Phi_T \quad (61.4)$$

где

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) dT \quad (61.5)$$

Индексы 1 и 2 в подынтегральном выражении относятся соответственно к сверхпроводникам S_1 и S_2 .

Из выражений (61.4) и (61.5) следует, что даже в том случае, когда в биметаллическом кольце нет замороженного магнитного потока, т. е. $n = 0$, все равно при приложении разности температур к местам контактов S_1 и S_2 внутри кольца возникнет индуцированный магнитный поток Φ_T . Этот поток создается сверх током, который возникает на внутренней поверхности биметаллического кольца. Если в интервале температур $T_1 < T < T_2$ величины σ, α и n_s можно считать не зависящими от температуры, формула (61.5) упрощается:

$$\Phi_T = \Phi_0 \frac{m}{\pi e \hbar} \left(\frac{\sigma_1 \alpha_1}{n_{s1}} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{n_{s2}} \right) \Delta T$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$.

Если предположить, что $\sigma \sim 10^7 (\text{ОМ}\cdot\text{М})^{-1}$, $\alpha \sim 10^{-6} \text{ В/К}$, $n_s \sim 10^{28} \text{ М}^{-3}$, то для $\Phi_T / \Delta T$ получим величину порядка $10^{-5} \Phi_1$ на кельвин. Измерение такого потока находится на пределе возможности сквида.

При приближении к T_c эффект будет увеличиваться, так как плотность сверхпроводящих электронов при этом стремится к нулю. Подобные эксперименты были проведены [183, 184], и, действительно, наблюдался магнитный поток Φ_T , индуцированный градиентом температуры в биметаллическом кольце. Величина его, однако, оказалась существенно больше теоретической оценки. Причины такого расхождения пока неясны.

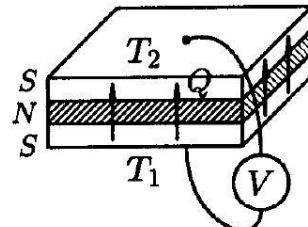
5.6.8 62. Термоэлектрические эффекты в JJ и СП II рода со слабым пиннингом

В этом параграфе мы покажем, что индуцирование сверхпроводящего тока потоком тепла может приводить не только к появлению измеримого магнитного потока, но и к возникновению заметного термоэлектрического напряжения. Это напряжение является следствием возбуждения джозефсоновской генерации в мостике слабой связи, или движения магнитного потока в сверхпроводниках со слабым пиннингом. В обоих случаях сверхпроводящая система должна иметь довольно низкий критический ток, чтобы достижимые в эксперименте термоэлектрические токи могли приводить к диссипации, т.е. к изменению во времени сверхпроводящей разности фаз.

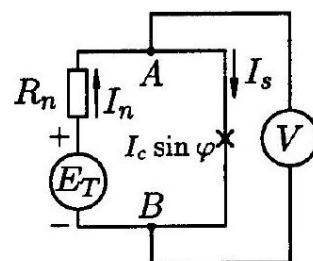
62.1. Джозефсоновский SNS-переход в потоке тепла.

В джозефсоновских переходах можно наблюдать сильные и интересные термоэлектрические явления. Наиболее ярко они проявляются в переходах типа сверхпроводник - нормальный металл сверхпроводник (*SNS*). Как будет видно из дальнейшего, это связано с тем, что в таком типе джозефсоновских переходов фазовая когерентность двух сверхпроводящих обкладок может осуществляться через довольно толстый слой нормальной прослойки (толщиной порядка 10 мкм). Такие переходы имеют очень малое значение характерного напряжения V_c и способны переносить за счет нормальных термоэлектрических токов необходимые потоки тепла при малых разностях температур на берегах сэндвича. Эти термоэлектрические процессы мы рассмотрим в данном разделе, а в следующих двух разделах будут обсуждаться термоэлектрические явления в протяженных джозефсоновских переходах и сверхпроводниках II рода в присутствии магнитного поля.

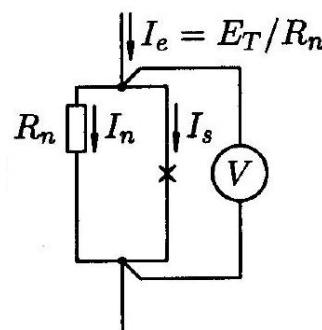
Пусть джозефсоновский переход типа *SNS* помещен в поток тепла (рис. 62.1, а). Снова зададимся вопросом: «Что покажет вольтметр, подключенный к такому совершенно автономному переходу?» Эквивалентная схема этого перехода подскажет ответ (рис. 62.1, б). Здесь в эквивалентную схему джозефсоновского перехода (рис. 22.1) включен источник термо-ЭДС $E_T = \alpha(T_1 - T_2)$, где α -абсолютная дифференциальная термо-ЭДС материала нормальной прослойки, а T_1 и T_2 -температуры сверхпроводящих обкладок в местах, непосредственно примыкающих к нормальной прослойке. Из рис. 62.1, б очевидно, что термо-ЭДС E_T создает в замкнутой цепи ток, который течет по нормальному участку в виде нормального тока I_n , а по собственно джозефсоновскому участку - в виде сверхтока $I_s = I_c \sin \varphi$, где φ -разность фаз волновой функции сверхпроводящих электронов у *S*-обкладок перехода. Здесь I_c -критический ток перехода.



а)



б)



в)

Рис. 62.1. а) Джозефсоновский *SNS*-переход в потоке тепла, перепад температур на нормальной прослойке равен $(T_1 - T_2)$; б) эквивалентная схема такого перехода, E_T - термо-ЭДС, генерируемая потоком тепла в нормальной прослойке; в) схема, соответствующая уравнению (62.5).

Напряжение V_{AB} между точками A и B (рис. 62.1, б) должно удовлетворять уравнению

$$E_T - I_n R_n = V_{AB} \quad (62.1)$$

где R_n - сопротивление нормального слоя. С другой стороны, для точек A и B должен выполняться первый закон Кирхгофа:

$$I_n = I_s. \quad (62.2)$$

Наконец, для участка цепи с джозефсоновским током должны быть справедливы известные соотношения Джозефсона:

$$I_s = I_c \sin \varphi \quad (62.3)$$

$$2eV_{AB} = \hbar \frac{d\varphi}{dt} \quad (62.4)$$

Уравнения (62.1) - (62.4) полностью определяют нашу задачу. Они элементарно сводятся к уравнению

$$\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = \frac{E_T}{R_n} \quad (62.8)$$

Но это уравнение - хорошо известное нам уравнение джозефсоновского перехода в резистивной модели (рис. 62.1, в), когда в переход вводится от внешнего источника некоторый ток (в данном случае равный E_T/R_n), который распределяется по двум ветвям: собственно джозефсоновской ($I_c \sin \varphi$) и по нормальному участку $\left(\frac{\hbar}{2eR_n} \frac{d\varphi}{dt}\right)$. При этом температуры *S*-обкладок, конечно, равны. Поведение такой системы хорошо известно (см. 22). Если внешний ток меньше I_c , он течет только по сверхпроводящему, т.е. джозефсоновскому, участку, и напряжения между точками A и B нет. Вольтметр ничего не покажет. Если же этот ток станет больше I_c , то на переходе возникнет пульсирующее напряжение с частотой $\omega = 2e\bar{V}_{AB}/\hbar$, где \bar{V}_{AB} - постоянная составляющая этого пульсирующего напряжения, которую и показывает вольтметр.

Теперь мы можем полностью описать поведение джозефсоновского *SNS*-перехода, находящегося в потоке тепла. До тех пор пока разность температур на двух сторонах нормальной прослойки $\Delta T = T_1 - T_2$ меньше некоторой критической величины

$$\Delta T_c = V_c/\alpha = I_c R_n/\alpha \quad (62.6)$$

вольтметр, подключенный к сверхпроводящим обкладкам, ничего не покажет. Если же ΔT станет больше ΔT_c , то переход начнет генерировать пульсирующее напряжение, частота которого ω будет равна, согласно (22.7),

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} R_n \left[(\alpha \Delta T / R_n)^2 - I_c^2 \right]^{1/2} \quad (62.7)$$

Эти термоэлектрические явления были предсказаны в работе Аронова и Гальперина [185].

Из выражения (62.6) ясно, что такие эффекты можно было бы наблюдать, если бы удалось сделать критическую разность температур ΔT_c существенно малой. Но для этого

должно быть малым характерное напряжение перехода $V_c = I_c R_n$. Нетрудно сделать SNS -переход с $V_c \sim 10^{-13}$ В. Считая $\alpha \sim 10^{-8}$ В/К, имеем $\Delta T_c \sim 10^{-5}$ К. Такую разность температур, конечно, нетрудно получить.

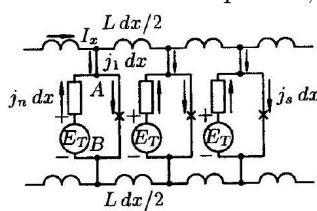
Экспериментальное исследование термоэлектрических эффектов в джозефсоновских SNS -переходах [186] полностью подтвердило изложенные выше представления. Экспериментально наблюдалась нелинейная зависимость термоэлектрического напряжения от потока тепла, причем напряжение появлялось выше некоторой критической величины разности температур на переходе (δT)_c, что полностью аналогично возникновению напряжения на вольт-амперной характеристике джозефсоновского перехода при токе выше критического. Тепловой аналог нестационарного эффекта Джозефсона был также вскоре обнаружен в работе [187], в которой непосредственно наблюдалась джозефсоновская генерация, возникающая в SNS -переходе под действием потока тепла. В этой же работе приведены результаты по наблюдению ступенек Шапиро на зависимости термоэлектрического напряжения от потока тепла через SNS -переход, помещенный в переменное поле.

62.2. Влияние магнитного поля на термоэлектрические явления в джозефсоновских SNS -переходах. Пусть теперь джозефсоновский SNS -переход, находящийся в потоке тепла, помещен в магнитное поле, параллельное его поверхности (плоскость xz). В этом случае мы можем оказаться свидетелями интересных и красивых явлений. Действительно, учтем протяженность перехода, скажем, вдоль оси x . Его размер в этом направлении пусть будет равен w . Тепловой поток направлен перпендикулярно переходу вдоль оси y , а магнитное поле - вдоль оси z . Для распределенного вдоль оси x перехода тоже нетрудно начертить эквивалентную схему (рис. 62.2, a). Здесь L - это суммарная индуктивность обеих сверхпроводящих обкладок перехода, приходящаяся на единицу их площади, I_x -ток, текущий в направлении оси x в полосе единичной ширины. Подобно тому, как от эквивалентной схемы рис. 62.1, б мы перешли к схеме 62.1, в, здесь тоже можно от схемы 62.2, a перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 62.2, б, которая представляет собой эквивалентную схему протяженного джозефсоновского перехода с однородной температурой (т. е. без теплового потока), но с однородно введенным в него током от внешнего источника с плотностью $j_e = E_T / R_n$. Здесь R_n - сопротивление нормальной прослойки, приходящееся на единицу ее площади. Поведение такого объекта во внешнем магнитном поле, параллельном оси y , нам хорошо известно (см. 24). Поэтому сразу можно предсказать [188], что критическая разность температур ΔT_c , при которой появляется напряжение на переходе, будет немонотонно зависеть от магнитного поля. В идеальном случае должна была бы наблюдаться такая зависимость (см. (24.23)):

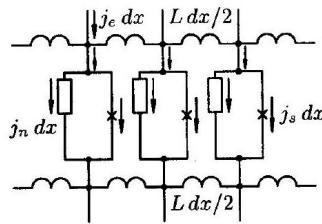
$$\Delta T_c = \frac{j_c R_n}{\alpha} \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right| \quad (62.8)$$

где $\Phi = B_0 w d$. Здесь B_0 - магнитная индукция внешнего поля, w -размер перехода в направлении оси x , d -толщина нормального слоя. Подобные эксперименты были поставлены [189] и полностью подтвердили эти предсказания.

Был изготовлен джозефсоновский SNS -переход тантал-медь-тантал с толщиной медной прослойки около 10^{-3} см. Сопротивление нормального участка было около 10^{-9} ОМ, а критический ток перехода - около 10^{-4} А. Таким образом, характер-



а)



6)

Рис. 62.2. а) Эквивалентная схема протяженного джозефсоновского *SNS*-перехода, через который идет поток тепла; б) другой вид эквивалентной схемы того же перехода (источник термо-ЭДС E_T заменен равномерно распределенным током j_s).

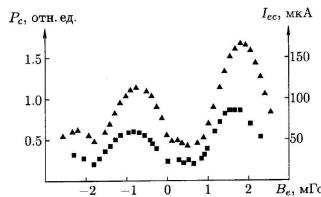


Рис. 62.3. Результат эксперимента [189] по изучению магнитотермоэлектрического эффекта в джозефсоновском переходе типа *SNS*.

ное напряжение перехода V_c было около 10^{-13} В. Напряжение на переходе измерялось с помощью ВЧ-сквида. Разность температур двух сторон нормального слоя ΔT была, очевидно, пропорциональна установившемуся тепловому потоку через переход, т.е. выделяющейся из нагревателя мощности. Критической разности температур ΔT_c соответствовала критическая мощность нагревателя P_c . На рис. 62.3 показан результат измерения критической мощности P_c в зависимости от внешнего магнитного поля, наложенного на переход параллельно его плоскости (верхняя кривая). Нижняя кривая дает зависимость максимального бездиссипативного тока через тот же переход от внешнего магнитного поля, когда все части перехода имеют одну и ту же температуру. Если подобрать масштаб P_c или I_{max} так, чтобы эти два графика совпали хотя бы в одной точке, то окажется, что они совпадут и во всех остальных точках. Этим доказывается справедливость приведенных выше соображений.

Итак, сформулируем основные результаты.

Напряжение термоэлектрического происхождения появляется на джозефсоновском *SNS*-переходе начиная с некоторого порогового значения потока тепла через переход. Такое критическое значение потока тепла есть немонотонная функция магнитного поля. Это - тепловой аналог стационарного эффекта Джозефсона.

Появление термоэлектрического напряжения на переходе сопровождается возникновением джозефсонской генерации с частотой, определяемой соотношением (62.7), что служит проявлением теплового аналога нестационарного эффекта Джозефсона.

62.3*. Термоэлектрические эффекты в смешанном состоянии сверхпроводников II рода со слабым пиннингом. Исследования термоэлектрических явлений в высокотемпературных сверхпроводниках в начале 90 -х годов привели к обнаружению в ВТСП-кристаллах как продольных (Зеебека и Пельтье) так и поперечных (Нернста и Эттинггаузена) термоэлектрических эффектов [190, 191, 192, 193, 194]. Отсылая читателя за разъяснениями природы других эффектов к работам [192, 195, 196], остановимся здесь на обсуждении эффекта Зеебека в смешанном состоянии сверхпроводников II рода со слабым пиннингом. Этот эффект полностью аналогичен [197] появлению термоэлектрического напряжения в протяженных джозефсоновских контактах в магнитном поле, рассмотренного в предыдущем разделе. В присутствии противотоков нормальной и сверхтекучей компонент, вызванных потоком тепла (рис. 62.4) возникает взаимодействие между абрикосовскими вихрями и сверхпроводящим током (см.

6 Еще раз основы и типичные явления сверхпроводимости

(сперва их из статфиза разбираю, потом буду сюда переносить. пока что заготовки в нем.)

6.1 Thermodynamics and Thermal Properties of the Superconducting State

(вроде у шмидта шикарно написано)

теплоемкость сверхпроводника с точки зрения термодинамики Удельную теплоемкость вещества находится из энтропии $C = T(\partial S / \partial T)$, а ее мы знаем:

$$S_s - S_n = \frac{H_{cm}}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_R$$

Поэтому разность удельных теплоемкостей сверхпроводящего и нормального состояний запишется в виде

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)^2 + H_{cm} \frac{\partial^2 H_{cm}}{\partial T^2} \right] = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_{cm}}{\partial T} \right)_{T_c}^2$$

мы учли, что при $T = T_c$ критическое поле $H_{cm} = 0$.

Эта формула, известная как формула Рутгерса, показывает, что зависимость теплоемкости от температуры испытывает скачок при $T = T_c$.

Формула Рутгерса дает величину этого скачка.

(график вставлю понятно какой)

При $T > T_c$ теплоемкость линейно зависит от температуры, как это бывает у обычных нормальных металлов (электронная теплоемкость).

(тут детали у шмидта, их позже)

6.1.1 Thermodynamics and Thermal Properties of the Superconducting State

In the last chapter we saw that a well-established theory exists for conventional superconductors. The theory explains how a coherent matter wave is constructed by means of the formation of Cooper pairs. However, we also saw that, in particular for unconventional superconductors, the microscopic details often remain unclear. On the other hand, based on only a few basic symmetry arguments, we were able to account for many properties of the pair wave function.

Next we want to treat superconductivity on a macroscopic scale. We will see that by means of a rigorous application of the general laws of thermodynamics we can reach a deep understanding of the properties of the superconducting state. This will lead us to the Ginzburg-Landau theory [1], which was developed in the early 1950s, and which turned out to be highly powerful for the solution of many practical problems. It serves for the description of conventional as well as unconventional superconductors

Already in 1924 Keesom [2] had tried to apply thermodynamics to superconductivity. At the time there was the difficulty that the superconducting state could not be interpreted in terms of a single new thermodynamic phase. Then in 1933 the discovery of the Meissner-Ochsenfeld effect brought crucial progress. At the onset of superconductivity, a magnetic field

is expelled from the interior of a type-I superconductor, independent of the experimental details. This represented a clear experimental confirmation of the existence of a single superconducting phase. The thermodynamic equilibrium state is unequivocally determined by the specification of T and B also in the case of a type-II superconductor, where the magnetic field penetrates into the superconductor.

Before we turn to the details, we make some general remarks on the thermodynamic treatment of physical systems.

6.1.2 General Aspects of Thermodynamics

A crucial quality of the thermodynamic treatment of a macroscopic physical system arises from the fact that the immense number of independent coordinates of the individual particles is reduced to only a few macroscopic variables of the system. For instance, for the thermodynamic treatment of an ideal gas, one does not start from the $3N$ spatial coordinates and the $3N$ momentum coordinates of the N gas atoms. Instead, one describes the behavior by such variables as the temperature T , the volume V , the particle number N , and so on.

One is interested in the macroscopic behavior of the system, say, in the stability of the different phases, such as the solid, liquid, and gaseous phases, during the variation of one variable while the other variables are kept constant. The thermodynamic equilibrium states of a system under specified conditions play an important role. Here, we deal with the following question. A system, say, a liquid-vapor mixture, is specified by fixing the temperature T , the volume V , and the total particle number N . We want to know the number N of atoms in the vapor in thermodynamic equilibrium, that is, in the state that is established if all other quantities can be freely adjusted under the given conditions. The system then exists in a definite state, where the particles can be freely exchanged between the vapor and the liquid, and where a definite heat exchange with a thermal bath must be possible.

At this point we mention that frequently the thermodynamic equilibrium state is not established at all or only very slowly, because the free exchange of some quantity is not possible in the particular experiment. The thermodynamic prediction on the equilibrium state is completely independent of the question of the chances for it to become realized.

All such questions are dealt with by specifying suitable thermodynamic functions, the Gibbs functions, or thermodynamic potentials. These Gibbs functions are constructed from the variables in such a way that a certain Gibbs function is associated with a definite set of independent variables. The system is completely accounted for by means of this Gibbs function.

To find the correct Gibbs function of a system is not easy. First, we must find a set of independent variables, which is sometimes difficult. Standard sets of variables are temperature T , volume V , and particle number N ; or temperature T , pressure p , and particle number N . Other variables must be added if a system is also affected, for example, by electric or magnetic fields. The behavior in a magnetic field will be highly important for superconductors.

If we have found the Gibbs function associated with a set of variables, the equilibrium states are determined by the extrema of the Gibbs function.¹⁾ Two phases of a system are in equilibrium if their Gibbs functions have the same value. In principle, from this we can already answer the question of the stability of a phase. If the equilibrium state is determined by the minimum of the Gibbs function, then 1) A well-known case is the condition for the extremum of the entropy S as the Gibbs observed macroscopic state of the system which is realized. Systems having the entropy as the Gibbs function move in the direction of

increasing entropy. The equilibrium state corresponds to a state with maximum entropy, of course, always under the given Gibbs functions, the system states with other extrema can always be related to the second law of thermodynamics. Function which, in the end, is a measure of phase I will be unstable relative to phase II if the Gibbs function of phase I is larger than

that of phase II..2)

The Gibbs functions are distinguished by the fact that, for a differential variation, just the differentials of the independent variables appear. For illustration, we present a few known examples.

For the internal energy U , we have

$$dU = T dS + \delta A$$

If we include only the compressional work $\delta A^V = -p dV$, we obtain

$$dU = T dS - p dV$$

U is the Gibbs function for the variables S and V . We note that these two variable change with the size of the system ("extensive state variables"), whereas this is not so in the case of the variables T and p (intensive state variables"). In the Gibbs functions there always appear products of extensive and intensive quantities. The negative sign of the term $p dV$ is needed, since we define that all energies added to a system are counted as positive. For a reduction of the volume, that is, $dV < 0$ work is added to the system.³ Of course, other variables, for example, the particle number N , may also appear. In the following, we always keep the particle number constant. Hence, we can ignore this variable.

The free energy F is given as

$$F = U - TS$$

leading to

$$dF = dU - T dS - S dT = -S dT - p dV$$

We see that F is the Gibbs function for the variables T and V .

Frequently, the arbitrary variation of the pressure p is much easier than that of V and, hence, p is introduced as the independent variable. The Gibbs function for the variables T and p is the enthalpy G with

$$G = U - TS + pV$$

and

$$dG = -S dT + V dp$$

In our above-mentioned discussion, we have considered only the variables pressure and temperature. For the thermodynamic treatment of the superconducting phase,") we must include an additional variable, which accounts for the behavior in a magnetic field. As the additional independent variable, we choose the magnetic

At this stage we should mention that phase transitions also exist at $T = 0$. They originate from quantum mechanics. The transition point is referred to as quantum-critical point. of this kind are discussed in connection with he cuprate superconductors, and also in the case of materials such as the heavy fermions Superconductivity can appear near a and many other substances [3]

In technical thermodynamics mostly one proceeds differently. There the work that is done by the system is counted as positive (representing the interesting part for technologies)

field \mathbf{B} . The Gibbs function associated with the variables T, p , and \mathbf{B} for constant particle number is

$$G = U - TS + pV - \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}$$

are always parallel or antiparallel, and since we indicate this in the sign of m , we can ignore the vector property in this discussion. For the variation of the internal energy, we obtain⁶

$$dU = T dS - p dV + B dm$$

as is shown in standard textbooks on the theory of heat. Hence, one finds?

$$dG = -S dT + V dp - m dB$$

For our choice of the Gibbs function $G(T, p, B)$, the independent variables T, p , and B appear in the differentials, as expected.

If we know the Gibbs function of a system, we can calculate from it very easily many thermodynamic quantities by means of suitable derivatives with respect to the variables. In this way, we find the entropy S from G :

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p,B}$$

Here, the symbol $\partial/\partial T$ indicates the partial derivative with respect to temperature. At the same time, the pressure p and the magnetic field B must be kept constant. This is indicated by the subscript index p, B . In this way the dependence of the entropy on the temperature, on the magnetic field, and on the pressure is obtained: $S = S(T, B, p)$. If G depends on additional variables, these must also be kept constant. In this case these variables also appear in the subscript index after the bracket

Analogously, we can also derive other thermodynamic quantities from G . From the partial derivative with respect to the pressure at constant temperature, we find the sample volume V (as a function of T, B , and p):

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T,B}$$

The specific heat c is another important quantity that we will need in the following. It is defined by the relation

$$\Delta Q = cm' \Delta T$$

where ΔQ is the amount of heat we must introduce into a substance of mass m' in order to raise its temperature by ΔT . We distinguish between different kinds

magnetic moment m always appears together with B , confusion with the mass is unlikely.

The differential work $\delta A^m = B dm$ exactly corresponds to the compressional work $\delta A^V = -p dV$ where B and the magnetic moment m appear in place of the pressure p and the negative volume $-V$, respectively. We take paramagnetic materials as an example. Then \mathbf{m} is parallel to B . During an increase in m , that is, $dm > 0$, work is added to the system, which appears as heat of 7) See, for example, [4] for specific heat, depending on the conditions under which the addition of heat takes place. For constant pressure, if the pressure is kept constant, we speak of the energy taken place. For constant pressure.

From the function G the specific heat is obtained directly by means of the expression

$$-T (\partial^2 G / \partial T^2)_{p,B} = T (\partial S / \partial T)_{p,B} = c_p$$

Relations such as Eq. (4.13) are highly important for calculating the entropy from the measured temperature dependence of the specific heat. There exist specific characteristic relations between the different thermodynamic quantities. In this chapter, we will deal with several examples.

As the last general aspect we will discuss the order of the transition between two thermodynamic phases. We have mentioned already that at a phase transition the relevant Gibbs functions have the same value. If the first derivative of the Gibbs function with respect to the

temperature is discontinuous at the phase transition, one speaks of a first-order phase transition. In this case, the entropy jumps by a finite value. Analogously, if the entropy is continuous at the phase transition, but if the second derivative of the Gibbs function, which is proportional to the specific heat, shows a jump, one speaks of a second-order phase transition. For such higher-order phase transitions, L. D. Landau has developed a powerful theory [5].

Also the superconducting phase transition in the absence of a magnetic field is of second order. The application of the concepts of the Landau theory to the superconducting phase transition will lead us to the Ginzburg-Landau theory. However, before we turn to this theory, we want to show by means of specific-heat measurements that the superconducting phase transition is, indeed, of second order. Also we want to discuss the thermal conductivity of superconductors.

6.1.3 Specific Heat

In Figure 4.1 as an example we show the specific heat of tin as a function of temperature [6]. Tin is a type-I superconductor. The solid curve is observed in the absence of a magnetic field. We clearly see the jump of the specific heat at T_c , indicating a second-order phase transition. In the case of a first-order phase transition, at the transition temperature c_p would have become infinitely large.

In magnetic fields above the critical field B_c , the specific heat c_n of the normal conducting state can also be determined for $T < T_c$ (solid dots in Figure 4.1). In this case no discontinuity is observed, since there is no phase transition.

The specific heat of the normal conductor can be separated into two components, the contribution of the conduction electrons c_{nE} and the contribution of the lattice vibrations c_{nL} , thus $c_n = c_{nE} + c_{nL}$

206 | 4 Thermodynamics and Thermal Properties of the Superconducting State

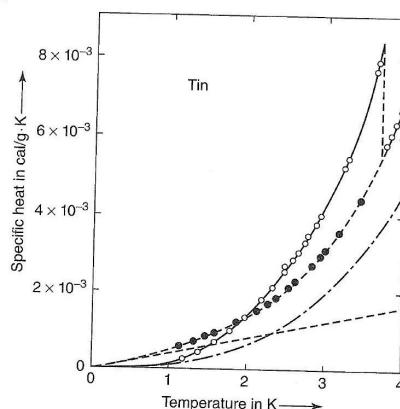


Figure 4.1 Specific heat of tin plotted versus the temperature. Open circles: without a magnetic field; for $B > B_c$; dashed line: with a magnetic field $B > B_c$; dashed line: contribution of the electrons; dash-dot line: contribution of the lattice vibrations.

In good approximation we have

$$c_{nE} = \gamma T$$

$$c_{nL} = \alpha (T/\Theta_D)^3$$

γ and α are constants, and Θ_D is the Debye temperature. The Sommerfeld coefficient γ is proportional to the density of states of the electrons at the Fermi energy (see Section 1.1). It is given by

$$\gamma = \frac{2}{3}\pi^2 k_B^2 N(E_F)$$

where $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ W s/K is Boltzmann's constant and $N(E_F)$ is the density of states at the Fermi energy in (W s mol) $^{-1}$.

In the superconducting state for medium temperatures, the temperature dependence of the specific heat is well approximated by a power law of third order. According to Eqs. (4.14) and (4.15), this means that the lattice component domi-

Also we want to discuss briefly which temperature dependence of the specific heat in the superconducting state results from the microscopic theory. First we look at conventional superconductors.

For temperatures near T_c , the Cooper pair density and the energy gap change strongly with temperature. In this temperature range we cannot expect simple theoretical relations. However, at very low temperatures the energy gap is nearly independent of T . The introduction of energy into the electron system then essentially

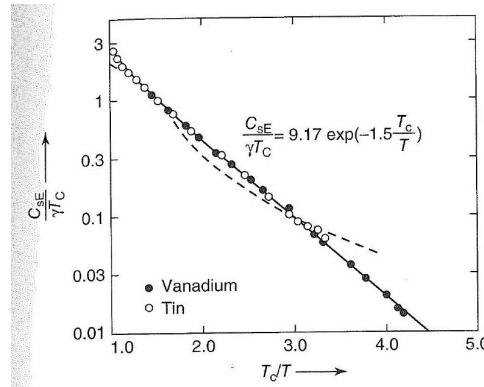


Figure 4.2 Electronic component of the specific heat of tin and vanadium. The straight line represents the relation predicted by the BCS theory. The dashed curve indicates a T^3 law according to Eq. (4.15). (From [7].)

results in the breaking up of Cooper pairs.⁸ For this, excitations beyond the energy gap are needed. Since the probability of such excitations should decrease following an exponential function of the kind $\exp(-A/k_B T)$, at very low temperatures we expect essentially an exponential decrease in the electronic component c_{sE} of the specific heat. Here, A is a constant, essentially the excitation energy.

For $T \rightarrow 0$, the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) theory yields for the specific heat of conventional superconductors

$$c_{sE} = 9.17 \gamma T_c \exp\left(-\frac{1.5 T_c}{T}\right)$$

In Figure 4.2 we show an example of this exponential dependence [7]. Corresponding to Eq. (4.17), $c_s/\gamma T_c$ is plotted versus T_c/T . The straight line represents the relation (4.17). Also, before the advent of the BCS theory, highly accurate specific-heat measurements had already indicated exponential dependences at very low temperatures. This result confirmed at the time the prediction by Daunt and Mendelsohn [8] of an energy gap in the excitation spectrum of a superconductor. For the relative jump of the electronic component of the specific heat, $(c_{sE} - c_{nE})/c_{nE}$, near T_c , the BCS theory yields the value 1.43, in excellent agreement with the experimental observations.

On the other hand, in unconventional superconductors, the excitation spectrum does not have an energy gap. Instead, the gap function $\Delta_0(\mathbf{k})$ vanishes along certain directions in \mathbf{k} -space. Hence, even at very low temperatures there exist an appreciable number of unpaired electrons, which contribute to the specific heat

6.1.4 Thermal Conductivity

The density of the free, unpaired electrons has become so small that its energy absorption can be neglected.

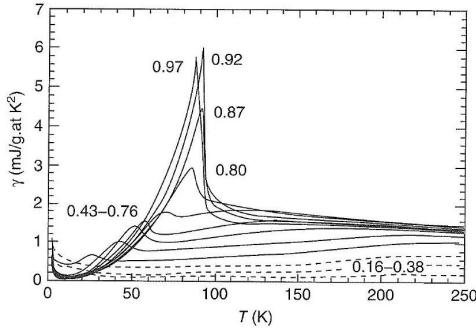


Figure 4.3 Sommerfeld coefficient $\gamma = c_{\text{el}}/T$ plotted versus temperature T for $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ crystals with different

of the electron system. As we have seen in Section 3.2, the function $\Delta_0(\mathbf{k})$ can vanish at individual points or along extended lines in \mathbf{k} -space. Therefore, $c_{\text{sE}}(T)$ increases with temperature following a power law: $c_{\text{sE}}(T) \propto T^a$. Depending on the dimension of the locations with zero gap (points or lines) and on the exponent with which $\Delta_0(\mathbf{k})$ vanishes with $|\mathbf{k}|$ near these locations, one finds $a = 2$ or $a = 3$. Also the relative magnitude of the jump $(c_{\text{sE}} - c_{\text{nE}})/c_{\text{nE}}$ of the electronic specific heat at T_c depends on the exact behavior of $\Delta_0(\mathbf{k})$ near the locations with zero gap. Hence, it yields information about these locations.

For the cuprates it is very difficult to determine the electronic component of the specific heat over a large temperature range, since (except for very low temperatures) the contribution of the phonons to the specific heat is relatively large [9-11]. Furthermore, it is impossible to suppress the superconductivity simply by the application of a magnetic field, because of the large values of the upper critical fields. Therefore, the difference between the specific heat in the normal and in the superconducting states cannot be extracted in the simple way shown in Figure 4.1. Instead, one can use undoped samples for comparison, say, comparing $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ with $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. In Figure 4.3 we show the temperature dependence of the quantity $\gamma = c_{\text{el}}/T$ for different levels of oxygen doping x in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$. The jumps at the different transition temperatures can clearly be seen.

The specific heat c_{sE} has also been analyzed exactly in the limit of low temperatures, and a surprisingly large linear term has been found, that is, $a = 1$ [13]. However, for a superconductor with $d_{x^2-y^2}$ symmetry of the pair wave function in the absence of a magnetic field, in the simplest case one would have expected quadratic temperature dependence of c_{sE} .) Subsequent experiments have confirmed the T^2 term [14] and, on the other hand, have identified paramagnetic impurities as the origin of the linear term [15]. For d-wave superconductors in the vortex state, one expects a linear term increasing proportional to $B^{1/2}$. Such a term was also confirmed experimentally. 4.3 Thermal conductivity 209

For the three examples of superconductors, tin, vanadium, and $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, we have seen that the transition into the superconducting state represents a secondorder phase transition.¹⁰

6.1.4 Thermal Conductivity

If we establish a temperature difference ΔT along a rod of length l (taking a simple geometry), heat energy is transported from the hot end to the cold end. The thermal conductivity λ_T is a material parameter and is defined by the equation

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda_T \frac{F}{l} \Delta T$$

where $\Delta Q/\Delta t$ is the heat energy per unit time, F and l are the cross-section and length of the rod, respectively, and ΔT is the temperature difference. Here, we assume a linear change

of T along the length of the rod.

In a metal, heat transport is due to the conduction electrons as well as lattice vibrations. In general, the contribution of the electrons is much larger than that of the lattice. In this case, from our basic understanding of the superconducting state, we can easily predict how the thermal conductivity should behave for temperatures below T_c . Below T_c , with decreasing temperature more and more conduction electrons are correlated, forming Cooper pairs, and hence are decoupled from the energy exchange. Therefore, below T_c the contribution of the electrons to the thermal conduction becomes smaller and smaller. So we expect that in the superconducting state the thermal conductivity is smaller than in the normal conducting state, as long as it is dominated by the electrons.

This behavior is shown in Figure 4.4 for tin and mercury [17]. Here, we do not want to discuss the temperature dependence of the thermal conductivity in the normal conducting state. We only emphasize the fact that in the superconducting state the thermal conductivity is smaller than in the normal conducting state, as expected. At sufficiently low temperatures, at which practically no free electrons exist anymore in the superconducting state, because of the nearly complete correlation in the form of Cooper pairs, the behavior in a superconductor corresponds exactly to that in an electrically insulating crystal. The electron system is simply decoupled from the thermal behavior. If the superconductivity is suppressed by means of an overcritical magnetic field, then the metal recovers the much larger thermal conductivity of the electron system. Therefore, a superconductor can serve as a thermal switch. In the overcritical fields we have high thermal conductivity; analogous to electric circuits, the switch is closed. At zero field the thermal conductivity is much smaller, and the switch is open. Often such thermal switches represent an important feature of experiments at temperatures below 1mK.

This only applies in the absence of a magnetic field. Otherwise, the phase transition can be of first transition into the normal state, the magnetization changes discontinuously [16].

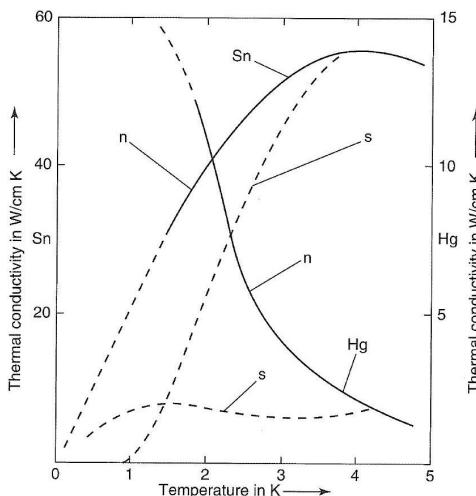


Figure 4.4 Thermal conductivity of pure tin and mercury. (From [16].) The left scale is for

The behavior discussed earlier is characteristic of many metals. However, in alloys or highly impure metals, the situation is much more complex. If chemical impurities are introduced into a metal lattice, the electron mean free path becomes shorter due to collisions between the electrons and the impurities. At low temperatures the corresponding additional electrical resistance is observed in the form of a residual resistance. The reduction of the electron mobility also leads to an increase in the thermal resistance.

In contrast to the electrons, the lattice vibrations, the phonons, are much less hindered in their propagation by atomic lattice defects.¹¹⁾ Therefore, the contribution of the phonons to the thermal conductivity is much less affected by such impurities. As a result, the thermal

conductivity of the electrons can become smaller than that of the phonons. Then the thermal conductivities in the superconducting and in the normal conducting states differ only little from each other. As an example, we show in Figure 4.5 the thermal conduction of lead-bismuth alloys containing 0.1%Bi[18].

The scattering of a wave at an obstacle becomes strong if the wavelength and the Fermi energy the matter wave of the electrons has a wavelength of a few angstroms. Therefore, the electrons are strongly scattered at atomic obstacles. On much longer wavelengths, experience much weaker interaction with the obstacle. If the electronic component of the thermal conductivity becomes much smaller than the component due to the phonons, in the superconducting state the thermal conductivity can become even larger than in the normal conducting state. This can happen in some alloy systems. As an example of this behavior, in Figure 4.5 we show the thermal conductivity of a lead-bismuth alloy containing 0.5%Bi. This behavior can be understood by noting that the electron and phonon systems can also interact with each other, that is, there are collisions between the electrons and the phonons. Such collisions of the electrons with the phonons dominate the total temperature dependence of the electrical resistance. With increasing temperature the lattice vibrations, that is, the number of phonons, increase. As a result, the collisions of the electrons and, hence, the electrical resistance increase with increasing temperature.

In substances in which the phonons provide the dominant contribution to the thermal conduction, we must look at the electron-phonon collisions from the viewpoint of the phonons. These collisions reduce the propagation and, hence, the thermal conduction of the phonons. If the electrons are decoupled in the superconducting state, these collisions are eliminated. The thermal conductivity of the phonon system increases. In this way, we can understand why thermal conduction in the superconducting state can become larger than in the normal conducting state. This is the explanation of the results shown for the Pb – Bi alloys in Figure 4.5. Here we do not want to go any further in our discussion of thermal conductivity. We just mention that, in unconventional superconductors, with decreasing temperature the electronic contribution vanishes much more slowly than in conventional superconductors. This results from the relatively large number of

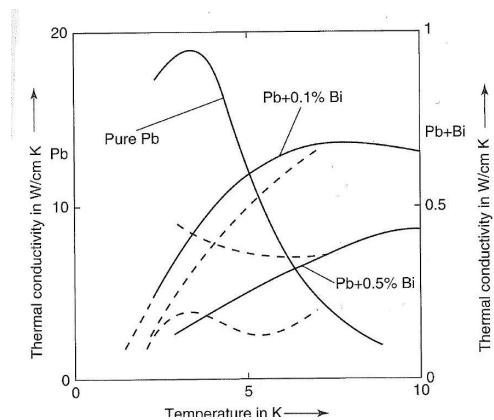


Figure 4.5 Thermal conductivity of lead and lead-bismuth alloys. Solid lines: normal state; dashed lines: superconducting state. (From [18]).

quasiparticles existing in the former also at low temperatures [19]. A similar argument applies if superconducting and normal conducting regions exist next to each other in a sample. This happens in the vortex state of type-II superconductors and also in the so-called intermediate state of type-I superconductors. The latter will be discussed in Section 4.6.4 in more detail.

6.1.5 Ginzburg-Landau Theory

So far in our thermodynamic discussions we have treated the Gibbs function of the system in an integrated way, such that spatial variations of the superconducting state did not appear explicitly. Furthermore, we have not yet utilized the fact that the superconducting state can be described in terms of a macroscopic wave function with a well-defined phase.

Both aspects were incorporated by Ginzburg and Landau into their theory published in 1950. This theory represents an important extension of the London theory [20], in which a spatially constant density of the superconducting charge carriers was assumed. Surprisingly, for a long time, the Ginzburg-Landau theory did not receive the proper attention. It was only after the development of a microscopic theory that the importance of this extended phenomenological theory was generally recognized. Only gradually it has become clear that the theory accounts for important physical properties of the superconducting state. It was shown by Gor'kov that for temperatures near T_c the theory can be derived from the BCS theory [21]. One of the great successes of the theory was the prediction of the vortex state by Abrikosov [22]. Often the theory is now referred to as GLAG theory after the four scientists Ginzburg, Landau, Abrikosov, and Gor'kov. In 2003, A. A. Abrikosov and V. L. Ginzburg together with A. J. Leggett received the Nobel Prize in physics for the development of the theory of superconductivity and superfluidity.

The GLAG theory starts from the argument that in the normal superconducting transition in the absence of a magnetic field, we are dealing with a secondorder phase transition (see Section 4.1). Landau had developed a theory exactly for such phase transitions. In the theory a parameter, the so-called order parameter, was defined, which in the new phase (here the superconducting phase) should increase continuously from zero at T_c up to the value 1 at $T = 0$. To describe the superconducting state, Ginzburg and Landau introduced a function $\Psi(\mathbf{r})$ as the order parameter.¹²⁾ The quantity $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ can be interpreted as the density of the superconducting charge carriers. Since in the superconducting state $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ must approach zero continuously for $T \rightarrow T_c$, near T_c we can expand the Gibbs

Here, we describe the Ginzburg-Landau theory for an isotropic, single-component order parameter. This is adequate for

conventional, homogeneous superconductors. However, the theory can be

formulated similarly for unconventional superconductors, in which case usually one must consider more than one order parameter. However, in detail this can become very complicated.

function¹³⁾ g_s of the superconducting phase in a Taylor series of the density $|\Psi(\mathbf{r})|^2$. Then we obtain

$$g_s = g_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \dots$$

Here, the Gibbs function g_n of the normal conducting phase appears, since for $\Psi = 0$ the Gibbs function g_s must be equal to g_n . Since for $T < T_c$ we also have $g_s < g_n$ (stability criterion), we find $\alpha < 0$.

Sufficiently close to T_c an approximation that includes only the first two terms of the series is satisfactory, that is, one that cuts off the series after the $|\Psi|^4$ term. For temperatures close to the transition temperature, very general statements about the sign of the coefficients α and β are possible:

The coefficient β must be positive, otherwise a very large value of $|\Psi|$ would always lead to a value of g_s that is smaller than g_n . The "minimum" of g_s would only be reached for $|\Psi| \rightarrow \infty$.

For $T < T_c$, the coefficient α must be negative, otherwise g_s would always be larger than g_n , since β is positive.

For $T > T_c$, α must be positive. In this regime the normal state should have the smaller value of the Gibbs function, leading to $|\Psi| = 0$ as the most favorable solution.

Therefore, for temperatures close to T_c , the coefficients α and β can also be expanded in Taylor series of the temperature. Here, we include only the first nonvanishing coefficient. For α , we can write

$$\alpha(T) = \alpha(0) \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)$$

However, the coefficient β can be taken as constant:

$$\beta(T) = \beta = \text{const.}$$

The rather abstract expansion coefficients α and β can now be connected in a simple way with the so-called "thermodynamic critical field" B_{cth} and with the equilibrium density n_s in zero field. In the following, we will deal with B_{cth} many times. If we denote the equilibrium value of Ψ sufficiently far away from any interface by Ψ_∞ , then we have the relation $n_s = |\Psi_\infty|^2$. We introduce the magnetic field B_{cth} based on the difference $g_n - g_s$:

$$g_n - g_s = -\alpha |\Psi_\infty|^2 - \frac{1}{2}\beta |\Psi_\infty|^4 = \frac{1}{2\mu_0} B_{\text{cth}}^2$$

In Section 4.6.1 we will see that for a type-I superconductor under certain conditions B_{cth} exactly corresponds to the critical field B_c .

We denote the Gibbs function by the letter g to indicate that it is an energy density. Since the equiminimum, one should use the terminology of energy functional. However, for simplicity in the following we continue to denote g as Gibbs function.

One obtains an additional equation for α and β from the fact that at equilibrium $g_s (|\Psi_\infty|^2)$ reaches a minimum. For the equilibrium value $|\Psi_\infty|^2$, we must have also $dg_s/d|\Psi|^2 = 0$. This yields

$$\alpha + \beta |\Psi_\infty|^2 = 0$$

From this we obtain

$$n_s = |\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

and from Eq. (4.21) we find

$$B_{\text{cth}}^2 = \mu_0 \frac{\alpha^2}{\beta}$$

From the temperature dependences of Eqs. (4.20a) and (4.20b) for α and β , we see immediately that, near T_c , n_s and B_{cth} are proportional to $(1 - T/T_c)$, that is, for $T \rightarrow T_c$ they linearly approach zero. So we have ¹⁴⁴

$$n_s(T) = n_s(0) (1 - T/T_c) \quad \text{and} \quad B_{\text{cth}}(T) = B_{\text{cth}}(0) (1 - T/T_c)$$

By solving for α and β , we find

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\beta_{\text{cth}}^2}{n_s} \\ \beta &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\beta_{\text{cth}}^2}{n_s^2} \end{aligned}$$

Now we can see directly that a second-order phase transition is described by Eq. (4.19) or (4.21):

For $T = T_c$ we have $g_s = g_n$, since $|\Psi| = 0$.

The derivative $\partial g_s / \partial T$ is

$$\frac{\partial g_s}{\partial T} = \frac{\partial g_n}{\partial T} - \frac{B_{\text{cth}}}{\mu_0} \frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} = \frac{\partial g_n}{\partial T} + \frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{\mu_0} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \frac{1}{T_c}$$

At T_c the second-term vanishes, that is, $\partial g / \partial T$ passes through T_c continuously - For the second derivative $\partial^2 g_s / \partial T^2$, one finds

$$\frac{\partial^2 g_s}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 g_n}{\partial T^2} - \frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{\mu_0} \frac{1}{T_c^2}$$

We see that $\partial^2 g / \partial T^2$ jumps by the amount $B_{\text{cth}}^2(0) / (\mu_0 T_c^2)$, as it must for a second-order phase transition.

We note that we can also describe a first-order phase transition in a similar way. In this case we must supplement the series expansion in Eq. (4.19) by a term $|\Psi|^6$, and a negative sign of β must be allowed.

Note that these expressions are valid only near T_c . The crucial extension of the phenomenological description is achieved by the ansatz of the Gibbs function of the superconductor in a magnetic field under the assumption of a possible spatial variation of Ψ . Hence, one uses the ansatz

$$g_s(B) = g_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_i|^2 + \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi \right|^2$$

where m and q are the mass and charge, respectively, of the particles described by Ψ , that is, $m = 2m_e$ and $|q| = 2e$ for Cooper pairs, and ∇ is a differential operator namely the gradient

$$\nabla \Psi = \text{grad } \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

operating on the function Ψ

We see that two additional terms appear. The first term refers to the energy needed to change the magnetic field from \mathbf{B}_a , the external field in the absence of the superconductor, to the value \mathbf{B}_i . For the Meissner phase with $\mathbf{B}_i = 0$, this term yields the total energy to be supplied for the magnetic field expulsion. The second term takes into account a possible spatial variation of \mathbf{B}_i and Ψ within the superconductor. It includes the supercurrents leading to a variation of the magnetic field. Furthermore, it contains the energy needed to establish a spatial variation of the Cooper pair density. This contribution introduces a "stiffness" of the wave function, which gains importance at the phase boundary between the superconducting and normal conducting phases. We note that this second term is constructed quite analogously to the expression in the Schrödinger equation of the kinetic energy of a particle with mass m and charge q .

One obtains the Gibbs function for the total superconducting sample from an integration of Eq. (4.26) over the volume V of the sample:

$\int_V \left\{ g_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_i|^2 + \frac{1}{2m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 \right\} \cdot dV$ (4.27) This function G_s must be minimized by the variation of Ψ and A . The variation then yields the two equations of the Ginzburg-Landau theory:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi &= 0 \\ \mathbf{j}_s = \frac{q\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

Here, Ψ'' is the complex conjugate function to Ψ .

This system of differential equations must still be supplemented by a proper boundary condition. Frequently, in this case, one applies the obvious condition that the supercurrent cannot flow out of the superconductor, that is, that the current (Eq. (4.29)) perpendicular to the surface of the superconductor must vanish.

Next we will look in detail at the Ginzburg-Landau equations (4.28) and (4.29) or at the Gibbs function (4.27) in various limiting cases and compare the theoretical predictions with the experimental results.

6.1.6 Characteristic Lengths of the Ginzburg-Landau Theory

In the following, we will show that the Ginzburg-Landau equations contain two characteristic lengths, namely the London penetration depth λ_L and the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} . At this stage we cannot avoid a number of derivations and formulas. However, they are not very difficult.

We start by looking at Eq. (4.29). We want to rewrite this equation by normalizing Ψ to the value Ψ_∞ . With the notation $\psi = \Psi/\Psi_\infty$, we find

$$\mathbf{j}_s = \frac{q\hbar|\Psi_\infty|^2}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2 |\Psi_\infty|^2}{m} |\psi|^2 \mathbf{A}$$

With the definition (1.10) of the London penetration depth, $\lambda_L = \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)}$, and the relation $n_s = |\Psi_\infty|^2$, we find

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar}{2iq\mu_0\lambda_L^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} |\psi|^2 \mathbf{A}$$

Using $\psi = \psi_0 e^{i\varphi}$ for calculating the gradient in the brackets ($\nabla \psi = e^{i\varphi} \nabla \psi_0 + \psi_0 e^{i\varphi} i \nabla \varphi$), we obtain

$$\mathbf{j}_s = \psi_0^2 \frac{\hbar}{q\mu_0\lambda_L^2} \nabla \varphi - \frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} \psi_0^2 \mathbf{A}$$

If the function Ψ is spatially constant, $\nabla \varphi$ vanishes, and $|\psi| = 1.0$. Then we have

$$\mathbf{j}_s = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2} \mathbf{A}$$

Taking the curl on both sides and using $\text{curl } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, we obtain the second London equation (1.14):

$$\mathbf{B} = -\mu_0\lambda_L^2 \text{curl } \mathbf{j}_s$$

We see that we recover the London theory in the case of a spatially constant Cooper pair density $n_{s'}$. However, going beyond this case, the second Ginzburg-Landau equation apparently can take into account the supercurrents for a spatially varying wave function.

Let us turn to the first Ginzburg-Landau equation (4.28). Again we normalize Ψ to the value Ψ_∞ . After a short calculation we find

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q \mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha \psi - \alpha |\psi|^2 \psi = 0$$

Here, we must use the relation (4.23) to change the term $\beta |\Psi_\infty|^2$, appearing on the left-hand side, into $-\alpha$. We divide both sides by α and obtain

$$\frac{\hbar^2}{2m\alpha} \left(\frac{1}{i} \nabla - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi = 0$$

Here, we have taken Planck's constant \hbar in front of the bracket on the left-hand side. The quantity $-\hbar^2/(2m\alpha)$ has the dimension of [length]². Obviously, it yields a second characteristic length of the Ginzburg-Landau theory, the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} , given by

$$\xi_{\text{GL}} = \sqrt{\frac{-\hbar^2}{2m\alpha}}$$

Then the second Ginzburg-Landau equation can be written as

$$-\xi_{\text{GL}}^2 \left(\frac{\nabla}{i} - \frac{q}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi = 0$$

With the temperature dependence of α (Eq. (4.20a)), we find immediately also the temperature dependences of λ_L and ξ_{GL} :

$$\begin{aligned} \lambda_L(T) &= \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - T/T_c}} \\ \xi_{\text{GL}}(T) &= \frac{\xi_{\text{GL}}(0)}{\sqrt{1 - T/T_c}} \end{aligned}$$

For $T \rightarrow T_c$ both quantities approach infinity. We note that Eqs. (4.35) and (4.36) are valid only close to T_c , although $\lambda_L(0)$ and $\xi_{\text{GL}}(0)$ appear in the equations. The Ginzburg-Landau theory is valid only in this limit.

Now we can introduce the ratio

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{\text{GL}}}$$

referred to as the Ginzburg-Landau parameter. Within the Ginzburg-Landau equations presented earlier, it is independent of the temperature and of the magnetic field.

In Eqs. (4.30b) and (4.34) we could also have normalized the other quantities having a dimension. Then we would find that the dimensionless Ginzburg-Landau equations would depend only on the Ginzburg-Landau parameter κ . Hence, this parameter is crucial for the behavior of these equations. Which length is indicated by ξ_{GL} ? This is illustrated by a simple situation, in which the superconductor extends in the x -direction from $x = 0$ up to $x \rightarrow \infty$. In the y and z directions, the superconductor is assumed to be extended infinitely. For $x = 0$ we assume $|\psi| = 0$. Furthermore, we assume $\mathbf{A} = 0$. Then we can find a real solution for ψ from the equation

$$\xi_{\text{GL}}^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \psi - \psi^3 = 0$$

which depends only on x . For $x \geq 0$, this equation has the solution

$$\psi(x) = \tanh \left(x / \sqrt{2} \xi_{\text{GL}} \right)$$

shown in Figure 4.6. According to Eq. (4.39), $\psi(x)$ first increases linearly from 0 and then it approaches the limiting value 1 in the interior of the superconductor. We see that, at least in the situation we have discussed, ξ_{GL} can be interpreted as the characteristic length within which the order parameter ψ can change.

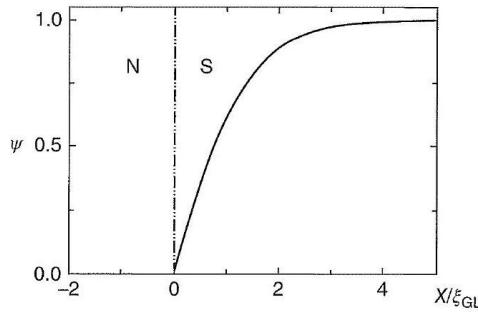


Figure 4.6 Variation of the function $\psi(x)$ according to Eq. (4.39) at the edge of a superconducting half-space.

Now we know the two length scales of the Ginzburg-Landau theory. The fact that the Ginzburg-Landau theory is valid only close to T_c should not diminish the importance of λ_L and ξ_{GL} as the characteristic length scales within which the supercurrents (or the magnetic field) and the Cooper pair density (or Ψ) can change. Both lengths are fundamental to the superconducting state. They can be analyzed further within the microscopic theory.

At very low temperatures, in the case of conventional superconductors, one finds that λ_L is approximately constant. The deviation from this constant value $\lambda_L(0)$ decreases exponentially with decreasing temperature. On the other hand, in the case of unconventional superconductors, for which the energy gap has locations with value zero along certain crystal directions, the difference $\Delta\lambda = \lambda_L(T) - \lambda_L(0)$ increases from zero following a power law. In the case of the $d_{x^2-y^2}$ symmetry, $\Delta\lambda$ is proportional to T , if the samples are sufficiently pure. For impure samples, one observes a T^2 law. In Chapter 2 we listed the values of $\lambda_L(0)$ for many conventional and unconventional superconductors.

Figure 4.7 shows experimental results for the temperature dependence of the penetration depth in mercury. Here, λ_L was determined from the magnetization of mercury colloid, that is, from small Hg balls [23]. For this material, as well as for many other conventional superconductors, the observed temperature dependence can be approximated over a wide temperature range by the empirical expression

$$\frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0)} \propto \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2}$$

For $T \rightarrow T_c$ this relation yields Eq. (4.35), in agreement with the Ginzburg-Landau theory.¹⁵⁾ The plot in Figure 4.7 allows the comparison with Eq. (4.40). The solid straight line corresponds to this equation. The agreement between the analytic expression and the experimental data is excellent.

To see this we write $[1 - (T/T_c)^4] = [1 - (T/T_c)^2][1 + (T/T_c)^2]$ and for $T \rightarrow T_c$ replace the second factor by the factor 2. We apply the same procedure to $[1 - (T/T_c)^2]$ and finally obtain Eq. (4.35).

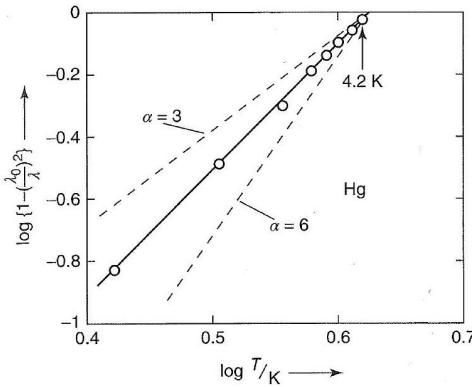


Figure 4.7 Temperature dependence of the penetration depth of Hg [23]. The solid line corresponds to the exponent $a = 4$ in the bracket of Eq. (4.40). For comparison, the cases $a = 3$ and $a = 6$ are also shown by the dashed curves.

For comparison we show in Figure 4.8 the experimental results obtained for a highly pure $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ single crystal. The penetration depth was determined from the surface impedance of the crystal (see also Section 7.5.1). The latter was found from the frequency shift of a resonating cavity into which the crystal had been inserted. The data referring to the left vertical axis show the ratio $\lambda_L(0)^2/\lambda_L(T)^2$, which is proportional to the density of Cooper pairs according

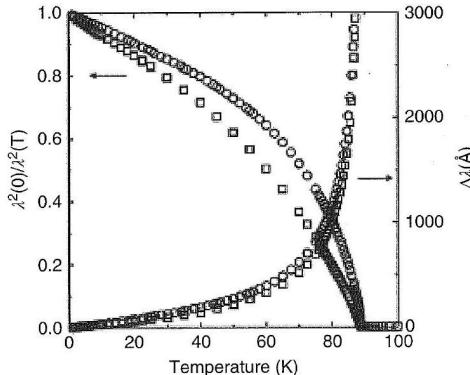


Figure 4.8 Temperature dependence of the crystal, and the squares indicate the penemagnetic penetration depth in highly pure tration depth along the b -direction. At low values $\lambda_g(0) = 160$ nm and $\lambda_b(0) = 80$ nm[24].

to Eq. (1.10). The data referring to the right vertical axis show the difference $\Delta\lambda = \lambda_L(T) - \lambda_L(0)$. For each axis there are two curves, which correspond to the penetration depth along the a and b directions of the crystal, respectively. We clearly see the linear increase in $\Delta\lambda$ over a wide temperature range.

The Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} is much more difficult to determine experimentally than the penetration depth λ_L . (Numerical values of ξ_{GL} are listed in Chapter 2 for a number of superconductors.) Usually one employs indirect methods. The value of ξ_{GL} is closely connected with the upper critical field of type-II superconductors, from which it can be determined (see Section 4.7.1). Another indirect method uses the analysis of the electrical conductivity above the transition temperature. Because of thermal fluctuations, superconducting small regions always appear temporarily closely above T_c , contributing to an enhanced electrical conductivity. We will return to this subject in Section 4.8.

Within the Ginzburg-Landau theory, λ_L and ξ_G represent material properties, which depend on the Cooper pair density and on the thermodynamic critical field B_{ot} because of the parameters α and β . The microscopic theory provides us with another important relation: the

dependence of λ_L and ξ_{GL} on the electron mean free path l^* .¹⁶ For conventional superconductors in the limit $T \rightarrow 0$, one finds

$$\lambda_L(T=0, l^*) = \lambda_L(T=0, l^* \rightarrow \infty) \left\{ 1 + \frac{\xi_{GL}(T=0, l^* \rightarrow \infty)}{l^*} \right\}^{1/2}$$

and for $l^* \ll \xi_{GL}(T=0, l^* \rightarrow \infty)$ one has

$$\xi_{GL}(T=0, l^*) = \{\xi_{GL}(T=0, l^* \rightarrow \infty) l^*\}^{1/2}$$

This dependence is not yet taken into account by the expressions (4.35), (4.36), and (4.40), which are valid only in the limit of very large mean free paths, $l^* \rightarrow \infty$. From Eqs. (4.41) and (4.42) we see that, with decreasing l^* , the length λ_L increases and the length ξ_{GL} decreases. Hence, the Ginzburg-Landau parameter κ strongly depends on l^* . It increases with decreasing l^* .

The length l^* depends on the purity of the samples and can be controlled by the admixture of impurities. In Section 4.7 we will see that by varying the degree of purity, one can change a type-I superconductor into a type-II superconductor.

Together with the BCS coherence length presented in Section 3.1.1, we have introduced three different characteristic lengths of a superconductor:

penetration depth λ_L measuring the decay of the magnetic field in the interior of the superconductor

average extension ξ_0 of a Cooper pair as a measure of the distance within which the correlation forming Cooper pairs is active;

coherence length ξ_{GL} as the smallest length within which the Cooper pair density can vary - it is always larger than ξ_0 , since the number density of Cooper pairs cannot vary within a distance smaller than the average extension of a Cooper pair.

The electron mean free path l indicates the average distance that a conduction electron can propagate between two collisions.

The coherence length ξ_0 is nearly temperature-independent, and in the limit $l^* \rightarrow 0$ it is about equal to l^* . In different limiting cases, we can also find simple relations for this length. For example, in the BCS theory:

$$\begin{aligned} \xi_0(T=0, l^* \rightarrow \infty) &= 0.18 \frac{\pi \hbar v_F}{2 k_B T_c} \\ \xi_{GL} &\approx \xi_0 \frac{\lambda_L(T, l^*)}{\lambda_L(T=0, l^* \rightarrow \infty)} \end{aligned}$$

where v_F is the Fermi velocity and k_B is Boltzmann's constant. Such relations represent good approximations mostly only within specific regimes of T and l^* . In general, their mathematical derivation from the microscopic theory requires appreciable effort.

It is interesting to note that in 1951 Pippard postulated a coherence length for the interpretation of high-frequency measurements [25]. Based on this coherence length, which is closely related to ξ_0 , Pippard could extend the London theory by claiming that the supercurrent density $j_s(x, y, z)$ should depend not only on the magnetic field $B(x, y, z)$ at the location (x, y, z) but also on the average field in a region with an extension of about the coherence length.

In the following, we return again to the thermodynamic properties of the superconducting state, and we start with type-I superconductors.

6.1.7 Type-I Superconductors in a Magnetic Field

Using the methods of thermodynamics, we look at the stability of the Meissner phase of type-I superconductors as a function of the temperature and of the applied magnetic field.

We will see that in the simplest case the critical field of these superconductors, at which the transition from the Meissner phase into the normal conducting phase sets in, is identical with the thermodynamic critical field discussed in Section 4.4. However, we will also see that one observes a much more complex behavior if the magnetic field at the sample edge differs from the applied field because of the shape of the sample.

We will also use thermodynamics to understand the behavior of superconductors under pressure.

6.1.8 Critical Field and Magnetization of Rod-Shaped Samples

Figure 4.9 shows again the Meissner-Ochsenfeld effect for a rod-shaped superconductor. If the length l of the rod is much larger than the diameter, the magnetic field is slightly distorted only at the ends. Along the rod practically we have the same field B_2 as in a large distance from the rod. For simple shapes of the sample (ellipsoids with principal axis parallel to the field), we can

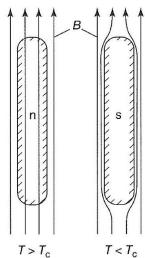


Figure 4.9 Magnetic field expulsion for a rod-shaped sample.
The sample is cooled down in the field B .

express the influence of the sample geometry by a number, the demagnetization coefficient N_M . For a long rod in a magnetic field parallel to its axis, the demagnetization coefficient is $N_M = 0$. In this case, the magnetic field at the surface must not be corrected, since it is identical with the external field B_a at a large distance from the sample. This illustrates the particular simplicity of this sample geometry.

Because of its significance, we want to also present the field expulsion in the Meissner phase in a different way. Because of the shielding currents, which completely compensate the external field in the interior of the rod-shaped sample, the rod carries a magnetic moment m . Formally, we can speak of a magnetization M by writing $M = m/V$, where V is the sample volume. This magnetization corresponds to that of an ideal diamagnet with the susceptibility¹⁷⁾ $\chi = -1$.

In Figure 4.10 we show this magnetization M as a function of the external field B_a for a long rod with its axis oriented parallel to the field. Following the standard custom, the negative magnetization is plotted versus the external magnetic field. The magnetization increases proportional to the external field. The superconductivity breaks down only if the critical field is exceeded.

In Figure 4.11 the magnetic field B_i observed in the interior of the sample, say, within a narrow channel parallel to the axis, is plotted versus the external field B . Because of the shielding current, the inner field B_i remains exactly zero until the critical field B_c is reached.¹⁸⁾ For all external fields $B_a > B_c$ we have $B_i = B_a$, since the sample is normal conducting in this case.

The thin surface layer, into which the magnetic field penetrates, can be neglected for this integral look at the sample.

Here, we explicitly utilize the fact that the external field is compensated by the macroscopic currents flowing at the surface. To describe the magnetic fields in the interior of a substance, we must know the mechanism causing the magnetic behavior. How the magnetization is accomplished remains for the external magnetic field

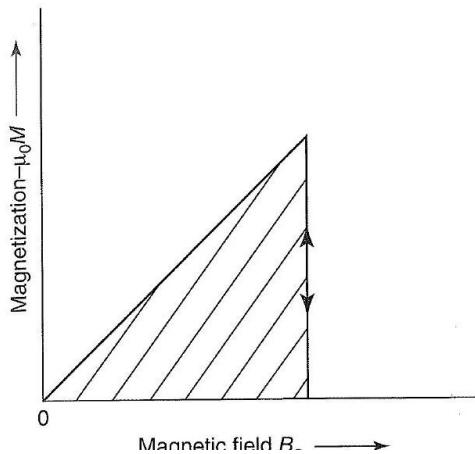
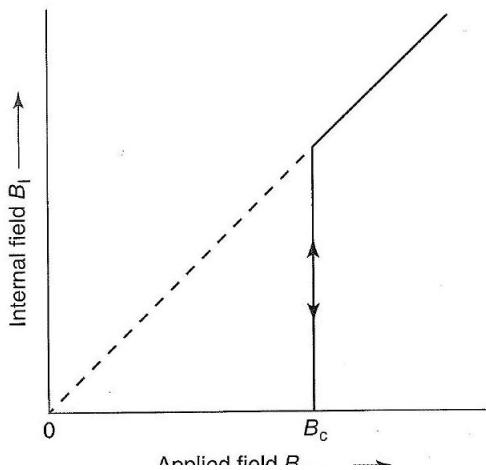


Figure 4.10 Magnetization of a rod-shaped sample ($N_M = 0$) in a magnetic field parallel to the axis. During a reversible transition, the same curve is followed for increasing and decreasing field B .



Applied field $B_a \rightarrow$ Figure 4.11 Magnetic field in the interior of a rod-shaped sample ($N_M = 0$) in a magnetic field parallel to the axis. During a reversible transition, the same curve is followed for increasing and decreasing field B .

Figures 4.10 and 4.11 present the same information. Both plots are used frequently, and they are adjusted to different experiments: measurement of M by means of the induction or of B_i , say, by using a Hall probe.¹⁹ The difference between type-I and type-II superconductors is clearly seen from the variation of M or of B_i as a function of B_a (see Section 4.7.1).

Modern Hall probes allow measurements of the magnetic field with high sensitivity. One observes the electrical voltage generated perpendicular to the electric current and to the magnetic field because of the Lorentz force. The Hall voltage is proportional to the applied magnetic field.

We note that the measurement of the magnetization represents a very simple method for determining the transition temperature T_c . One places the sample within an induction coil and measures the self-inductance as a function of the temperature using a small a.c. magnetic field. The self-inductance drops abruptly if superconductivity sets in. Compared to a measurement of the electrical resistance by means of a current-voltage curve (see Section 1.1), this magnetic measurement of the transition temperature has the advantage that the shielding currents must flow along the total sample surface in order to provide the shielding. Frequently, inhomogeneous samples, where the current-voltage measurement can indicate superconductivity because of a single continuous current path, do not show perfect shielding, in this way signaling the inhomogeneity.²⁰

Now we apply the rules of thermodynamics to the Meissner state. We start from the Eq. (4.9):

$$dG = -S \, dT + V \, dp - m \, dB$$

First, we consider the superconducting phase in the absence of a magnetic field. Then the term mB vanishes. Furthermore, we keep the superconductor at constant pressure and only vary the temperature. For $T < T_c$ the Gibbs function G_s of the superconductor must be smaller than G_n , the Gibbs function of the normal conductor. At $T = T_c$, we have $G_s = G_n$.

We can determine the difference $G_n - G_s$, which is a measure of the stability of the superconducting state, as a function of the temperature. We use the fact that the superconducting phase becomes unstable in the presence of a sufficiently strong external magnetic field. The reason for this is an increase in G_s with increasing field B , resulting in the fact that above a critical field G_s will be larger than G_n and, hence, will become unstable. Practically, the Gibbs function G_n of the normal conducting phase is independent of the magnetic field, since at least in most cases in the normal conductor the generated magnetic moments are very small.

For obtaining $G_n - G_s$ as a function of T , we must determine the critical field B_c at different temperatures. Then the term $\int_0^{B_c} m \, dB$ yields $G_n - G_s$ at the corresponding temperature. We have

$$\begin{aligned} G_s(B) - G_s(0) &= - \int_0^B m \, dB \\ G_n(B) - G_n(0) &= 0 \\ G_n(B_c) - G_s(B_c) &= 0 \end{aligned}$$

The first equation is found by integrating Eq. (4.9) at constant temperature and constant pressure. At B_c the Gibbs functions G_s and G_n must be just equal. From these three equations, one finds

$$G_n(T) - G_s(T) = - \int_0^{B_c(T)} m \, dB$$

Since in equilibrium the magnetic moment of the superconductor must always be oriented antiparallel to B , we have $G_n(T) > G_s(T)$ for all $T < T_c$.

For a more quantitative statement about the difference between the Gibbs functions of the superconducting and normal conducting phases, we must know the magnetic moment m as a function of B . Now we restrict ourselves to the rod-shaped sample geometry, and we assume a spatially constant external magnetic field. In this case, the local magnetic moment m and the magnetization M are simply connected with each other:

$$m = MV$$

Here, V is the sample volume, taken to be independent of the magnetic field, the pressure, and the temperature. With these conditions, we have

$$G_n - G_s = -V \int_0^{B_c} M \, dB$$

For additional information, we must know the magnetization M as a function of B . For a "thick" rod of a type-I superconductor,²¹⁾ we have $\chi = -1$. Then the magnetization is in good approximation

$$M = \chi \frac{B}{\mu_0} = -\frac{B}{\mu_0}$$

where $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ V s/A m. This yields the following simple expression for $G_n - G_s$

$$G_n - G_s = \frac{V}{\mu_0} \int_0^{B_c} B \, dB = V \frac{B_c^2}{2\mu_0} = V \frac{B_{\text{cth}}^2}{2\mu_0}$$

Now we can calculate quantitatively the difference $G_n - G$ if we have determined the critical field B_c as a function of T for our simple geometry.

For a "thick" superconductor with fully developed shielding, the critical field B is identical to the thermodynamic field B_{cth} . We can see this from Eq. (4.21), if we integrate the latter over the sample volume. However, for a "thin" superconductor, with dimensions comparable to the London penetration depth, B_c is larger than B_{cth} (see Section 4.6.3).

The area under the magnetization curve of the "thick," rod-shaped type-I superconductor, multiplied by the sample volume V , yields the difference of the thermodynamic potentials, $G_n - G_s$, in the field $B = 0$. However, we also emphasize that in

In principle, we can also use Eq. (4.48) for a type-II superconductor. Then we must integrate up to the upper critical field B_{c2} , and the particular dependence $M(b)$ of these superconductors is us be

the case of a more complicated dependence of the magnetization on the external field, as we will see for type-II superconductors, the area under the magnetization curve $M(B)$ always yields the difference of the Gibbs functions, $G_n - G_s$. The only assumption is that the magnetization is reversible, that is, it is established only by means of equilibrium states. Reversibility exists if the same magnetization curve is obtained for increasing and for decreasing external fields. In the case of the "hard superconductors," which we will discuss in Section 5.3.2, this reversibility is absent.

In Figure 4.12 the critical field B_c is plotted versus the temperature for different type-I superconductors. For all temperatures $T < T_c$, the experimental data are well approximated by the empirical expression:

$$B_c(T) = B_c(0) [1 - (T/T_c)^2]$$

Near T_c , this dependence approaches the linear dependence on temperature, as described by the Ginzburg-Landau theory.

6.1.9 Thermodynamics of the Meissner State

In the following, we discuss the consequences for other properties of a superconductor resulting from the temperature dependence of the critical field according to Eq. (4.51). Here, we will use the strong advantage of the thermodynamic treatment, namely that all the important quantities can be obtained from the Gibbs function by means of simple differential operations.

We recall that the entropy S is found from G according to Eq. (4.10): $S = -(\frac{\partial G}{\partial T})_{B,p}$

In the absence of a magnetic field, we have

$$S_n - S_s = -V \frac{B_{\text{cth}}}{\mu_0} \frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T}$$

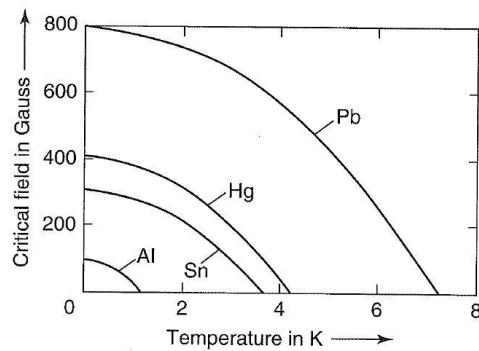


Figure 4.12 Critical magnetic field plotted versus the temperature for different typesuperconductors ($1\text{G} = 10^{-4}\text{ T}$).

Again we have neglected the T dependence of V , since it is very small. In Section 4.6.6 we will return to this change of V , making the justification of our approximation more clear.

By looking at the temperature dependence of the critical field B_{cth} , as seen in Figure 4.12 and as approximated by Eq. (4.51), we can immediately find the general behavior of $S_n - S_s$. For $T \rightarrow T_c$ we have $B_{\text{cth}} \rightarrow 0$. Hence, we conclude that $S_n - S_s \rightarrow 0$ for $T \rightarrow T_c$. At T_c (in the absence of a magnetic field) the entropies of the normal conducting and of the superconducting phases are equal, and no heat of transition appears at T_c . Hence, we are dealing with a second-order or higherorder phase transition. In our discussion of the specific heat (see Section 4.2), we have derived this result already in a different way.

At temperatures $T < T_c$ the entropy difference $S_n - S_s$ takes a positive value, since in the total range $0 < T < T_c$ we have $dB_{\text{cth}}/dT < 0$. According to the third law of thermodynamics, for $T \rightarrow 0$ also $S_n - S_s$ must approach zero (the approximation (Eq. (4.51)) satisfies this condition). However, this means that $S_n - S_s$ passes through a maximum. This fact has important consequences for the specific heat. Further we note that at all temperatures $0 < T < T_c$, there exists a finite entropy difference $S_n - S_s$, that is, in this temperature range we have a first-order phase transition with a finite heat of transition.

Figure 4.13 shows the temperature dependences of G_n , G_s , and $S_n - S_s$ plotted in arbitrary units on the vertical axis. At $T = T_c$ the two curves $G_n(T)$ and $G_s(T)$ must not only take the same value but also have the same slope, as we have seen. This is the signature of a first-order phase transition. The transition to superconductivity

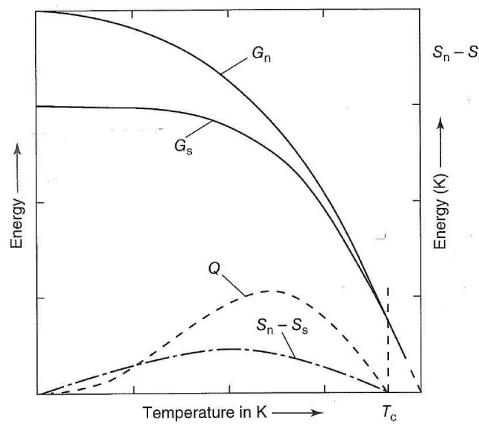


Figure 4.13 Gibbs functions G_n and G_s , entropy difference $S_n - S_s$, and heat of transition Q plotted versus the temperature. Numerical example for 1 molSn : $T_c = 3.72\text{ K}$ ($G_n - G_s)_{T=0} = 5 \times 10^{-3}\text{ Ws}$; $(S_n - S_s)_{\text{max}} = 2.28 \times 10^{-3}\text{ W s/K}$, and $Q_{\text{max}} = 5 \times 10^{-3}\text{ Ws}$.

is a second-order phase transition (as we will see explicitly in a moment), since at T_c the second derivatives of the Gibbs functions G_n and G_s are different.

These results that we have derived from thermodynamics fit very well into our microscopic picture, as they should. From $S_n - S_s > 0$, we conclude that the superconducting phase has a smaller entropy than the normal conducting phase. Without going into details, we recall that the entropy is a measure of the disorder of a physical system. Hence, from $S_n > S_s$, we conclude that the degree of order in the superconducting phase is larger than in the normal conducting phase. This higher degree of order can immediately be associated with the correlation between single electrons forming Cooper pairs and between the Cooper pairs themselves. This correlation amounts to an additional order in our system.

For $T \rightarrow T_c$, the Cooper pair density and the energy gap continuously approach zero. Hence, at T_c we cannot expect a heat of transition. Instead, our microscopic picture indicates that we deal with a transition of higher than first order. However, below T_c there exists a finite density of Cooper pairs. In an applied magnetic field permanent currents are generated. However, in type-I superconductors the Cooper pair density practically remains constant until the critical field is reached. At the critical field, the superconductivity breaks down, and all the Cooper pairs are broken up. This requires a finite heat of transition. At the transition from the superconducting to the normal conducting state, heat energy is consumed, namely $(S_n - S_s)T$. In an isothermal process this energy must be delivered to the system. However, if the transition from normal conducting to superconducting state is performed adiabatically, that is, thermally insulated with $dQ = 0$, the sample becomes colder, since the heat energy is extracted from the other degrees of freedom. Superconductors represent a substance that can be cooled by means of adiabatic demagnetization [26]. However, since much more effective cooling techniques have been developed, this particular method has not become an important application.

The second derivative of the Gibbs function with respect to the temperature yields the specific heat, here at constant pressure and constant B (see Eq. (4.13)). From Eq. (4.50),

$$G_n - G_s = V \frac{B_{\text{cth}}^2}{2\mu_0}$$

for the difference $c_n - c_s$ of the specific heat in the normal state and in the superconducting state, we obtain

$$\begin{aligned} c_n - c_s &= -\frac{VT}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 + B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2} \right\} \\ c_s - c_n &= \frac{VT}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 + B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2} \right\} \end{aligned}$$

Again we have taken the volume V as constant. Further we note that we insert here the specific volume, that is, the volume per unit mass. In this way we obtain specific quantities, here the specific heat, which refers to the amount of 1 g of the substance. The result of Eq. (4.54) was derived by Keesom [2] in 1924, but without a solid justification of the existence of a superconducting phase in the thermodynamic sense.

From Eq. (4.54) we see that at $T = T_c$, we have $c_s > c_n$. At T_c the critical field vanishes, $B_{\text{cth}} = 0$, and, hence, $c_s - c_n > 0$. At T_c the specific heat displays a jump, which is given by

$$(c_s - c_n)_{T=T_c} = \frac{VT_c}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)_{T=T_c}^2$$

In the literature this important relation is referred to as the Rutgers formula [27]. It connects a thermal quantity, namely the jump of the specific heat, with the critical magnetic field. For a number of superconductors this relation is well satisfied. In Table 4.1 we list some values of $(c_s - c_n)_{T=T_c}$, as obtained from thermal data and from measurements of the critical field.

Since we found $d^2B_{\text{cth}}/dT^2 < 0$ and since dB_{cth}/dT becomes smaller and smaller with decreasing temperature, we find a temperature $0 < T < T_c$ at which $c_s = c_n$. Below this temperature we have $c_s < c_n$. The intersection of $c_s(T)$ and $c_n(T)$ must appear at the temperature at which $S_n - S_s$ reaches a maximum (see Figure 4.13). Since the density of states represents an important quantity for superconductivity, we discuss the possibility for its determination from $B_{\text{cth}}(T)$. We start from Eq. (4.54). In many cases, the contribution of the lattice to the specific heat practically does not change at the onset of superconductivity. Hence, we can attribute the difference $c_s - c_n$ completely to the electron system. So we obtain

$$c_{sE} - c_{nE} = \frac{VT}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 + B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2} \right\}$$

According to Figures 4.2 and 4.3 and due to the higher degree of order of the superconducting state, we can assume that in the superconducting state the specific heat of the electrons for $T \rightarrow 0$ approaches zero faster than in the normal conducting state. We can express this as follows: $c_{sE} \propto T^{1+a}$ with $a > 0$. This means that c_{sE}/T

Table 4.1 Values of $(c_s - c_n)_{T=T_c}$ obtained from thermal and magnetic data.

Element	T_c (K)	$(c_s - c_n)$ thermal data (10^{-3} W s/(mol K))	$(c_s - c_n)$ magnetic data (10^{-3} W s/(mol K))
Sn ^{a)}	3.72	10.6	10.6
In ^{a)}	3.40	9.75	9.62
Tl ^{b)}	2.39	6.2	6.15
Ta ^{a)}	4.39	41.5	41.6
Pb ^{b)}	7.2	52.6	41.8

Test of the "Rutgers formula."

a) Ref. [28].

b) Ref. [29].

approaches zero for $T \rightarrow 0$. Then for sufficiently small temperatures, if c_{sE}/T is

$$-\frac{c_{nE}}{T} = \frac{V}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 + B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2} \right\}$$

According to Eq. (4.14), the quantity c_{nE}/T is equal to the Sommerfeld coefficient γ , which is proportional to $N(E_F)$ due to Eq. (4.16). If we also assume that

$$\left(\frac{\partial B_{\text{cth}}}{\partial T} \right)^2 \ll B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2}$$

which is always valid for sufficiently small temperatures, we find

$$\gamma = -\frac{V}{\mu_0} B_{\text{cth}} \frac{\partial^2 B_{\text{cth}}}{\partial T^2}$$

and finally with Eq. (4.51) we get

$$\gamma = -\frac{V}{\mu_0} 2B_{\text{cth}} \frac{B_{\text{cth}}^2(0)}{T_c^2}$$

We see that at sufficiently low temperatures, the observation of B_{cth} is independent of the special temperature dependence of the critical field and can serve for determining γ and thereby yield information about $N(E_F)$.

6.1.10 Critical Magnetic Field of Thin Films in a Field Parallel to the Surface

The behavior of thin films depends sensitively on the penetration depth, if the film thickness d becomes comparable to λ_L . We discussed this already in Section 1.4 (Figures 1.14 and 1.15). As a result, we found that the magnetic field varies within the plate as given by Eq. (1.22):

$$B_z(x) = B_a \frac{\cosh(x/\lambda_L)}{\cosh(d/2\lambda_L)}$$

The critical field in a thin film represents a highly important subject. As the critical field, we understand the field that must be applied to completely destroy the superconductivity, that is, to make G_s equal to G_n . With decreasing film thickness, this critical field B_c becomes larger and larger. For a thickness $d \ll \lambda_L$ it can be larger by more than a factor 10 than the thermodynamic field B_{cth} we observe, when the shielding layer is fully developed.

This surprising result can be understood in a simple way. In Section 4.1 we saw that the free enthalpy of the superconducting state increases with the external field B_a . Because of Eq. (4.45) we have $G_s(B) - G_s(0) = - \int_0^B m \, dB$, where m denotes the magnetic moment of the sample, which is generated by the shielding toward the interior of the superconductor is fixed current density j_s and its decay dently of the macroscopic sample dimensions. For samples that are smaller than or comparable to the penetration depth in at least one dimension, the connection between the external field and the shielding current becomes dependent on the sample geometry. With decreasing thickness, say, of our film, for constant B_a , the shielding currents become smaller and smaller. This means that for the thin superconductor, the free enthalpy increases more slowly with increasing B_a than for the "thick" superconductor. Therefore, higher fields B_a are needed to make G_s equal to G_n .

Qualitatively, we can see this very clearly from Figure 1.16. The decrease in the magnetic field in the interior of the layer is a measure of the diamagnetic sample behavior. With decreasing layer thickness, the decrease in the field in the interior and, hence, the diamagnetism become smaller and smaller. In order to make G_s equal to G_n by means of an external magnetic field, with decreasing layer thickness we must apply larger and larger external magnetic fields.

We want to estimate this in the limit $d \ll \lambda_L$. From the general relation $B(x) = B_2 + \mu_0 M(x)$ and Eq. (1.22) or (4.60), within the adopted approximation, we find $M(x) \approx B_a (4x^2 - d^2) / (8\mu_0 \lambda_L^2)$. Following a simple calculation, for the magnetization averaged over the plate one finds

$$M \approx -B_a d^2 / (12\mu_0 \lambda_L^2)$$

which differs from expression (4.49) for the "thick" superconductor by a factor $d^2 / (12\lambda_L^2)$. By inserting this magnetization into Eq. (4.48), we obtain a critical magnetic field that is larger than the critical field B_{cth} of the "thick" superconductor by a factor $12^{1/2} \lambda_r / d$.

We summarize the important result of this section: For superconductors that are comparable with the penetration depth in at least one dimension, the external field B_a needed for canceling the superconductivity is larger than the thermodynamic critical field. This result will be highly important in the following.

6.1.11 The Intermediate State

Following the results of the last section, the following question comes up: Why is it possible that the superconducting state becomes unstable because of an overcritical magnetic field? From the results of Section 4.6.3 we could expect that, upon reaching the critical field, the superconductor splits up into very fine domains parallel to the magnetic field and alternately consisting of superconducting and normal conducting phase. Then the superconducting domains could be thin compared to the penetration depth and could sustain a larger magnetic field without becoming unstable.

From experience we know that this is not the case. Instead, the superconducting state of a rod-shaped sample ($N_M = 0$) becomes unstable when the critical field is reached. From this, we must conclude that a separation into many fine domains is energetically unfavorable. This can be understood from a simple idea. Each interface between a normal conducting domain and a superconducting domain carries an additional energy, the wall energy. This energy does not allow the splitting of a type-I superconductor into many fine domains. The energy needed for this would make this state energetically less favorable than the normal conducting state.

This wall energy is taken into account by the gradient term in the Ginzburg-Landau theory (see Eq. (4.26)). It controls the magnetic flux structure of the so-called intermediate state. The intermediate state refers to situation in which a homogeneous type-I superconductor is neither completely superconducting nor completely normal conducting. Such configurations can be realized very simply by means of the geometric shape of the sample.

We consider a superconducting sphere in a homogeneous external field B_a (Figure 4.14). The shielding currents flowing within a thin surface layer keep the interior of the sphere free of magnetic field. As we can see from Figure 4.14, at the surface of the sphere near the equator, this expulsion of the magnetic field results in an enhancement of the field. The actual behavior of the field is given by the superposition of the homogeneous external field B_a and the field generated by the shielding currents.

Apparently the field enhancement results from the sample geometry. For simple geometric shapes it can be taken care of by the demagnetization coefficient (see Section 4.6.1). One can show that homogeneous samples with the shape of an ellipsoid display a homogeneous magnetization in a homogeneous external magnetic field. If one principal axis of the ellipsoid is oriented parallel to the external field, then the magnetization is also parallel to this field. This magnetization changes the magnetic field experienced by the sample. The maximum value of this field is referred to as the effective magnetic field B_{eff} .

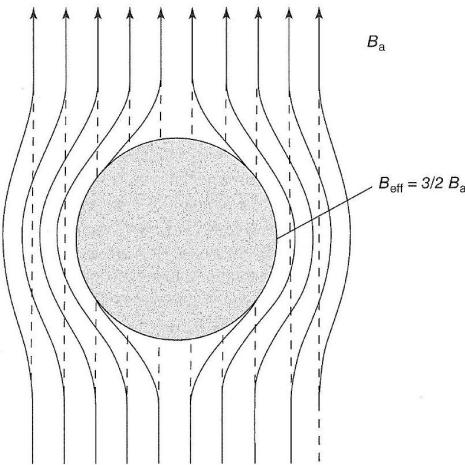


Figure 4.14 Expulsion of magnetic field (solid field lines) from a superconducting sphere. In the absence of the sphere, the field is homogeneous (dashed field lines).

It is given by

$$B_{\text{eff}} = B_a - N_M \mu_0 M$$

For a superconductor with a complete Meissner effect, the magnetization M is related to the effective field B_{eff}

$$M = -\frac{B_{\text{eff}}}{\mu_0}$$

Hence, we have

$$B_{\text{eff}} = B_a + N_M B_{\text{eff}}$$

$$B_{\text{eff}} = \frac{1}{1 - N_M} B_a$$

The effective magnetic field is just the field at the equator at the surface. If the demagnetization coefficient N_M is known, the field at the equator can be calculated. For example, for a sphere we have $N_M = 1/3$. Hence, for the ideal diamagnetic sphere, we obtain

$$B_{\text{eff}} = \frac{3}{2} B_a$$

Because of the field expulsion, for a demagnetization coefficient $N_M > 0$ it is possible to choose a value of the external field B_a at which the superconductor is neither completely superconducting nor completely normal conducting. We look at the sphere somewhat closer. If we increase the external field B_a , at the value $B_a = 2/3 B_{\text{eff}}$ the critical field B_c is reached at the equator. If B_a is increased further, at the equator the superconductivity must be destroyed. However, the sphere cannot become completely normal conducting, since in this case the field in the interior would be equal to the external field and, hence, would be smaller than B_c . The superconductor enters the intermediate state, that is, it splits up into superconducting and normal conducting domains.

Before we discuss this domain structure in more detail, we want to describe the behavior in the intermediate state phenomenologically. At $B_a = B_c$ the sample must be completely superconducting. It turns out that, in the total regime $2/3 B_c < B_a < B_c$, at the equator exactly B_c is observed. With increasing B_a , the normal conducting fraction in the interior of the sphere increases exactly in such a way that the remaining field expulsion yields the value B_c at the equator.

We could say also that in the intermediate state the demagnetization coefficient N_M becomes dependent on B_a . If we measure the magnetic flux by means of an induction coil wound around the equator, then this flux Φ increases monotonically with increasing B_a . This behavior is shown in Figure 4.15.

The magnetic flux structure of a sphere in the intermediate state has been investigated in detail [29, 30]. There exist normal conducting and superconducting domains next to each other. Hence, there are interfaces separating the normal conducting from the superconducting phase. These interfaces are stabilized because

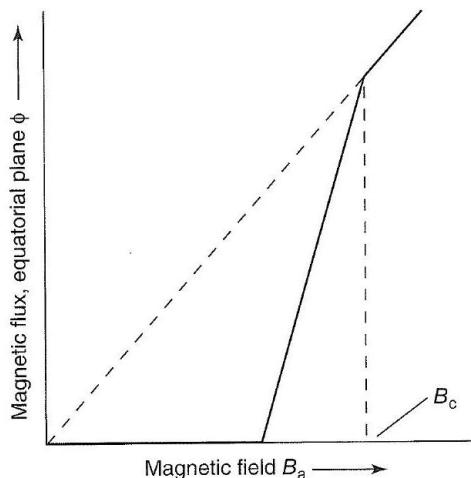


Figure 4.15 Magnetic flux Φ passing through the equatorial plane of a sphere plotted versus the external field B

of the appearance of the critical field parallel to the external magnetic field. For each intermediate state structure, the phase boundaries must be oriented parallel to the magnetic field. This statement is always valid. In the case of more complicated intermediate state structures, as can appear in superconductors in an external magnetic field and for a simultaneous flow of an electric transport current (see Section 5.2), this can lead to surprising effects.

Since the development of the phase boundaries requires an amount of wall energy, the splitting into domains cannot take place on an arbitrarily fine scale. The sample must adopt a state in which larger superconducting and normal conducting domains exist next to each other. This configuration is determined by the fact that the free enthalpy of the system reaches a minimum. This requirement allows us to determine the wall energy from measurements of the intermediate state structure.

We cannot discuss such calculations in detail. We want to mention only a few particularly simple results. In the case of a sphere, the transition into the intermediate state should happen at the field $B_a = 2/3B_c$. However, this transition is accompanied by the generation of interfaces. Because of the positive wall energy, a finite amount of energy is needed for this. This energy must be supplied by the magnetic field. Therefore, the transition into the intermediate state does not occur exactly at $B_2 = 2/3B_c$, but at a slightly higher field instead. The field is expelled beyond the critical field until the stored field energy suffices for generating the necessary interfaces. This excess field was observed for wires in a perpendicular magnetic field and was interpreted in the way we have discussed [29].

The magnetic flux structures in the intermediate state have been investigated in detail by means of different experimental methods. Small bismuth wires were used to probe the superconducting and normal conducting domains of a sphere fabricated from tin [30]. For this purpose the sphere was cut into two halves along a plane through the equator, and subsequently the two halves were fixed together in such a way that a small opening of only a few tenths of a millimeter remained. The bismuth wires acting as magnetic field probes could be inserted into this opening. Then their electrical resistance, which for bismuth depends sensitively on the magnetic field, was measured. The normal conducting domains are detected by means of the magnetic field that they carry. On the other hand, the superconducting domains remain free of field. The small opening between the two hemispheres distorts these domains only very little, since the domain boundaries are oriented parallel to the magnetic field. With this technique the configuration of the intermediate state could be imaged [31]

Much more direct methods have since been utilized, which provide immediately a complete image of the flux structure. Among others, these are the following:²²⁾

the decoration of superconducting domains using a diamagnetic powder; 2) the imaging of normal conducting domains by means of the Faraday effect.

In the first method, a fine powder of a superconducting material is sprinkled onto the sample residing in the intermediate state. Mostly one uses niobium powder [32], which remains fully superconducting for the magnetic fields needed to establish the intermediate state, in the case of many superconductors with a value

of T_c lower than the relatively high transition temperature of 9.2 K of Nb. The small

superconducting niobium grains are ideal diamagnets. They are expelled from the regions with a high magnetic field, and they accumulate on the locations at the surface where the superconducting domains are. Figure 4.16 shows such an image of the intermediate state of an indium plate [32]. Another example is presented in Figure 5.5 for the case of the intermediate state in a wire carrying an electric transport current [33].

The second method has been described already in Section 12. Compared to the powder decoration, it has the advantage that it can also record movements, that is, temporal changes, of the intermediate state structure. Highly impressive motion pictures of the intermediate state in motion have been produced. In Figure 4.17 we present an image of the intermediate state

obtained in this way.

6.1.12 The Wall Energy

Next we want to look more closely at the wall energy associated with an interface between a normal conducting domain and a superconducting domain. This positive ²³ wall energy has been crucial for our understanding of the intermediate state. We will find that under certain conditions the generation of an interface does not require an expense of energy. This has to do with the type-II superconductors, the properties of which will be described in Section 4.7.

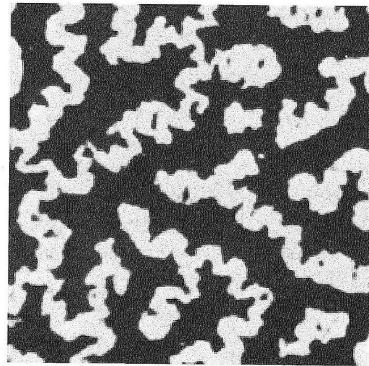


Figure 4.16 Intermediate state structure of an indium plate. The dark regions represent the superconducting domains. In purity: 99.999 at%; thickness: 11.7 mm; diameter: 38 mm; $B_a/B_{c\text{th}} = 0.1$; $T = 1.98$ K; T_c of indium: 3.24 K.

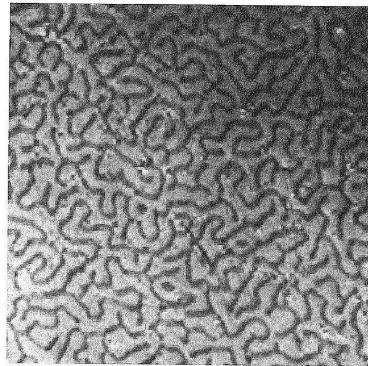


Figure 4.17 Intermediate state structure imaged by means of the Faraday effect. Pb layer with $7\mu\text{m}$ thickness; thickness of about 100 nm; magnetic fields and EuF B_2 :

In Chapter 1 we discussed other techniques in conjunction with the imaging of vortices perpendicular to the layer. The dark regions represent the superconducting domains. The imaged area is about $0.5 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$ [34]. (By courtesy of Dr Kirchner, Siemens, the superconductor much larger than λ_L , and a constant assumptions, at an interface the magnetic field must be equal to the critical field $B_{c\text{th}}$. In the normal conductor we have $B > B_c$, vanishes within a layer thickness of about λ_L .

The difference between a normal conducting domain and a superconducting domain within the same material comes from the fact that in the normal state there is no Cooper pair density n is zero, whereas in the superconductor it has a definite value $n_s(T)$ depending on the material and the temperature. We recall that it is the condensation into Cooper pairs that effects the lowering of the free enthalpy and that below T_c results in the thermodynamic stability of the superconductor instead of the normal conductor.

For our further discussion, it is crucial that at the interface the number density $n_s(T)$ cannot drop discontinuously from $n_s(T)$ to zero. Because of the strong correlation between the

Cooper pairs, a spatial variation of $n_s(T)$ is stossible only within a distance larger than the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} .

Figure 4.18 schematically indicates the situation at such an interface. In the normal domain on the left ($x < 0$), the magnetic field is just B_{cth} or larger. Therefore, within this domain the normal conducting state is stabilized, since the expulsion of the magnetic field would require more free enthalpy than can be supplied by the transition into the superconducting state.²⁴⁾ In the superconducting domain

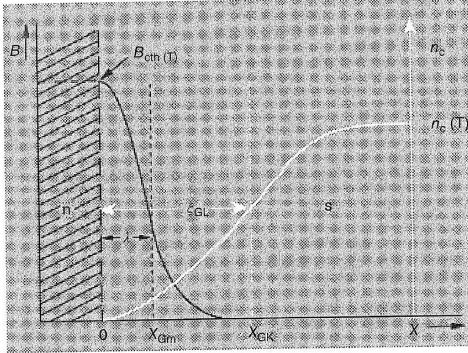


Figure 4.18 Spatial variation of B and n_s at an interface between a normal conducting (Here, x_{Gm} = "magnetic boundary" and x_{GK} = "condensate boundary.")

The boundary is only stable if displacement to the left or to the right would lead to an increase or a decrease in the magnetic field, respectively.

($x > 0$), the Cooper pair density increases up to the equilibrium value $n_s(T)$ within about the coherence length. Here, we have assumed that for the superconductor we have

$$\xi_{GL} > \lambda_L$$

At the boundary layer we must compare two contributions to the energy, namely the energy E_B associated with the expulsion of the magnetic field, and the energy E_C gained because of the condensation into Cooper pairs. In the normal conductor we have $E_B = E_C = 0$. The magnetic field is not expelled, and no Cooper pairs exist. Deep within the interior of the superconducting domain, for the application of the critical field B_{cth} , we have at the boundary $E_B = E_C = (1/2\mu_0) B_{cth}^2 V$ (see Eq. (4.50)). The magnitude of the full condensation energy is just equal to the expulsion energy.

Within the boundary layer, the two energies do not have their full value. The magnetic field is not completely screened. Instead, it penetrates up to a depth λ_L . The expulsion energy is reduced by the amount

$$\Delta E_B = F \lambda_L \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2$$

(where F is the area of the discussed boundary layer) compared to the case of complete expulsion up to the boundary line $x = 0$ in Figure 4.18. However, within the boundary layer the condensation energy is also reduced, since the number density of Cooper pairs is smaller than the equilibrium value $n_s(T)$. This reduction of the condensation energy is given by

$$\Delta E_C = -F \xi_{GL} \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2$$

where F is the area of the discussed boundary layer and ξ_{GL} is the Ginzburg-Landau coherence length

For simplicity, we have defined λ_L and ξ_{GL} in such a way that the energy values ΔE_B and ΔE_C are equivalent to the case in which the magnetic field penetrates ΔE_B and ΔE_C are

equivalent to the case in which the magnetic field penetrates completely up to the depth λ_L and then abruptly drops to zero and, on the other hand, the Cooper pair density abruptly jumps up to its full value $n_s(T)$ at ξ_{GL} . In this way, we have defined a "magnetic boundary" and a "condensate boundary." For the present case $\xi_{GL} > \lambda_L$, we find

$$\Delta E_C - \Delta E_B = (\xi_{GL} - \lambda_L) F \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2 > 0$$

Because of relation (4.67), the loss in condensation energy is larger than the gain in expulsion energy. In order to generate such a boundary, we must deliver the following wall energy α_w per unit area to the system:

$$\alpha_w = (\xi_{GL} - \lambda_L) F \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2$$

In Figure 4.19 we show the spatial variation of the energy densities ε_B and ε_C and their difference, which passes through a maximum.

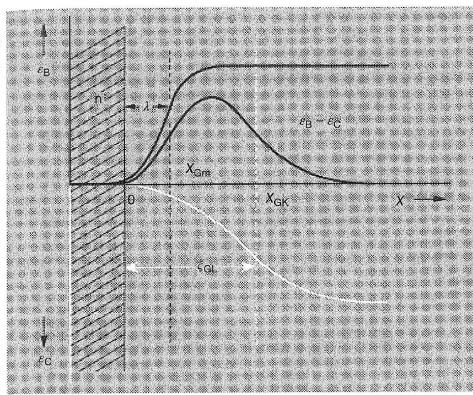


Figure 4.19 Spatial variation of the expulsion energy ε_B and of the condensation energy ε_C per unit volume at the boundary. We have $\int_0^{x \rightarrow x_{GK}} (\varepsilon_B - \varepsilon_C) F dx = (\xi_{GL} - \lambda_L) F \frac{1}{2\mu_0} B_{cth}^2$.

Here we see very clearly that the generation of a boundary layer between a normal conducting domain and a superconducting domain in a homogeneous material requires energy if ξ_{GL} is larger than λ_L ²⁵²⁵. In the case where $\xi_{GL} = \lambda_L$, that is, if the magnetic boundary and the condensate boundary coincide, we have $\alpha_w = 0$. In the case where $\xi_{GL} < \lambda_L$ formally we would obtain a negative wall energy. Now a new state, the so-called mixed state, is established. However, we must emphasize that these arguments based on the Ginzburg-Landau theory are valid only close to T_c .

We will return to our discussion of the boundary between a normal conducting domain and a superconducting domain in conjunction with type-II superconductors. Next we want to discuss the pressure dependence of the superconducting state. Again we can apply the rules of thermodynamics. This section will conclude our treatment of type-I superconductors.

4.66

Influence of Pressure on the Superconducting State

In Sections 4.6.1 and 4.6.2 we discussed the difference between the free enthalpies of the normal and the superconducting states at constant pressure as a function of

We must note that the magnetic penetration depth at the boundary area in a metal can be slightly different from the Cooper pair density. Here, we have ignored this difference.

the temperature. In order to simplify the formulas, for the quantitative discussion we have made three assumptions:

In the superconducting state, an external magnetic field should be completely expelled from the superconducting material, that is, there should be an ideal Meissner-Ochsenfeld effect. This

assumption is well satisfied for macroscopic type-I superconductors over the whole stability range. It yielded the connection between the external field and the magnetization.

In order to find the magnetic moment m from the magnetization M , we must know the sample volume. In this context, we have used an approximation by ignoring the dependence of the volume upon the magnetic field B . Experience indicates that this dependence is very small.

Finally, we have taken the temperature dependence of the critical field B_c from experiment, and we have used the parabolic dependence $B_c(T) = B_c(0) [1 - (T/T_c)^2]$ as an analytic, satisfactory approximation.

All our discussions have been restricted to constant pressure. In this section, we take up the influence of pressure on superconductivity,

Already by 1925, Sizoo and Kamerlingh-Onnes had observed such an influence on the transition temperature T_c [35]. In Figure 4.20 we show the change of the transition temperature with increasing pressure for tin in the absence of an external magnetic field [36]. The transition temperature decreases with increasing pressure. The effect is not very large. In order to change T_c in tin by 0.1 K, we must apply pressures of about 2000 bar²⁶⁾

The behavior shown in Figure 4.20 is typical for many superconductors. However, there are also some materials (e.g., Ti, Zr, V, La, U) whose transition temperature increases with increasing pressure [37, 38].

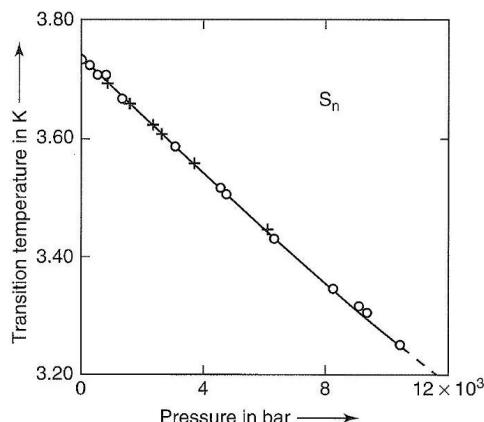


Figure 4.20 Pressure dependence of the transition temperature of tin [36]. 26) Pressure conversions: 1bar = 10^5 Pa = 10^5 N/m 2 = 1kp/cm 2 .

The change of T_c under pressure in zero magnetic field must be connected with the change of the critical field B_c with pressure. This influence of pressure on B_c is shown in Figure 4.21 for cadmium [39]. We have chosen cadmium, since they represent the best results combined with the application of high pressure techniques. The very low temperatures combined

The pressure was generated in a so-called "ice bomb" [40]. A steel vessel is completely filled with water. During cooling below the freezing point a pressure of about 1800 bar develops, since the volume is kept constant. At constant pressure, the freezing of water is accompanied by a volume expansion of about 10%. If the liquid-solid phase transition takes place at constant volume, the resulting ice must develop under a pressure that is sufficiently high to effect a 10% volume reduction of the ice. This ice bomb method has served for performing many experiments on the behavior under pressure.

For the studies of Cd, the ice bomb was cooled down to about 6×10^{-2} K by means of so-called adiabatic demagnetization (a magnetic cooling technique), and the critical field B_c was measured down to these temperatures. In the case of Cd, the critical field B_c decreases with increasing pressure, as expected from the pressure dependence of T_c at zero magnetic field.

The reduction of the critical field under pressure means that the difference $G_n - G_0$ decreases with increasing pressure at constant B and T . If we know the $G_n - G_s$ decreases with increasing pressure at constant B and T . If we know the volumes of the normal conductor V_n and of the superconductor V_s as a function of our independent variables T , p , and B , we can calculate the p dependence of $G_1 - G$. However, the volume changes $\Delta V/V$ are very small, namely only a few 10^{-8} . Therefore, it represents an experimental challenge to demonstrate these

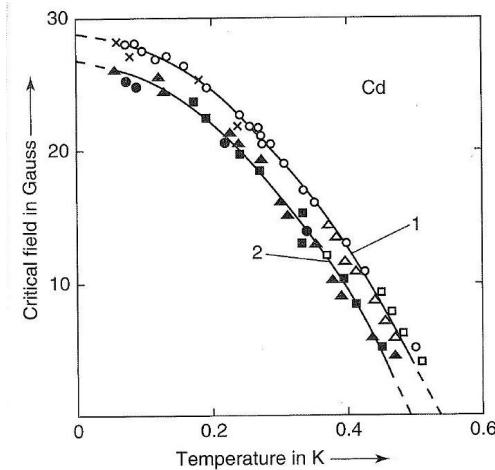


Figure 4.21 Temperature dependence of the critical field ($1G = 10^{-4}$ T) of cadmium at atmospheric pressure (curve 1) and at 1550 bar (curve 2). (From [39].) The original curves have many more data points than this reproduction.

changes convincingly. The measurements of B_c under pressure are somewhat simpler, and Figure 4.21 gives an example. From these measurements, we can determine the volume change during the phase transition by means of the Gibbs function G .

In general, we have the expression given in Eq. (4.11):

$$(dG/dp)_{T,B} = V$$

At the phase transition, we obtain ²⁷

$$(V_n - V_s)_{B=B_c} = V_s(B_c) \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{B_c^2}{2\mu_0} \right) = V_s(B_c) \frac{B_c}{\mu_0} \frac{\partial B_c}{\partial p}$$

This is analogous to the expression we have indicated in Section 4.2 for the entropy difference. From this expression we see that $V_n - V_s$ vanishes at T_c , because B_c is zero. Furthermore, we see that for $T < T_c$ we have $V_s > V_n$ if B_c decreases with p , that is, if $\partial B_c / \partial p < 0$, which is generally the case. The additional derivative with respect to p or T yields the difference of the compressibilities κ_s and κ_n or the difference of the thermal expansion coefficients α_s and α_n in the superconducting state and the normal state, respectively.

During the transition from the superconducting to the normal state, the volume changes have been measured directly using highly sensitive methods. Primarily, the length change of a sample in the form of a rod or a strip was determined. In Figure 4.22 we show the results for tin [41]. We see that $l_s > l_n$ for all temperatures $T > T_c$, as expected, where T_c denotes the transition temperature in zero magnetic field.

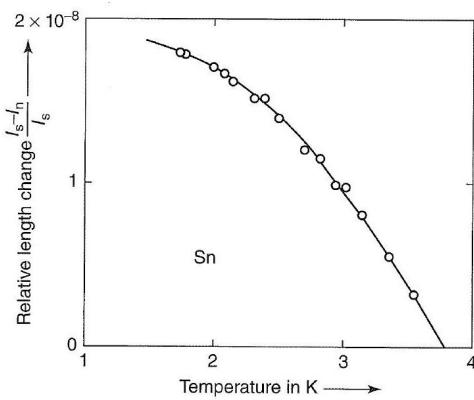


Figure 4.22 Relative length change $(I_s - I_n) / I_s$ of a tin rod at the transition into the superconducting state. (From [41].)

At the transition from the superconducting to the normal conducting state, the volume change

obtained from a differential variation of n . Here

possible dependence V_s/dp has been ignored

At the transition into the superconducting state, the sample expands. This is At tistent with the indications of our Gibbs function, for which we had assumed consise whe a perfect expusint of this length change near T_c requires a sensitivity of the length measurement of about 10^{-8} cm

Since the development of a microscopic theory, the BCS theory, studies of the pressure dependence of the transition temperature have gained much in importance. The application of hydrostatic pressure allows the continuous variation o the lattice constant of a substance. However, the lattice constant represents an important parameter for the quantum states of the electrons as well as of the lattice vibrations, the phonons. Since both quantities are highly important for superconductivity, new information for quantitative improvements of the microscopic conductivity, new information for quantits ive deressure. In Section 1.2 we have theory can be extracted from experiments under pressure. In Section 1.2 we have seen that our knowledge about the quantitative connections between the parameters of metals and superconductivity is still highly incomplete. For the transition the relation ²⁸⁾ (see Section 3.1.2, Eq. (3.6)):

$$T_c \propto \Theta_D \exp \left(-\frac{1}{N(E_F) V^*} \right)$$

We take the derivative with respect to p and obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_c}{\partial p} &\propto \frac{\partial \Theta_D}{\partial p} \exp \left(-\frac{1}{N(E_F) V^*} \right) \\ &+ \Theta_D \exp \left(-\frac{1}{N(E_F) V^*} \right) \left(\frac{1}{N(E_F) V^*} \right)^2 \frac{\partial (N(E_F) V^*)}{\partial p} \end{aligned}$$

For determining the relative change of T_c , we divide by T_c

$$\frac{1}{T_c} \frac{\partial T_c}{\partial p} = \frac{1}{\Theta_D} \frac{\partial \Theta_D}{\partial p} + \left(\frac{1}{N(E_F) V^*} \right)^2 \frac{\partial (N(E_F) V^*)}{\partial p}$$

From the determination of the pressure dependence of T_c and from the Deby temperature Θ_D , we obtain information on the pressure dependence of the quantity $N(E_F) V^*$ [38]

The change of the transition temperature under hydrostatic pressure can also serve for the construction of a superconducting manometer. Lead is particularly suitable, since it does not

have any phase transition up to about 160kbar, and it is insensitive to lattice defects. Therefore, one can place a small lead wire into the pressure cell and determine the pressure within the cell at low temperatures from the transition temperature T_c of the wire. A calibration of this Pb manometer up to about 160 kbar has been carried out by Eichler and Wittig [42]. The insensitivity

of T_c to lattice defects is important, since at the high pressures there is always a certain amount of plastic deformation, leading to the generation of lattice defects. This is even more pronounced at low temperatures.

So far we have discussed the influence of pressure within a single-crystalline phase. For many substances, under pressure one can obtain new crystalline phases, new modifications. Then we expect that during such a phase transition the superconducting properties are also changed. The high-pressure modification simply represents a new material.

Substances that do not show superconductivity at room pressure, but have superconducting phases at high pressure, are very interesting. In recent years, a number of such superconducting high-pressure phases have been found in semiconductors and in the transition range between metals and semiconductors (see also Table 2.1 and Figure 2.1).

Frequently, newly discovered superconductors are also studied early under high pressure. So in the case of the lanthanum-barium cuprate, one found a surprisingly large increase in T_c under hydrostatic pressure [43]. Since hydrostatic pressure reduces the lattice constant, also a "chemical" reduction of the lattice constant by inserting particularly small ions into the lattice could lead to T_c enhancement. C. W. Chu and coworkers utilized this argument and replaced the lanthanum by the smaller yttrium ion. In this way, they discovered the system Y – Ba – Cu – O and prepared samples with values of T_c above 80 K[44]²⁹

Careful studies of the thermal expansion and of the effect of pressure were performed with single crystals without twin boundaries. The thermal expansion of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ was measured with a resolution of 10^{-9} cm. It shows a strong anisotropy also within the Cu – O layers [45]. For a uniaxial pressure along the a -axis (Section 2.8.1), the experiments indicated a reduction of T_c , but along the b -axis an increase in T_c was found [46]. Similar results were obtained for other cuprates [47]. These observations were interpreted in terms of a change of concentration of the charge carriers in the Cu-O layers.

In the case of MgB_2 , with increasing pressure a linear decrease in T_c was observed, in good agreement with the behavior expected from the BCS theory [48]. In the case of the iron pnictides, depending on the doping, one finds an increase or decrease in T_c [49].

6.1.13 Type-II Superconductors in a Magnetic Field

As we have already discussed, below the lower critical magnetic field B_{c1} type-II superconductors exist in the Meissner phase, if geometric effects are ignored. However, above B_{c1} the magnetic field penetrates into the sample in the form of 29) Chinese scientists independently also found the system Y – Ba – Cu – O. Upon being questioned by "Since replacing Ba by Sr resulted in an enhancement of T , it appeared obvious to us also to replace La by Y."

quantized flux lines or vortices. Above the upper critical magnetic field B_{c2} , the superconductivity vanishes. In the following, we will look in more detail at these properties from a thermodynamic point of view. ³⁰

The discussion of the boundary layer between a normal conducting domain and a superconducting domain in Section 4.6.5 has shown that in the case $\lambda_L > \xi_{GL}$ the formation of the boundary layer is accompanied by an energy gain. In this case the following condition must be (approximately) satisfied:

$$\xi_{\text{GL}} F \frac{1}{2\mu_0} B_{\text{cth}}^2 - \lambda_L F \frac{1}{2\mu_0} B^2 < 0$$

Hence,

$$\xi_{\text{GL}} B_{\text{cth}}^2 < \lambda_L B^2$$

$$\frac{B_{\text{cth}}^2}{B^2} < \frac{\lambda_L}{\xi_{\text{GL}}}$$

Therefore, we expect that, for superconductors with $\lambda_L > \xi_{\text{GL}}$, the magnetic field can penetrate into the superconductor already at fields B that are smaller than B_{cth} . In this case, spatial variations of B and of the Cooper pair density n_s are expected, similar to the situation at a boundary layer. From the relations 4.41 and 4.42 in Section 4.5, we see that the condition $\xi_{\text{GL}} < \lambda_L$ can always be achieved by making the electron mean free path l^* sufficiently small. According to Eq. (4.41), λ_L increases weakly with decreasing l^* . On the other hand, according to Eq. (4.42), ξ_{GL} decreases with $(l^*)^{1/2}$. The mean free path can be reduced easily by alloying the superconductor with a small amount of impurities. The electrons are scattered at the impurities and, hence, their mean free path is reduced. Indeed, as we will see, alloys are in general type-II superconductors

Already in the 1930s, this particular behavior of superconducting alloys was observed experimentally. De Haas and Voogd reported [50] that in magnetic fields up to about 2 T lead-bismuth alloys still remain superconducting. These are magnetic fields that are larger by more than the factor 20 than the critical field of pure lead. There were attempts to understand such high critical fields in terms of the so-called sponge model proposed by Mendelssohn [51]. According to this model, the high critical fields should be caused by a network of fine precipitates, say, at grain boundaries. If these precipitates were assumed to be small compared to the penetration depth at least in one dimension, then the high critical fields could be understood qualitatively simply because of this geometry (see Section 4.6.3). Today we know that this sponge model may apply to many alloys, but that there exist also homogeneous superconductors, namely the type-II superconductors, which remain superconducting up to very high magnetic fields.

Qualitatively, we can understand in a simple way why a superconductor can tolerate higher magnetic fields, if at least a partial penetration of the field is possible.

A more detailed discussion of the properties of vortices can be found in the monograph [M17].

During the penetration of the field, the expulsion energy, which increases the free enthalpy of the superconducting state in the magnetic field, is reduced. Therefore, higher external fields are needed, in order to make the free enthalpy of the superconducting state equal to that of the normal state. Using similar arguments, we have understood the increase in the effective critical field of thin superconductors, into which the field can also penetrate.

According to Section 4.6.5 we expect that, together with the penetration of the field, also the condensation energy is reduced. However, for $\lambda_L \gg \xi_{\text{GL}}$, the gain due to the reduction of the expulsion energy can be much larger than the loss of condensation energy. Qualitatively, this situation is well accounted for by the Ginzburg-Landau theory. The prediction of the vortex state by Abrikosov [22] was one of the great successes of this theory.

4.7.1

Magnetization Curve and Critical Fields

The difference between type-I and type-II superconductors is clearly seen in the form of the magnetization curve. In Figure 4.23 we schematically show the magnetization curve of a type-II superconductor. Again we consider a rod-shaped sample, the demagnetization coefficient N_M of which is practically zero. At the lower critical field B_{c1} , the gain of expulsion energy due to

the field penetration becomes larger than the loss of condensation energy caused by the local variation of the Cooper pair density n_5 . As a result, the magnetic field penetrates into the superconductor in the form of quantized flux lines.

As a result of the magnetic field penetration, with increasing field the magnetization of the superconductor decreases monotonically. At a value B_{c2} , the upper

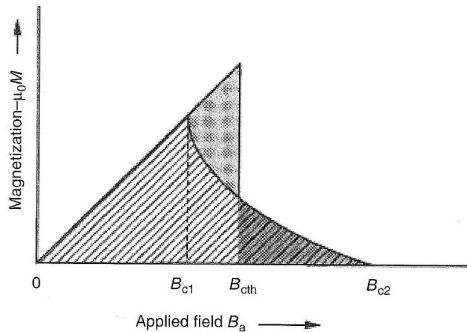


Figure 4.23 Magnetization curve of a type-II superconductor. Rod-shaped sample with $N_M = 0$. Because of the definition of $B_{c\text{th}}$, the shaded areas must be equal.

critical field, the magnetization reaches zero - the external field has canceled the superconductivity.³¹⁾

From the general thermodynamic arguments (see Sections 4.1 and 4.6.1), at constant temperature T and constant pressure p , the difference of the free enthalpies is given by

$$G_n - G_s = - \int_0^{B_{c2}} MV \, dB$$

If we ignore (as in Section 4.6.1) the very small changes of the volume V as a function of the magnetic field, we can extract V as a constant in front of the integral. The integral is proportional to the area under the magnetization curve

$$\int_0^{B_{c2}} M \, dB \propto \mu_0 F_M$$

Here, F_M is the area under the magnetization curve.³²⁾

If we take a type-I superconductor for comparison, its magnetization curve would be given by the vertical line at $B_{c\text{th}}$ in Figure 4.23. The areas under both magnetization curves must be equal. Now we see clearly the difference between a type-I superconductor and a typeII superconductor. A type-I superconductor completely expels the field up to the thermodynamic critical field $B_{c\text{th}}$, that is, it stays in the Meissner phase up to this field. On the other hand, at the lower critical field B_{c1} a type-II superconductor enters a state with a penetrated field, the so-called Shubnikov phase. In the Shubnikov phase, with increasing field the magnetization decreases monotonically and completely vanishes only at the upper critical field B_{c2} . The latter field can be much larger than the thermodynamic critical field of the corresponding type-I superconductor

In Figure 4.24 we present this important fact again. Here, the average magnetic field in the interior of the rod-shaped sample is plotted versus the external field. Figure 4.24 exactly corresponds to Figure 4.11 in Section 4.6.1. At B_{c1} the field starts to penetrate into the superconductor. However, only at B_c is the average starts to penetrate into the superconductor. Again the behavior of the corresponding type-I superconductor is indicated by the dashed line. The "corresponding" type-I superconductor denotes again one that has the same difference of the free enthalpies $G_n - G_s$ as the type-II superconductor.

We have already mentioned that a type-I superconductor can turn into a type-II superconductor if the electron mean free path is reduced sufficiently. This result of the Ginzburg-Landau theory has been well confirmed experimentally. By alloying

Under certain conditions, superconductivity can survive within a thin surface layer for fields in the range $B_{c2} < B_a \leq X, \hat{y}'B_{c3}$. The value of B_{c3} is about $1.7B_{c2}$. Here, we ignore this surface superconductivity.

In Figure 4.23 (as in Figure 4.10) we have plotted the quantity $-\mu_0 M$ instead of the magnetization M . For ideal field expulsion we have the ordinate, we obtain a straight line with a 45° angle.

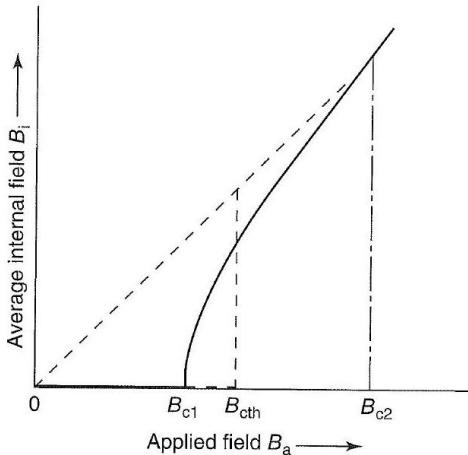


Figure 4.24 Average magnetic field in the interior of a type-II superconductor plotted versus the external field.

with impurity atoms, which reduce the electron mean free path, all type-I superconductors can be changed into type-II superconductors. One of many examples is shown in Figure 4.25. Here, the ideal magnetization curve of pure lead and the measured curve of a lead-indium alloy with 13.9at% indium are shown [52] Pure lead is a type-I superconductor. The alloy shows typical type-II behavior. The superconductivity of the alloy is completely canceled only at an upper critical field of about 0.24 T(2400G). On the other hand, for the temperature of 4.2 K of this experiment, the thermodynamic field of lead is only about 0.055 T(550G).

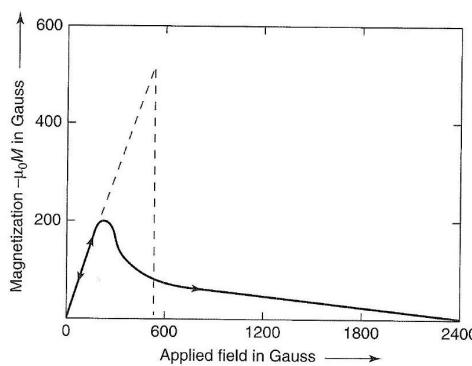


Figure 4.25 Magnetization curve of lead with 13.9 at% of indium (solid line). Rod-shaped sample with a small demagnetization coefficient. The dashed line shows the ideal curve of pure lead ($1G = 10^{-4}$ T). (From [52],)

Following these qualitative considerations, now we must turn to a few quantitative relations between the fields B_{c1} , B_{c2} , and B_{cth} . All these relations are obtained from the Ginzburg-Landau theory. Here, we must keep in mind that this theory is valid only close to T_c . The

crucial parameter is the Ginzburg-Landau parameter κ , that is, the ratio of the penetration depth λ_L and the coherence length ξ_g

Using the Ginzburg - Landau parameter, all the quantitative relations can be formulated in a simple way. For the upper critical field B_{c2} , one obtains

$$B_{c2} = \sqrt{2}\kappa B_{\text{cth}}$$

Here, for each type-II superconductor B_{cth} is defined from the difference of the free enthalpies given by Eq. (4.50):

$$G_n - G_s = \frac{1}{2\mu_0} V B_{\text{cth}}^2$$

From the solution of the Ginzburg-Landau equations one also finds ³³⁾ a simple relation between the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} and B_{c2}

$$B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{\text{GL}}^2}$$

Frequently, this relation is used for determining ξ_{GL} from the measurement of the upper critical field. However, frequently B_{c2} is too large to be measured directly in the limit of low temperatures. In this case, one extrapolates the experimental data from temperatures near T_c down to $T \rightarrow 0$. For conventional superconductors, the microscopic theory yields the important relation [53]:

$$B_{c2}(0) \approx 0.7T_c \left. \frac{dB_{c2}}{dT} \right|_{T_c}$$

Furthermore, we note that Eqs. (4.82) and (4.83) are valid only for isotropic superconductors. If the superconducting properties depend strongly on the crystallographic direction, as in the high-temperature superconductors, Eq. (4.82), for example, must be replaced by $B_{c2}^a = \Phi_0 / (2\pi\xi_b\xi_c)$. Here, the magnetic field is applied parallel to the crystallographic a direction, and ξ_b and ξ_c are the Ginzburg-Landau coherence lengths in the directions perpendicular to the field, respectively. Analogous expressions are obtained for the field orientation along the other crystal axes. In addition, we note that the results of this section apply to single-band superconductors

Also the lower critical field can be calculated from the Ginzburg-Landau equations. According to Abrikosov [22], in the limit $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ one obtains

$$B_{c1} = \frac{1}{2\kappa} (\ln \kappa + 0.08) B_{\text{cth}}$$

The value 0.08 in the bracket originates from the interaction between the vortices in the triangular lattice. We see that, with increasing κ , B_{c1} decreases

The details are too complicated to be presented here.

and B_{c2} increases. The lower critical field can also be related to the London penetration depth:

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} (\ln \kappa + 0.08)$$

Equations (4.84) and (4.85) are valid for isotropic superconductors and can be modified for anisotropic superconductors analogously to Eq. (4.82). Equation 4.85 provides a simple possibility for estimating λ_L from the measurement of the lower critical field.

Since in alloys the mean free path l^* decreases monotonically with increasing concentration of the impurities, for each system we can indicate a specific "critical" concentration at which the

host metal turns into a type-II superconductor. This transition is determined by the condition $B_{c2} \geq B_{cth}$. According to Eq. (4.81) this condition is equivalent to $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$. We see that type-I and type-II superconductors are simply distinguished by the value of κ :

$$\text{type-I superconductors: } \kappa < 1/\sqrt{2}$$

$$\text{type-II superconductors: } \kappa \geq 1/\sqrt{2}$$

This discrimination is strictly valid only near T_c . For $T < T_c$, for κ values only slightly larger than $1/\sqrt{2}$ there exists a transition into a state in which both the Meissner phase and the Shubnikov phase appear next to each other. We will return to this point in Section 4.7.2.

In Table 4.2 some values of κ for In-Bi alloys are indicated. In this system the transition into type-II superconductivity occurs at about 1.5 at% Bi. Similar concentrations were found also for other systems. From this we see that it is very easy to obtain a type-II superconductor. The κ_1 values in the table are obtained from measurements of the upper critical field B_c . However, the κ_2 values are calculated using a formula given by Gor'kov and Goodman. In this formula, the relation between κ and the electron mean free path is summarized as [55]

$$\kappa_2 \approx \kappa_0 + 7.5 \times 10^{-4} \rho \gamma^{1/2}$$

Here, κ_0 is the Ginzburg-Landau parameter of the pure superconductor, that is, for the limiting case $l^* \rightarrow \infty$, γ is the Sommerfeld coefficient of the specific heat of the electron system (in the unit $J/cm^3 K^2$), and ρ is the resistivity in the normal conducting state (in Ωcm). In this formula, the electron mean free path is expressed in terms of ρ and γ .

Table 4.2 The κ values^{a)} of In-Bi alloys.

A - %Bi	1.55	1.70	1.80	2.0	2.5	4.0
κ_1 at T_c	0.76	0.88	0.91	1.10	1.25	1.46
κ_2 at T_c	0.74	0.85	0.88	1.15	1.29	1.53

a) $\kappa_1 = \frac{B_c}{\sqrt{2}}$; $\kappa_2 = \kappa_0 + 7.5 \times 10^{-4} \rho \gamma^{1/2}$.

From [54].

Frin

A comparison of lines 2 and 3 in Table 4.2 indicates that the quite differently determined values of κ agree very well. For the application of Eq. (4.87), we must now the values of κ_0 . These κ_0 values can be obtained by extrapolating the κ values of alloys to zero concentration of the impurity atoms (Table 4.3)

One might ask if the constant κ_0 for type-I superconductors has a physical meaning. Such a meaning, indeed, results from the GLAG theory. In this case, (4.81) defines a field B which is smaller than B_{cth} . This field yields a definite Eq. (4.81) it for the so-called supercooling experiments.

In a magnetic field the transition from the normal conducting into the superconducting state in a magnetic field the transition from the normal conducting into the supertransitions, supercooling or superheating effects can occur. For example, water can be cooled down carefully to a few degrees below its freezing point without the formation of ice. For superconductivity this means, for example, that the magnetic field can be lowered below its critical value without the immediate appearance of the superconducting state. The magnitude of this effect depends on the detailed features of the experiment. For $B < B_{cth}$ the normal conducting state is thermodynamically unstable. However, the new phase cannot yet form itself. First, nucleation seed for this phase must appear, which subsequently can grow further. During such experiments, the magnetic field cannot fall below the value $B_{c2} (\sqrt{2}) \kappa_0 B_{cth}$ without the appearance of the superconducting state. So if we have a superconductor with a κ_0 value very close to $1/\sqrt{2}$, no supercooling

effects can be observed. However, in superconductors like pure Al or pure In, the magnetic field can be observed. However, in superconductors cold be well confirmed experimentally.

Finally, we mention another possibility for determining κ . Also the slope of the magnetization curve near B_{c2} is determined by κ , and we have

$$\mu_0(\mathrm{d}M/\mathrm{d}B)_{B=B_{c2}} = -\frac{1}{1.16(2\kappa^2 - 1)}$$

So far we have indicated four possibilities for determining κ : Eqs. (4.81), (4.84), (4.87), and (4.88). Near T_c all four methods yield closely similar κ values. However, for temperatures $T \ll T_c$ the values differ from each other. This is due to the fact that the Ginzburg-Landau theory is strictly valid only close to T_c . Furthermore, beyond this range of validity, K is temperature-dependent.

Because of their relation to B_{cth} , the two critical fields B_{c1} and B_{c2} are also dependent on the temperature. Neglecting all details, in Figure 4.26 we show schematically the three critical fields of a type-II superconductor. We can clearly see the stability regimes of the different phases. Below B_{c1} , the Meissner phase, that is the phase with complete field expulsion, is stable. Between B_{c1} and B_{c2} we have

Table 4.3 The κ_0 values ^{a)} of superconducting elements.

Element	Al	In	Pb	Sn	Ta	Tl	Nb	V
κ_0 at T_c	0.03	0.06	0.4	0.1	0.35	0.3	0.8	0.85

a) See also [56]

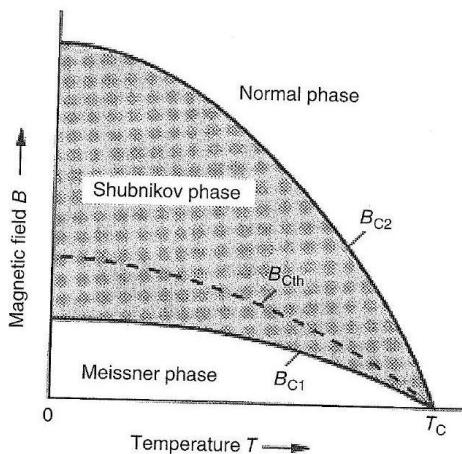


Figure 4.26 Schematics of the phase diagram of a type-II superconductor.

the mixed state, the Shubnikov phase, as the stable phase; and above B_{c2} there is normal conduction. In Figure 4.27 we show this diagram for an indium-bismuth alloy (In +4 at% Bi) [54].

For some substances, the upper critical field can reach rather large values (see also Chapter 2). In this case one often speaks of "high-field superconductors." For example, the Chevrel phases [57] (ternary molybdenum sulfides, see Section 2.5)

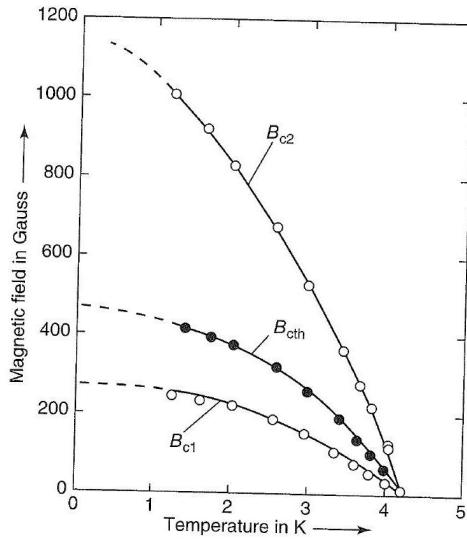


Figure 4.27 The critical fields ($1\text{G} = 10^{-4}\text{ T}$) of an indium bismuth alloy, In + 4 at% Bi. (From [54].)

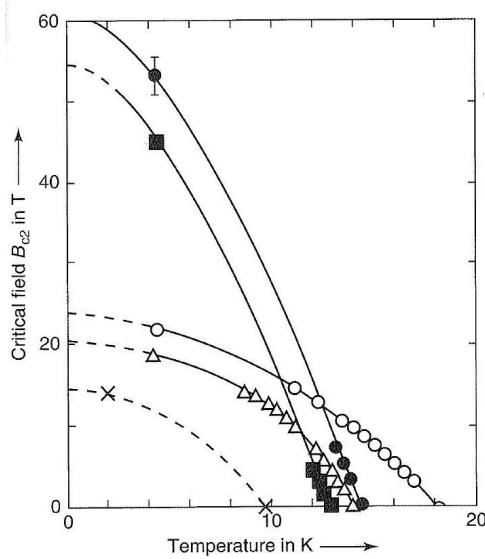
represent materials that can tolerate extreme magnetic fields up to about 60 T without losing their superconductivity [57, 58]. In Figure 4.28 we show B_{c2} plotted versus the temperature for some high-field superconductors. The critical fields of these materials can be a few hundred times larger than those of the type-I superconductors (Figure 4.12).

In the high-temperature superconductors, still larger values of B_{c2} are reached. In this case the layered structure of the materials plays an important role. In order to understand this, we consider a stack of thin superconducting plates of thickness d placed in a magnetic field. The plates should represent the layers of the structure, that is, the CuO_2 planes in the case of the high-temperature superconductors. If the magnetic field is oriented perpendicular to these layers, the supercurrents completely flow within the plates. We do not expect a particular influence of the layered structure. For the upper critical field, one finds the value

$$B_{c2\perp} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{\parallel}^2}$$

which essentially is identical to the expression (4.82) for isotropic superconductors. We have only denoted the Ginzburg - Landau coherence length by ξ_{\parallel} to indicate that in this case the change of Ψ parallel to the planes is relevant.

On the other hand, if the magnetic field is oriented parallel to the layers, the supercurrents are restricted to a region with the thickness d of the plates, if



Upper critical field of some high-field superconductors: ONb₃Sn, wire between neighboring sample [59]; ×Nb_{5n}Ti_{5n} [60]; ■PbMo₆₃₅S₈ [61]; PbGd₀₃Mo₆S₈ [61]. (See also Ref. [62])

no supercurrents can flow between neighboring plates. If the plate thickness is smaller than the coherence length ξ_{\perp} perpendicular to the plates, we can expect that in the expression of the upper critical field the plate thickness appears instead of ξ_{\perp} . This is exactly the result one obtains. One finds [63].

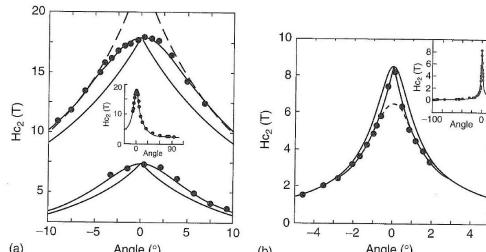
$$B_{c2\parallel}^{TP} = \sqrt{6} \frac{\Phi_0}{\pi \xi_{\parallel} d}$$

The notation "TP" indicates that we are dealing with the upper critical field of a thin plate. For $d \ll \xi_{\parallel}$, B_{c2}^{TP} is much larger than B_{c2} .

For a single thin plate, the upper critical field can be found also in the case of an arbitrary field orientation. If we denote the angle between the magnetic field and the plane of the plate by ϑ , the upper critical field of the plate is obtained from the quadratic equation [61]

$$B_{c2}^{TP}(\vartheta) \left| \frac{\sin \vartheta}{B_{c2,\perp}} \right| + \left[B_{c2}^{TP}(\vartheta) \frac{\cos \vartheta}{B_{c2,\parallel 1}^{DP}} \right]^2 = 1$$

The quantity $B_{c2}^{TP}(\vartheta)$ has a sharp peak at $\vartheta = 0^\circ$, and then decreases monotonically with increasing angle. The minimum B_{c2} is reached for $\vartheta = 90^\circ$. In Figure 4.29 this curve is shown in comparison with experimental data of the upper critical field for the two high-temperature superconductors YBa₂Cu₃O₇ and Bi₂Sr₂CaCu₂O₈. Although the measurements were performed



only a few

Figure 4.29 Upper critical field $B_{c2} = \mu_0 H_{c2}$ of the two high-temperature superconductors Ba₂Ca₃O₇ ($T_c \approx 91$ K, a) and Bi₂Sr₂CaCu₂O₈ ($T_c \approx 85$ K, b) obtained from resistance measurements plotted the angle between the CuO planes and the applied field. The main plots show the angles near the parallel orientation. The insets refer to the full range of angles. Measuring temperatures: for YBa₂Cu₃O₇, 89 K (upper curve) and 84.5 K (lower curve); for

$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ 80.4K. The sharply peaked curves correspond to Eq. (4.91) for the angle dependence of the upper critical field of a thin plate. The rounded curves refer to spatially homogeneous, superconduct (From [64].) kelvins below the transition temperature, the upper critical field parallel to the layers already reaches values of 10 T and higher in the figure we see the experimental data for $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ closely follow the angle dependence expected for a thin plate (or a stack of such plates). Weak Josephson currents are flowing between the CuO_2 layers of this compound (see Sections 1.5.1 and 6.1.1). However, they are so small that we can speak of a stack of independent plates in good approximation.

For field orientations nearly parallel to the layers, in contrast to $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ the experimental data for $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ follow a rounded curve. In the latter case the coupling between the CuO_2 planes is relatively strong. Hence, this compound is better described in terms of a spatially nearly homogeneous superconductor. However, the superconducting properties depend on direction. In particular, much larger supercurrents can flow within the CuO_2 planes than perpendicular to the planes. This dependence on direction can be well reproduced by the Ginzburg-Landau theory if in the gradient term of the Gibbs function \mathcal{G} (4.26) one introduces different values of the effective mass for the gradients of the upper critical field, in this "anisotropic Ginzburg-Landau theory" one obtains the expression

$$B_{c2}(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{(\sin \vartheta / B_{c2,\perp})^2 + (\cos \vartheta / B_{c2,\parallel})^2}}$$

Here, $B_{c2,\perp}$ is given by Eq. (4.89). For $B_{c2,\parallel}$ one obtains

$$B_{c2,\parallel} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_\parallel\xi_\perp}$$

At low temperatures, for both materials one obtains extremely high values of $B_{c2,\perp}$ at special laboratories. For field orientations perpendicular to the layers, for $T \rightarrow 0$ in the case of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ for the lower limit of $B_{c2,\perp}$ one obtains a value of at least 60 T, and for $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ even values above 100 T. This corresponds to Ginzburg-Landau coherence lengths ξ_\parallel (also referred to as ξ_{ab}) of about 1.5 – 3 nm. For $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ and for field orientations parallel to the layers, measurements were carried out using explosive flux-compression technique [66]. From this it appears that this material remains superconducting up to at least 240 T. Such fields correspond to coherence lengths ξ_\perp (also referred to as ξ_c) of about 0.3 nm. For $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ from such measurements near T_c , one even extrapolates critical fields in the range of 1000 T. The latter value corresponds to "plate thickness" d of about 0.4 nm, or to a coherence length $\xi_c \approx 0.1$ nm, if we use Eq. (4.93). These atomically small values, together with the angle dependence of the upper critical field, clearly show that in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ the superconductivity is practically exclusively concentrated on the CuO_2 planes.

Actually, the measurements were limited by the fact that the vortices within the material became mobile (see Section 47.2). The true values of B are much higher; for example, see [65].

So far we have discussed a number of superconductors with a very high upper critical field. From Eq. (4.90) for $B_{c2,\parallel}$ we even conclude that the upper critical field can become arbitrarily large if the plate thickness d becomes sufficiently small physically, this is unreasonable. Therefore, we must look for other mechanisms that limit the superconductivity in high magnetic fields.

In the case of spin-singlet Cooper pairing a limitation is reached by the Zeeman splitting, which the two electrons of the pair experience in the magnetic field. We have discussed this in Section 3.2.4. At a sufficiently high magnetic field, this energy splitting becomes so large that it is more favorable to abandon superconductivity and to orient the spins of both electrons parallel to the field. Based on these arguments, one can derive a critical field B_p that is connected with the energy gap Δ_0 via the relation [67, 68]

$$B_p = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}\mu_B} \approx 1.84[T/K]T_c$$

Here, μ_B denotes Bohr's magneton. This limitation of the superconducting state is also referred to as the Clogston-Chandrasekhar-limit or the paramagnetic limit. In the case of a strong coupling between the electron spin and the orbital angular momentum, this value can still be strongly increased, as well as by the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO)-states discussed in Section 3.2.4. For a superconductor with a transition temperature of 10 K, from Eq. (4.94) we obtain a value of 18.4 T, and for a superconductor with $T_c = 100$ K a value of 184 T. For most superconductors, B_p is much larger than B_{c2} according to Eq. (4.82). At the end of our discussion of the magnetization curve and the critical fields of type-II superconductors, we emphasize that all the results presented in this section are restricted to magnetization curves that can be followed reversibly. For an increasing external magnetic field, the same curve must appear as in a decreasing field. This is only the case if the thermodynamic equilibrium state is established for each external field B_a . In Chapter 5 we will see that generally this is not the case, and that, instead, all kinds of inhomogeneities hinder the spatial equilibrium distribution of the field. In this case, the form of the magnetization curve depends on the previous history of the superconductor. Only the value of B_c , at which the superconductivity completely vanishes, remains unequivocally fixed.

4.7.5

The Shubnikov Phase

In the Shubnikov phase, which is stable in a type-II superconductor at external fields B_a in the range between B_{c1} and B_{c2} , magnetic flux penetrates into the superconductor in the form of quantized flux lines (vortices). In the case of conventional superconductors, the lowest enthalpy value is obtained for a configuration of the vortices at the corners of equilateral triangles (see Section 1.2).

In Figure 4.30 the Cooper pair density, the spatial field distribution, and the supercurrent density associated with a vortex are shown schematically. In the center of the vortex the density of Cooper pairs is zero, and it reaches its

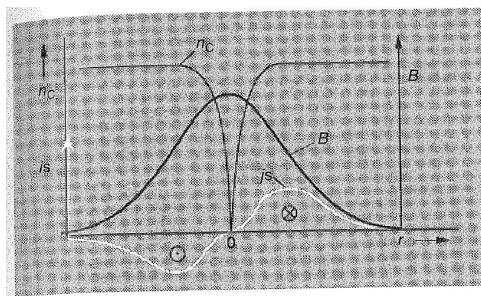


Figure 4.30 Spatial variations of Cooper pair density, magnetic field, and supercurrent density for a planar cut across a vortex, shown schematically.

equilibrium value $n_s(T)$ at a distance of about ξ_{GL} . In the center the magnetic field has its maximum with a value of about $2B_{c1}$, and it decreases toward the outside. This decrease in B is controlled by the penetration depth. Superconducting circulating currents flow around the vortex core, resulting in the spatial variation of the magnetic field.

Only after a lengthy calculation can one show that the lowest enthalpy and thereby the stable state is attained for a state with a triangular vortex lattice with one flux quantum at each lattice site. It is easy to see that only a vortex structure can appear, where each vortex contains exactly an integer multiple of the elementary flux quantum. In Section 1.2 we have derived the flux quantization, or more accurately the fluxoid quantization, from the condition that, during one turn around the superconducting ring, the wave function of the Cooper pairs must just reproduce itself. This condition is also valid for the vortices of the Shubnikov phase. From this we conclude that each vortex can contain only an integer multiple of the flux quantum

Φ_0 . If the configuration of a normal conducting core along the axis of a vortex is energetically favorable, we expect that each vortex contains exactly one Φ_0 such that as many vortices can be generated as possible. However, the fact that such a vortex lattice indeed represents the state with the smallest enthalpy can only be shown by detailed calculations. In Figure 4.31 we present the spatial variation of the Cooper pair density and of the magnetic field along one direction. With increasing external field B , the distance between the vortices becomes smaller. However, at the same time also the average Cooper pair density between the vortices becomes smaller. For external fields only slightly below B_{c2} , the vortices approach each other down to a distance of about $2\xi_{GL}$. In this case, because of the strong overlap of the circulating current systems, distinguishing between the individual vortices is no longer meaningful. For $B \rightarrow B_{c2}$, the Cooper pair density continuously approaches zero. Because of these features, the phase transition into the normal state at B_{c2} represents a second-order phase transition. On the other hand, in type-I superconductors, the phase transition in a magnetic field is of first order (see Section 4.6.2)

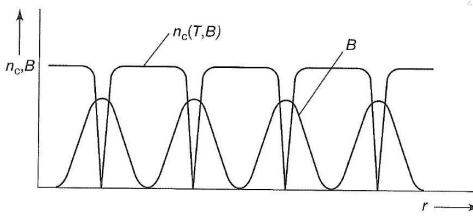


Figure 4.31 Spatial variations of Cooper pair density to the given values of T and B . Since pair density and magnetic field in the $\lambda_L > \xi_L$, with increasing field the magnetic field between the vortices is not completely expelled any more. attains the equilibrium value corresponding

Today we can investigate the Cooper pair density near a vortex with high spatial resolution using scanning tunneling microscopy [69] (see Section 1.2, Figure 1.10f). With this method, for example, ξ_{GL} can be determined directly, and the density of states of the unpaired electrons within the vortex can be studied in detail. Such experiments were particularly interesting for the high-temperature superconductors. In this case, ξ_{GL} (more precisely, ξ_{ab}) is so small that the unpaired electrons can occupy only a few discrete energy states, in contrast to many other superconductors, where these electrons can form a continuous energy spectrum.

So far, our discussion of the vortex lattice has been restricted to samples with zero demagnetization coefficient. The magnetic flux penetration was not determined by the geometry as in the case of the intermediate state experiments (see Section 4.6.4). Now the question comes up, whether some kind of intermediate state also exists in a type-II superconductor, and which phases coexist in this intermediate state. As long as the type-II superconductor resides in the Meissner phase, it expels the field in the same way as a type-I superconductor. However, if the field B_{cl} is reached at the surface of the sample, flux must penetrate into the type-II superconductor. In this case, a state is established in which macroscopic domains of the Meissner phase and of the Shubnikov phase exist next to each other. An example of this new state is shown in Figure 4.32. Instead of the normal phase of a type-I superconductor, for the type-II superconductor we have the Shubnikov phase.

Structures of this type are referred to as intermediate-mixed state. They are observed only for values of κ close to $1/\sqrt{2}$. Neumann and Tewordt [70] have extended the Ginzburg-Landau theory to temperatures below T_c . From this extension, one finds that there is a narrow range of κ values near $1/\sqrt{2}$ where the interaction between vortices becomes attractive. Due to this attraction, domains without flux lines coexist with domains containing vortices. Further details can be found in the monograph [M17].

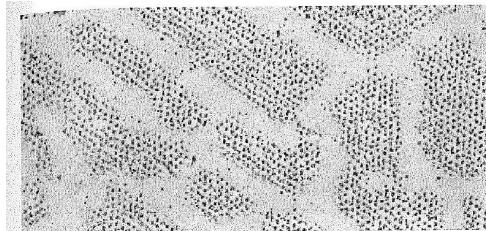


Figure 4.32 Coexistence of the Meissner phase and of the Shubnikov phase in a type-II superconductor with κ close to $1/\sqrt{2}$. Material: Pb + 1.89at% T

diameter and 1 mm thickness; external field $B_a = 36.5\text{mT}$; magnification 4800x. This state can be established in samples with a finite value of the demagnetization coefficient. (By $\kappa = 0.73, T = 1.2K$; sample: disk with 2 mm courtesy of Dr U. Essmann.)

Turning now to the Shubnikov phase in the high-temperature superconductors, we note that several of their properties have a strong impact on this phase:

the atomically small Ginzburg-Landau coherence length;

the high transition temperature T_c ;

the layered structure of the superconducting state in combination with the Josephson coupling between the superconducting CuO_2 layers in many cuprates.

As an additional property, we could mention the $d_{x^2-y^2}$ symmetry of the pair wave function. However, this affects the vortex properties that we want to discuss in the following only very little.

We can treat the "coherence volume" $V_c = \xi_{ab}^2 \xi_c$ as the volume element³⁵⁵ in which the Cooper pair density changes only very little, whereas large variations can appear on larger scales. In the cuprates, this volume is smaller by 2 – 4 orders of magnitude compared to that in conventional superconductors. We can write the condensation energy per unit volume of the superconducting state as $E_c = B_{cth}^2 / 2\mu_0$. In the cuprates, the value of B_{cth} can be about 1 T.

The condensation energy stored within V can be compared to the thermal energy $k_B T$. Here, we use the transition temperature T_c for an upper limit of $k_B T$. Obviously, the ratio $k_B T_c / (E_c V_c)$ represents a characteristic measure indicating the sensitivity of a superconductor against thermal fluctuations. The ratio $(k_B T_c / E_c V_c)^2 / 2$ is also referred to as the Ginzburg number G_i . In materials such as $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ or $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ it has a value of about 10^{-2} . However, in conventional superconductors, one obtains values that are smaller by 5 or more orders of magnitude.³⁶⁾ This indicates that in the cuprates thermal fluctuations play a much more important role than in conventional superconductors.

In the case of compounds such as $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, instead of ξ_c , we can use the thickness d of the superconducting layers.

G_{cice} can reach values of a few 10^{-3}

In conventional superconductors, the vortices generate a triangular lattice. Due to thermal fluctuations, the vortices can move around their equilibrium lattice site without leaving it altogether. In some sense the vortices form a crystal, which exists up to the upper critical field. However, if the fluctuations around the equilibrium site become comparable to the distance between the vortices, then the vortices will leave their lattice site, and we are dealing with a vortex liquid.

This "melting" of the vortex lattice was proposed in 1985 by Nelson and coworkers [71], and was subsequently studied in many theoretical and experimental papers, in particular for $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. A summary can be found in the Refs [72-74] and in the monograph [M17]. In $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ the supercurrents between the CuO_2 planes are relatively strong. So in this case we can speak of a highly anisotropic, but spatially nearly homogeneous, superconductor.³⁷

In Figure 4.33 we show schematically the vortex structure in the solid and liquid phases, and also a possible phase diagram. In the liquid phase there can still exist a certain amount of short-range order of the vortices ("hexatic vortex liquid"). In magnetic fields only slightly above B_{c1} ,

initially one expects a vortex liquid, which turns into a vortex lattice only with decreasing inter-vortex distance. At very high fields or very small distance between the vortices, the lattice melts again, and one

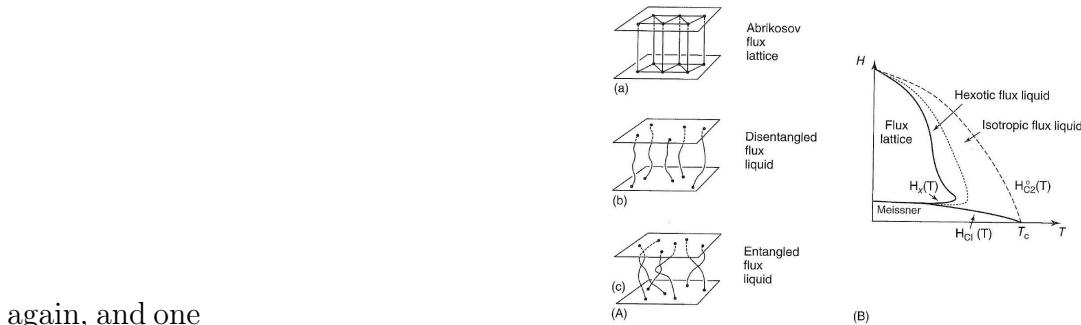


Figure 4.33 Possible phases of the socalled vortex matter in a spatially homoethermal fluctuations play an important role [75]. (A) We see schematically different vortex configurations: (a) vortex lattice, (b) a liquid phase where the vortices still remain

(B)

separated, and (c) a liquid phase with entanglement shown 7761 in the liquid phase a diagram amount of short-range order is possible ("hexatic vortex liquid"). One must note also that the liquid phase is inserted between the Meissner phase and the vortex lattice. obtains the vortex liquid. It is interesting that this melting represents a first-order obtains transition, in contrast to the second-order phase transition observed in conventional type-II superconductors at B_{c2} .

In the early experiments, often the dissipation due to the vortex motion was In the early experiments, often the dissipation due to the vortex motion was were discussed highly controversially for a long time. One reason is that the studied materials contain a large concentration of defects. Then, instead of the regular vortex lattice, one obtains a vortex glass. Furthermore, in the liquid phase, the vortices are not freely mobile. However, with improving quality of the crystals, the melting of the vortex lattice could be demonstrated nicely in measurements of the magnetization [78] and even of the specific heat [79]. In Figure 4.34 we show a recent experimental phase diagram obtained from such measurements with $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ [80]. We note that the deviations from the theoretical phase diagram of Figure 4.33 are still very large. In particular, there appears a glass phase caused by the defects in the vortex lattice.

Liquid vortex phases could also be detected in other anisotropic superconduc-

case of these compounds, the Ginzburg number is about 10^{-4} .

Now we turn to the superconducting, layered compounds, in which the layers are only weakly coupled with each other by means of the Josephson effect. ers are only weakly coupled with each other by means of the Josephson effect. First we consider the case $T = 0$, and we assume that the magnetic field is oriented

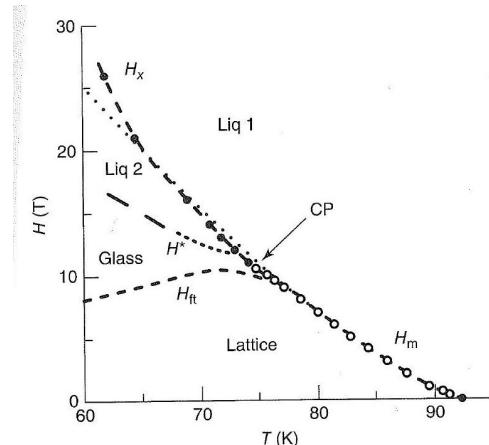


Figure 4.34 Experimental phase diagram state caused by defects in the vortex crystal. of

the vortex state in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ in mag (???) Above the line H^* the magnetization curves A the planes.

The plot shows the melting line H_m hysteresis. The dashed line corresponds to a H_{ft} separates the vortex lattice from a glassy lattice. (From [80], Θ2001 Nature.)

perpendicular to the layered structure. Also in this case above the field $B_{c1,\perp}$ there appear vortices each carrying one flux quantum Φ_0 . The field $B_{c1,\perp}$ is given by

$$B_{c1,\perp} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}^2} \left(\ln \frac{\lambda_{ab}}{\xi_{ab}} + 0.08 \right)$$

corresponding exactly to expression 4.85. Here, we have denoted the London penetration depth by λ_{ab} , since the shielding currents flow within the ab plane of the superconducting layers.

In the present case, the supercurrents flow around the vortex axis exclusively in the superconducting layers separated from each other, that is, within the planes marked by the crystallographic a and b axes. Hence, we can speak of stacks of nearly two-dimensional vortices. In each layer the vortex can be imagined as an independent, individual object. J. R. Clem introduced the term pancakes for these vortices [83].

The case of a single thin superconducting layer of thickness d was studied by J. Pearl in 1966 [84]. It was found that within the layer the circulating current around the vortex decay with a characteristic length $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_L^2/d$ from the axis toward the outside. Obviously, for $d \ll \lambda_I$ the length λ_{eff} can become much larger than λ_L . However, also in this two-dimensional case, the vortices generate a triangular lattice within the layer.

If we have a stack of many superconducting layers, the pancakes within the different planes will interact with each other. This interaction results, on the one hand, from the magnetic field generated by each vortex, and, on the other, from the Josephson supercurrents between the planes. Two vortices in neighboring planes attract each other if they have the same sign. Hence, in a perpendicular magnetic field the pancakes order themselves on top of each other along common axes. So one again obtains essentially a triangular lattice of flux lines penetrating the whole sample.

However, now it costs only little energy to shift the individual pancakes away from their common axis. Therefore, at finite temperatures, a number of different vortex phases are possible [85]

the "crystalline" state, in which the pancakes form a triangular flux-line lattice; - a flux-line liquid, in which the pancakes still form flux lines, which are freely mobile;

a quasi-2D vortex solid, in which the pancakes form a triangular lattice within a plane, but where the lattices in different planes are freely shifted relative to each other;

a pancake gas, in which the pancakes are freely mobile within a plane and also are not ordered any more perpendicular to it.

In Figure 4.35 we show a vortex phase diagram of two $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ single crystals with different oxygen concentrations, determined from measurements of the muon-spin resonance and magnetization [86]. We can see the phases discussed above. However, we also note that the details strongly depend on the

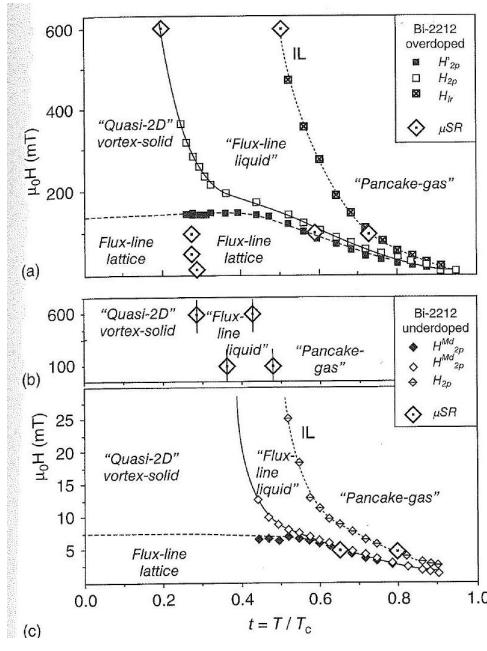


Figure 4.35 Vortex phase diagrams of (μ SR) and of the magnetization. (a) Overdoped crystal, $T_c = 77$ K[86].

doping level of the samples. Furthermore, disorder plays an important role, similarly as in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, such that the "crystalline" phases rather represent glassy states. Similar phase diagrams were also determined using other experimental methods, say, using the vortex penetration into the crystal [87] or using the magnetic permeability [88]. Frequently, these measurements differ in a number of details, but they clearly indicate that in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ there exist a number of different vortex states.

Further we note that mostly a Gibbs function serves as the starting point of the theoretical calculations, which is constructed similar to Eq. (4.27) of the Ginzburg-Landau theory. This "Lawrence-Doniach model" [89] was developed in 1970. In this model one considers a stack of two-dimensional superconducting layers, which are coupled to each other by means of Josephson currents. However, the calculation of the different vortex phases is extremely difficult and can be done only using various approximations.

Let us look at the superconducting layered structure at $T = 0$ in a magnetic field oriented parallel to the layers. If the applied field is very weak, the Meissner phase appears again. The shielding currents flow across the superconducting layers. However, the maximum value of this current is much smaller than in the case where the field is applied perpendicular to the layers. As a result the penetration depth λ_c of the magnetic field parallel to the layers is much larger than perpendicular to them. The value of λ_c can reach up to $100\mu\text{m}$ or more.

Vortices can also be generated in a parallel orientation of the field, if the magnetic field exceeds a lower critical field $B_{c1,\parallel}$. In the Lawrence-Doniach model for $B_{c1,\parallel}$, one finds the expression [90]

$$B_{c1,\parallel} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_{ab}\lambda_c} \left(\ln \frac{\lambda_{ab}}{s} + 1.12 \right)$$

Here, s is the distance between the superconducting layers. Because of the large value of λ_c , $B_{c1,\parallel}$ is smaller by a factor λ_{ab}/λ_c than the field $B_{c1,\perp}$ for perpendicular field orientation given by Eq. (4.95). The factor λ_{ab}/λ_c can attain values of 10^{-3} or smaller. Further, we note that in Eq. (4.96) compared to Eq. (4.95) the coherence length ξ_{ab} is replaced by the layer distance

Within the planes the vortices have a diameter of about $2\lambda_c$ and perpendicular to the planes a diameter of about $2\lambda_{ab}$. Hence, they are very flat objects, extending also over many

superconducting planes, since λ_{ab} in general is much larger than the layer distance. Figure 4.36 schematically shows the current distribution of one of these so-called "Josephson vortices." The magnetic field distribution of such vortices can be imaged experimentally by means of scanning superconducting quantum interference device (SQUID) microscopy (see Section 1.2) [92].

Near the vortex axis the Josephson vortices differ strongly from the Abrikosov vortices in homogeneous type-II superconductors or from the pancake vortices in superconducting layered structures. In the Abrikosov vortices or pancake vortices the Cooper pair density decreases toward the vortex axis down to zero on a length scale ξ_{GL} (see Figure 4.30). On the other hand, in the Josephson vortices the axis is located within a non-superconducting layer, such that the Cooper pair density does not have to be suppressed anymore.

In Figure 4.36 b we show the current density between the two superconducting layers where the vortex axis is located. The supercurrent density increases from the vortex axis toward the outside on a length scale λ_1 , the Josephson penetration depth (see Eq. (1.69)). It passes through a maximum value and then decreases gradually. A Josephson vortex also has a core, which is given perpendicular to the layers by the thickness of the insulating barrier and parallel to the layers by λ_T .

A Josephson vortex can move easily only parallel to the layers.³⁸⁾ During a displacement in the z direction the vortex axis must cross a superconducting layer, which is only possible by suppressing the Cooper pair density within this layer at the vortex axis down to zero. However, this costs a large amount of condensation energy, and as a result the superconducting layers develop an energy barrier against the displacement of the Josephson vortex in the z -direction.

In Chapter 6 we will discuss in detail the highly interesting dynamic properties of moving Josephson vortices. (!?!?!)

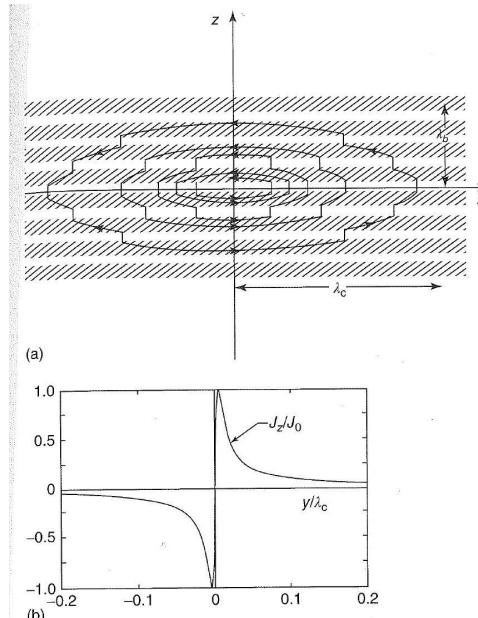


Figure 4.36 (a) Schematic of the circulation of currents around a "Josephson vortex" perpendicular to the paper. (b) The superconducting layers are the hatched two layers, between which the vortex axis is located. (From [91].)

In parallel magnetic fields also the Josephson vortices generate a triangular vortex lattice [93]. If the applied magnetic field is slightly tilted away from the parallel orientation, initially the Josephson vortices cannot cross the superconducting layers [94]. We have the situation that is highly unusual for superconductors in which the magnetization generated by the circulating currents and the applied magnetic field are not parallel to each other. This matching effect, which can be demonstrated, for example, by the measurement of the torque trying to reorient the sample parallel to the field, is frequently used to find out if the superconductor has an internal layered structure.

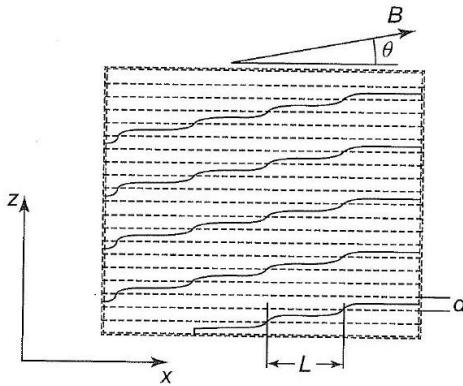


Figure 4.37 Staircase pattern of flux lines in a magnetic field applied at an angle θ to the superconducting layers [95]. The flux lines pass across the planes in the form of pancake vortices joined together by short segments (of length \perp) of Josephson vortices.

Only when the magnetic field component perpendicular to the layers reaches a value corresponding to about the lower critical field $B_{\text{cl},1}$ can the magnetic field also pass through the superconducting planes. Depending on the magnitude of the maximum supercurrents that can flow between the layers, different types of vortex structures are possible. For example, independent sublattices of Josephson vortices and of pancake vortices can be formed. In the case of strong coupling between the layers, one obtains vortices that are arranged like a staircase around the direction of the applied field. This latter situation is shown schematically in Figure 4.37. The flux lines cut across the superconducting planes in the form of pancake vortices. In between there appear short segments of Josephson vortices.

We expect that at finite temperatures, the situation becomes even more versatile. As an example, in Figure 4.38 we show the vortex phases observed for a $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystal in the temperature range 77–88 K by means of Hall magnetometry [96]. The diagram indicates the different vortex phases in the $(H_{\parallel}, H_{\perp})$ plane. One finds a vortex liquid (VII), slightly tilted lattices from pancake vortices (II), weakly interacting crossing lattices (III), composite lattices (IV), or configurations in which the pancakes are arranged in the form of chain structures above the Josephson vortices (V, 1D chains; or VI, sublimed 1D chain state).

We do not want to discuss the various possibilities any further. However, we emphasize that the special properties of high-temperature superconductors have resulted in a number of novel phenomena, which had not been observed previously in superconductors.

At the end of this section we briefly want to discuss what happens if we deal only with a single, very thin superconducting plane instead of a superconducting layered structure. We have already treated the case of thin plates several times in the context of the Ginzburg-Landau theory or of the critical magnetic fields, but we have ignored the influence of thermal fluctuations.

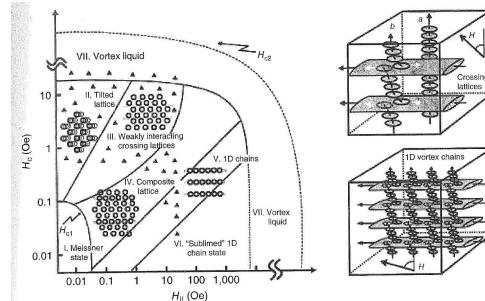


Figure 4.38 Phase diagram of means of Hall probe microscopy. Measuring $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystal as a function temperature: 77 – 88 K. The two figures on and H_1 The vortex phases were observed by vortex phases (From [96], @2001 Nature.)

It turns out that for two-dimensional or one-dimensional systems, these fluctuations can

become sufficiently large that the macroscopic wave function characterizing the superconducting state is destroyed. This result was derived by Hohenberg [97] and by Mermin and Wagner [98] in the 1960s. We can understand this easily by looking again at the coherence volume $V_c = \xi_{ab}^2 \xi_c$. If the superconducting layer is very thin, we must replace ξ_c by the layer thickness d . However, for $d \rightarrow 0$ we have $V_c \rightarrow 0$, and the condensation energy stored in V_c vanishes. Then it costs less and less energy to generate a vortex by means of thermal fluctuations.³⁹ In the absence of an external magnetic field, positive and negative vortices will be generated spontaneously in equal numbers such that the average magnetization of the sample vanishes. If these vortices can move independently of each other they result in dissipation and, hence, in a finite resistance. The superconducting state is destroyed.

Berezinskii [99] as well as Kosterlitz and Thouless [100] have shown that at a somewhat lower temperature, namely at the now so-called Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition temperature T_{BKT} , vortex-antivortex

A more accurate calculation, which takes into account also the energy contribution of the shielding the decay length of the circulating currents in a nearly two-dimensional layer

pairs are generated. These pairs again stabilize a superconducting state, in which the Cooper pairs are not correlated with each other anymore over arbitrarily large distances.

If below T_{BKT} a magnetic field is applied perpendicular to the layer, free vortices appear with their orientation given by the applied field. At low temperatures, these vortices again form a triangular lattice. However, this lattice is also highly sensitive to thermal fluctuations. Again one can obtain a vortex liquid, perhaps having a certain hexatic short-range order [101]. Hence, also for the two-dimensional system there exists a phase diagram containing a Meissner phase, a triangular vortex lattice, and liquid vortex phases.

In the last section, but also briefly in Section 1.4, we considered the influence of thermal fluctuations on the vortex state below the transition temperature T_c . Obviously, these fluctuations of the equilibrium state also exist above T_c . In the normal conducting state, the deviation from equilibrium can lead to the transient appearance of the superconducting state within certain regions, that is, to the formation of "puddles" of Cooper pairs. These deviations from equilibrium are not stable, and they will disappear more or less quickly. The statistical appearance of Cooper pairs will become more and more rare the higher the temperature, since with increasing temperature the normal conducting state becomes more and more stable compared to the superconducting state. Therefore, with increasing temperature, larger and larger deviations from equilibrium are needed to generate the superconducting state.

If we note further that the puddles of Cooper pairs represent perfectly conducting regions, we understand immediately that already above T_c due to the fluctuations in the normal conducting state the statistically appearing puddles of Cooper pairs result in an additional electrical conductivity, which must strongly increase on approaching T .

This influence of the thermal fluctuations can be clearly detected for a number of superconductors. In Figure 4.39a we show the transition curve of a bismuth film near the critical temperature T_c [102]. We see clearly that the full normal resistance is reached only at temperatures considerably above T_c . In Figure 4.39 b the electrical conductance is plotted instead of the resistance. In this plot the additional conductance σ' of the Cooper pair puddles, statistically appearing and vanishing again, is particularly clearly visible.⁴⁰⁾ We note that here and in the following we are not dealing with the specific conductance σ^* , but with the conductance $\sigma' = \sigma^* d$ (d = thickness) in the unit $\text{A/V} = \Omega^{-1}$.

In Figures 4.39 and 4.40, the resistance or the conductance is normalized to the film geometry of square (length l = width b).

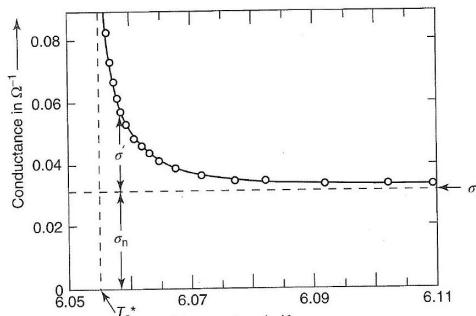
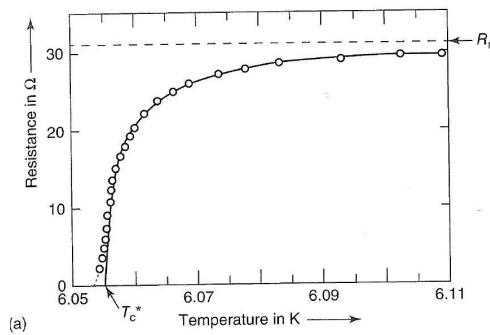


Figure 439 Transition curve of an amorphous bismuth film of 47 nm thickness: (a) resistance

The additional conductance due to the Cooper pairs can be calculated from the existing theories of superconductivity in combination with the theory of fluctuations. For a film that is thinner than ξ_{GL} , one obtains [103]

$$\sigma'(T) = \frac{e^2}{16\hbar} \frac{T_c^*}{T - T_c^*} \frac{b}{l}$$

where e is the elementary charge, \hbar is Planck's constant $h/2\pi$, T_c^* is the transition temperature obtained by fitting Eq. (4.97) to the experimental data, b is the width and l is the length of the film

We see that the additional conductance σ' must be proportional to $1/(T - T^*)$. This theoretical result is well confirmed by experiment. The curves shown in Figure 4.39 exactly reproduce this temperature dependence. Furthermore, according to Eq. (4.97), the additional conductance σ' should be independent of

6.2 линейная электродинамика сверхпроводников

про Лондонов и все остальное
все в рамках этой теории

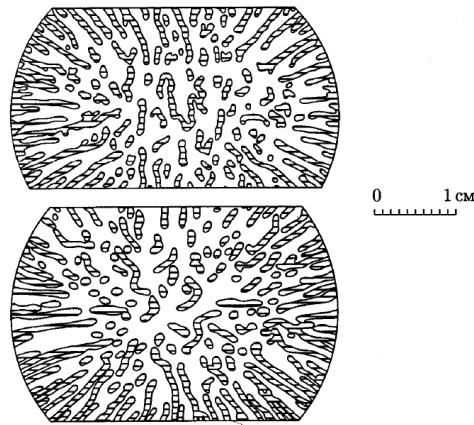
6.2.1 Уравнение Лондонов

вывод первого уравнения Лондонов

границы применимости

обобщение про Г-Л и все, что дальше будет.

распределение нормальной и сверхпроводящей компоненты .



(из Шмидта) распределение нормальной и сверхпроводящей компоненты

6.2.2 сверхпроводник с точки зрения линейной электродинамики

глубина проникновения

итоговая формула Поле в глубину сверхпроводника спадает по формуле

$$H = H_0 e^{-x/\lambda}$$

Характерная длина, на которой происходит ослабление поля в e раз, есть λ .

Это и есть физический смысл величины λ , введенной формально в уравнении Лондонов $j_s = \frac{-1}{c\lambda} A$.

Эта величина называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля:

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}$$

Отсюда по формуле Лондонов можно найти, что экранирующий ток убывает так же.

Действительно, $\mathbf{j}_s = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$, что в нашей плоской геометрии дает $j_s = - (c/4\pi) dH/dx$. Подставляя сюда (6.2), получим

$$j_s = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} e^{-x/\lambda}$$

Поскольку λ зависит от n_s , она зависит от температуры.

Довольно хорошим приближением для температурной зависимости λ является эмпирическая формула

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\left(1 - (T/T_c)^4\right)^{1/2}}$$

описание проникновения поля в сверхпроводник

комплексная проводимость сверхпроводника

вроде бы одно из самых нужных.

??. Шмидт

индуктивность

???

Шмидт

скин эффект

???

6.2.3 различные конфигурации с точки зрения линейной электродинамики

(у шмидта примеры)

Переходим к рассмотрению распределения поля и тока в некоторых простых конфигурациях.
(научусь решать эти уравнения)**Пластина в параллельном поле .**Начнем со случая, когда бесконечная пластина толщины d помещена в однородное параллельное пластине магнитное поле H_0 .Пусть плоскость $x = 0$ проходит по центру пластины, поверхности пластины совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$, магнитное поле направлено вдоль оси z .Поле внутри пластины должно удовлетворять уравнению (5.13). Учитывая, что по соображениям симметрии поле H внутри пластины должно быть направлено вдоль оси z и зависеть только от x , уравнение (5.13) можно записать в виде

$$d^2H/dx^2 - \lambda^{-2}H = 0$$

с граничными условиями $H(\pm d/2) = H_0$. Общее решение уравнения (9.1) имеет вид

$$H = H_1 \operatorname{ch}(x/\lambda) + H_2 \operatorname{sh}(x/\lambda)$$

где H_1 и H_2 - постоянные интегрирования. Подставляя в (9.2) граничные условия, получим и решим два алгебраических урав-

.....

пластина с током такое-то решение...**6.3 теория Гинзбурга-Ландау**

(пока в отдельной записи пишу, позже перкину сюда суть для твердого тела)

6.4 Cooper Pairing

In Chapter 1, we saw that superconductivity is intimately connected with the appearance of a macroscopic coherent matter wave constituted by electron pairs. Now we must ask how this pairing is accomplished, and how in the end it results in a macroscopic quantum wave with a well-defined phase. First, we will discuss conventional superconductors (see Section 2.1). In the second half of this chapter, we will turn to unconventional superconductors and in particular to high-temperature superconductors.

6.5 Conventional Superconductivity**6.5.1 Cooper Pairing by Means of Electron-Phonon Interaction**

Following our discussion in Chapter 1, it appears relatively easy to arrive at a theory of superconductivity based on the microscopic interaction between the electrons themselves and between electrons and the surrounding crystal lattice. However, historically such a theory was confronted with extreme difficulties. Because of the striking change of the electrical conductivity and the magnetic effects during the onset of superconductivity, one could presume that

essentially one is dealing with an ordering process within the system of conduction electrons. As we saw in Section 1.1, because of the Pauli principle the conduction electrons have fairly large energies up to a few electronvolts (1eV corresponds to thermal energy $k_B T$ at a temperature of about 11000 K). However, the transition into the superconducting state occurs at only a few kelvins. Hence, one had to find an interaction that could lead to ordering within the electron system in spite of the high electron energies.

There exists a multitude of possible interactions between the conduction electrons in a metal. It had been imagined [1] that Coulomb repulsion between the electrons could lead to a spatial ordering of the electrons in the form of a lattice. Also [2] a magnetic interaction seemed possible. The electrons propagating through the metal lattice with impressive velocities (electrons having energies

near the Fermi energy can reach velocities near 1% of the velocity of light) generate a magnetic field because of the associated currents and can then interact with each other due to this magnetic field. Other interactions can result from the structure of the electron states (allowed energy bands, see Section 1.1) [3]

All these attempts did not lead to a satisfactory microscopic theory of superconductivity. Only in 1950/1951 was an interaction between the electrons mediated by the vibrations of the lattice discussed simultaneously and independently by Fröhlich [4] and Bardeen [5]. As it turned out later, these ideas would lead to a fundamental understanding of superconductivity in terms of established concepts about the behavior of metals. Starting from this interaction, in 1957 Bardeen (Bardeen-Cooper-Schrieffer) theory, which was able to explain quantitatively many known experimental facts, and which turned out to be extremely stimulating. Motivated by this theory, after 1957 a large number of completely new experiments were performed, which strongly expanded our ideas about superconductivity and which basically changed our underlying concepts.

Still the road from the suggestion of a new interaction (1950) to the formulation of a satisfactory theory (1957) was a very difficult one. It was thus highly favorable when, nearly simultaneously with the theoretical discussion of this new interaction and of its possible importance for superconductivity, a surprisingly clear experimental confirmation of the basic correctness of the theory reached the scene. During the study of the different isotopes of the same superconductor, it had been found that the transition temperature T_c of superconductivity depends on the mass of the lattice atoms. Furthermore, the experimentally observed dependence exactly corresponded to that expected from the theoretical concepts of Fröhlich (see Section 3.1.3.1). This has shown that apparently the theory had hit the correct point, independent of all formal difficulties. This confirmation of the basic concepts had an important influence on the subsequent development.

How can we understand the interaction between the electrons that is mediated through the lattice vibrations? In the following, we will discuss some model ideas regarding this interaction. However, we must keep in mind that these model ideas are of little value if we try to extract further conclusions.

We start with a static model. The lattice of the atomic ions, in which the conduction electrons propagate as a Fermi gas, has elastic properties. The atomic ions are not stiffly bound to their lattice sites at rest. Instead, they can be deflected from their sites. At finite temperatures, they oscillate in an irregular way around these sites, as we have discussed. If we consider just two negative charges within this lattice of atomic ions, and in an oversimplified way ignore all other electrons, the negative charge of both electrons will slightly distort the lattice by attracting the surrounding positive charges. In other words, the lattice is polarized because of the negative charge. This situation is shown schematically in Figure 3.1. Compared to the uniform distribution of the positive charges, the polarization leads to an accumulation of positive charge near the polarizing negative charge. The second electron with its polarization

then feels the polarization of the first electron. It experiences an attraction to the location of the polarization and, hence, to the

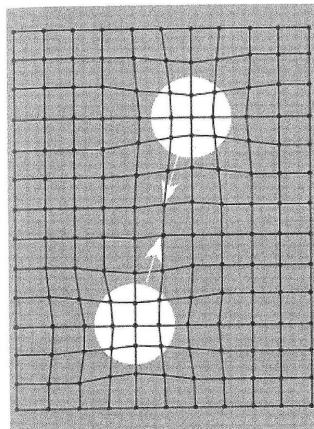


Figure 3.1 Polarization of the lattice of atomic ions due to the electrons. Within a static model, this polarization cannot overcompensate the repulsion between the electrons because of their equal charge. It can only strongly reduce the repulsion.

first electron. In this way, we have described an attractive interaction between two electrons due to the polarization of the lattice.

We can present a mechanical analogy for this static, attractive interaction. We represent the elastically deformed lattice of atomic ions by an elastic membrane, say, by a thin, stretched rubber sheet or by the surface of a liquid.⁶ Next, we place two small balls onto this membrane. In the case of the liquid, the balls must remain nonwetted. If the distance between the balls is sufficiently large because of its weight, each ball will locally deform the membrane independent of the other (Figure 3.2a).

This corresponds to the deformation of the lattice. We recognize intuitively that the energy of the total system (membrane with the two balls) can be lowered if the the energy of the total system (membrane with the two balls) can be lowered if the two small balls lie in the same hollow. They will sink in more deeply (Figure 3.2b), which corresponds to a decrease of the potential energy in the gravitational field. Hence, also the total energy of the system decreases, and the difference between

Due to the surface tension it costs energy to deform the equilibrium configuration of the surface of a liquid.

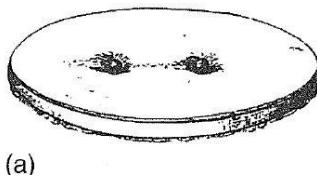


Figure 3.2 Attraction between two small balls on an elastic membrane. The configuration (a) is unstable and changes into configuration (b).

the mechanical energy at the beginning and at the end is changed into heat due to frictional effects. We see that we obtain an interaction between the small balls because of the elastic membrane, resulting in a bound state, that is, in a state where the two small balls are spatially located very close to each other

The model illustrates that an attractive interaction can be realized by means of elastic deformations, no more than that. In a metal, the electrons have impressive velocities. They do not polarize the lattice statically. One could presume that rather, during this motion through the lattice, the polarization takes place along the way, which sensitively depends on how quickly

the lattice can follow the polarizing action of the electron. The time during which the lattice of atomic ions can respond to any displacements should be crucial. However, for an elastic system, this means that the characteristic internal frequencies are important. Because of this overall incorporation of a dynamical aspect, we have achieved an essential advance. Now we understand at least qualitatively that the strength of the polarization, and hence of the interaction for the same other conditions, can depend on the characteristic frequency of the lattice and, therefore, also on the mass of the atomic ions. Heavy isotopes oscillate somewhat slower, that is, they have smaller frequencies of the lattice. They can follow the polarizing action only more slowly compared to lighter isotopes. Hence, the polarization remains smaller. From this, we expect that the interaction becomes weaker and that the superconducting transition temperature is smaller. With increasing isotope mass the transition temperature decreases, in agreement with the experimental results. However, we must keep in mind that these last discussions are meaningful only in a heuristic sense and do not allow any quantitative conclusions. Only a quantum mechanical treatment can yield the frequencies of the lattice, which are essential for this interaction.

At this stage, we have introduced dynamic aspects into the interaction through the polarization of the lattice. However, we have kept the concepts of a static discussion, which yielded the energy gain of an electron due to the polarization achieved by another electron. In order to extend our dynamic model a little further, we can imagine that the second electron propagates within the polarization trail of the first electron and thereby lowers its energy, since it experiences the lattice already in a polarized state.

Basically, there are two possibilities. The first is that both electrons can propagate with the same momentum $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Then we can justifiably treat this object a particle, namely an electron pair. However, the total momentum of this particle would be twice the momentum of a single electron. The other possibility would be that the electrons have opposite momentum. Again, one electron can propagate within the polarization trail of the other. However, in this case, the idea of a new particle, an electron pair, is more difficult. By a little abstraction, we note that in the first case the individual electrons are correlated due to the requirement that they have the same momentum, that is, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ or $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. An equally definite correlation is obtained by the requirement that $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ or $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$. We are justified to treat these strongly correlated electrons also as a pair. The latter electron pair has total momentum zero. Such pairs are referred to as Cooper pairs, since Cooper was the first to show that such a correlation leads to a decrease in the total energy [7]. If we take into account also the intrinsic angular momentum (spin) of the electrons, which is important for the statistical behavior of the new particles, a Cooper pair consists of two electrons with opposite momentum of equal magnitude and with opposite spins²⁾

Cooper pair: $\{\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow\}$

The correlation leading to Cooper pairs is energetically favored because of the lattice of positive atomic ions.

Since the possibility of a pair correlation represents the crucial key of the microscopic theory of superconductivity and, hence, for an understanding of the superconducting state, we also want to present another more general consideration. We can also understand the formation of electron pairs in a lattice from the very general formalism of the so-called exchange interaction.

Systems that exchange some physical quantities among themselves must experience an interaction for trivial reasons. This statement is very general. The exchange interaction of quantum mechanics deals with the fact that the exchange can lead to an attraction between two physical systems. For instance, two particles can experience an attraction because of the exchange of a third particle, leading to a state in which both particles are bound to each other.

A repulsion because of cally. Two people, throwing a ball back and forth between themselves, experience ach a repulsion. This seems obvious and can be checked easily by placing the people

on two mobile platforms, which can move along the line connecting the two people. Because the ball is thrown back and forth, the two cars move away from each other. Here, it is only the exchange of the ball and the corresponding exchange of momentum that causes the repulsive interaction. Instead, we want to discuss an example of modern physics.

It is well known that two hydrogen atoms form a hydrogen molecule, and that the chemical bond in this molecule is very strong. In order to break this bond, one needs an energy of $26 \times 10^4 \text{ W s/mol}$ (62.5 kcal/mol), that is, for dissociating 2 g of H_2 . How can we understand such a strong bond between neutral H atoms in

The center of mass of the following Cooper pair is at rest, with a total momentum $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{K} = 0$. However if we want to describe a state in which a supercurrent flows, the Cooper pairing must be performed for $\mathbf{K} \neq 0$, that is, for a state $\{\mathbf{k} + \mathbf{K} \uparrow, -\mathbf{k} + \mathbf{K} \downarrow\}$.

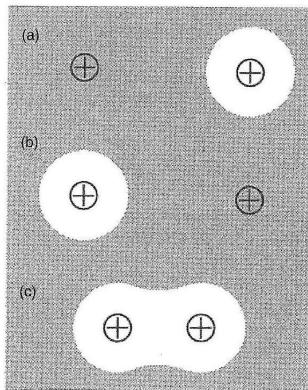


Figure 3.3 Binding of the H_2^+ molecule. The scales are arbitrary. (a), (b): Two possible electron distributions for a large distance between the protons. (c) electron distribution for a

an H_2 molecule? To explain the principle, we look at a slightly simpler system, namely H_2^+ , that is, a positively charged H_2 molecule. This ion consists of two hydrogen nuclei (two protons) and one electron. The two possible states of this system are shown in Figure 3.3a,b for a large distance between the two protons. The electron resides near one of the two protons. If we bring the protons closer together, the electron will hop from one proton to the other, with a certain probability, as we know from quantum mechanics. In our terminology, the electrons are exchanged. The probability for the exchange increases with decreasing distance. Then the electron belongs equally to both protons, as indicated in Figure 3.3c. As an important result of quantum mechanics, for this problem one finds that the total energy of the system can be lowered because of the exchange. However, this means that smaller distances R are energetically more favorable. A bond between the two protons appears because of the common electron. The equilibrium distance results from the condition that the attractive force of the electron exchange is exactly balanced by the repulsive force between the two protons.

We can understand the energy gain due to the exchange of electrons in a particularly simple way, if we apply a highly fundamental principle of modern physics, namely the uncertainty principle. This principle says that both the spatial location and the momentum of a particle cannot simultaneously be determined exactly. The accuracy of the observation of both quantities is limited by the famous relation

$$\Delta p_x \Delta x = \hbar$$

For our system this means that the smearing of the momentum Δp_x can be reduced if the electron is allowed to exist near both protons, since the smearing of its location Δx is enhanced in this case. As a result the energy smearing is reduced, and the energy of the electron is lowered [8].

If this energy gain is larger than the energy increase due to the Coulomb repulsion between the two protons, a net attraction is obtained. We see that the chemical bond of the H_2 molecule

represents a typical quantum mechanical effect. These arguments briefly outlined provide the key for the understanding of the chemical bond.

Using similar arguments, we can also understand the attractive interaction between the conduction electrons in a metal. In the metal, a new kind of particle can be exchanged, namely the phonons. The phonons are the quantized elementary vibrations of the crystal lattice. Any complex vibrational state of the lattice can be separated into normal modes, that is, into harmonic waves. This corresponds to the description in terms of a Fourier series. For a macroscopic body, the normal modes have well-defined energies. They also have definite wavelengths and, because of the relation $p = h/\lambda$, definite momenta. Hence, they represent particles and are referred to as phonons or as quanta of sound.

So an electron in a lattice can interact with another electron by the exchange of phonons. One speaks of the electron-electron interaction via phonons. The exchanged phonons only exist virtually during their transfer from one electron to another, since they cannot escape from the electrons into the lattice as real phonons.³⁾ Here, we note an important difference compared to the interaction within the H₂ molecule. In the latter case, the exchanged electrons are real particles. This interaction via phonons is shown schematically in Figure 3.4. In certain cases, namely in superconductors, it can be so strong that it becomes larger than the repulsion between the electrons due to the electrostatic forces.)⁴⁾ Then we obtain the pair correlation we have discussed.

For pure superconductors, the average distance within which this pair correlation is active ranges between 100 and 1000 nm.⁵⁾ This length is referred to as the *BCS* coherence length ξ_0 of the Cooper pair. This length must not be mixed up with the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GL} , which indicates the length scale within which the total system of Cooper pairs can change.

The BCS coherence length ξ_0 can also be interpreted as the average size of a Cooper pair. In a highly simplified way we can say that in a pure superconductor a Cooper pair has an average size between 10² and 10³ nm. This size is large compared to the average distance between two conduction electrons, which amounts

If real phonons are generated by an electron, we are dealing with a process causing electrical resistance, since energy is transferred from the electrons to the lattice in this case.

The interaction via the exchange of phonons is so weak that it cannot localize the electrons of a Cooper pair more sharply than within about ξ_0 . Because of the uncertainty principle, a sharper localization would result in a kinetic energy of the electrons larger than

intuitive arguments quickly run into difficulties. For instance one can ask if the whole pair correlation is not destroyed by the high Fermi velocity. The answer is "no," but we do not attempt to justify this. Here, we would overextend the simple particle picture.

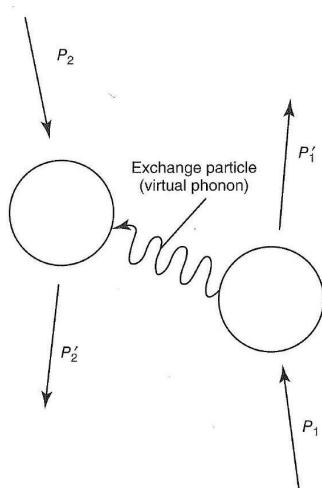


Figure 3.4 Electron-electron interaction via phonons.

to a few times 10^{-1} nm. The Cooper pairs strongly overlap. Within the space of a single pair there exist $10^6 - 10^7$ other electrons, each being correlated in pairs. Intuitively we expect that a system of such strongly overlapping particles must have unusual properties. This will be discussed in the next section.

6.5.2 The Superconducting State, Quasiparticles, and BCS Theory

At least qualitatively we have seen that two electrons attract each other momentarily because of the electron-phonon interaction, and in this way they form a Cooper pair $\{\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow\}$. Next we deal with the question of how these pairs collectively can occupy the same quantum state. Here, BCS found an ingenious answer, which we want to outline for the case of zero temperature.

Let us recall first the situation of the unpaired electrons. At $T = 0$ they occupy the lowest possible energy states. If we treat the electrons as free particles, their energy is given by

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

or, with $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$,

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

The possible values of \mathbf{k} are discrete (see Section 1.2), and in the simplest case in k -space the electrons occupy the Fermi sphere (see Figure 1.18). All states within the Fermi sphere must be occupied by an electron, and all states outside the Fermi sphere must remain unoccupied.

The electrons near the Fermi energy will interact attractively with each other. The attractive interaction energy is taken as a negative constant $-V$ for the electrons, with its energy range distributed over the interval $\pm\hbar\omega_c$ near the Fermi energy.⁶⁾ Everywhere else the interaction is assumed to be zero. It is not necessary that the interaction energy V results from the electron-phonon interaction. However, if this is the case, it is likely that the energy $\hbar\omega_c$ is associated with a characteristic phonon energy, or the frequency ω_c with a characteristic phonon frequency, namely the Debye frequency.

Around the surface of the Fermi sphere, the Cooper pairs constitute a highly peculiar state, in which, within a certain interval around the Fermi energy E_F , the pair states $\{\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow\}$ are simultaneously unoccupied with probability $|u_k|^2$ and occupied with probability $|v_k|^2$. In general, the probability amplitudes u_k and v_k are complex numbers, which depend on the wave vector k . The condition $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ must be valid, since the two probabilities must add up to 1. Classically, such a state cannot be imagined. However, in quantum mechanics such superpositions are quite possible.

Next we must determine the parameters u and v . This can be done by inserting the ansatz of the wave function of the Cooper pairs given above into the Schrödinger equation of the system. Then one calculates the energy of the system as a function of u and v , and finally one chooses u and v such that the energy reaches a minimum [M3, M4]. Then we have found the energetically optimum state consistent with the assumed wave function.

Using this procedure, for $|v_k|^2$ one finds the expression

$$|v_k|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{|\Delta|^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right]$$

Here, the energy of the individual electrons in the absence of the interaction V is denoted by ε_k as in Eqs. (3.2a) and (3.2b), and E_F is the Fermi energy. The quantity Δ will become highly important in the following. It is given by the sum $\Delta = -V \sum u_k v_k$. Hence, it is different from

zero only for values of ε_k within the interval $\pm\hbar\omega_c$, similar to the interaction V . In general, Δ is a complex number, which we write in the following as $\Delta = \Delta_0 e^{i\varphi}$ with real amplitude Δ_0 . Then we have $|\Delta|^2 = \Delta_0^2$. For $|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2$, one finds

$$|u_k|^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{|\Delta|^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - E_F)^2}} \right] \quad (3.3b)$$

In a more general way, we can also allow the interaction between the electrons to depend on the momentum or the wave vector of the electrons.

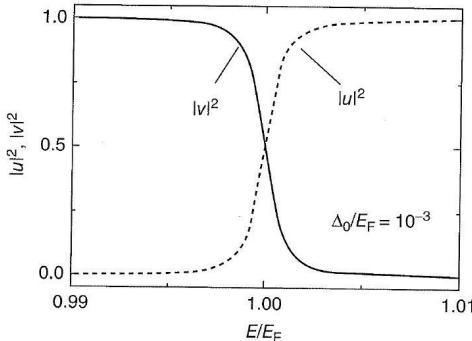


Figure 3.5 The functions $|u_k|^2$ and $|v_k|^2$, indicating the probability that a pair state $\{\mathbf{k} \uparrow, -k \downarrow\}$ is occupied ($|v_k|^2$) or unoccupied ($|u_k|^2$). For the figure, the values $E_F = 1\text{eV}$ and

The two functions $|u_k|^2$ and $|v_k|^2$ are shown in Figure 3.5. Here, we have assumed for E_F a value of 1eV and for Δ_0 a value of 1meV, which are typical for metallic superconductors. Deep within the Fermi sphere (i.e., for $\varepsilon_k \ll E_F$), the probability $|v_k|^2$ of finding an electron pair in the state \mathbf{k} (or $|\mathbf{k}|$) is practically equal to one, as would also be in the case for noninteracting electrons. Analogously, for energies $e_k \gg E_F$, the probability $|u_k|^2$ that this state is unoccupied is nearly equal to one. However, within an interval of about $\pm\Delta_0$ around the Fermi energy, both functions $|u_k|^2$ and $|v_k|^2$ strongly deviate from the value one. For independent, unpaired electrons, exactly this would not be the case. We see that the Cooper pair system shows nontrivial behavior in this energy interval. In Figure 3.5, the ratio $\Delta_0/E_F = 10^{-3}$. Hence, we can say that only about 0.1% of all electrons, namely those near the Fermi energy, participate in the superconductivity.

The quantity Δ depends on all states k because of the product $u_k v_k$. This shows that all Cooper pairs are collectively connected with each other. Contrary to this, for independent electrons, Δ would always be zero, since either u_k or v_k always vanishes.

In the state described by the BCS theory, all pairs show the same values of all physical quantities. In particular, the motion of the center of mass is the same for all pairs. So we have arrived at the macroscopic matter wave, the properties of which we have described in detail in Chapter 1. What further information is provided by the microscopic theory?

First one can calculate the energy gain because of the Cooper pairing, that is, the condensation energy. One finds that this is given by $-N(E_F)\Delta_0^2/2$, where $N(E_F)$ is the density of states at the Fermi energy (see Section 1.1). In addition to $N(E_F)$, the condensation energy also depends on the pair interaction V because of Δ_0^2 . Apparently, it is favorable for superconductivity if both quantities become very large.

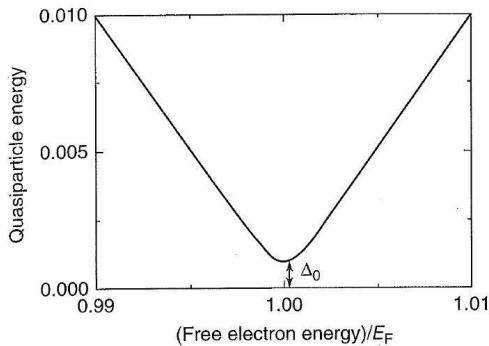


Figure 3.6 Energy of an unpaired electron (quasiparticle) in a superconductor, plotted versus the energy the electron would have without the pair interaction.

The next important question concerns the possible excitations of the superconducting ground state. As a very simple excitation we can imagine that a Cooper pair is broken, yielding two independent electrons. Here, we can look at a single unpaired electron as an "elementary process," and we can ask how its (excitation) energy compares with the energy ε_k of the same electron in the normal state. The resulting electron is referred to as quasiparticle. Due to the pair interaction in the superconductor, this quasiparticle does not satisfy any longer the energy-momentum relation (3.2 b).

Instead, one finds that the energy of this unpaired electron is given by [M3, M4]

$$E_k = \sqrt{(\varepsilon_k - E_F)^2 + \Delta_0^2}$$

This function is shown in Figure 3.6. If Δ_0 were zero, we would have $E_k = \pm (\varepsilon_k - E_F)$, and we would recover the energy of the noninteracting electrons. However, for $\Delta_0 \neq 0$, E_k attains a minimum value Δ_0 . This also means that at least twice this amount must be supplied, in order to break a Cooper pair and to generate two quasiparticles.

At this stage, we can already see the influence of the Cooper pair interaction on the density of states of unpaired electrons. Even without this interaction, the density of states is in general a very complicated function depending on the crystal structure. We denote this function by $N_n(E)$. However, here we are concerned only with a small interval $\pm\Delta_0$ near the Fermi energy. In this interval, we can treat the density of states of the noninteracting electrons as constant: $N_n(E) \approx N_n(E_F)$. In this case there are states already very close to the Fermi energy, into which the electrons can be excited. However, this is by no means possible for the quasiparticles. According to Eq. (3.4), for this the minimum energy Δ_0 is needed.

For the density of states of the quasiparticles, this means that a gap appears in an interval $\pm\Delta_0$ at the Fermi energy. Within this gap, no states exist anymore. The exact expression for the density of states of the quasiparticles, which we want to

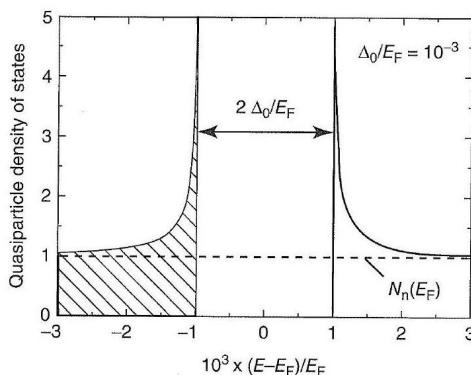


Figure 3.7 Normalized density of states $N_s(E)/N_n(E_F)$ of the quasiparticles in a superconductor according to the BCS theory. The ratio Δ_0/E_F was taken as 10^{-3} . At the temperature (hatched region),

denote by $N_s(E)$, is given from the BCS theory by

$$N_s(E) = N_n(E_F) \frac{|E - E_F|}{\sqrt{(E - E_F)^2 - \Delta_0^2}}$$

for energies $|E - E_F| \geq \Delta_0$. For $|E - E_F| < \Delta_0$, the function $N_s(E)$ is zero. This density of states is shown in Figure 3.7. At energies $E = E_F \pm \Delta_0$ it reaches infinity, and for large values of $|E|$ it rapidly approaches the density of states $N_n(E_F)$. Within the energy interval $E_F \pm \Delta_0$, there are no states." Therefore, $2\Delta_0$ is also referred to as the energy gap of the superconductor.

At this point we note that the energy states of the unpaired electrons are energetically redistributed because of the Cooper pair interaction, but they are not annihilated. If we integrate $N_s(E)$ over all energies, we obtain the same number of states as in the normal state. Most of the states between E_F and $E_F + \Delta_0$ in the normal conductor appear at energies slightly above $E_F + \Delta_0$ in a superconductor. As we will see in Section 3.1.3, the energy gap in a superconductor can be observed very nicely in infrared absorption experiments and also by means of superconducting tunnel junctions. These experiments perfectly confirm our ideas about the superconducting state.

Next we turn to the properties of superconductors at finite temperatures. At $T > 0$ some Cooper pairs are broken because of thermal fluctuations, and thermally excited quasiparticles are generated. These quasiparticles are fermions, exactly like the electrons in a normal conductor. Hence, the probability of finding a quasiparticle in a given energy state is indicated by the Fermi distribution function (1.3).

In Section 3.2 we will see that this property changes if the Cooper pairs do not form an $L = 0$ state (see Section 21). In this case, quasiparticles exist for all energies.

We note that a quasiparticle in the quantum state \mathbf{k} is blocking this state for the condensation of Cooper pairs, thereby affecting a reduction of the total number of Cooper pairs and also a reduction of their binding energy. One obtains a decrease in Δ_0 with increasing temperature. For $T \rightarrow T_c$, Δ_0 approaches zero.

How does the density n_s of Cooper pairs depend on Δ_0 ? One finds that n is proportional to Δ_0^2 . We see that, on the one hand, the quantity Δ_0 appears as (half) the "energy gap" of the superconductor. On the other hand, it also determines the number of Cooper pairs. In Chapter 1, we described the Cooper pair density in terms of the absolute square of the macroscopic wave function $\Psi = \Psi_0 e^{i\varphi}$. One can show that $\Delta \propto \Psi[9]$. Hence, pair amplitude Ψ_0 and Δ_0 are often used synonymously.

Finally, from the BCS theory one can derive a very simple connection between T_c and the quantities $N_n(E_F)$, $\hbar\omega_c$, and the Cooper pair interaction V : it is [M3, M4]

$$T_c = 1.13 \frac{\hbar\omega_c}{k_B} \exp\left(-\frac{1}{N_n(E_F)V}\right)$$

If we identify ω_c with the Debye frequency ω_D , we also obtain immediately a connection between the transition temperature and the mass M of the elements building the lattice, since the frequency of the lattice vibrations is inversely proportional to the square root of M . If we substitute an isotope on a lattice site by another one, the interaction between these elements building the lattice remain unchanged. This results in the isotope effect, which we expect for Cooper pairing because of the electron-phonon interaction

Furthermore, from the BCS theory, we can derive the following important relation between Δ_0 at zero temperature and T_c :

$$2\Delta_0(T = 0) = 3.5k_B T_c$$

In the following section, we turn to the experimental results dealing with the microscopic concepts of the superconducting state.

3.1.3

Experimental Confirmation of Fundamental Concepts about the Superconducting State

In the previous section we have outlined a picture of the superconducting state based on the BCS theory, which represents a most successful microscopic theory of superconductivity. In principle, it is the total sum of all experimental observations explained quantitatively or at least qualitatively by the theory, which completely justifies the essential concepts. There are a few experimental results that particularly strongly illuminate certain characteristic properties of the superconducting state.

In Chapter 1 we discussed results showing directly that superconductivity manifests itself in terms of a macroscopic quantum state with a well-defined phase. In the following section, we will present additional results that should strengthen our confidence in the somewhat complicated ideas about the

Table 3.1 Isotope effect in mercury [13].

Average atomic mass	199.7	200.7	202.0	203.4
---------------------	-------	-------	-------	-------

Tran

superconducting state, and which should deepen our understanding by means of concrete experiments. Except for the isotope effect, these characteristic properties are independent of the special interaction leading to the pair correlation.

Some of the experimental facts, such as, say, the behavior of the specific heat or the isotope effect, were already known before the development of the BCS theory. Other experiments, such as, say, measurements of the tunneling effect and of the Josephson effects (discussed already in Chapter 1), were stimulated only by the microscopic theory. However, the flux quantization, also discussed in Chapter 1, is a special case, since it was already predicted by F. London long before the BCS theory arrived. On the other hand, it was experimentally observed only after the development of this theory and represents an impressive quantitative confirmation of the concept of Cooper pairing.

The Isotope Effect

Already in 1922, Kamerlingh-Onnes [10] studied the question of whether the nuclear mass of the lattice atoms has an influence on superconductivity, that is, if superconductivity depends on the lattice of the atomic ions, or whether it is restricted only to the system of the electrons. At the time, only the kinds of lead naturally occurring at different locations ($M = 206$ "uranium lead" and $M = 207.2$ "natural lead") were at his disposal. Within his experimental accuracy, he could not detect any difference in the transition temperature. Also subsequent experiments with lead samples by Justi in 1941 [11] did not show an influence of atomic mass on T_c .

With the advent of modern nuclear physics, it was possible to produce isotopes with a larger mass difference in sufficient concentration within nuclear reactors. In 1950 in mercury a dependence of the transition temperature on nuclear mass was observed [12, 13]. Some results are listed in Table 3.1.

We have already mentioned that these results were highly important for the development of superconductivity, since they appeared just in time to confirm perfectly the idea of the electron-phonon interaction. Already the initial rather qualitative discussions of Fröhlich or Bardeen suggested that the transition temperature T_c should be inversely proportional to the square root of the atomic mass M .

$$T_c \propto M^{-1/2}$$

This dependence also remained valid in the BCS theory appearing only 7 years later, as we have discussed in Section 3.1.2.

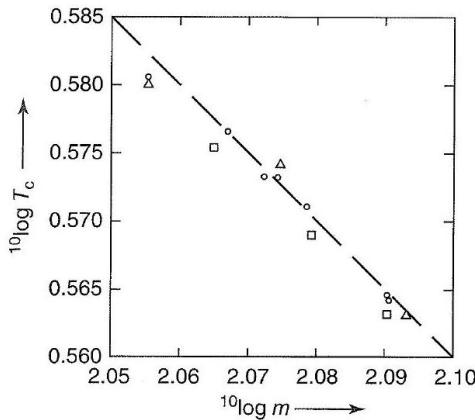


Figure 3.8 Isotope effect in tin: O Maxwell; \square Lock, Pippard, and Shoenberg; and Δ Serin, Reynolds, and Lohman. (From [14])

Table 3.2 Isotope effect.

Element	Hg	Sn	Pb	Cd	Tl	Mo	Os	Ru
Isotope exponent $\rho^a)$	0.50	0.47	0.48	0.5	0.5	0.33	0.2	0.0

a) The exponent β is obtained from experiment by fitting to the relation $T_c \propto M^{-\beta}$. The values shown are taken from Ref. [15].

The relation (3.8) is well satisfied for a series of superconductors. In Figure 3.8 we show the results for tin. Tin is a favorable substance, since its possible variations of the nuclear mass are relatively large, namely from $M = 113$ up to $M = 123$. In Figure 3.8 the results from different laboratories are shown [14]. The dashed line corresponds to the exponent $-1/2$ in relation (3.8). The agreement between experiment and the theoretical expectation is excellent.

From our current point of view this agreement is surprising, since the theory leading to relation (3.8) is strongly simplified. However, the agreement shows that apparently these simplifications are justified for a large number of superconductors. On the other hand, we see from Table 3.2, which lists measurements of the isotope effect in different superconductors, that this is not always the case.

The nontransition metals display well the exponent $\beta = 1/2$, the transition metal show strong deviations from this value. In spite of the great difficulties of these experiments,⁸⁾ the deviations are well reproduced. Measurements for uranium even indicate a value of $\beta = -2.2$, that is, an isotope effect with opposite sign [16].

For small changes of T_c sufficient accuracy of the experiments cannot be achieved easily. The measurements of T_c must be performed for different samples. Hence, all other pdedesty The mea-

Because of the great success of the BCS theory, one is tempted to find an explanation of the isotope exponent deviating from $1/2$ within the framework of this theory. This is quite possible, if we closely analyze the parameter V in Eq. (3.6) characterizing the interaction. Essentially, this interaction parameter results from the difference between the attractive electron - phonon interaction and the repulsive Coulomb interaction between the electrons. If both interactions are explicitly introduced into the theory, which became possible during further development of the theory, one obtains an improved and also more complicated formula for T_c [17]:

$$T_c \propto \omega_D \exp \left(\frac{\lambda^* + 1}{\lambda^* - \mu^* (1 + \lambda^* \langle \omega \rangle / \omega_D)} \right)$$

Here, the electron-phonon interaction is characterized by λ^* , the Coulomb interaction by μ'' , and $\langle \omega \rangle$ denotes a certain average value taken over all frequencies of the crystal lattice.¹⁰

We do not want to discuss this formula in more detail. As the essential point, we note that in such a more detailed analysis the lattice frequencies also appear explicitly in the exponent, as expected. Hence, depending on the magnitude of λ^* and μ^* , the influence of the factor ω_D upon T_c (see Eq. (3.9)) is changed to a greater or lesser degree. Therefore, deviations of the quantity β in the relation $T_c \propto M^{-\beta}$ from the value 1/2 cannot be taken as evidence against the importance of the electron-phonon interaction in these superconductors. The same applies even to the complete absence of any dependence of T_c upon M .

An important advance was achieved by tunneling experiments with superconductors, which we will discuss in the following section. The electron-phonon interaction shows up in the voltage - current characteristic of tunnel junctions, if the interaction is sufficiently strong. A careful analysis of such curves allows one to determine the quantities λ'' and μ'' .

The isotope effect demonstrates most directly the influence of lattice vibrations. Because of its quantitative agreement with the theory, at least for many superconductors, it confirms the crucial role of the electron-phonon interaction. Here, the progress of nuclear physics, allowing the production of new isotopes in nuclear reactors, has strongly affected the development of superconductivity. This is one of the many examples in the field of superconductivity where different areas of physics have influenced each other during the progress that has been accomplished.

Also newly discovered superconductors have been investigated regarding the isotope effect, if possible. The results for the high-temperature superconductor will be discussed in Section 3.2.2. Here, as further examples, we mention the fullerides K_3C_{60} and Rb_3C_{60} [18] as well as magnesium diboride MgB_2 [19].

The order of magnitude of these parameters can be indicated as follows: λ° varies between 0 and 0.1 and 0.2 ; and $\langle \omega \rangle / \omega_D$ is about 0.6. In the fullerides, the carbon isotope ^{12}C was partly or completely replaced by the isotope ^{13}C . Since carbon is a relatively light element, in this case a relatively large shift of T_c in the percent range could be observed. An isotope exponent of about 0.3 was found with a large scattering of the data. This value agrees well with the electron-phonon coupling, if we assume that the intramolecular vibrations of the C_{60} molecules provide the dominant contribution to the Cooper pairing. For MgB_2 the isotope effect was studied regarding both Mg and B. For the variation of the boron isotopes ($^{10}B \leftrightarrow ^{11}B$) an exponent of about 0.3 was found, and the variation of the magnesium isotopes ($^{26}Mg \leftrightarrow ^{27}Mg$) only yielded an exponent of 0.02. This indicates that the vibrations of the boron ions apparently play an important role for the Cooper pairing in MgB_2 .

The Energy Gap

In Figure 3.7 (see Section 3.1.2), we have shown the normalized density of states of unpaired electrons in the superconducting state for $T = 0$. The existence of a forbidden energy range ("energy gap") has given us a simple means to understand the fact that, below a critical kinetic excitation energy, Cooper pairs cannot interact with the crystal lattice. We can use different methods for the measurement of this energy gap, which we will discuss in the following.

Absorption of Electromagnetic Radiation We have already pointed out the possibility that the energy gap can be determined by measuring the absorption of electromagnetic radiation. The first experiment proving the existence of a gap in the energy spectrum of the

unpaired electrons for $T < T_c$ was reported in 1957 by Glover and Tinkham [20]. They observed the infrared transmission of thin superconducting films.

Already by the early 1930 s, it had been pointed out ¹⁰ that electromagnetic waves of suitable frequency should serve well to break up the ordered state of a superconductor below its transition temperature. This should show up as an anomaly in the absorption. In the 1930s, such experiments could not be carried out, since the required range of electromagnetic wavelengths was not yet experimentally available. Assuming a binding energy E_B of about 10^{-3} eV, for this energy we need radiation quanta with a frequency $f = E_B/h = 2.4 \times 10^{11}$ Hz(240GHz). These are waves with about 1 mm wavelength, for which no generation or detection methods were available in the 1930s. Only 20 years later, however, this method was applied successfully for measuring the energy gap, [20]. Today, for the range of wavelengths between about $500\mu\text{m}$ and 3 cm, we have sufficient, well-functioning experimental techniques for performing such measurements for quantitative determination of the energy gap.

The quantitative data analysis for this method is somewhat complicated, and we do not want to discuss it in more detail. In Figure 3.9 we just show an example of such a measurement [22]. Here, the radiation was guided into a small cavity, made from the material to be studied. Within the cavity the radiation is reflected

See Ref. [21].

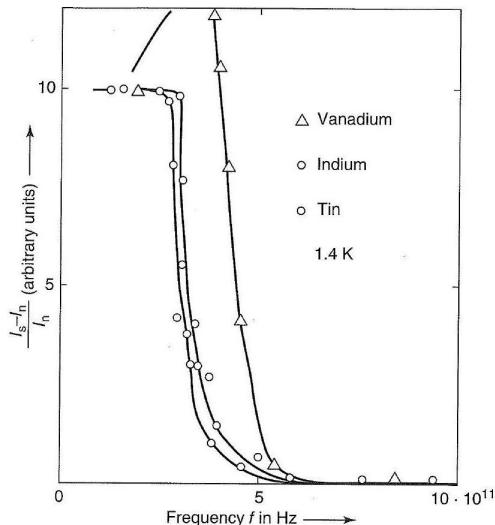


Figure 3.9 Absorption of electromagnetic waves with frequency f in superconductors. Transition temperatures

Measurement temperature is 1.4 K. In vanadium for $f < 2\Delta_0/h$, a frequency dependence is observed, the possible origin of which can- not be discussed here. (From [22].) are V, 5.3 K; In, 3.42 K; and Sn, 3.72 K

many times before it is detected. The stronger the absorption of the radiation in the cavity wall, the smaller is the detected power. For the measurement, at a fixed temperature (here about 1.4 K), the power in the superconducting and in the norma states, I_s and I_n , respectively, is determined for each wavelength. In this experiment, the superconductivity can be eliminated by a sufficiently high magnetic field. The difference between the two power values yields the difference between the reflection for both states. In Figure 3.9 this difference, normalized by the power in the normal conducting state, is plotted versus the frequency. At small frequencies, we see a distinct difference between the reflection in the superconducting and in the normal conducting states. In the superconducting state the reflection is larger. At a certain frequency the difference drops abruptly, and at higher frequencies it reaches zero. Apparently, the abrupt drop sets in as soon as the quantum energy of the radiation is large enough to break up the Cooper pairs. This results in an additional absorption. For energies $hf > 2\Delta_0$ the energy gap

practically does not influence the absorption, since the electrons can be excited far beyond the energy gap by the radiation quanta. In Table 3.3 we list the values of the energy gap at $T = 0$ obtained from such measurements for different superconductors. Table 3.4 presents values of the energy gap for some selected superconducting compounds and alloys.

Table 3.3 Energy gap $2\Delta_0$ in units of $k_B T_C$ for some superconducting elements.

Element	T_c (K)	Method		Light absorption
		Tunnel junctions	Ultrasound	
Sn	3.72	3.5 ± 0.1 (1.15)	—	3.5
In	3.4	3.5 ± 0.1 (1.05)	3.5 ± 0.2	3.9 ± 0.3
Tl	2.39	3.6 ± 0.1 (0.75)	—	—
Ta	4.29	3.5 ± 0.1 (1.30)	3.5 ± 0.1	3.0
Nb	9.2	3.6 (2.90)	4.0 ± 0.1	2.8 ± 0.3
Hg	4.15	4.6 ± 0.1 (1.65)	—	4.6 ± 0.2
Pb	7.2	4.3 ± 0.05 (2.70)	—	4.4 ± 0.1

The numbers in brackets indicate the energy gap in megaelectronvolts. The values are taken from Ref. [23]. For special details see Superconductivity Data, no. 19–1 (1982), Fachinformationszentrum Karlsruhe GmbH.

Table 3.4 Energy gap $2\Delta_0$ for selected superconducting compounds (s-wave Cooper pairing).

Material	T_c (K)	$2\Delta_0$ (meV)	$2\Delta_0/k_B T_c$	References	cf. Section
Nb_3Sn	18	6.55	4.2	[24]	2.3.1
NbN	13	4.6	4.1	[25]	2.3.1
MgB_2	40	3.6–15	1.1–4.5	[19]	2.3.2
Rb_2C_{60}	29.5	10–13	4.0–5.1	[18]	2.4
ErRh_2B_4	8.5	2.7–3	3.8–4.2	[26]	2.5
PbMo_6S_3	12	4–5	4–5	[27]	2.5
$\text{YNi}_3\text{B}_4\text{C}$	15.5	4.7	3.5	[28]	2.5
NbSe_2	7	2.2	3.7	[29]	2.7
$\text{BaPb}_{0.75}\text{Bi}_{0.25}\text{O}_3$	11.5	3.5	3.5	[30]	2.8.2
$\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{BiO}_3$	25–30	8	3.5	[31]	2.8.2

Experimental methods tunneling effect, optical methods, nuclear spin resonance, specific heat, and so on. Much data can also be found in the monograph [M14].

Ultrasound Absorption Sound waves also interact with the system of conduction electrons in a metal. We can look at a sound wave as a current of coherent phonons. Until recently, only sound waves with frequencies up to about 30GHz were available. Most measurements were carried out using frequencies from a few megahertz up to 10MHz. The energies of these frequencies are much smaller than the width of the energy gap. Only very close to T_c , where the energy gap $2\Delta_0(T)$ approaches zero, it is possible that the sound energy of these frequencies becomes comparable to $2\Delta_0(T)$. Hence, in addition to other mechanisms, absorption essentially depends on the number of unpaired electrons. Below T_c this number decreases rapidly with decreasing temperature. Correspondingly, the damping of sound also decreases rapidly below T_c . In Figure 3.10 we present an example of such a measurement [32]. Since for a given temperature the number

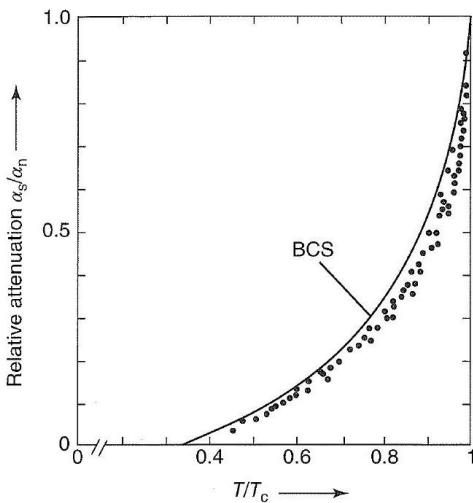


Figure 3.10 Ultrasound absorption in superconducting tin and indium. The solid line indicates the behavior expected from the BCS theory for the energy gap $2\Delta_0 = 3.5k_B T_C$. (From [32].)

of unpaired electrons depends on the width of the energy gap, the latter can be determined from such absorption measurements by means of a comparison with the theoretically expected behavior. In Figure 3.10 the curve expected from the BCS theory for $2\Delta_0(T = 0) = 3.5k_B T_c$ (Eq. (3.7)) is shown.

Here, we cannot discuss in detail the analysis of such measurements, which is not quite simple. We just want to point out that, compared to electromagnetic waves, sound waves have the great advantage of penetrating more deeply into the metal, whereas high-frequency electromagnetic waves only reach a thin layer at the surface, namely within the skin depth.

Tunneling Experiments In 1961, Giaever pointed out the possibility of determining the energy gap by means of tunneling experiments [33, 34]. We will treat this method in some detail, since it yielded much new information far beyond just the measurement of the energy gap. The method is based on the observation of the tunneling current across a thin insulating layer between a reference sample and the superconductor to be studied. In contrast to the Josephson current we treated in Chapter 1, now we are concerned with the tunneling of the unpaired electrons.

The arrangement is shown schematically in Figure 3.11a. Two metallic conductors, for instance, two aluminum layers, are separated from each other by mean of a thin insulating layer, for instance, Al_2O_3 . The Al_2O_3 is an excellent electrical insulator, which can be fabricated nearly perfectly also with a thickness of only a few nanometers.

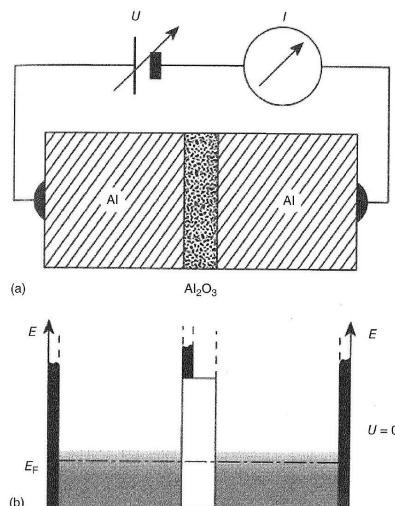


Figure 3.11 (a) The arrangement for measuring a tunneling current. (b) The allowed energy values (black areas) and their occupation (gray shaded areas).

Because of the great importance of this tunneling effect, for instance, also in semiconductor physics, we want to look at it in more detail. Therefore, in Figure 3.11b we have indicated schematically the allowed and forbidden energy ranges near the Fermi energy for the three parts of the tunneling arrangement. The black vertical areas indicate the allowed energy bands. The gray shaded areas show the occupation of the bands. The thermal smearing of the occupation is also indicated. In the electrical insulator the nearest allowed and unoccupied energy values are much higher.

We can also understand the tunneling effect without a detailed calculation, if we recall the wave character of our particles. If a wave encounters the surface of a medium into which it cannot enter, the wave must be totally reflected. Here, we recognize intuitively that the wave must penetrate a small distance into the forbidden portion. In some sense, the wave tests the possibility of whether it can exist in this medium. At the same time, its amplitude decreases

exponentially, this decrease being faster, the larger the difference between the energy of the wave and

an allowed energy value, that is, the higher the barrier. From this highly qualitative argument, we see immediately that for a sufficiently thin barrier there is a finite probability that the wave can extend beyond the barrier. This is always the case if the thickness of the barrier is comparable with the decay length of the wave amplitude in the forbidden regime. In this case, a finite amplitude arrives at the back side where it can exit again into the allowed regime. However, there the amplitude is very small, that is, the probability for the passage of a particle decreases rapidly with increasing barrier thickness along with the wave amplitude. We see that the tunneling probability depends on the energetic height and on the thickness of the barrier. Here, the energetic height of the barrier must be taken from the particle energy, that is, in our case of Figure 3.11b practically from E_F .

In our present discussion we are dealing with electrons, that is, with Fermi particles. They must satisfy the Pauli principle (see Section 1.1). In order to traverse the barrier, the electron must find an unoccupied state on the other side. If all states are already occupied on the other side, the passage of the electron is impossible, even for a sufficiently thin barrier. Therefore, the number of particles passing across the barrier depends on the following three quantities:

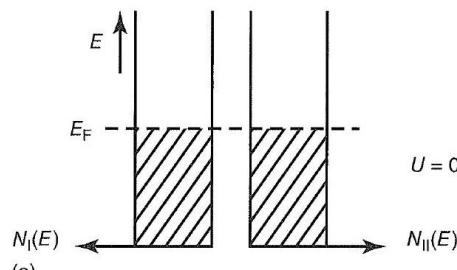
- number of electrons reaching the barrier;
- tunneling probability across the barrier;
- number of unoccupied energy levels on the other side.

In a quantitative treatment of the tunneling current of electrons, all three quantities must be taken into account

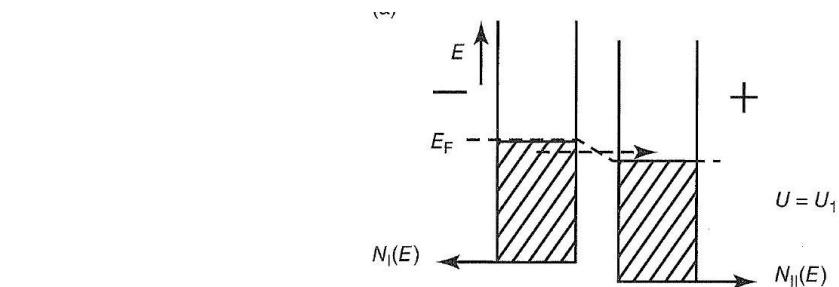
In Figure 3.11b we have shown the tunneling arrangement without an external voltage. If electrons can be exchanged between two systems, the equilibrium state is fixed by the fact that the Fermi energy is located at the same height, that is, the Fermi energy is displayed by a horizontal line in our schematic diagram. For this state the net exchange of particles is exactly zero. The same number of electrons tunnel to the right as to the left.

Next we apply a voltage $U \neq 0$ to the arrangement. Practically, the voltage drop is completely restricted to the barrier layer. This means that the Fermi energies on the right and on the left of the barrier differ by the amount eU . Now the tunneling currents in both directions no longer compensate each other, and a net current I flows.

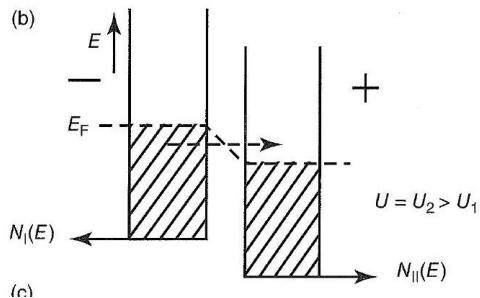
To illustrate the magnitude of the current and its dependence on the voltage U , in Figure 3.12 we present a schematic diagram that also includes the density of states. Close to the Fermi energy, within the model of free electrons, the density of states can be taken approximately as constant. In Figure 3.12 the tunneling arrangement is shown for the voltages $U = 0, U_1$, and $U_2 > U_1$. The occupation of the states is indicated by the hatched areas. For simplicity we have taken the case $T = 0$. On the positive side of the voltage, the energy of the electrons with their negative charge is lowered compared to the negative side. In this case, more electrons can tunnel from left to right than in the opposite direction, that is, an electron current is flowing, as shown by the horizontal arrow in Figure 3.12b,c. Since we have assumed a constant density of states, the number of electrons that can



(a)



(b)



(c)

Figure 3.12 Tunneling current between normal metals for three values of applied voltage, (a) $U = 0$, (b) $U = U_1$ and (c) $U = U_2 > U_1$. For simplicity, the distribution for $T = 0$ is shown. Near the energy E_F there are no states in the insulating barrier.

tunnel from left to right increases proportional to the voltage U . Therefore, the net tunneling current I is also proportional to the applied voltage U (see Figure 3.14, dashed curve 1¹¹¹). At this point we emphasize again that we are only considering tunneling processes at constant energy,¹²⁾ that is, transitions indicated horizontally in our scheme.

The current-voltage characteristic of such a tunneling arrangement changes if one or both sides are in the superconducting state. This is immediately obvious, if we recall that in the superconducting state an energy gap appears in the energy

Here, we neglect the influence of the applied voltage on the energetic height of the barrier.
12) During the tunneling process, for instance, within the barrier, an electron can absorb or emit a phonon. Such processes are referred to as "phonon-assisted tunneling". They are relatively rare and will be neglected initially.

spectrum of the unpaired electrons, which strongly changes the density of states near the Fermi energy.

In Figure 3.13 we show the first case, a normal conductor against a superconductor, following the scheme of Figure 3.12. Again, for simplicity we take the case $T = 0$. The corresponding current-voltage characteristic is shown in Figure 3.14 as curve 2. No tunneling current can flow up to the voltage $U = \Delta_0/e$, since the electrons from the normal conductor do not find any states in the superconductor. At $U = \Delta_0/e$ the tunneling current sets in with a vertical slope. This steep rise is caused by the high density of unoccupied states in the superconductor. At higher voltages, the curve approaches the tunneling characteristic between two normal conductors (curve 1). At finite temperatures, in the normal conductor the distribution is thermally smeared, and also a few unpaired electrons exist in the superconductor above the energy gap. Furthermore, the energy gap is slightly reduced, as we have discussed in Section 3.1.2. The resulting characteristic is shown schematically in Figure 3.14 as curve 3.

From such characteristics the energy gap can be determined easily. From the function $I(U)$, for a given density of states of the normal conductor, we can also extract quantitative information on the energy-dependent density of states of the unpaired electrons in the superconductor.

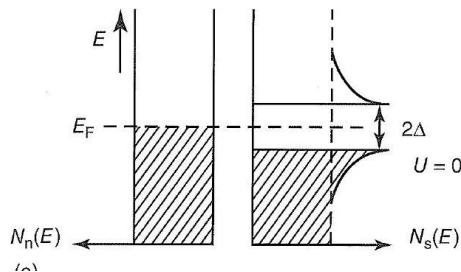
For $T = 0$ and $N_n(E) = \text{constant}$, the derivative d/dU directly yields the density of states of the unpaired electrons $N_s(E)$.

We note that the tunneling characteristic is independent of the direction of the voltage. During reversal of the voltage, only the role of the unoccupied and occupied states is changed. If the superconductor is connected to the negative side, at $U = \Delta_0/e$ the unpaired electrons can tunnel into the free states of the normal conductor. We must recall that because of the Pauli principle during the tunneling process of single electrons, in addition to the electrons of the state at the starting point (for instance, on the left side in Figure 3.13), the free energy sites at the terminal point (on the right side in Figure 3.13) must also exist.

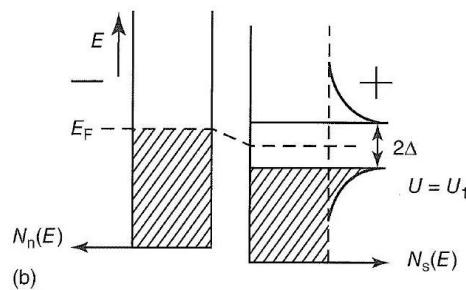
Before we turn to case 2, namely the tunnel junction between two superconductors, we want to look at the quantitative relation between the important quantities. As we have seen, the tunneling probability depends on the height and width of the barrier. Within the small energy range near the Fermi energy with which we are concerned, we can treat this probability as a constant (independent of the energy). We denote it by D . The number of electrons tunneling per unit time at energy E from left to right is proportional to the number of occupied states ¹³ $N_I(E)f(E)$ on the left side and to the number of unoccupied states on the right side. The probability of finding an unoccupied state at energy E is 1 minus the probability that this state is occupied, that is, $1 - f(E)$. In the case of a voltage drop U across the barrier, the electrons tunnel from a state with energy E on the left side into a state with energy $E + eU$ on the right side. Hence, at the voltage U , their number is

$$N_{II}(E + eU)[1 - f(E + eU)]$$

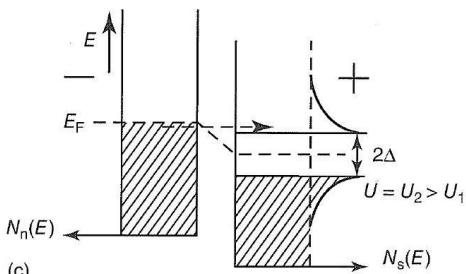
We denote the density of states in the electrodes by the indices I or II.



(a)



(b)



(c)

Figure 3.13 Tunneling current between a normal conductor and a superconductor for $T = 0$ and three values of applied voltage, (a) $U = 0$, (b) $U = U_1$ and (c) $U = U_2 > U_1$.

In the following we measure the electron energy from the Fermi energy: $\varepsilon = E - E_F$. So in a small energy interval $d\varepsilon$ at the energy ε , we have the following small contribution to the tunneling current from left to right:

$$dI_{I \rightarrow II} \propto D N_I(\varepsilon) f(\varepsilon) N_{II}(\varepsilon + eU) [1 - f(\varepsilon + eU)] d\varepsilon$$

The total tunneling current $I_{I \rightarrow II}$ is obtained by integration over all energies. One finds

$$I_{I \rightarrow II} \propto D \int_{-\infty}^{\infty} N_I(\varepsilon) f(\varepsilon) N_{II}(\varepsilon + eU) [1 - f(\varepsilon + eU)] d\varepsilon$$

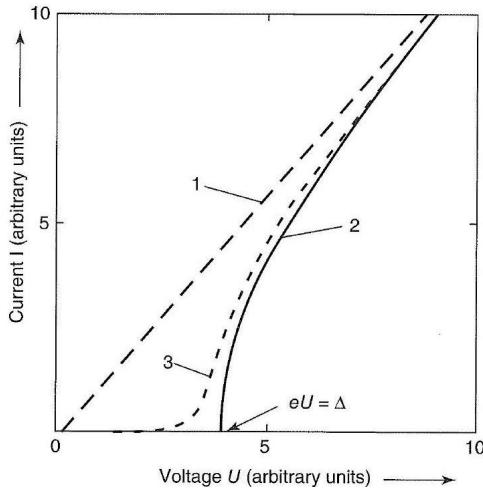


Figure 3.14 Current-voltage characteristic of tunnel junctions: curve 1, normal conductor/normal conductor (Figure 3.12); curve 2, normal conductor/superconductor, $T = 0$ K (Figure 3.13); and curve 3, normal conductor/superconductor, $0 < T < T_c$.

Since we measure the energy from E_F , we must integrate from $-\infty$ to $+\infty$. Similarly we obtain the tunneling current $I_{II \rightarrow I}$ from right to left:

$$I_{II \rightarrow I} \propto D \int_{-\infty}^{\infty} N_{II}(\varepsilon + eU) f(\varepsilon + eU) N_I(\varepsilon) [1 - f(\varepsilon)] d\varepsilon$$

The difference between the two yields the net tunneling current:

$$I = I_{I \rightarrow II} - I_{II \rightarrow I} \propto D \int_{-\infty}^{\infty} N_I(\varepsilon) N_{II}(\varepsilon + eU) [f(\varepsilon) - f(\varepsilon + eU)] d\varepsilon$$

Here, according to Eq. (1.3), we have

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/k_B T} + 1} \quad \text{with } \varepsilon = E - E_F$$

We have indicated this brief derivation, since it yields in a simple way the quantitative connection in the form of a balance equation. For the situation in Figure 3.13, for example, we can assume $N_n(\varepsilon) = \text{constant}$, and for $N_s(\varepsilon)$ we can use relation (3.5) from Section 3.1.2 after changing it from E to ε :

$$N_s(\varepsilon) = N_n(0) \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_0^2}} \quad \text{for } |\varepsilon| \geq \Delta_0$$

Now we can calculate the tunneling characteristic. The case of a tunnel junction between two normal conductors shown in Figure 3.12 represents a very simple example for further exercise.¹⁴⁾

Next we turn to the case of a tunnel junction between two superconductors. Such a junction is shown in Figure 3.15a,b in the usual way. However, the case $U = 0$ is omitted. In Figure 3.15c the current-voltage characteristic is presented schematically.

In this case the characteristic for finite temperatures differs strongly from that for $T = 0$. Therefore, we have assumed a distribution for $T \neq 0$. The dashed line in Figure 3.15c would be obtained for $T = 0$. At $eU = \Delta_{\text{II}} - \Delta_{\text{I}}$ a maximum of the tunneling current is reached, since now all single electrons of superconductor I can tunnel to the right, where they encounter a particularly high density of unoccupied states. Then the current decreases with a further increase in the voltage, since the density of the unoccupied states in II decreases. Finally, at $eU = \Delta_{\text{I}} + \Delta_{\text{II}}$ one observes a particularly steep increase in the current because of the high density of the occupied as well as the unoccupied states. It is this extremely steep slope that provides the important advantage of measurement using two superconductors.

Tunneling experiments have provided much important information about the energy gap. In most cases, two thin evaporated layers with an oxide layer as the barrier are used. However, also compact bulk samples can be used for studying substances that are difficult to evaporate. In the latter case, the barrier can consist also of a natural oxide layer, or it can be fabricated by the evaporation of an insulator. The study of compact bulk samples is necessary if the energy gap is to be determined in a specific crystallographic direction by using single crystals.

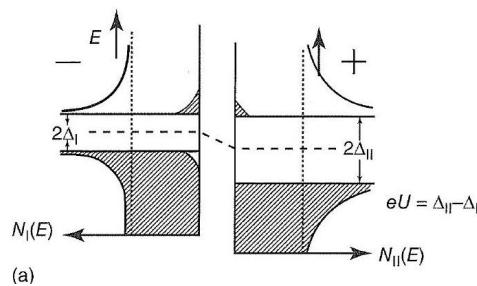
In Figure 3.16 we present an arrangement of evaporated layers. It is advantageous to keep the tunneling area small, in order to avoid large tunneling currents and to reduce the chances for the appearance of holes in the oxide layer.

Figure 3.17 shows the results obtained for an Al – Al₂O₃ – Pb tunnel junction at four different temperatures [35]. For the curves 1 – 3, the Al is normal conducting. Only for curve 4 do we deal with a junction of two superconductors. However, although in the latter case the measuring temperature of 1.05 K is only slightly below the transition temperature of Al(1.2 K), the different shape of the characteristic is clearly visible

Figure 3.18 shows the characteristic of a typical junction between two superconductors, namely Nb-niobium oxide- Sn at 3.4 K [36]. At this temperature Nb ($T_c = 9.3$ K) and Sn ($T_c = 3.7$ K) are both superconducting. The solid line is

In the case of Figure 3.12, for all $\varepsilon > 0$, the term in brackets $[f(\varepsilon) - f(\varepsilon - eU)]$ is equal to zero, since both Fermi functions are zero. Independent of the sign of the electron charge, we have assumed $ell > 0$. For $\varepsilon < -ell$ the term in brackets is zero again, since both Fermi functions have the value 1. Only in the (???) text is missing) attain the value 1. The density of states, of the integral. Then we obtain (see curve 1 in Figure 3.14):

$$I \propto DN_{\text{I}}N_{\text{n}} \int_{-eU}^0 1 \, d\varepsilon \propto U$$



(a)

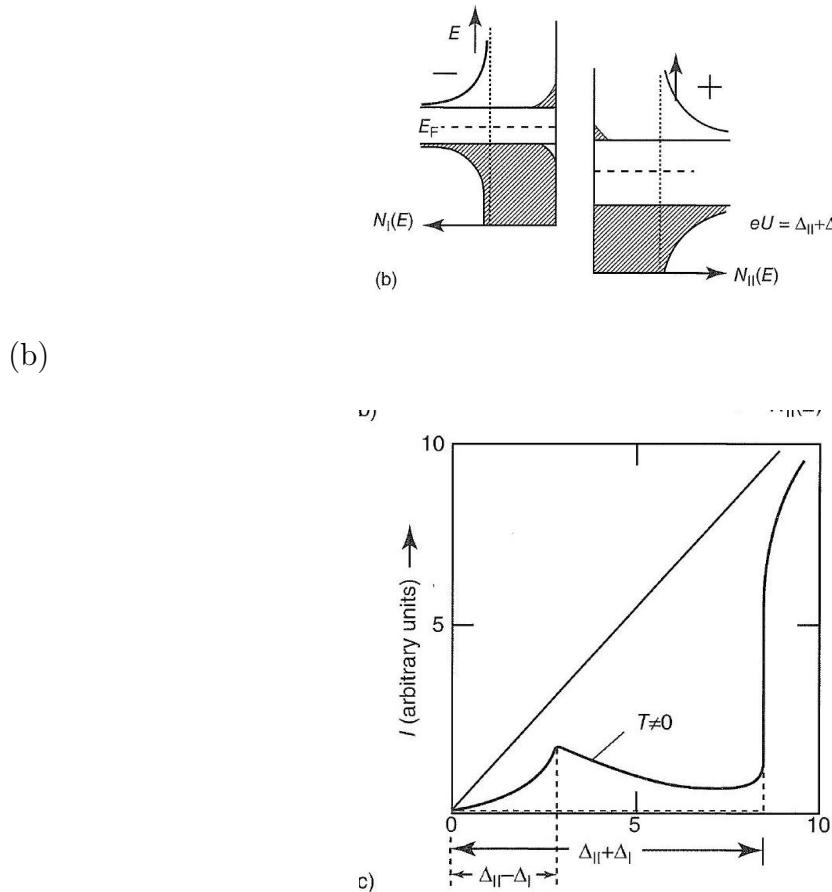


Figure 3.15 Tunneling current between two superconductors; $0 < T < T_c$. (a) and (b) show the density of states and (c) displays the current voltage characteristic.

the experimentally recorded result. The dots are calculated from Eq. (3.13) using proper values of the energy gaps ($2\Delta_{Sn} = 0.74$ meV; $2\Delta_{Nb} = 2.98$ meV).

Finally, Figure 3.19 presents as an example the temperature dependence of the energy gap of tantalum [37]. The open circles show the measured data, and the solid line indicates the function $\Delta_0(T)/\Delta_0(0)$ expected from the BCS theory. The agreement is excellent.

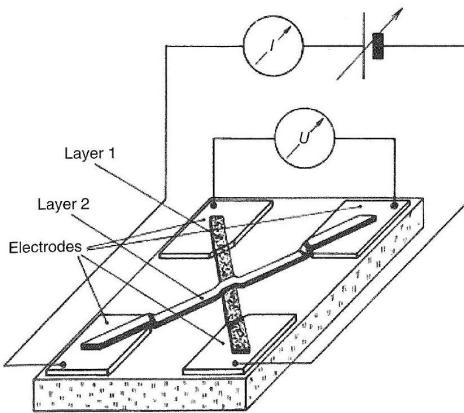


Figure 3.16 Tunnel junction between two layers. Layer 1 was oxidized before the depobelow $1\mu m$. Usually, the oxide barriers are about 3 nm thick.

We see from Tables 3.3 and 3.4, which only contain a small part of the many possible results, that in a series of metals the ratio $2\Delta_0/k_B T_c$ for $T = 0$ is close to the value 3.5 predicted by the BCS theory (Eq. (3.7)). Deviations from this value in metals such as Nb can be caused easily by impurities near the surface. For such tors Pb and Hg show strong deviations from the

values of the BCS theory. These deviations can be understood in terms of a particularly strong electron-phonon interaction in these metals.

From tunneling experiments, we can find out if the interaction leading to Cooper pairing is indeed the exchange of phonons. If the coupling between the lattice vibrations and the electron system is sufficiently strong, the density of states of the quasiparticles will be changed due to this coupling. These changes manifest themselves in the tunneling characteristic and can be measured using equipment with sufficiently high sensitivity. With some numerical work it is then possible to determine the coupling constant λ^* of the attractive electron-phonon interaction and the constant μ' of the repulsive Coulomb interaction (see Eq. (3.9)). In this way, one obtains the so-called Eliashberg function $\alpha^2 F(\omega)$, which is closely connected with λ° . Here, $F(\omega)$ is the density of states of the phonons. In order to avoid any confusion with the density of states of the electrons, here we denote the energy by ω .

The tunneling measurements only deal with the phonons coupling to the electron system. On the other hand, neutron diffraction experiments can measure the

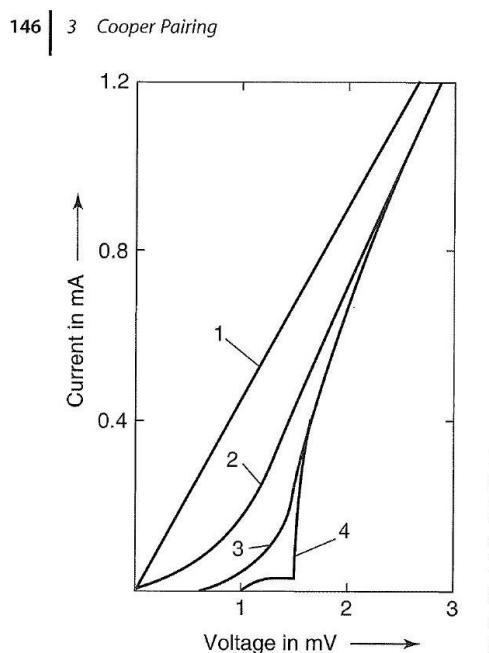


Figure 3.17 Voltage-current characteristicMeasuring temperature: curve 1, $T = 4.2$ K; curve 2, $T = 1, 64$ K; curve 4, $T = 1.05$ K. At 1.05 K the Al is also superconclearly be seen. Transition temperatures are

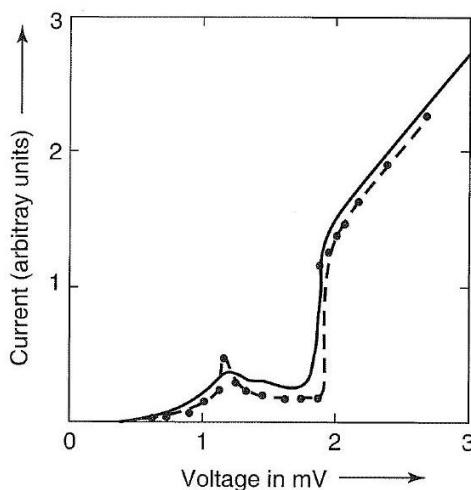


Figure 3.18 Current-voltage characteristic of a Nb-insulator-Sn tunnel junction at $T = 3.38$ K. The solid line is the experimentally recorded curve. The dots are calculated from Eq. (3.13) using the values $2\Delta_{\text{Sn}} = 0.74$ meV and $2\Delta_{\text{Nb}} = 2.98$ meV. (From [36].)

density of states of the phonons independent of whether or not the latter couple to the electrons. Hence, from the comparison of both measurements, one obtains information about the coupling. Figure 3.20 shows such a comparison for Pd-D samples, the properties of which we discussed in Section 2.3.3 [38, 39]. In spite of the strongly different deuterium concentration, we clearly see that prominent structures appear in both measurements. In particular, the phonons with high energies, resulting from the implanted deuterium, are also visible in the tunneling measurements, indicating that these vibrations couple well to the

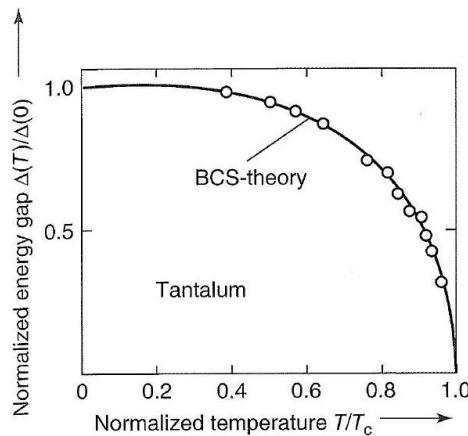


Figure 3.19 Temperature dependence of the energy gap of tantalum; $\Delta(0) = 1.3$ meV. (From [37])

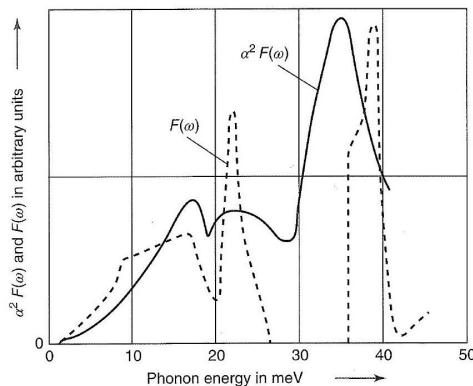


Figure 3.20 Plot showing $\alpha^2 F(\omega)$ obtained from tunneling measurements and $F(\omega)$ from neutron diffraction experiments as functions of the phonon energy ω for Pd – D samples (see Section 2.3.3). (From [38, 39].

electrons. These results explain the relatively high transition temperatures of the palladium-hydrogen system.

The determination of the function $\alpha^2 F(\omega)$ from the detailed structure of the tunneling conductivity and the comparison with the phonon spectrum $F(\omega)$ obtained, say, from neutron diffraction, represented the key experiment demonstrating that in conventional superconductors Cooper pairing is due to the electron-phonon interaction.

In a similar way, for each newly discovered superconductor one can try to measure accurately the quasiparticle density of states by means of tunneling spectroscopy, if a tunnel junction with high quality can be fabricated. In the following (Section 3.2), we will see that, for high-temperature superconductors, not only tunneling spectroscopy but also other methods yield

highly peculiar results, which are not yet completely understood. However, they clearly indicate that in this case the Cooper pairing is unconventional.

At this stage, we want to mention three additional aspects in context with the energy gap, which will be discussed in more detail in Section 3.1.4.

The energy gap can have different magnitudes along different crystallographic directions. Such superconductors are referred to as anisotropic. This anisotropy can lead to different results in various experiments. Depending on the evaporation conditions, special crystal directions can also be distinguished in experiments performed with thin layers. Measurements with single crystals along different directions yield information about the magnitude of the anisotropy.

It appears that in some compounds at least two energy gaps exist. As an example we mention SrTiO_3 doped with niobium, which becomes superconducting below 0.7 K [40]. Another example is MgB_2 [41]. In these materials, two or more different Fermi surfaces or energy bands contribute to the superconductivity, each forming its own energy gap, respectively ("two-band superconductivity"). So in the case of MgB_2 one finds one energy gap around 2meV and another one around 7meV.

In principle, the energy gap can be changed even by very small concentrations of impurities, having an atomic angular momentum and, hence, a magnetic moment (paramagnetic impurities). In this way, superconductors can be generated without an energy gap ("gapless superconductor"). However, they are still superconducting, since they display pair correlation.

So far in our discussion of the tunneling experiments with superconductors, we have only been concerned with the unpaired electrons. For the interpretation of the experimental observations, we have taken into account only the density of states of the unpaired electrons in the superconducting state. The Cooper pairs and their binding energy have never been mentioned. This also could not be expected, since within our picture of the individual electrons the total interaction was expressed in terms of the change of the density of states of the unpaired electrons.

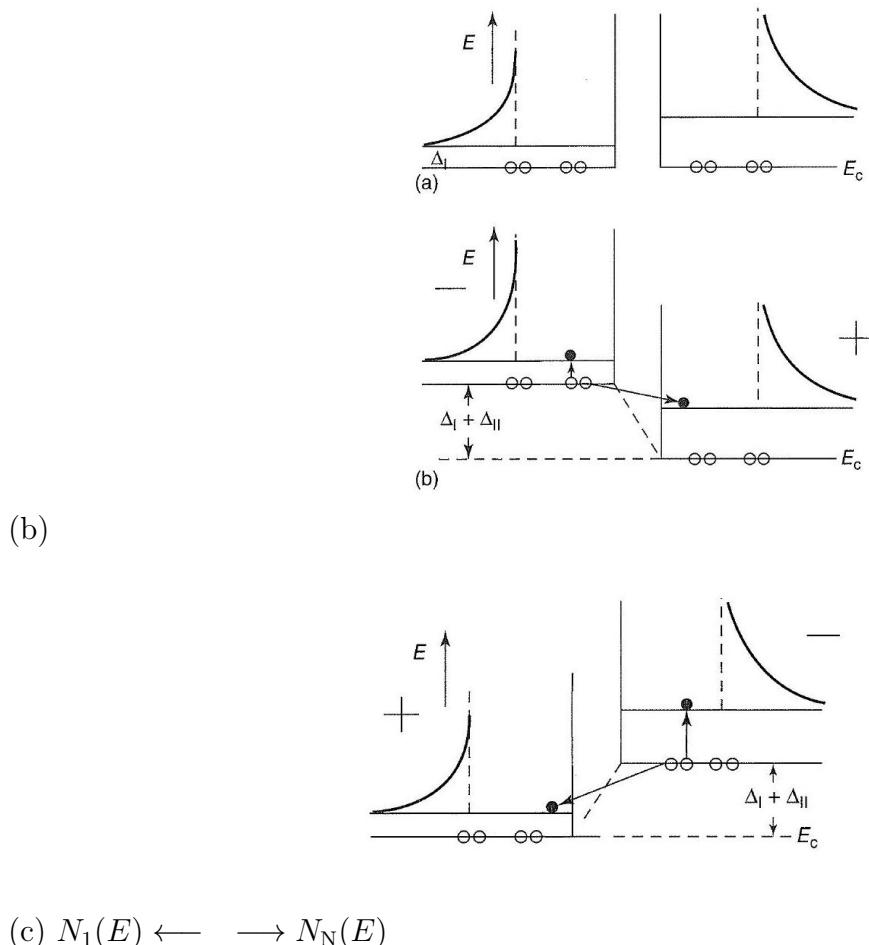
On the other hand, since the superconducting state is based entirely on the concept of Cooper pairs, we are also interested in a picture where the Cooper pairs become distinctly visible. In the following, we will briefly discuss such a picture. However, there is a certain difficulty within this picture, since states of pairs, that is, collective states, and states of single electrons are shown in a single scheme. For our discussion we take the case of a tunnel junction between two different superconductors (Figure 3.15), and for simplicity we assume $T = 0$. Now superconductors are characterized by showing the Cooper pairs in one state and indicating the states that are occupied by the single electrons after breaking a pair (Figure 3.21). In equilibrium without an external voltage, the Cooper pair states are shown at the same energy level. This configuration is established if we allow the exchange of particles. At an applied voltage, in the case $T = 0$, according to Figure 3.15 we do not expect a tunneling current I in the range $eU < \Delta_I + \Delta_{II}$. At $eU = \Delta_I + \Delta_{II}$, we expect a steep rise of I . In Figure 3.21 b, c, we show the situation for the two possible polarities of the voltage $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$. In our present picture, we must explain the appearance of a tunneling current at this voltage in terms of the breaking of Cooper pairs. The applied voltage must be at least large enough that a pair can decay into an electron in superconductor I and an electron in superconductor II. This is exactly the process we want to describe, namely the transfer of a particle across the insulating layer. With increasing voltage U , the possibility for such a process first appears at $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$. If the energy of superconductor II is lowered compared to that of superconductor I by means of the voltage, at $U = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$, a pair in I can be broken up. As a result, a single electron appears in the lowest state of I, whereas the other single electron tunnels into the lowest state of II. During this process the energy remains conserved. The excitation energy of the one electron can be supplied by the transfer of the other electron in the electric field of the external voltage. The final states occupied by the two electrons are crucial for the necessary value of

the voltage. At voltages $U < (\Delta_I + \Delta_{II})/e$, the electrons of a pair cannot be transferred into two single-electron states in I and II, respectively, at constant energy. If the superconductor II is connected to the negative side, again at $|U| = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$ a pair can break up, however, this time in superconductor II, and the single electrons occupy states in I and II, respectively.¹⁵ Because of the extremely large density of states for single electrons at $E = \Delta_I$, the tunneling current sets in very steeply at $|U| = (\Delta_I + \Delta_{II})/e$. The argument is now similar as in the other picture. The number of processes is proportional to the number of possible final states.

If we want to keep this picture also for finite temperatures and to derive from it at least the qualitative form of the current-voltage characteristic, for single electrons existing in thermal equilibrium we must use the first picture discussed earlier.

In Section 4.2 we will discuss another possibility for determining the energy gap in conjunction with the specific heat in the superconducting state. Furthermore, we will see in Chapter 4 that, for example, the temperature dependence of the London penetration depth, being a property of the Cooper pairs, depends on the energy gap. In principle, each physical property depending on the density of states of the single electrons can be used for determining Δ_0 . We have discussed three of these possibilities, namely the absorption of light, the damping of ultrasound, and the tunneling of single electrons. These techniques yielded many results, and the underlying physics is particularly clear.

The condition $I(U) = -I(-U)$, which must always be valid for tunnel junctions, is satisfied.



(c) $N_1(E) \leftarrow \rightarrow N_2(E)$

Figure 3.21 Tunneling effect between superconductors in the picture of Cooper pairs and to (c) are for different values of applied voltage.

6.5.3 Special Properties of Conventional Superconductors

At the end of this "microscopic" section on conventional superconductors, we want to discuss a few special properties that can enhance our understanding. Here, we emphasize in particular

the influence of defects in the crystal lattice and of impurity atoms on the superconducting properties.

Influence of Lattice Defects on Conventional Cooper Pairing

(все, дальше читать не обязательно.)

We use the term defects to denote all deviations from perfect periodicity of the crystal lattice, independent of whether they are due to the presence of foreign atoms or due to only structural perturbations, that is, displacements of the atoms from their regular sites. Primarily, such lattice defects act as scattering centers for the system of conduction electrons, reducing the electron mean free path.

However, in general, the lattice defects influence all the properties of a superconductor. In this section, we will discuss some of these effects.

The Anisotropy Effect. The correlation of the electrons, leading to the formation of Cooper pairs, is due to the elastic vibrations of the lattice, that is, the phonons. This interaction may depend on the direction within the crystal. In the presence of such anisotropy, in a simplified way we can say that certain crystal directions are more favorable for superconductivity than others.

For example, the energy gap Δ_0 can have different values along different directions. The strength of this anisotropy is quantified in terms of the averaged square of a parameter α^{16} . A value $\langle \alpha^2 \rangle = 0.02$, as observed, say, for tin, means that in the different crystal directions the energy gap deviates from the average value by about $14\% \approx 0.02^{1/2}$. Such differences in the energy gap have been detected, for example, by means of tunneling experiments or by measurements of the absorption of ultrasound (see Section 3.1.3.2).

The transition temperature T_c is essentially determined by the more favorable spatial directions, since the transition into the superconducting state takes place when the first Cooper pairs are formed under equilibrium.¹⁷ If lattice defects exist in the crystal, the electrons will be scattered at these imperfections. However, this means that the momentum of an electron quickly covers all spatial directions because of the scattering. Therefore, the interaction leading to superconductivity will be averaged. The most favorable directions will not become fully active anymore, since electrons with momentum along these directions are scattered quickly into other less favorable directions. This leads to an overall reduction of the transition temperature with an increasing concentration of the scattering centers.

The microscopic theory of superconductivity allows one to calculate this influence of the lattice defects on T_c . In Figure 3.22 we show some results for tin [42]. The scattering centers are formed by impurity atoms. Since the impurity atoms have different scattering properties, for convenience we take the residual resistance ratio $\rho'' = R_n / (R_{273} - R_n)$ as a measure of the electron mean free path. Here, R_n is the resistance extrapolated to low temperatures, and R_{273} is the resistance at 273 K. In Figure 3.22 the transition temperature is plotted versus ρ'' . The anisotropy effect is dominated by the universal, linear decrease in T_c at small impurity concentrations (see Figure 3.22b), in good agreement with the theory. For large impurity concentrations, that is, for small values of the electron mean free path, complete averaging over all spatial directions is accomplished. For the anisotropy effect alone, T_c should then approach a limiting value a small percentage below the value of the defect-free superconductor.

Figure 3.22 indicates that this behavior is not observed anymore for large defect concentrations. Apparently, in this case, specific properties of the impurities become important, leading to various dependences of the transition temperature on the different impurity atoms. Presently we are still unable to understand

The averaging must be performed over all the electrons on the Fermi surface. the direction.

6.6 Currents in Type-I and Type-II Superconductors

We have already seen several times that a superconductor can carry only a limited electric current. As the first example, in Section 1.5.1 we discussed the critical current in a Josephson junction. However, also in the case of homogeneous superconductors the strong correlation of the Cooper pairs leads to the existence of a critical velocity and, hence, of a critical current density j_c . If this critical value is exceeded, Cooper pairs will be broken up.

Next we want to discuss some relations resulting from the existence of a critical current density, for the maximum possible current in a superconductor. We will restrict ourselves to simple geometric situations.

Our discussions of the critical current are highly important for the technical applications of superconductivity. In type-II superconductors we have materials that can still remain superconducting also for technically interesting magnetic fields. However, for applications it is also important that these superconductors can still transport high electric currents sufficiently without resistance in high magnetic fields. As we will see, here we are confronted with another problem, which has been solved only with the so-called hard superconductors.

Before we turn in detail to the special features in type-I and type-II superconductors, we want to investigate the magnitude of the critical supercurrent density in the ideal case of a thin and homogeneous superconducting wire.

5.1 Limit of the Supercurrent Due to Pair Breaking

In order to determine the maximum supercurrent density that can be reached under the most favorable conditions, we consider a homogeneous superconducting wire extending along the x -direction. The diameter of the wire is assumed to be smaller than the London penetration depth λ_L and the Ginzburg-Landau coherence length ξ_{GI} . In this case, the Cooper pair density can be taken as constant over the cross-section of the wire, and the Ginzburg-Landau equations (4.28) and (4.29) can be solved for this problem.

In order to keep our calculation no more complicated than necessary and to uncover the underlying physics, resulting in the maximum supercurrent of our wire, we use a few simplifications. For the wave function Ψ of the superconductor, we use the ansatz

$$\Psi = \Psi_0 e^{ikx}$$

Here, the amplitude Ψ_0 is independent of location. This means that the Cooper pair density $n_s = |\Psi|^2$ is spatially homogeneous. The exponential function is taken such that the wave with wavenumber k is running along the wire.

In order to see how Ψ is connected with the supercurrent or the supercurrent density along the wire, we insert Eq. (5.1) into the second Ginzburg-Landau equation (4.29):

$$j_s = \frac{q\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{q^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

Then we obtain for the x component of the current density

$$j_{s,x} = \frac{q\hbar k}{m} \Psi_0^2 - \frac{q^2}{m} \Psi_0^2 A_x = q\Psi_0^2 \frac{\hbar k - qA_x}{m}$$

According to Eqs. (1.5) and (1.6), the ratio on the right-hand side is just the Cooper pair velocity. Hence, we have

$$j_{s,x} = q\Psi_0^2 v_x$$

This corresponds exactly to the relation $j = qnv$ for the current density of electrically charged particles.

Next, we turn to the first Ginzburg - Landau equation (4.28):

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$

By inserting Eq. (5.1) and by assuming the vector potential to be also independent of x^1 , we obtain

$$\frac{(\hbar k - qA_x)^2}{2m}\Psi + \alpha\Psi + \beta\Psi_0^2\Psi = 0$$

or by introducing the velocity v_x and after dividing by Ψ

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \alpha + \beta\Psi_0^2 = 0$$

With $\alpha < 0$, this yields

$$\Psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{mv_x^2}{2|\alpha|} \right) = \Psi_\infty^2 \left(1 - \frac{mv_x^2}{2|\alpha|} \right)$$

Here, we have used the relation $-\alpha/\beta = \Psi_\infty^2$ (Eq. (4.23)), and we have introduced the wave function Ψ_∞ of the homogeneous system in the absence of a supercurrent. We see that the Cooper pair density Ψ_0^2 decreases with increasing kinetic energy $1/2mv_x^2$. It vanishes if this energy is equal to $|\alpha|$.

The calculation can also be performed using a spatially varying $A_{x,x}$, resulting in a more complicated calculation. This dependence of the Cooper pair density on the velocity must also be taken into account in the expression (5.2b) for the supercurrent density. If the Cooper pair density were constant, $j_{s,x}$ would simply increase linearly with the velocity of the charge carriers. This is exactly what happens at small velocities. However the larger v_x , the more pronounced is the decrease of the Cooper pair density. At the larger v_x , the more pronounced is the decrease of the Cooper pair density. As soon as Ψ_0^2 reaches zero, j_x vanishes. Between $v_x = 0$ and this limiting value, j_x has a maximum as a function of v_x , which we want to determine next.

For this, we must calculate the derivative dj_s/dv_w , set it equal to zero, and find v_x . For the velocity yielding the maximum supercurrent density, we obtain

$$v_{x,p} = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{3m}}$$

According to Eq. (5.5), at this velocity the Cooper pair density attains the value $2/3\Psi_\infty^2$, and Eq. (5.2b) yields

$$j_{c,p} = q \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2|\alpha|}{3m}} \Psi_\infty^2$$

This current density is also referred to as the critical pair-breaking current density. Using expression (4.25a), connecting α with B_{cth} , and with expression (1.10) for the London penetration depth, we can write it also in the form ²⁾

$$j_{c,p} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} B_{cth} \frac{1}{\mu_0 \lambda_L}$$

This critical current density can become very large. If for B_{cth} we take a value of 1 T and for λ_L a value of 100 nm, we obtain for $j_{c,p}$ a value of about 4.3×10^8 A/cm². In the following sections, we will see to what extent this high critical current density can be achieved in real superconductors.

Type-I Superconductors

As the simplest geometric example, we consider a wire with circular cross-section carrying a current I . The wire is assumed to be much thicker than the London penetration depth

At sufficiently small currents, the superconducting wire resides in the Meissner phase. In this phase, the interior of the superconductor must remain free of magnetic flux. However, this also means that the interior cannot carry an electric current, since otherwise the magnetic field due to the current would exist. From this we also conclude that the current passing through a superconductor is restricted to the thin surface layer, into which the magnetic field can penetrate in the Meissner phase. The external currents applied to a superconductor are

Since Eq. (5.7b) has been obtained from an analysis of the Ginzburg-Landau equations, this expression is valid only near T_c . From the microscopic bCS theory, one finds that $j_{c,p}$ is proportional to obtain again $j_{c,p} = B_{\text{cth}}/\mu_0\lambda_L$

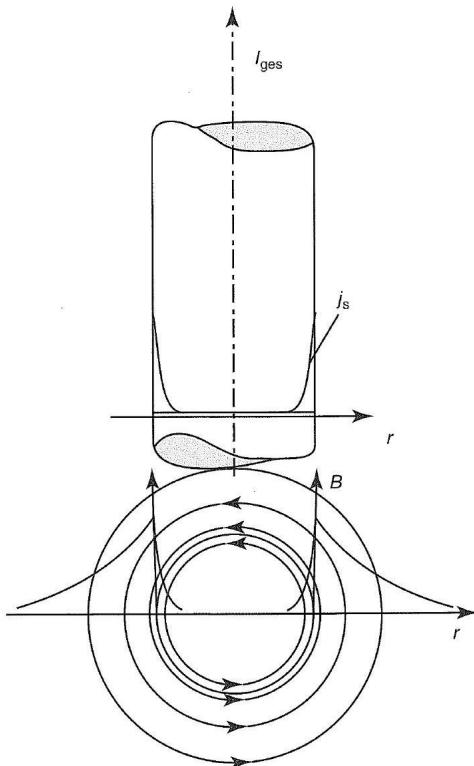


Figure 5.1 Distribution of the current density and of the magnetic field in a currentcarrying superconducting wire. The surface layer has the thickness of only the penetration depth λ_L .

referred to as transport currents, in contrast to the shielding currents appearing in the superconductor as circulating currents.

In Figure 5.1 we show schematically the spatial distribution of a transport current in a wire with circular cross-section in a plot of the current density versus the wire radius. The total current is given by the integral of the current density over the cross-sectional area

$$I = \int_F j_s dF$$

The magnetic field of this current is also shown in Figure 5.1

Already by 1916, Silsbee [1] had proposed the hypothesis that in the case of "thick" superconductors, that is, for superconductors with a fully developed shielding layer, the critical current is reached exactly when the magnetic field of the current at the surface attains the value B_{cth} . This hypothesis has been

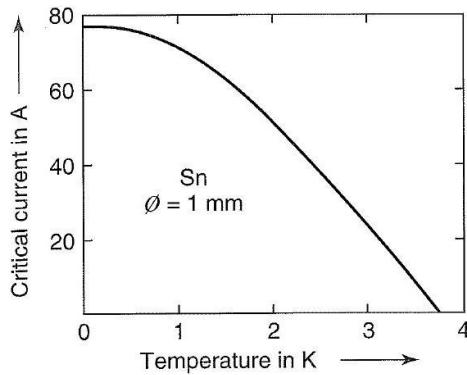


Figure 5.2 Critical current of a tin wire with 1 mm diameter plotted versus the temperature.

confirmed perfectly. In other words, it means that the magnetic field and the current density at a surface with a well-developed shielding layer are strongly correlated (Eq. (4.60)). The critical value of the current density is associated with a certain critical field, namely B_{cth} , where it is completely irrelevant whether the current density is due to shielding currents or a transport current.

Because of the validity of the Silsbee hypothesis, it is very simple to calculate the critical currents of wires with circular cross-section from the critical fields, for example, from those of Figure 4.12. The magnetic field at the surface of such a wire carrying the current I is given by

$$B_0 = \mu_0 \frac{1}{2\pi R}$$

where B_0 is the field at the surface, I is the transport current, R is the wire radius, and $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ V s/Am}$. The only requirement is cylindrical symmetry of the current distribution. The radial dependence of the current density is arbitrary.

It follows from Eq. (5.9) that the critical current shows the same temperature dependence as the critical magnetic field (at I_c the field B_c is reached). As an example, in Figure 5.2 we show the temperature dependence of the critical current for a tin wire with 1 mm diameter. According to Eq. (5.9), the critical field of about 300G at 0 K corresponds to a critical current $I_{c0} = 75 \text{ A}$. This critical current increases proportional to the wire radius, since the total current only flows within the thin shielding layer

We can also find an average critical current density at the surface. In this case we replace the exponentially decaying current density (Figure 5.1) by a distribution in which the full current density at the surface remains constant to a depth λ_L , the penetration depth, and then abruptly drops to zero.³⁾ Based on this argument, for the tin wire, for example, at 0 K we obtain a critical current density

Since the penetration depth is only a few times 10^{-6} cm , for macroscopic wires we always have plane

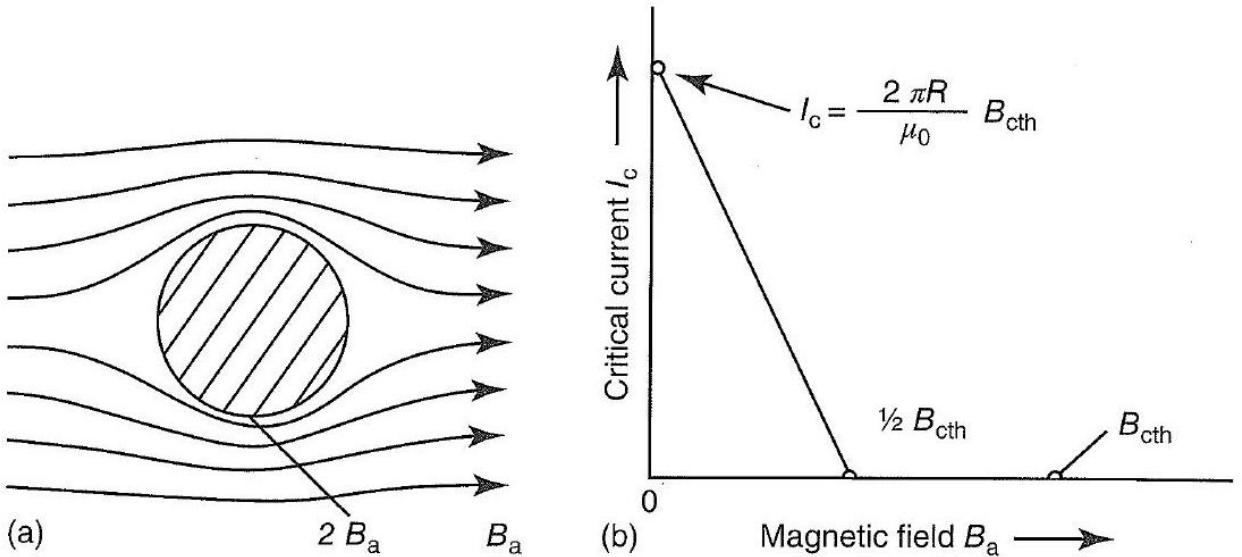


Figure 5.3 (a) Field distribution around a superconducting wire in the Meissner phase without a transport current. (b) Critical current of a wire with circular cross-section in external field B_a oriented perpendicular to the wire axis.

$$j_{c0} = \frac{I_{c0}}{2\pi R \lambda_L(0)} = 7.9 \times 10^7 \text{ A/cm}^2$$

with $R = 0.5 \text{ mm}$, $\lambda_L(0) = 3 \times 10^{-6} \text{ cm}$, and $I_{00} = 75 \text{ A}$. This critical current density is similar to the critical pair-breaking current density of a thin wire treated in Section 5.1. It would allow very high transport currents if the shielding effect, leading to the restriction of the current to a thin surface layer, could be avoided. Such substances have been developed in the form of the hard superconductors.

Using Silsbee's hypothesis, we can also calculate the critical currents of a superconductor in an external magnetic field. For this purpose, we only have to add the vectors of the external field and of the field of the transport current at the surface. The critical current density is reached when this resulting field attains the critical value. We consider a wire of radius R and a magnetic field B_a applied perpendicular to the wire axis. At first, no transport current is passing through the wire. Due to the Meißner effect, the field B_a is expelled from the wire, as shown in Figure 5.3a. In the case of a wire in a perpendicular magnetic field, the demagnetization factor is $1/2$. Therefore, at the top and the bottom side of the wire, the effective field is $B_{\text{eff}} = 2B_a$. A transport current I passing through the wire generates a magnetic field as indicated in Figure 5.1. At the top side of the wire, this field is directed opposite to the applied field. At the bottom side of the wire both fields add to each other. Hence, here one observes the highest total field, $B_{\text{ges}} = 2B_a + \mu_0 I / 2\pi R$. The critical current is reached in the case $B_{\text{ges}} = B_{\text{cth}}$, that is,

$$I_c = \frac{2\pi R}{\mu_0} (B_{\text{cth}} - 2B_a)$$

This dependence is plotted in Figure 5.3b

Next we turn to the question of how the superconductor enters the normal state upon reaching the critical current. For this, we again consider a wire with circular cross-section. If the critical current is exceeded, the Meissner phase with its complete flux expulsion must become unstable. One would expect that the superconductor becomes completely normal conducting. However, in this case

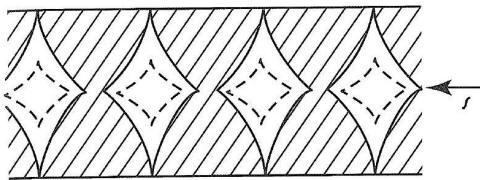


Figure 5.4 Intermediate-state structure of symmetry around the cylinder axis. For a wire with circular cross-section at the critical current. Hatched domains are normal conducting. The structure shows rotationa

ical current. Hatched domains are normal conducting. The structure shows rotationa

the transport current would be distributed over the total cross-section. The magnetic field at the surface would remain unaffected by this redistribution. However then everywhere in the superconductor the current density would be smaller than its critical value. Since the critical current density represents the crucial quantity for the stability of the superconducting state, we expect that the transition cannot take place in such a way that the current density is everywhere smaller than the critical value.

This assumption is confirmed by experiment. If the critical current is exceeded, the superconductor enters the intermediate state, that is, there appear normal conducting domains. Several models have been proposed to describe this intermediate state. In this case, configurations of the normal conducting or superconducting domains are sought that yield the critical field B_{cth} at all interfaces as much as possible. For the macroscopic structure of the intermediate state, this critical field value also yields the critical current density because of the fully developed shielding. A model of this kind is shown in Figure 5.4 [2]. Since the magnetic field of the transport current consists of circular field lines, the phase boundaries must also run perpendicularly to the wire axis. Because of the requirement that for each radius the field must be equal to B_{cth} , the current density must increase toward the wire axis. This is accomplished also by an increase in the thickness of the superconducting domains toward the wire axis.

The geometrical details can only be found from a calculation. In this case certain additional assumptions are necessary. The various models of this current-induced intermediate state are different because of these additional assumptions.

The domain structure of this intermediate state has been demonstrated beautifully by means of the powder decoration method (see Section 4.6.4). An example of this structure is shown in Figure 5.5 [3]. Upon exceeding the critical current density, the superconducting wire jumps into a state where the superconducting domains still extend to the sample surface. Upon a further increase in the current, a normal conducting ring-shaped domain appears, which surrounds a core region resing in the intermediate state, the thickness of which increases with increasing current.

In Figure 5.6 we show the electrical resistance of the wire plotted versus the transport current [2]. At I_c the resistance jumps; however, the full normal resistance is not yet established. The latter is obtained only upon a further 290 5 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors



Figure 5.5 Intermediate-state structure of current 30 A, external field B_a perpendicular to the cylinder axis 0.01 T, temperature 5 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors stripes indicate normal Length 38 mm, diam

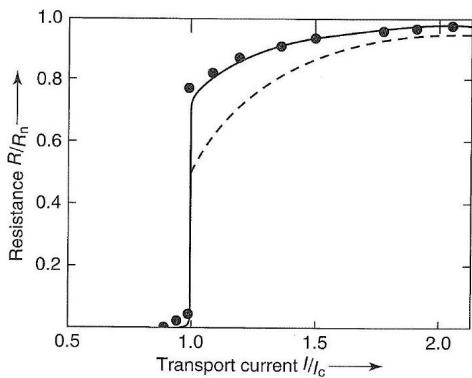


Figure 5.6 Electrical resistance plotted against the transport current. Solid line: model calculation from [2]; dashed line: model of London [4]; data points; from [5] (see also [6]). Such measurements are quite difficult, since in the current-induced intermediate state at finite resistance the dissipated joule heat can easily lead to an increase in temperature and, hence, to instabilities."

Regarding the stability of the intermediate state, a "thick" wire carrying a transport current corresponds to a sample with a demagnetization coefficient different from zero in the external field (see Section 4.6.4). In both cases, by means of the transition into the intermediate state, the superconductor can respond to the constraint of the external variables (current or magnetic field) by splitting up into normal conducting and superconducting domains. In this way, the critical value can be kept constant over a range of external variables.

So far we have treated static models of the intermediate state. For a given state, the superconducting or normal conducting domains remain fixed within the sample, except for thermal fluctuations. Gorter [7] has proposed a dynamic model, according to which domain motion appears in the presence of a transport current, leading to a resistance. In this case, within this model, the interfaces are oriented

For sufficiently small resistance in the external circuit, the voltage-current characteristic can be traversed completely. However, the dissipated joule heat results in an increase in the average temperature. 5.3 Type-II Superconductors 291

parallel to the direction of the transport current. In the static model discussed earlier (Figure 5.4), they were oriented perpendicular to the current direction. Decoration experiments using Nb powder have shown that for sufficiently large transport current the domains, indeed, move across the superconductor perpendicular to the current [8].

Very complicated intermediate state structures are obtained in wires that carry large transport currents in the presence of a longitudinal magnetic field. In this case, the longitudinal external field and the circular field of the current are superimposed such that the phase boundaries, which must always be oriented parallel to the field, display a screw pattern. Therefore, the transport current is also wound in a screw pattern. In this case, unexpected effects occur. For example, field enhancement is observed in the interior of the sample, which can be understood from the structure of the intermediate state, and which demonstrates impressively the general rule (see Section 4.6.4) that the phase boundaries must always be oriented parallel to the magnetic field [9].

5.3

Type-II Superconductors

Next we turn to type-II superconductors, which differ in an important fundamental way from type-I superconductors. For small magnetic fields and, hence, also for small transport currents, type-II superconductors reside in the Meissner phase. In this phase they behave like type-I superconductors, that is, they expel the magnetic field and the current into a thin surface layer.

A difference from type-I superconductors first appears when the magnetic field at the surface exceeds the value B_{c1} . Then a type-II superconductor must enter the Shubnikov phase, that is, flux lines must penetrate into the superconductor. One finds that in the Shubnikov phase the ideal⁵ type-II superconductor has a finite electrical resistance even at very small transport currents [10]. In the next section, we will treat this in detail. On the other hand, in type-II superconductors containing a large amount of defects, we can observe very large supercurrents. These "hard superconductors" will be discussed in Section 5.3.2.

5.3.1

Ideal Type-II Superconductor

We consider a rectangular plate carrying a current parallel to the plane of the plate and kept in the Shubnikov phase due to a magnetic field $B_a > B_{c1}$ oriented perpendicular to the plate (Figure 5.7).

In Section 4.7.1, an ideal type-II superconductor was defined by the fact that reversibly for increasing and decreasing external magnetic field in this case the corresponding equilibrium flux-line

configuration must be established arbitrarily easily, that is, arbitrarily easy flux-line motion must be possible. Hence, an ideal homogeneous with respect to the locations of the flux lines.

2925 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

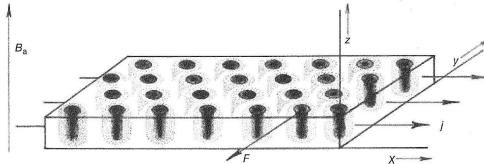


Figure 5.7 Shubnikov phase in the presence of a transport current density j . The flux lines experience a force F driving them along the y -direction. The magnetic field distribution around the flux lines is indicated by the shading.

As the first important result of such an experiment, one finds that under these conditions the transport current I is distributed over the total cross-section of the plate, that is, it is no longer completely restricted to a thin surface layer. After the penetration of the magnetic flux into the superconducting sample, the transport current can also flow within the interior of the superconductor

In this case there exists an important interaction between the transport current and the vortices. The transport current, say, along the x -direction, also passes through the vortices, that is, through regions where a magnetic field exists.) Between an electric current and a magnetic field, there exists the Lorentz force. In the case of a current I along a wire of length L in a perpendicular magnetic field B_2 , the absolute magnitude of this force is

$$F = ILB$$

This force is oriented perpendicular to B and to the current (here given by the wire axis). It is also this Lorentz force that drives our electric motors.

In the Shubnikov phase carrying a transport current, the Lorentz force acts between the vortices and the current. Since the transport current is spatially fixed by the boundaries of the plate, under the influence of the Lorentz force the vortices must move perpendicular to the current direction and to the magnetic field, that is, perpendicular to their own axis [11]. For ideal type-II superconductors, in which free motion of the vortices is possible, this vortex motion should appear already at arbitrarily small forces and, hence, at arbitrarily small transport currents.

However, the vortex motion across the superconductor causes dissipation, that is, electrical energy is changed into heat. This energy can only be taken from the

In the illustration of the Shubnikov phase, for simplicity cylindrical vortices are presented (see, e.g., Figures 1.8 and 5.7). This picture could lead to the wrong conclusion that the by

flowing around them, and thereby also avoids the magnetic field regions. However in this case, because of the vortex motion, we are dealing with a complicated nonequilibrium phenomenon, and a more detailed discussion can be found in monograph [M17].

transport current by means of an electrical voltage appearing along the sample. Hence, the sample shows electrical resistance.

The dissipation of electrical energy into heat during vortex motion may be due to two fundamentally different processes. The first loss mechanism is associated with the appearance of local electric fields generated by the moving vortices. This electric field also accelerates the unpaired electrons. They can deliver their energy taken up from the electric field to the lattice and thereby generate heat.

In addition to this process for energy dissipation, associated with the spatial variation of the magnetic field in a vortex, there exists another process caused by the spatial variation of the Cooper pair density in a vortex. If a vortex moves across the location P a temporal change of the Cooper pair density n_s also appears at this location, since n_s increases from its value zero in the vortex center toward the outside. In this case we must take into account that, following a deviation from equilibrium, this equilibrium value of n_s is re-established only after a finite time τ (the relaxation time, see Section 4.9). If n_s changes very slowly, that is, within times much larger than τ , the system only passes through equilibrium states. In this case the energy consumed at the front side of the vortex during breaking up of Cooper pairs will be delivered back at the back side during pair formation. Therefore, practically no net heat is generated in this process. However, if the vortex moves sufficiently fast, such that the Cooper pair density cannot pass only through equilibrium states anymore, energy will be dissipated during the temporal change of n_s , and heat will be generated.

We can understand this in the following way. The high magnetic field within the vortex core moves sufficiently fast that the equilibrium concentration of Cooper vortex core moves sufficiently fast that the equilibrium concentration of Cooper pairs corresponding to each field value cannot be established anymore. In this case, at the front side of the vortex, the Cooper pairs are broken up in a magnetic field that is too high. On the other hand, at the back side the Cooper pairs recombine in a field that is already too small for the corresponding concentration. Since the heat of reaction of the breaking of a Cooper pair decreases with increasing magnetic field," during the break-up process less heat energy is consumed than is delivered back during the recombination. Therefore, heat will be generated, if the temporal variation of n_s is made fast enough such that deviations from equilibrium appear between all parameters.

What we just have described for the example of the Cooper pair density is exactly the mechanism of all relaxation processes for changes of external parameters during times comparable to the relaxation time. Other well-known examples are the polarization losses of a dielectric substance in an alternating electric field or the magnetization losses of a ferromagnetic material in an alternating magnetic field.

So we summarize: As soon as the vortices in the Shubnikov phase start to move due to a transport current, we have losses and, hence, electrical resistance.

In the Shubnikov phase, with increasing magnetic field, the Cooper pair density and, hence, the binding energy decrease. 2945 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

Since in an ideal type-II superconductor arbitrarily small transport currents already lead to vortex motion, the critical current of such a superconductor in the Shubnikov phase is zero [10]. Therefore, such superconductors are useless for technical applications, say, for building magnets, in spite of their high critical field B_{c2} . Finite critical currents in the Shubnikov phase can only be obtained if the vortices in some way are bound to their locations. Such pinning of the vortices can, indeed, be achieved. Type-II superconductors containing such pinning centers are referred to as hard superconductors. Their properties will be discussed in the next section.

So far in our discussions of the critical current in type-II superconductors, we have stabilized

the Shubnikov phase by means of an external magnetic field. Now we return to the question of the critical current in the absence of an external magnetic field, with which we had started. Again, we assume a wire with circular cross-section carrying the transport current I . Upon exceeding the value $I_c = B_{c1}2\pi R/\mu_0$, which generates just the field B_{c1} at the surface, the superconductor enters the Shubnikov phase. Since the magnetic field of the transport current circulates around the wire axis, in this geometry circular closed vortices are also generated. Under the influence of the Lorentz force they move toward the wire axis by shrinking and vanish at the axis. So for an ideal type-II superconductor with this geometry, we expect a critical current I_c determined from B_{c1} in the same way as for a type-I superconductor from B_{cht} (see Section 5.2). Since B_{c1} is smaller than B_{cht} , in ideal type-II superconductors this critical current will always be smaller than in the corresponding type-I superconductors.

For a long time, there has been an animated discussion on the role of vortex motion in the generation of electrical voltage. Within this context many experiments were contemplated and carried out. Here, we want to treat only one example.

In 1996 Giaever [12] performed an experiment, the idea of which is illustrated with the configuration shown in Figure 5.8. A thin film of a superconductor (A) is driven into the Shubnikov phase by means of an external magnetic field, and a transport current is applied. In this case, motion of the flux lines should occur. In order to detect this flux motion, on top of film A Giaever deposited a second superconducting film B, which was electrically insulated from film A by means of a thin insulating layer. In this configuration the magnetic flux lines in both films are coupled to each other.⁹⁾ If the vortices move across the superconductor A under the influence of the transport current, the vortices in B are dragged along because of the coupling. If, as felt by Giaever, an electrical voltage appears between the ends of the superconductor because of the vortex motion, this voltage must also be observed along the film B, which is completely separated from the primary circuit. Therefore, the arrangement represents some kind of "flux transformer,"

Here, "corresponding" means that the superconductors have the same geometry and the same B_{cht} .

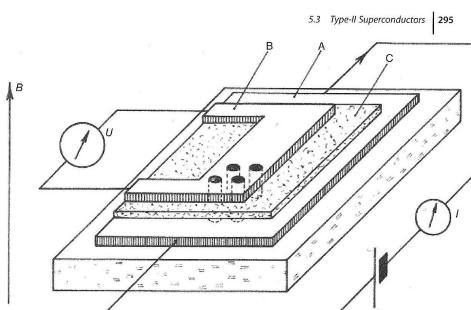


Figure 5.8 Generation of an electrical voltage U during vortex motion. A and B are superconductors, C is an insulating layer. All layer thicknesses are strongly exaggerated. (From [12].)

Giaever performed the experiment in the absence of an external magnetic field. Also in this case, the magnetic field of the transport current applied to film A penetrates into both films in the form of flux lines. These flux lines have opposite sign at the left and the right sides of the film, respectively, and they move from both sides of the film A to the center, where they annihilate each other. This vortex motion resulted in the expected voltage also along the electrically completely separated film B. If both films were normal conducting, no electrical voltage was observed along film B for the same conditions otherwise. This experiment clearly demonstrated the importance of vortex motion for the appearance of an electrical voltage in the Shubnikov phase.

Recently, the geometry of the flux transformer has been taken up again in order to investigate if in high-temperature superconductors the vortices can move independently of each other in

the form of pancakes (see Section 4.7.2) [13]. For this purpose, at one side, for example, of a $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystal a transport current is injected parallel to the layer structure, and the voltage drop is measured resulting from the vortex motion. If the vortices represent compact, continuous flux lines across the crystal, at the opposite crystal surface a voltage of equal magnitude will be induced. However, if the pancakes move independently of each other, this secondary voltage will be smaller than the primary voltage. In this way, the existence of pancake vortices in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ could be beautifully demonstrated. On the other hand, it turned out that the vortices in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ behave more like compact, continuous flux lines.

296 F critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

5.3.2

Hard Superconductors

In Section 4.7.1 we have discussed the magnetization curves of type-II superconductors (Figure 4.23). We started with ideal, homogeneous substances, that is, substances in which the vortices of the Shubnikov phase are freely mobile, having no energetically favorable locations. This discussion only represents a limiting case, which is approximated only more or less poorly by real samples.

In this section we will discuss the case in which the vortices of the Shubnikov phase are energetically strongly bound to favorable locations. These superconductors are referred to as hard superconductors and represent technically useful materials.

Pinning of Flux Lines

First we want to discuss how vortices in type-II superconductors can be pinned. We will deal with a series of different types of pinning centers.

In the simplest way we can understand the effect of pinning centers by means of an energy consideration. The formation of a vortex requires a certain amount of energy. This energy is contained, say, in the circulating currents flowing around the vortex core. We see that for the given conditions a vortex is associated with a the vortex core. We see that for the given conditions a vortex is associated with a certain amount of energy per unit length, that is, the longer the flux line, the larger the energy needed for its generation.

We denote this energy by ε^* . It can be estimated from the lower critical field B_{c1} above which magnetic flux starts to penetrate into a type-II superconductor. The resulting gain in expulsion energy suffices to generate vortices in the interior. For simplicity, we consider again a long cylinder in a magnetic field parallel to its axis, that is, a geometry with zero demagnetization coefficient. At B_{c1} the penetration of the magnetic flux results in n flux lines per unit area. Each flux line carries just one flux quantum Φ_0 . This requires the energy

$$\Delta E_F = n\varepsilon^* LF$$

where n = number of flux lines per unit area, ε^* = energy per unit length of vortex, L = sample length, and F = sample cross-section. The gain in magnetic expulsion energy is

$$\Delta E_M = B_{c1} \Delta M V$$

where ΔM = change of the magnetization of the sample and $V = LF$ = sample volume. ΔM can be expressed in terms of the penetrated flux quanta. We have

$$\Delta M = n\Phi_0 / \mu_0$$

This yields for the gain in expulsion energy

$$\Delta E_M = \frac{1}{\mu_0} B_{c1} n \Phi_0 L F$$

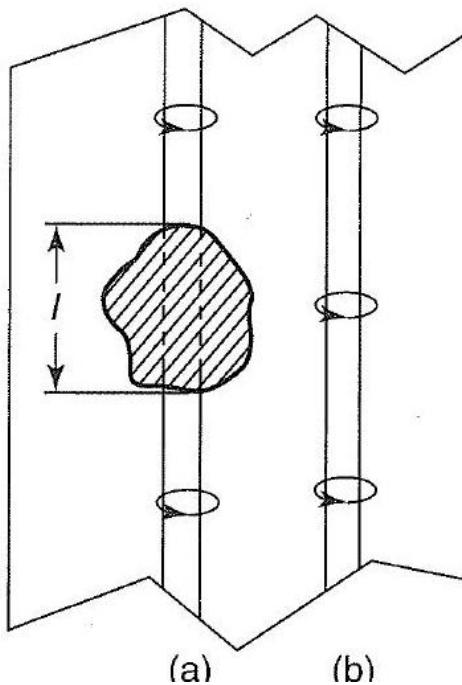


Figure 5.9 Pinning effect of normal conducting precipitates compared to that in location "b," since there are no circulating currents in the normal conducting region.

If the two energy changes are being set equal ($\Delta E_F = \Delta E_M$), from the definition of B_{c1} we obtain

$$n\varepsilon^*LF = \frac{1}{\mu_0}B_{c1}n\Phi_0LF$$

and hence ¹⁰⁾

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\mu_0}B_{c1}\Phi_0$$

In the case of the estimate given above, we have considered only the fieldexpulsion energy. However, the loss of condensation energy on the scale of the coherence length also affects the value of ε^* . From our knowledge of the vortex energy ε^* , we can easily understand the pinning effect of normal precipitates. If a vortex can pass through a normal conducting inclusion, its length within the superconducting phase and thereby its energy are reduced. This is schematically indicated in Figure 5.9. The hatched region indicates the normal inclusion. A vortex in location "a" has an energy smaller by the amount ε^*l compared to one in location "b." This means that we must supply the energy ε^*l to the vortex in order to move it from "a" to "b." Hence, a force is needed to effect this change in location.

If there are many pinning centers, the vortices will attempt to occupy the energetically most favorable locations. As shown in Figure 5.10, they will also bend in order to reach the minimum value of the total energy. The length increment caused by the bending must be overcompensated by the effective shortening within the

The energy per unit length, ε'' , can also be currents (see, e.g, [M8], Chapter 3, p. 57). One obtains the expression

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\mu_0}(\Phi/\lambda_L)^2 \ln(\lambda_L/\xi_{GL})$$

We see that the energy ε^* increases proportional to the square of the magnetic flux Φ in a vortex. Therefore, vortices containing more than one flux quantum Φ_0 are energetically unfavorable. In a type-II superconductor or in hard superconductors, such vortices can only exist if they are strongly promoted by other conditions such as inhomogeneities in the material.

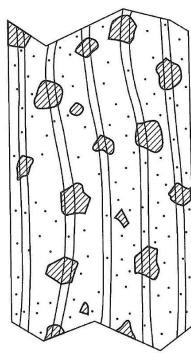


Figure 5.10 Vortex configuration in a hard superconductor. The hatched regions represent pinning centers. The dots indicate atomic defects.

normal conducting regions. In a vortex lattice as it is generated in the Shubnikov phase, we must take into account in the total energy balance also the repulsive forces acting between the flux lines.

(We must note, however, that often the details are difficult, and that a complete account of the effects of all pinning centers is impossible)

In principle, other pinning centers, say, lattice defects, can also be understood in the same way.²¹) Every inhomogeneity of the material that is less favorable for superconductivity acts as a pinning center, with the completely normal state representing the limiting case. For example, superconducting precipitates, however, with a lower transition temperature, in general act as pinning centers.

If for a certain material the superconductivity is associated with an expansion of If for a certain material the superconductivity is associated with an expansion of less favorable for superconductivity and, hence, will act as pinning centers. This may be the case within grain boundaries and dislocation configurations, as they are generated during plastic deformation.

Atomic defects within the crystal lattice represent a particular issue with respect to the coherence length ξ_{GL} , which amounts to many lattice constants in many superconductors. Hence, one could expect that atomic defects are not effective pinning centers. However, it could be shown that the scattering of electrons at atomic defects leads to an appreciable pinning effect [14]. On the other hand, since each flux line usually covers many atomic defects, in the case of a homogeneous distribution of the atomic defects the effective pinning force vanishes, since no particular location within the material is distinguished. Such distinction only appears if the density of the atomic defects varies spatially.

In the case of superconductors with an extremely small value of the coherence length as, for example, the cuprates, the situation is completely different. Here, spatially very small defects can act as pinning centers in different ways.²²⁾

In the extreme case, even the crystal structure itself can have an effect. In Section 4.7.2 we have already discussed that, in the case of the cuprates, in magnetic fields oriented parallel to the superconducting CuO₂ planes, there develop Josephson vortices with their axis being located in the nonsuperconducting or only weakly superconducting intermediate layers. These intermediate layers represent highly effective pinning centers against vortex motion perpendicular to the planes. One speaks of “intrinsic pinning” [15] On the other hand, the vortices can still move easily parallel to the layer structure.

In a similar way grain boundaries or twin boundaries between single-crystalline regions act as defects, preventing vortex motion perpendicular to these defects. ¹³ Line defects and point defects are also important. Dislocation lines represent an example. Line defects and point defects were also artificially generated by irradiating high-temperature superconductors with high-energy heavy ions or also with protons [16]. During irradiation with heavy ions, along the path of the beam particles there appears a straight, highly perturbed region across the crystal, which is referred to as a columnar defect. On the other hand, irradiation with protons results

in accumulations of point defects.

For the generation of well-controlled pinning centers, the continuously improved techniques of nanotechnology are applied. A summary can be found in [17]. During the deposition of thin films one can incorporate nanoparticles into the superconducting matrix. Equally distributed "round" nanoparticles consisting, for example, of Y_2O_3 , result in a nearly isotropic pinning of flux lines. On the other hand, in the case of rod-like structures, a preferential direction is obtained. As an example we mention BaZrO_3 nanorods, which grow on the film during its deposition by means of pulsed laser ablation [18]. In the case of pulsed laser deposition by means of pulsed $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin film, in an oxygen atmosphere of about 0.3mbar, highly intensive laser pulses are directed onto a "target" made of massive $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. The ablated material condenses on a single-crystalline SrTiO_3 substrate such that the CuO_2 planes of the cuprate are oriented parallel to the surface of the substrate. In order to incorporate BaZrO_3 nanorods in addition, one uses a target containing some BaZrO_3 in addition to

Furthermore, the vortices can form not only more or less crystalline lattices, but also liquid and even gaseous phases (see Section 4.7.2). In the later phases the

13) However, we do not want to suggest that centers. In high-temperature superconductors, for not too small tilting angles between two grains, the grain pinning forces, and, hence, the critical current I_c are small. Frequently, above I_c the electric resistance increases grad boundaries act as Josephson junctions, even in the absence of an external magnetic field. In a magnetic field this supercurrent is strongly reduced further. 300 5 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. If this mixture is deposited, in addition to the $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ matrix, also BaZrO_3 rods of about 10 nm diameter grow on the substrate, which penetrate the total thickness of the film and act as rod-shaped pinning centers.

In thin films of metallic superconductors and also in the cuprates, one can fabricate "defects" in a well-controlled way in the form of microholes within the material. In this case one often speaks of "antidots" [19]. Also the opposite of the antidots, magnetic particles placed on the film surface ("magnetic dots"), have been studied [20]

Another "defect" we want to mention is the surface of the superconductor itself. If the external magnetic field is increased (decreased), vortices enter (exit) the sample at the edge. This process is already prevented by the flow of the shielding currents, and the vortices must traverse a surface barrier. This is also referred to as the Bean-Livingston barrier [21]

The effect of the pinning centers can also be described in terms of an energy landscape. Now the pinning center represents a potential well of depth E_p . The vortex is located at its most favorable position, similar to a ball at the lowest point of a bowl. If the ball is to be displaced from this location, one needs a force in order to supply the increase of the potential energy. To remove the ball from its most favorable location, we must supply the energy needed to lift the ball out of the bowl. Usually, in a material there are many pinning centers, which are irregularly distributed and have different energy depths E_p . If the superconductor is cooled below T_c in a magnetic field, the vortices will quickly occupy the potential wells, instead of generating a regular triangular lattice. At best, we have a distorted lattice, or in the extreme case even a glassy state [22].

The deviation of an individual vortex from its ideal location within the triangular vortex lattice depends on the depth of the potential wells, and also on the configuration of all other vortices, because of the repulsive interaction between them. An energetically highly unfavorable arrangement of the vortices will be changed quickly because of the thermal fluctuations. These fluctuations can provide the energy difference ΔE needed to leave the potential well, with a probability $w = \exp(-\Delta E/k_B T)$. In this case, the thermodynamic fluctuations can reduce the depth of the potential well, or they can supply the missing energy to the vortex. At low temperatures and for large values of ΔE , this probability can become very small, such that

the state with the lowest energy cannot be occupied any more. Furthermore, because of the interaction between the vortices, ΔE can approach infinity. In this case we are dealing with the state of a vortex glass, which experiences no changes anymore within finite times.

A special effect occurs if two pinning centers are located very close to each other. In this case a vortex can jump very easily back and forth between the two potential wells because of thermal fluctuations. This effect is highly important in the context of superconducting quantum interferometers (SQUIDS) made from high-temperature superconductors. The magnetic field of a flux quantum located within the superconducting material of the SQUID is recorded as a measuring signal by the SQUID. If this flux quantum moves, then this (unwanted) signal changes

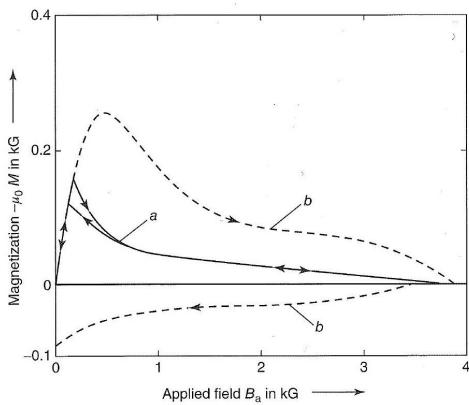


Figure 5.11 Magnetization curves of a $\text{Nb}_{55} \text{T}_{45}$ alloy: curve *a*, well annealed; curve *b*, with many lattice defects ($1\text{kG} = 0.1 \text{ T}$), from [23])

and causes a reduction of the SQUID sensitivity for real measuring signals.¹⁴⁾ Therefore, the investigation of such pinning centers and the development of most effective and strong pinning centers are highly important.

What is the effect of the pinning centers if in the superconducting state the magnetic field is changed or a transport current is applied to the superconductor? These questions will be discussed in the next two sections. We start with the magnetization curves of hard superconductors.

Magnetization Curve of Hard Superconductors

If in the Shubnikov phase the vortices are attached to certain locations within the material, then in an external field the magnetization corresponding to thermodynamic equilibrium cannot establish itself. The prerequisite for this is the free mobility of the vortices. Hence, we have to expect quite different magnetization curves. Furthermore, it represents an important difference, whether the superconductor is cooled in a field B_a , or this field is applied only after the superconducting state is established. First, we treat the properties of massive metallic superconductors, and then we turn to the high-temperature superconductors and to special thin-film structures, in which pinning centers were artificially generated.

In Figure 5.11 as an example we show the behavior of a Nb-Ta alloy [23]. Niobium and tantalum can be mixed in any ratio. After careful annealing one obtains 14) This effect is to be compared with Figure 1.10e. In this case, the displacement of flux quanta by means of an electron beam was specifically utilized for the imaging of vortices. 302 5 Critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

highly homogeneous mixed crystals. They yield a nearly reversible magnetization curve (curve *a*). After deformation of such a mixed crystal, say, by pulling for the fabrication of wires, many lattice defects exist within the crystal, acting as pinning centers for vortices. In

in this case the magnetization curve is completely different (curve b). First we note that a much higher magnetization is reached. This also means that in external fields much higher than B the deformed sample can still display nearly perfect diamagnetic shielding. Furthermore, any trace of reversibility has disappeared. For decreasing field, magnetic flux remains trapped in the sample also at $B_2 = 0$. In this case the trapped flux is oriented parallel to the previously applied external field.

Only the upper critical field B_{c2} remains unchanged. This can be understood from the fact that a mixed crystal of the alloy Nb₅₅Ta₄₅ already has a very small mean free path l^* . Hence, the additional defects can hardly change κ and also B_{c2} (see Section 4.7.1) any more. If we assume that the vortices are more or less strongly pinned within the deformed material, we can easily understand this magnetization curve qualitatively. We look at the curve starting at field zero. Up to the external field B_{c1} there is no difference. The sample resides in the Meissner phase, which is hardly influenced by perturbations.¹⁵⁾

If B_{c1} is exceeded, vortices enter the sample at the surface. At first, these vortices are attached to their locations immediately below the surface, and they cannot distribute themselves equally over the volume as in a homogeneous material. However, within the surface layer, where the pinned vortices are, shielding current can also flow. As a result, the total shielding current, determining the diamagnetic behavior, extends further into the superconductor than in the Meissner phase where it is restricted only to a layer with the thickness of the penetration depth. As a result, the shielding current and, hence, the diamagnetic signal in the vortex state can exceed those in the Meissner phase.

At B_{c2} the Cooper pair density is zero, and the superconductivity disappears.¹⁰⁾ The magnetic field homogeneously penetrates the superconductor. If the external field is decreased below B_{c2} , the sample again enters the Shubnikov phase. Again the magnetic flux is divided into multiples of the flux quantum Φ_0 , and the vortices are more or less strongly pinned to the perturbations in the crystal lattice. Hence, with decreasing external field they can leave the material only with difficulty. The field within the sample then becomes larger than the external field, and the magnetization of the sample becomes positive. Even at $B_a = 0$ there remains a finite magnetic flux along the field direction trapped within the sample.¹⁵⁾ Here, we ignore the small influence of the perturbation on the penetration depth λ_1 .¹⁶⁾ Here, we do not include the surface superconductivity in a thin layer near the surface, which can exist in parallel fields up to $B_a = 1.7B_{c2}$.

We note that this irreversible behavior was observed already in very early experiments on ceric alloys [24]. At the present time, therefore, a first attempt at explaining the hysteretic magnetization curves was based on the assumption of a sponge-like

As a second example, in Figure 5.12 we show the magnetization curve of a lead-bismuth alloy containing 53at%Bi [26]. At low fields we see abrupt changes of the magnetization, which are due to so-called flux jumps. In this case large flux-line bundles or regions of the vortex lattice tear off the pinning sites and thereby result in a jump of the magnetization toward thermodynamic equilibrium. In superconducting magnets such flux jumps are very dangerous, since, because of the generated heat energy, the superconductor can become normal conducting over its whole cross-section (see Section 7.1.2) and the magnetic field can break down.

Flux jumps can look spectacular and can develop into avalanches. In Figure 5.13 we show an example in the case of an MgB₂ thin film [27]. The image was obtained by magneto-optics (see Figure 1.10b). The branching bright regions represent the locations where magnetic flux has penetrated into the sample. This is also referred to as dendritic flux avalanches.

In high-temperature superconductors the situation is still more complicated, since a number of different vortex phases can exist even in the absence of pinning centers, as we have discussed in Section 4.7.2 (see Figures 4.33-4.38). The pinning centers act differently in the different phases. Different glassy states can develop, like the amorphous vortex glass [28] or the "Bragg glass"

[29]. In the latter case, at small distances the vortices are somewhat disordered. However, at large distances the vortices again approach a vortex lattice because of the interactions between them. Another example is the "Bose glass" appearing in the presence of column defects along a certain direction [30]. This is illustrated in Figure 5.14 based on a phase diagram calculated for cuprates in magnetic fields oriented perpendicular to the layer structure [31]. Here the vortices were treated as continuous lines, that is, additional degrees of freedom due to the pancake vortices were ignored

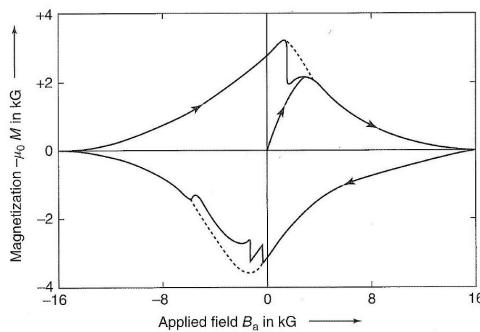


Figure 5.12 Complete magnetization cycle of a Pb-Bi alloy (53at% Bi). The dashed curve is expected if there are no flux jumps ($1\text{kG} = 0.1\text{ T}$). (from [26])

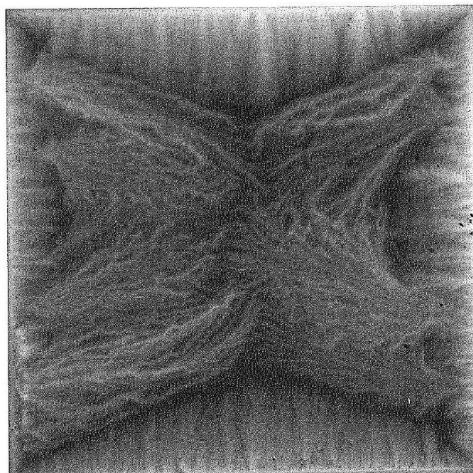


Figure 5.13 Dendritic flux avalanches, which have penetrated into an MgB_2 thin film. Sample area: $5 \times 5\text{ mm}^2$, film thickness: 200 nm. The magnetic field (8mT) was applied perpendicular to the thin film. Temperature: 10 K. (Courtesy by J. Albrecht, College Aalen,

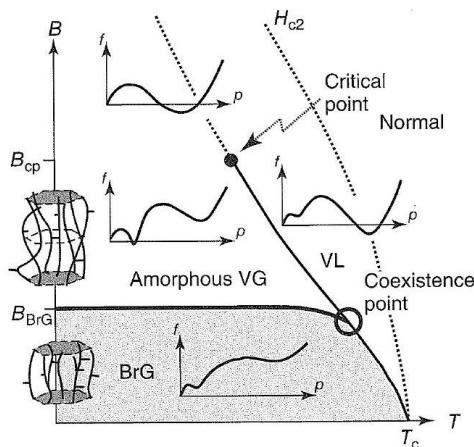


Figure 5.14 Glass-like vortex phases in the how the Gibbs energy in the corresponding cuprates in the presence of pinning centers [31]. BrG, Bragg glass; VG, vortex glass; ion density in the vortex lattice.

VL, vortex liquid, The small insets indicate

In the magnetization curve, the transition between two vortex phases sometimes shows up as a maximum, which is also referred to as a second peak or as a fishtail. This is shown in Figure 5.15 based on a measurement for a $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$

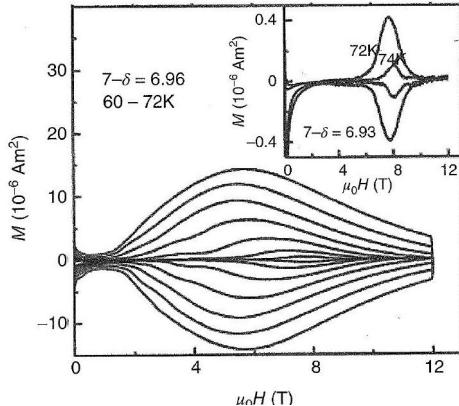
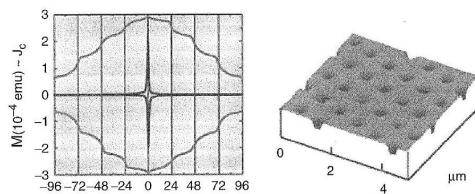


Figure 5.15 Magnetization curve of a $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ single crystal at temperatures between 60 and 72 K. At fields above 4 T, we note a second peak [32].

single crystal [32]. This effect can also be well observed in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ [33]. During the transition between the Bragg glass and the vortex glass observed here, the elastic constants of the vortex ensemble decrease, so that the vortices can adjust themselves better to the pinning centers in the material.

As a last example of the interaction between vortices and pinning centers, in Figure 5.16 we show the magnetization curve of a PbGe film, in which microholes (antidots) with a separation of $1\mu\text{m}$ were fabricated [34]. If a magnetic field is applied to this film, there are certain field values at which the number of vortices



(a)
 $H(\text{G})$

Figure 5.16 Magnetization curve of a PbGe of microholes. For comparison, the magnefilm (a) in which a regular lattice of micro- tization curve of a PbGe film without antiholes was fabricated (b). The magnetization dots is also shown. In the latter case, the (being proportional to the critical current magnetization strongly decreases already density in the film) shows a very large hys- at small fields. Measuring temperature: netic field values at which the number of Elsevier.)

vortices is an integer multiple of the number 306 5 critical Currents in Type-I and Type-II Superconductors

in the film is an integer multiple of the number of antidots. At these matching fields the vortices are distributed regularly onto the antidots. It is also possible that more than one vortex can be trapped within one antidot. In Figure 5.15 in the diagram on the left the matching-field values are indicated by vertical lines. At the matching fields the vortex lattice is particularly

strongly pinned.¹⁸ For comparison, Figure 5.15 also shows the magnetization curve of a PbGe film without antidots. In this case the magnetization curve strongly decreases already at small fields

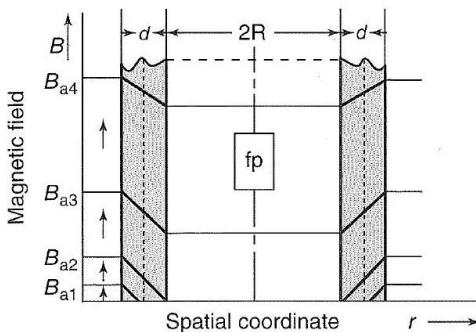
The possibility of fabricating pinning centers in thin films allows the investigation of specific models of the interaction between vortices and pinning centers. This is interesting for both the fundamental physics and technical applications. For example, in SQUID magnetometers, antidots can be placed strategically in such a way that the perturbing signals due to the vortex motion are minimized [35].

Next we want to discuss the origin of the hysteresis in the magnetization curve more quantitatively and look at the connection between the magnetization and the maximum possible supercurrent in the sample. Frequently, the direct measurement of the maximum supercurrent is difficult, since currents of 100 A or higher must be measured. Hence, it is advantageous to have a procedure for measuring the critical current without electrical contacts. This method turns out to be particularly important for the study of sintered materials, which mostly are not available in the form of wires or sheets and, hence, cannot be investigated with the standard methods.

In this context Bean [36] has proposed a model, which we want to discuss in the following in a slightly simplified version. We consider a simple geometry, namely a long, hollow cylinder (length L , diameter $2R$, wall thickness $d \ll 2R$). If a circulating current I flows within this cylinder, it generates a magnetic field $B_i = \mu_0 I / L$, which can also be written in terms of the average current density $j = I / (Ld)$ as $B_i = \mu_0 j d$

The cylinder is assumed to be cooled in zero applied magnetic field. Upon the application of the field B_a parallel to the cylinder axis, at the outside of the superconducting cylinder a circulating current is generated shielding the interior of the cylinder (Figure 5.17). As long as the hard superconductor resides in the Meissne phase, the shielding current only flows within the penetration depth near the surface of the cylinder. If B_a exceeds the value B_{c1} , which we can assume to be very small, magnetic flux can penetrate into the superconductor in the form of vortices. Initially, the vortices are trapped by the pinning centers below the surface. In this case, the Bean model simply assumes that the critical transport current within the region of the superconductor penetrated by the vortices just has the homogeneous critical current density j_c . For simplicity, this current density is taken as constant, that is, it is assumed to be independent of the magnetic field in the superconductor. This state carrying the critical current density is referred to as the critical state.

A similar but weaker effect also appears for rational values of the ratio: (number of antidots)/(number of vortices). 5.3 Type-II Superconductors | 307



(a)

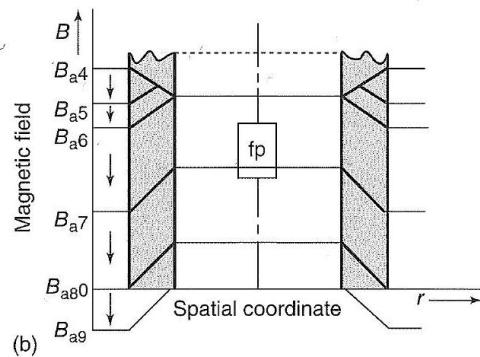


Figure 5.17 Magnetic field distribution in a hollow cylinder of a hard superconductor for increasing B is indicated by a less steep field slope [36]. f = field probe.

If the field B_a is increased further beyond the value B_{c1} , a thicker and thicker layer below the cylinder surface is filled with vortices. The total shielding current increases proportional to the thickness of this layer which, according to our assumption, carries the constant current density j_i ¹⁹ The critical state grows into the superconductor. Because of the shielding current, the magnetic field within the superconductor decreases toward the cylinder axis. If the radius R is large compared to the thickness d of the cylinder wall, we can well approximate the latter in terms of a planar layer. In this case, the magnetic field decreases linearly toward the axis.²⁰⁾ In Figure 5.17a this field variation is indicated for different values of the external field. At B_{21} only part of the cylinder wall is filled with vortices (dashed lines, part a). At B_{22} the shielding current has reached its maximum value, since now the current density j_c flows homogeneously in the whole cylinder wall. However, in the interior of the cylinder, the field B_i still remains zero. Only during a further increase in B_a does a magnetic field also appear in the interior. In our simple model this field is equal to $B_a - B_{22}$ (with $B_a > B_{22}$)

Of course, for large fields our assumption $j_c = \text{constant}$ cannot be valid anymore, since j_c must approach zero for $B_a \rightarrow B_{c2}$. So we must improve our model by requiring that j_c decreases with increasing B_a . In this case with increasing field B_a , the difference $B_a - B_i$ gradually approaches zero.

In Figure 5.18 the field B_i in the interior of the cylinder is plotted versus the external field B_a for a V₃ (Ga_{0.54}Al_{0.46}) sample (high-field superconductor). Up to the value B_{22} the field B_i remains zero. In this case, with $j_c = \text{constant}$, we would always have $B_i = B_a - B_{a2}$ (dashed line). However, since j_c decreases with increasing field, the curve $B_i(B_a)$ more and more approaches the straight line $B_i = B_a$. From the behavior of $B_i(B_a)$, or from the magnetization curve 19) If the thickness of the cylinder wall is very small compared to the radius R , we can ignore the variation of r within the wall thickness. Within the superconductor, because

netic field In our discussion of the model, the field in the, we have a spatial variation

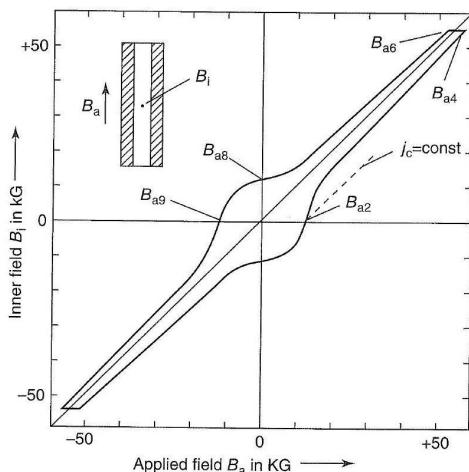


Figure 5.18 Magnetic shielding of a hollow cylinder made from $V_3(Ga_{0.54}Al_{0.46})$. Inner field B_i plotted versus the external field B_a ($1\text{kG} = 0.1 \text{ T}$). Measuring temperature: 4.2 K; transition temperature: 12.2 K. (By courtesy of DrH. Voigt, Siemens.)

$M(B_2) = (B_i - B_a)/\mu_0$, within our model (which assumes the existence of a critical state) we can determine the critical current density of the material investigated. Frequently, this elegant method is applied in the study of novel superconductors. In the case of a long hollow cylinder, one obtains

$$|M(B_a)| = j_c(B_a)d$$

where d is the wall thickness of the hollow cylinder. Analogously, for a solid cylinder with diameter $2R$ one finds the magnetization $|M| = j_c R/3$ (from, e.g., [M4]).

We want to also discuss the case where the external field is lowered starting say, from B_{24} . Now, because of the negative field change ($\Delta B < 0$), an induction process takes place, which slows down the shielding current flowing at the outer part of the cylinder and generates a critical current in the opposite direction. In figure 5.17 b the magnetic field variation is indicated for a few sequential values B_{a5} up to B_{a7} . Again a critical state exists in the whole cylinder. However, now the vortex density increases toward the interior. In this case the vortices appear to exit from the outer cylinder wall. Up to the value B_{26} the field B_i remains constant. Then B_i decreases. At $B_a = 0$ a certain magnetic flux and, hence, a field B_i is trapped. The corresponding points are indicated in Figure 5.18.

If in the next step we increase the external field in the opposite direction, then at $-B_{29} = B_{a2}$ we just obtain the field $B_i = 0$. This can clearly be seen from Figure 5.17b. In Figure 5.18 we show the corresponding variation of B_i together with the complete hysteresis loop traversed in such an experiment. In many hard superconductors, this dependence is well described by the expression [37]

$$j_c = \frac{\alpha_c}{B + B_0}$$

Here, the constants α_c and B_0 are characteristic for the particular material. In samples with a more complicated shape, for example, in thin films or irregularly shaped crystals, and also in materials with an inhomogeneous structure, the penetration of magnetic flux can occur in a highly complicated way. However, in this case techniques such as magneto-optics provide the possibility to measure the spatially resolved magnetization and to derive from this the supercurrent density in the material. Here, we do not want to discuss the details and, instead, refer to the review articles [38, 39].

If, like during the measurement of the magnetization curve, the magnetic field B_2 is changed, within a hard superconductor an inhomogeneous distribution of vortices develops, which by no means corresponds to thermodynamic equilibrium. Now we want to investigate what happens if the magnetic field is raised to a certain value and then is kept constant at this value. In this case we will deal with the phenomenon of flux creep.

In the critical state all locations at which magnetic flux has penetrated into the sample carry the critical current density j_c , which in turn acts with the Lorentz force on the vortices. If the applied field is kept at the value B , the Lorentz force is exactly compensated by the force originating from the pinning centers. Therefore, without thermal fluctuations, the vortex distribution would remain unchanged. However, because of thermal fluctuations, the energy needed to leave a pinning site can be supplied to a vortex. In this case, under the influence of the Lorentz force, the vortex will move a short distance until it is trapped again at another pinning center. Eventually, all vortices will move in this way, such that the magnetization gradually decreases and a state with lower energy is established. During this process the supercurrent

density quickly falls below its critical value. This thermally activated vortex motion is referred to as flux creep.

If the supercurrent density is not too close to the critical current density, the velocity of the vortex motion will be proportional to $\exp(-\Delta E/k_B T)$. In general, one can show that the temporal change is then given by $dj/dt = -j_c \exp(-\Delta E/k_B T)/t_0$. Here, t_0 denotes a characteristic time constant that depends on the material parameters. However, the height ΔE of the energy barrier in turn depends on the supercurrent density. It must vanish when the critical current is reached, since in this case the vortices are torn off from the pinning centers. Near the critical state this behavior can be expressed by the relation

$$\Delta E(j \rightarrow j_c) \approx E_c(1 - j/j_c)^\alpha$$

with a certain exponent α . In the case $\alpha = 1$, this just leads to a reduction of the supercurrent density or of the magnetization, which is logarithmic initially:

$$|M(t)| \propto j(t) \approx j_c \left[1 - \frac{k_B T}{E_c} \ln(1 + t/t_0) \right]$$

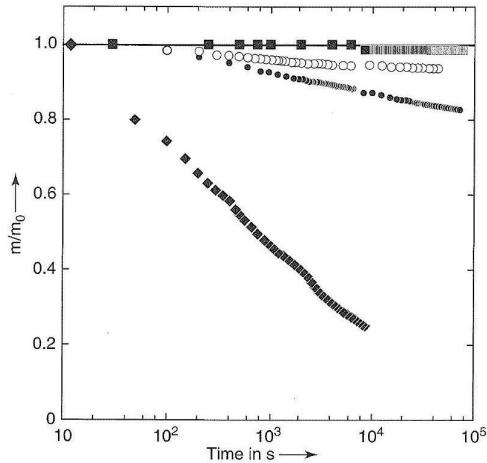


Figure 5.19 Temporal decay of the magnetization of different superconductors. The $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ samples were turned on [40]. \square NbTi at 4.2 K; \circ , magnetization of different superconductors. The $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ with oriented grains at 77 K; magnetization is normalized to its value

In Figure 5.19 we show the temporal decay of the magnetization of some superconductors [40]. This decay occurs by means of flux creep. In NbTi, a classical superconductor, at about 4.2 K, that is, at about $T_c/2$, within more than 10^5 s (slightly more than 1 day) hardly any change is observed. On the other hand, in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ the supercurrents clearly decrease, particularly in the single-crystalline sample. The data shown here are from the year 1990, that is, from the early period of high-temperature superconductivity. In the meantime, also $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ samples have been prepared in such a way that well above 15 T they can trap magnetic fields for a long time. We will discuss this subject in more detail in Section 7.2.

In the high-temperature superconductors, we must note that the different vortex phases can behave much differently. In particular, in the region of the vortex liquid one observes no or at most only a weak pinning force. In this case the magnetization curves are reversible. Therefore, the phase boundary line at the transition between the vortex liquid and the crystalline or glass-like vortex phases is referred to as the irreversibility line.

Critical Currents and Current-Voltage Characteristics

Next we want to discuss the effect of the pinning centers during current transport in superconducting wires or thin films. In Section 5.3.1 we saw that an ideal type-II superconductor in

the Shubnikov phase cannot carry a current perpendicular to

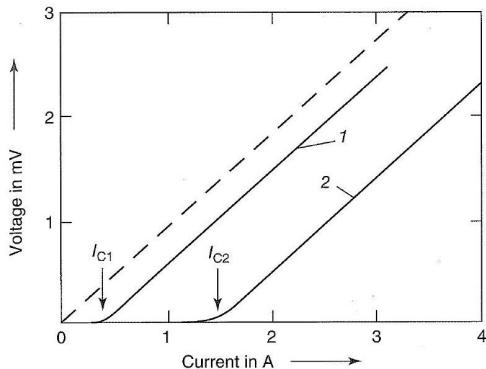


Figure 5.20 Current-voltage characteristics of an $\text{Nb}_{55}\text{Ta}_{50}$ alloy in the Shubnikov phase. $T = 3.0$ K; external field $B_a = 0.2$ T; T_c in zero field: 6.25 K. (From [41].)

the direction of the magnetic field without dissipation, since due to the influence of the Lorentz force the vortices start moving, resulting in dissipative processes. However, in a real superconductor, the vortices are never completely freely mobile. There is always a perhaps very small force necessary in order to tear the vortices off the pinning centers that are practically always present. The strength of the pinning forces acting on the individual vortices will have a certain distribution about an average value F_H . Also the whole vortex lattice will affect the pinning forces due to collective effects. However, for simplicity we will only speak of a single pinning force F_H .

As long as the Lorentz force F_L is smaller than the pinning force F_H , the vortices cannot move. Therefore, also in every real type-II superconductor in the Shubnikov phase, we will be able to observe current flow without dissipation. If the transport current exceeds its critical value at which $F_L = F_H$, the vortex motion sets in, and electrical resistance appears.²¹⁾ We see that the critical current is a measure of the force F_H with which the vortices are pinned at energetically favored locations.

In Figure 5.20 we show the current-voltage characteristics of two samples of an $\text{Nb}_{55}\text{Ta}_{50}$ alloy with a different amount of internal disorder [41]. Both samples were cooled in the magnetic field and were measured in the Shubnikov phase. For the more strongly disordered sample 2, no electrical voltage is observed up to a transport current I_{c2} of about 1.2 A.²²⁾ On the other hand, the less perturbed

If the pinning forces acting on the individual vortices are different, initially the most weakly pinned vortices will start moving, resulting in only a relatively small resistance. With increasing current²²⁾ Of course, the terminology "no voltage" represents a strong simplification. Since for currents $I < I_c$ usually a finite and also very weak dissipation is possible, we will also observe small voltages in this case. The curves in Figure 5.19 indicate this by gradually approaching the linear part.

sample 1 shows a voltage and, hence, resistance already at about 0.2 A. The currents I_{c1} and I_{c2} , respectively, are referred to as the critical currents of both samples. An ideal sample of the same material, that is, a completely homogeneous sample, for the same conditions would display a current-voltage characteristic indicated by the dashed line.

In hard superconductors, the pinning forces must be made particularly high in order to allow the highest possible transport currents to flow without resistance. Before we discuss a few examples of hard superconductors, we want to look at the linear part of the characteristics in Figure 5.20. Also in this part of the characteristic, the voltage along the superconductor is generated by vortex motion. The resulting differential resistance $dU/dI = R_f$, the flux-flow resistance, clearly has the same value in both samples, that is, it is independent of the pinning centers acting on the vortices.

This observation can be understood in the following way: If the vortices are removed from the pinning centers, they move through the material under the influence of the force difference $F^* = F_L - F_H$. Because of the dissipative processes during the motion, resulting in a kind of "friction" for the vortex in the superconductor, a flux-flow velocity v develops, which is proportional to F^* . We have

$$v \propto F^* \propto (I - I_c)$$

On the other hand, the electrical voltage U is proportional to v , that is, one finds

$$U \propto v \propto I - I_c$$

and hence

$$dU/dI = \text{const.}$$

The equal values of dU/dI for samples with different amounts of imperfections (Figure 5.20) indicate clearly that the pinning centers do not affect the relation between F^* and v . Independent of the nature of the pinning centers, the same value of F^* yields the same velocity v and, hence, the same voltage U . The characteristics are only shifted parallel to each other along the current axis.

According to these arguments, we have two components of the energy dissipation UI , namely UI_c and $U(I - I_c)$. We start with the component UI_c . The vortices move through the material under the influence of the Lorentz force due to a transport current. This means that they must pass through a number of potential wells. To raise a vortex out of a well costs energy. One could imagine that this energy is recovered when the vortex falls into the next (equally deep) well. In this case, there would be no net energy dissipation during vortex motion across the potential wells. However, there is the crucial fact that during their motion across the pinning centers the vortices are always elastically deformed [42, M17]. These deformations lead to the energy losses described by the component UI_c .

Next we turn to the component $U(I - I_c)$ of the dissipated power determining the vortex velocity according to Eq. (5.23). The most important energy losses during the vortex motion are caused by the appearance of local electric fields acting on the unpaired electrons. This means that the flux-flow resistance depends on

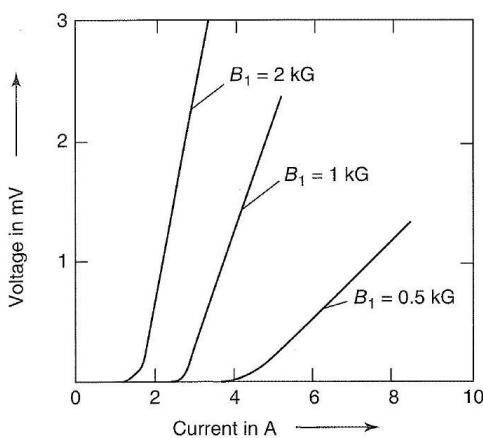


Figure 5.21 Current-voltage characteristics of a Pb-In alloy in the Shubnikov phase. Material: Pb + 17at%In; $T = 2.0$ K; transition temperature in zero field: about 7.1 K. (From [41].)

the normal resistance of the material. One finds that R_f is proportional to $R_n^{23)}$ Furthermore, the same dissipative effects appear at each vortex. Therefore, the dynamic (flux-flow) resistance is proportional to the vortex density. This density increases with increasing external

field B_a . With increasing magnetic field, the $U - I$ characteristics become steeper. This dependence of the flux-flow resistance on the external field is shown in Figure 5.21 for a lead-indium alloy ($Pb + 17$ at% In) [41].

With increasing magnetic field, the critical current I_c decreases. This decrease can be caused in different ways. For increasing vortex density, not all vortices can experience the same pinning force. Hence, the average pinning force becomes smaller. On the other hand, for one and the same pinning center, with increasing external field, the pinning force decreases and approaches zero for $B_a \rightarrow B_{c2}$. The behavior of the critical current for increasing external field will be seen particularly clearly in a plot of the field dependence of I_c (see Figures 5.22 and 5.23).²⁴

In our discussion of Figure 5.20 we have already seen that the critical current I_c depends on the degree of disorder within the sample. This internal disorder

Under otherwise the same conditions, with increasing R_n the vortex velocity v due to the given force $F^2 = F_L - F_H$ (i.e., for a given current $I = I_c + F_1$) increases. This can be seen from a simple but instructive discussion of velocity v through the material due to the force F^v , the force F^s generates the power $P_s^* = F^s v$. This power must be turned into

heat because of the local electric fields E_1 thus $P_F^* = P_{el}$. For the resistivity ρ_n of the material in the normal state, the electrical power P_{el} is proportional to $L^2 \rho_n$. On the other hand, we have $E^2 / \rho \propto F^* v \alpha \gamma^2 / \rho^2$ and hence, $F^* \alpha v$. For a given F^* the velocity v increases with

$$P_F^* = F^* v. \text{ This power must be turned into increasing } \rho_n.$$

24) We mention that the shape of the current-voltage characteristic in an external magnetic field also

depends on the sample geometry. For example, for the same material, different characteristics are observed in a tape than in a circular disk with the current running from the center to the outer edge ("Corbino disk")

(!!!!!!)

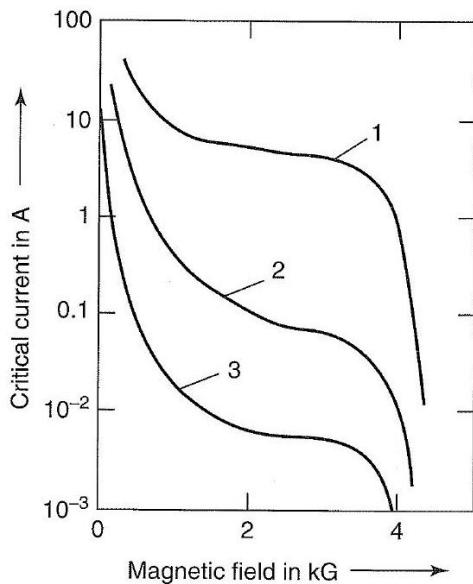


Figure 5.22 Critical current of an $Nb_{55} T_{45}$ alloy in an external magnetic field (1 kG = 0.1 W) oriented perpendicular to the current. Wire diameter: 0.38 mm; measuring temperature: 4.2 K. Curve 1, immediately 1800 K; curve 3, after 48 h at 1800 K. (From [23].)

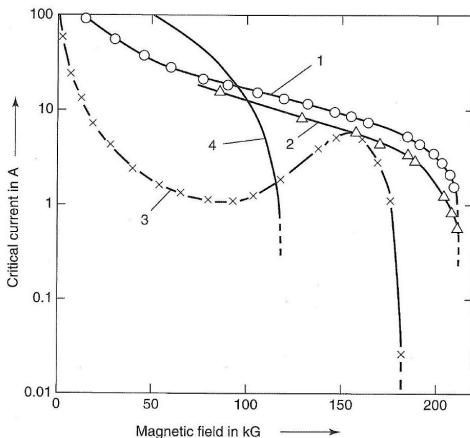


Figure 5.23 Critical currents of thin wires. In each case the compound exists only of metallic high-field superconductors within a surface layer obtained by diffusion ($1\text{kG} = 0.17$). Measuring temperature: 4.2 K. The value of the second component into the base Wire diameter of all three samples: 0.5 mm. After 0.15 mm. (From [43, 44].) can be caused, for example, by plastic deformation. If a metal wire (such as Cu) is pulled through a die at room temperature to reduce the cross-section, many imperfections, that is, regions in which the periodic structure of the metallic lattice is strongly perturbed, are generated within the wire. Grain boundaries (i.e., transition regions between individual grains), for example, are such regions. If subsequently the metal is heated, these disordered regions gradually can be annealed out and can be transformed more and more into well-ordered regions.

If the disordered regions act as pinning sites for the vortices, a plastically deformed superconductor is expected to display a particularly high value of the critical current immediately after deformation. During heating, along with the gradual removal of the disordered regions, the critical current should also decrease.

In Figure 5.22 we clearly see this effect [23]. For an $\text{Nb}_{55}\text{Ta}_{45}$ alloy the critical current is plotted versus the external magnetic field oriented perpendicular to the current for different degrees of disorder. Immediately after the mechanical pulling process, that is, in a state with a high degree of disorder, the critical current in the Shubnikov phase is large.²⁵⁾ During the removal of the perturbations by means of annealing, the pinning centers disappear more and more. The critical current strongly decreases as expected. In Figure 5.11 the corresponding magnetization curves are shown for the same alloy. In this case, the pinning centers lead to strong irreversibilities of the magnetization curve.

In Figure 5.23 we show the values of the critical current of wires of a few metallic high-field superconductors. Since the critical current is strongly influenced by the previous treatment of the sample because of its dependence on the degree of disorder, as we have discussed, the data of Figure 5.23 can serve only as a rough indication. The curves are chosen arbitrarily from a large number of examples. However, they show that suitably prepared hard superconductors, with a wire diameter of only 0.5 mm and for external fields above 10 T, can carry supercurrents of more than 10 up to 100 A without dissipation. Wires containing many thin filaments, so-called multifilamentary wires, can even carry still much higher currents. Of course, such superconductors are highly important for the construction of superconducting magnets (see Section 7.1).

In Figure 5.23 we show a curve (V_3Ga) having a maximum of the critical current near B_2 (the so-called peak effect, see also Figure 5.15). Apparently, with increasing external field, conditions can develop leading to a more effective pinning of the vortices. In this case the elastic properties of the vortex lattice are essential [M17]. The lattice becomes more elastic, and the vortices can adjust themselves better to the configuration of the pinning sites. Furthermore, near B_{c2} also normal conducting regions can appear, which act as additional pinning centers

and cause an increase in the critical current.

By means of a systematic study of hard superconductors, it has been possible empirically to develop quite useful materials. However, the detailed dependence

The steep drop of the critical current at very small magnetic fields occurs in the Meissner phase of the superconductor at fields $B_2 < B_{\text{cc}}$ (see Figure 5.3b).

of the critical current on the defect structures is still by no means completely clarified.

This is even more valid for the high-temperature superconductors [45]. In this case the initial measurements of the critical currents in polycrystalline, sintered samples yielded disappointingly small values of the critical current density. At 77 K, the boiling point of liquid nitrogen, even in zero applied magnetic field, frequently the critical current density was found to be less than 10^3 A/cm^2 . However it soon became clear that to a large extent the critical current was limited by grain boundaries. In this case, the critical current of a grain boundary strongly decreases with increasing relative tilt angle between the crystal axes in the two grains. This could be demonstrated by transport measurements in thin films of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ deposited onto SrTiO_3 bicrystal substrates²⁶[47].

In 2010 the details of current limitation by means of grain boundaries could be explained theoretically [48]. Apparently, the dominating mechanism of the critical-current reduction is due to the fact that near the dislocation lines the grain boundary is electrically charged. Many additional properties of current transport across grain boundaries are summarized in the review articles [49, 50] An additional limitation of the critical current results from the layered structure of the cuprates. Along the CuO_2 planes a high value of the critical current is observed, whereas perpendicular to the planes the value is very small, and in some cases it is limited by the Josephson effect (see Figure 1.22f). Also in the case of current flow parallel to the CuO_2 planes it is important, how the external magnetic field is oriented relative to the crystal structure. This effect is shown in Figure 5.24 for the example of a $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin film [51]. The film was prepared by mean of laser ablation. In the figure the critical current density in the case of current flow along the CuO_2 planes is plotted versus the applied magnetic field for different temperatures. The field was oriented either perpendicular to the CuO_2 planes (i.e., along the crystallographic c -direction) or perpendicular to the c -axis. We see that at 4.2 K critical current densities of several 10^7 A/cm^2 are reached, and at 77 K still values of several 10^6 A/cm^2 . As long as the magnetic field is applied parallel to the planes, these values remain also in high fields (in fact, in fields up to far above 20 T) at least at 4.2 K [52]. However, the critical current density decrease rapidly, if the magnetic field is oriented perpendicular to the layered structure. On the other hand, in the meantime (the measurements in Figure 5.24 are from 1990) appreciable improvements could be achieved. Now, for example, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin films in a field of 5 T perpendicular to the layers can carry supercurrents of several 10^5 A/cm^2 also at 77 K[17]

If $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ is condensed on a single-crystalline SrTiO_3 substrate under low oxygen pressure (about 0.1 mbar), the thin film shows the crystal orientation mostly fabrica. In this case the substrates are CuO_2 pabicas in such a way that the to the surface of the substrate. This technique served in the early days for preparing $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin fins with relatively high

quality [46]. In a bicrystal substrate, two single-crystalline parts are rotated relative to each other. In this case the grain boundary lies on top and, transmitted into the thin film can be studied systematically. Such grain boundaries have been discussed already in Section 1.5 in the context of Josephson junctions (see Figure 1.22e),

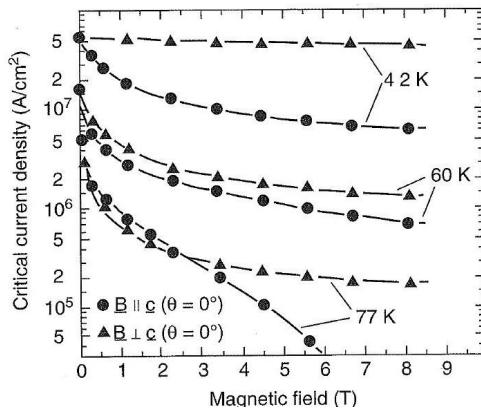


Figure 5.24 Critical current density of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ thin film for three temperatures plotted versus the applied magnetic field. The field was oriented either perpendicular to the layered structure (i.e., parallel to the crystallographic c -axis) or parallel to it. (From [51].)

In general, to achieve a high supercurrent density, in the case of the cuprates it is necessary to avoid grain boundaries, and the transport currents must flow parallel to the layered structure as much as possible. By means of thin-film technology, the corresponding epitaxial film growth can be achieved relatively easily, long as the substrate size is not too large [53]. However, if one is interested in high-current-carrying wires or tapes fabricated from the cuprates, obviously the material must have a high critical-current value over long lengths. Furthermore, the fabrication technique should be relatively simple and not too expensive. In recent years a number of procedures have been developed, which we will discuss in Section 7.1.2. Enormous progress has also been achieved in the field of massive materials, which are needed, for example, for magnetic levitation or for magnetic energy storage (see Section 7.2). These developments are by no means finished. In addition, MgB_2 and the iron pnictides can become important for the conductor development. On the one hand, the upper critical field can reach very high values. On the other hand, at least in the case of MgB_2 grain boundaries practically do not suppress the supercurrent density [54].

We want to conclude our discussion of the critical currents in superconductors with a few general remarks. We have seen that the mechanism of pair breaking results in an intrinsic maximum supercurrent density. However, in cases that are technically relevant, the critical current of a superconductor is determined by extrinsic properties. On the one hand, the latter properties in the form of pinning centers in the Shubnikov phase only allow a finite supercurrent, and on the other hand, for example, in the form of grain boundaries in high-temperature superconductors, they represent weak regions in the material, strongly reducing the maximum supercurrent. Whether a new material, say, MgB_2 , finds interesting technical applications depends on the concrete problems, and often can be answered only after a long development period. In Chapter 7, we will discuss some examples in more detail.

6.7 Measurement methods of a resistance

6.7.1 Measurement of a resistance by microwave photons (???)

(Kittel wrote this, I'll look again later)

7 Fundamentals by de Gennes

7.1 FUNDAMENTAL PROPERTIES

7.1.1 I-I A NEW CONDENSED STATE

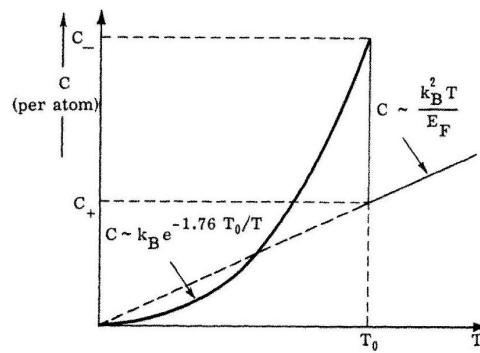
We take a piece of tin and cool it down; at a temperature $T_0 = 3.7^\circ\text{K}$ we find a specific heat anomaly (Fig. 1-1a). Below T_0 the tin is in a new thermodynamical state. What has happened?

It is not a change in the crystallographic structure, as far as x rays can tell. It is not a ferromagnetic, or antiferromagnetic, transition. (It can be seen by magnetic scattering of neutrons, that tin carries no magnetic moment on an atomic scale.) The striking new property is that the tin has zero electrical resistance. (For instance, a current induced in a tin ring has been observed to persist over times > 1 year.) We say that tin, in this particular phase, is a superconductor, and we call the permanent current a supercurrent.

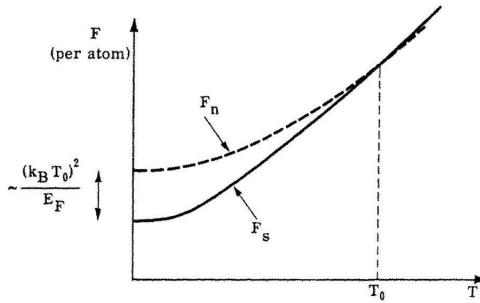
A large number of metals and alloys are superconductors, with critical temperatures T_0 ranging from less than 1°K to 18°K . Even some heavily doped semiconductors have been found to be superconductors.

Historically, the first superconductor (mercury) was discovered by Kammerling Onnes in 1911.

The free energy F_S in the superconducting phase can be derived from the specific heat data and is represented on Fig. 1-1b (solid line). The dotted line gives the corresponding curve F_n for the normal metal. The difference $(F_S - F_n)_{T=0}$ is called the condensation energy. It is not of order $k_B T_0$ per electron; it is, in fact, much smaller, of order $(k_B T_0)^2 / E_F$ (where E_F is the Fermi energy of the conduction electrons in the normal metal). Typically $E_F \sim 1\text{eV}$ and $k_B T_0 \sim 10^{-3}\text{eV}$. Only a fraction $k_B T_0 / E_F (\sim 10^{-3})$ of the metallic electrons have their energy significantly modified by the condensation process.



(a)



(b)

Figure 1-1

(a) The electronic specific heat C of a superconductor (in zero magnetic field) as a function of temperature (qualitative plot). Above T_0 (in the normal phase) $C_{(\text{per atom})} \sim k_B^2 T/E_F$ where E_F is the Fermi energy. At the transition point T_0 , C has a discontinuity. At $T \ll T_0$, C is roughly exponential $C \sim \exp(-1.76 T_0/T)$.

(b) Free energy of the superconducting phase (F_S) and of the normal phase (F_n) versus temperature. The two curves meet (with the same slope) at the transition point $T = T_0$. At $T = 0$ the difference $F_n - F_S$ is of order $(k_B T_0)^2/E_F$ per atom.

7.1.2 1-2 DIAMAGNETISM

7.1.3 The London Equation

We now extend our energy considerations to situations where there are supercurrents $j_S(r)$ and associated magnetic fields $h(r)$ in the sample.¹ We see that in the limit where all fields, currents, and so on, are weak and have a slow variation in space the condition of minimum free energy leads to a simple relation between fields and currents (F. and H. London, 1935).

We consider a pure metal with a parabolic conduction band; the electrons have an effective mass m . The free energy now has the following form:

$$F = \int F_S dr + E_{\text{kin}} + E_{\text{mag}} \quad (1-1)$$

where F_S is the energy of the electrons in the condensed state at rest and E_{kin} is the kinetic energy associated with the permanent currents. Let us call $v(r)$ the drift velocity of the electrons at point r . It is related to the current density j_S by

$$n_{\text{sev}}(r) = j_S(r) \quad (1-2)$$

(where e is the electron charge, and n_S the number of superconducting electrons per cm^3). Then we have simply

$$E_{\text{kin}} = \int dr \frac{1}{2} mv^2 n_S \quad (1-3)$$

the integral being extended over the sample volume. Equation (1-3) would be exact for situations of uniform flow ($v = \text{const}$). It remains approximately correct for our present problem, provided that $v(\mathbf{r})$ is a slowly varying function of \mathbf{r} . (We return to this limitation later.)

Finally, E_{mag} is the energy associated with the magnetic field $\mathbf{h}(\mathbf{r})$

$$E_{\text{mag}} = \int \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} dr \quad (1-4)$$

The field is related to j_S by Maxwell's equation

$$\text{curl } \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} j_S \quad (1-5)$$

Using (1-3), (1-4), and (1-5) we rewrite the energy E as

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \frac{1}{8\pi} \int [h^2 + \lambda_L^2 |\text{curl } h|^2] dr \\ E_0 &= \int F_S dr \end{aligned} \quad (1-6)$$

¹ We use \mathbf{h} to denote a local field value. H will be reserved for the thermodynamic field.

where the length λ_L is defined by

$$\lambda_L = \left[\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right]^{1/2} \quad (1-7)$$

At $T = 0$, n_s is equal to n , the total number of conduction electrons per cubic centimeter. We can then compute λ_L explicitly. In simple metals such as Al, Sn, and so on, where m is close to the free electron mass, we find $\lambda_L \sim 500\text{\AA}$. For transition metals and compounds with narrow d bands, m is larger and λ_L is also larger (up to 2000\AA).

We wish to minimize the free energy (1-6) with respect to the field distribution $h(r)$. If $h(r)$ changes by $\delta h(r)$, E changes by δE :

$$\begin{aligned} \delta E &= \frac{1}{4\pi} \int [h \cdot \delta h + \lambda_L^2 \operatorname{curl} h \cdot \operatorname{curl} \delta h] dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int [h + \lambda_L^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h] \cdot \delta h dr \end{aligned} \quad (1-8)$$

where we have integrated the second term by parts. The field configuration, in the interior of the specimen, which minimizes the free energy, must therefore satisfy the condition

$$h + \lambda_L^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = 0 \quad (1-9)$$

Equation (1-9) was first proposed (with a slightly different notation) by F. and H. London. When combined with the Maxwell equation (1-5), it allows us to calculate the distribution of fields and currents.

7.1.4 Meissner Effect

We now apply the London equation and discuss the penetration of a magnetic field h into a superconductor. We choose the simplest geometry. The surface of the specimen is the xy plane, the region $z < 0$ being empty (Fig. 1-2). The field h and the current j_s depend only

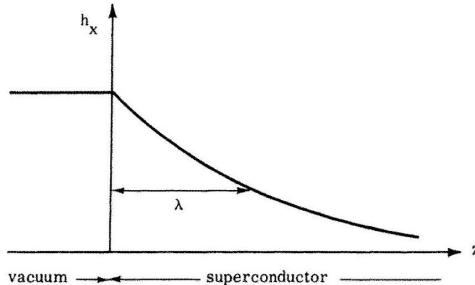


Figure 1-2

Field penetration in a superconductor. The field becomes negligibly small at distances larger than a few penetration depths λ . When the simple London equation (1-9) holds, the penetration is exponential $h = h_0 \exp(-z/\lambda_L)$.

on z . In addition to the relation (1-9), h and j_s are always related by the Maxwell equations

$$\operatorname{curl} h = \frac{4\pi j_s}{c} \quad (1-10)$$

$$\operatorname{div} h = 0 \quad (1-11)$$

Two cases are possible:

(1) h is parallel to z . Then (1 – 11) reduces to $\partial h / \partial z = 0$ and h is spatially constant. Therefore $\text{curl } h = 0$ and $j_S = 0$ from Eq. (1-10). Inserting this into Eq. (1-11) we find $h = 0$. Therefore it is not possible to have a field normal to the surface of the specimen.

(2) h is tangential (and directed along the x axis). Then Eq. (1-9) is automatically satisfied. From Eq. (1 – 10) j_S is directed along the y axis:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{4\pi j_S}{c} \quad (1-12)$$

Finally, from Eq. (1-9),

$$\frac{djs}{dz} = \frac{ne^2}{mc} h \quad (1-13)$$

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \frac{h}{\lambda_L^2} \quad \lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \quad (1-14)$$

The solution that remains finite in the superconductor is exponentially decreasing,

$$h(z) = h(0) \exp(-z/\lambda_L) \quad (1-15)$$

The field h penetrates only to a depth λ_L inside the sample. This result, established here for a semiinfinite slab, is easily generalized to a macroscopic specimen of arbitrary shape. As we have seen, the "penetration depth" λ_L is small. Therefore, in all cases, a weak magnetic field practically does not penetrate at all into a macroscopic specimen.² The lines of force are excluded as shown on Fig. 1-3.

The superconductor finds an equilibrium state where the sum of ki netic and magnetic energies is minimum, and this state, for macroscopic samples, corresponds to the expulsion of magnetic flux.

Experimentally, the expulsion of lines of force was shown by Meissner and Ochsenfeld in 1933. The Meissner result was particularly important in proving that a true equilibrium state was achieved.

Three remarks concerning the above derivation:

(1) Assuming the existence of permanent currents plus thermodynamic equilibrium, we are led to the diamagnetic properties. It is more usual to go the other way round: Taking the Meissner effect as a starting point, conclude that there exist permanent currents. I chose the first way because I wanted to show you the different contributions to the energy in a superconductor (Eq. 1-6). This list of energies will be useful later (Chapter 3).

(2) We obtained Eq. (1-9) from a minimum condition on the free energy \mathfrak{F} . This is the correct thermodynamic potential when the external field sources are permanent magnets. When the source is a coil, with a fixed current I , the correct potential is not \mathcal{F} but a different function S (the "Gibbs potential"). Fortunately, both potentials can be shown to lead to the same local equilibrium condition in the sample. (See Chapter 2 for a discussion of \mathcal{F} and S .)

(3) Note that the above calculation is valid only for weak applied fields. In higher fields it may become energetically more favorable

² In higher field different catastrophes may occur.

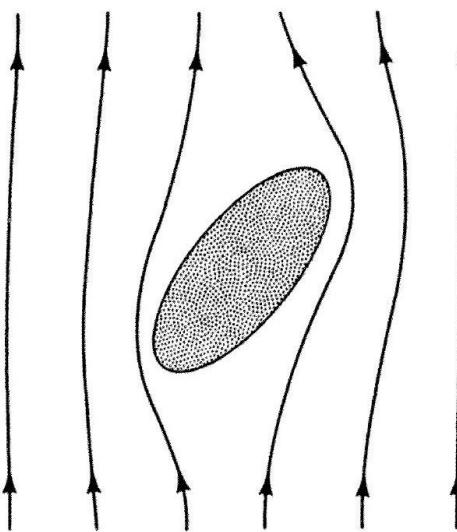


Figure 1-3

Distortion of the magnetic lines of force around a macroscopic superconductor ("macroscopic" means dimensions much larger than the penetration depth). If the fields are not too strong, the superconductor expels the lines completely (Meissner effect).

to destroy superconductivity in some parts of the sample and to allow the flux lines to penetrate. This will be considered in detail in Chapters 2 and 3.

7.1.5 1-3 ABSENCE OF LOW ENERGY EXCITATIONS

Let us begin by considering a free electron gas without interactions. The ground state is obtained by placing an electron into each individual momentum state p , of energy $p^2/2m$, until the Fermi energy $E_F = p_F^2/2m$ is reached. Above the Fermi energy E_F , all the levels are empty. (The condition $p = p_F$ defines the Fermi sphere, in momentum space.) In order to construct an excited state of the gas, it suffices to take an electron of momentum p from an initially occupied state ($p \leq p_F$) and to place it into a state p' initially empty ($p' \geq p_F$) (Fig. 1-4). The excitation energy of this electron-hole pair is

$$E_{pp'} = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \geq 0 \quad (1-16)$$

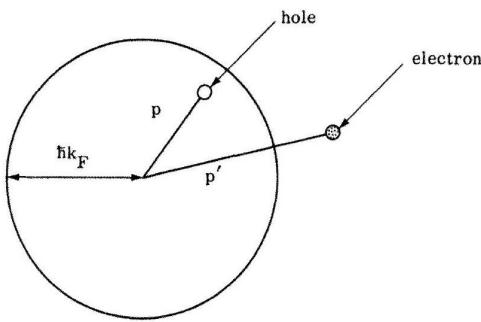


Figure 1-4

An excited state of the electronegas in a normal metal. One electron has been taken from a state of momentum p inside the Fermi sphere, to a state of momentum p' outside the Fermi sphere. The excitation energy $(p'^2 - p^2)/2m$ is very low if p and p' are close to the Fermi momentum $p_F = \hbar k_F$.

If both p and p' are close to the Fermi momentum, $E_{pp'}$ is very small; in a free electron gas there are numerous low energy excitations. In a normal metal, this free electron picture is not qualitatively modified. The low energy excitations are displayed by the following experiments:

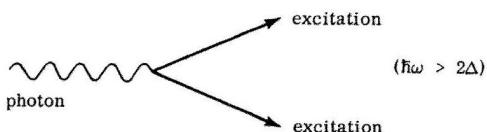
(a) The specific heat is relatively large and proportional to T (of order $k_B \cdot (k_B T/E_F)$ per electron).

(b) Strong dissipative effects appear when the electrons are submitted to low frequency external perturbations (electromagnetic waves, ultrasonic waves, nuclear spin precession, and so on).

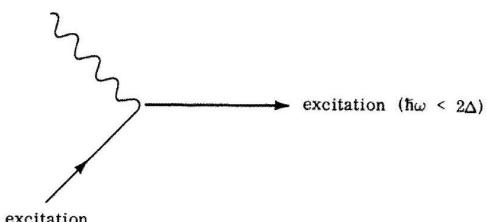
In most superconductors, the situation is completely different. The energy $E_{pp'}$ necessary to create a pair of excitations is no longer given by Eq. (1-16). It is necessary to at least furnish a certain "pairing energy" 2Δ :

$$E_{pp'} \geq 2\Delta \quad (1-17)$$

Roughly speaking, this "gap" 2Δ is related to the transition temperature by $2\Delta = 3.5k_B T_0$. Thus typically 2Δ is of order 10°K (Table 1-1).



(a)



(b)

Figure 1-5

Typical dissipative processes in a superconductor. Fig. 1-5a shows the creation of a pair of excitations by one photon. This process can occur only if $\hbar\omega > 2\Delta$. Fig. 1 - 5 b shows the absorption of the photon by a preexisting excitation. This process can occur even if $\hbar\omega < 2\Delta$, but it is weak at low temperatures, where there are very few thermal excitations. Similar processes are obtained by replacing "photon" by "phonon" in 1-5a and 1 - 5b.

Note that 2Δ is the energy needed to create two excitations. The energy per excitation is Δ .

Various experiments measure Δ . Here are some of them:

(a) The low temperature specific heat is now exponential and proportional to $\exp(-\Delta/k_B T)$.

(b) Absorption of electromagnetic energy. For $\hbar\omega \geq 2\Delta$ a photon of frequency ω can create an electron-hole pair. [This corresponds to photons in the far infrared; typical wavelengths are in the 1 mm range (Fig. 1-5a).]

(c) Ultrasonic attenuation. Here the phonon is of low frequency and cannot decay by creation of a pair of excitations. But it can be absorbed by collision with a preexisting excitation (Fig. 1-5b). This

Table 1-1

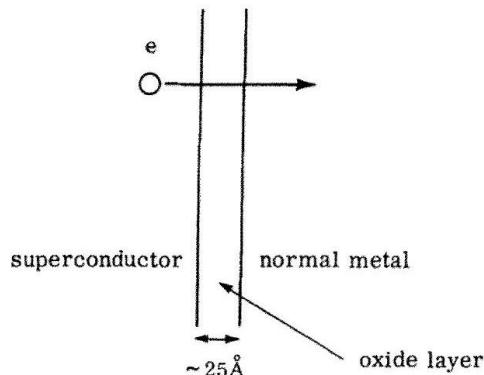
Values of the energy gap 2Δ (at 0°K) in $^{\circ}\text{K}^a$

	P	A	T
Zn		3.17	
Cd	1.8		
Hg	18.4		18.0
Al	6.01	4.4	4.2
In	13.6	11.9	11.9
Ga		4.03	
Sn	13.0		12.9
Pb	28.7		30.9
V	18.0	18.5	18.0
Nb	27.4	37.4	35.0
Ta		15.7	16.1
La			

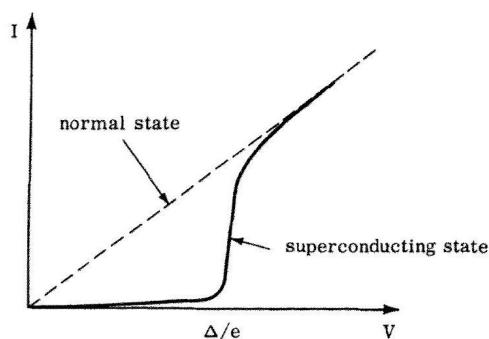
process is proportional to the number of preexisting excitations, thus to $\exp(-\Delta/k_B T)$.

(d) Tunnel effect. A superconductor S and a normal metal N are separated by a thin insulating barrier (typical thickness 25\AA) (Fig. 1-6a). The quantum mechanical tunnel effect allows individual electrons to pass through the barrier. The electron must have been excited from the condensed phase, and this requires an energy Δ . There is no current at low temperatures unless we apply a voltage V across the junction such that the energy gain eV is larger than Δ . The current voltage characteristic has the form shown in Fig. 1-6b.

Question: Is the existence of an energy gap a necessary condition for the existence of permanent current (superfluidity)? The answer is no. A number of situations have been found where superfluidity occurs with no gap in the one particle excitation spectrum. The simplest example is "surface super-



(a)



a For a bibliography on energy gap measurements see D. H. Douglas, Jr., and L. M. Falicov, Low Temperature Physics, Vol. IV, edited by C. G. Gorter (Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1964). The experiments are classified as follows: P photon absorption (microwave or far infrared photons); A ultrasonic attenuation; T tunneling. The ultrasonic experiments are often performed in single crystals, in which case, 2Δ depends slightly on the direction of the sound wave,

(b)

Figure 1-6

A tunneling junction between a normal metal and a superconductor. (a) Shows the geometry. (b) Shows the current-voltage characteristic when s is superconducting ($T \ll T_0$) and also when s is normal ($T > T_0$). Typically for a junction $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ the resistance V/I when both metals are normal may range from 10^{-2} to 10^4 ohms . When $T \ll T_0$, to extract one electron from the superconducting condensate requires a minimum energy Δ . Essentially no current flows until $eV = \Delta$.

"conductivity" - certain metals or alloys, in a suitable range of field, are superconducting only in a thin sheath (typically 1000\AA) near the sample surface. Excitations from the inner (normal) regions can leak up to the surface - there is no gap in the energy spectrum. (This has been checked recently by tunneling experiments.) However the sheath is superconducting! There are other examples, some of which we shall discuss later.

7.1.6 1-4 TWO KINDS OF SUPERCONDUCTORS

Our derivation of the London equation (1-9) assumes a slow variation in space of $v(r)$ or of the supercurrent $f_s(r)$. What do we mean by the word "slow"? In the condensed state, the velocities of two electrons (1) and (2) are correlated if the distance between them R_{12} is smaller than a certain range. For pure metals, the correlation length is called ξ_0 . Our derivation applies when $v(r)$ has a negligible variation over distances $\sim \xi_0$. To estimate ξ_0 we notice that the important domain in momentum space is defined by

$$E_F - \Delta < \frac{p^2}{2m} < E_F + \Delta \quad (1-18)$$

where E_F is the Fermi level. The thickness of the shell in p space defined by Eq. (1-18) is $\delta p \cong (2\Delta/v_F)$ (where $v_F = p_F/m$ is the velocity at the Fermi level; we have made use of the fact that $\Delta \ll E_F$ in all cases). A wave packet formed of plane waves whose momentum has an uncertainty δp has a minimum spatial extent $\delta x \sim (\hbar/\delta p)$. This leads us to take

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta} \quad (1-19)$$

(The factor $1/\pi$ is arbitrary but will become convenient later.) The length ξ_0 defined by Eq. (1-19) is called the coherence length of the superconductor.

Equations (1-15) and (1-13) show that h, j_s , or v vary on a scale λ_L . Thus our derivation of the London equation holds only if $\lambda_L \gg \xi_0$.

(1) In simple (nontransition) metals as we have seen, λ_L is small ($\sim 300\text{\AA}$). The Fermi velocity v_F is large ($v_F > 10^8 \text{ cm/sec}$) and according to Eq. (1-19) ξ_0 is also large ($\xi_0 \cong 10^4 \text{ \AA}$ for aluminum). Thus for these metals the London equation does not apply. In fact, they do exhibit the Meissner effect, but in order to calculate the penetration depth it is necessary to replace Eq. (1-9) by a somewhat more complicated relation, the form of which has been suggested by Pippard. We call these first kind (Type I) or Pippard superconductors and discuss them in Chapter 2.

(2) For transition metals and intermetallic compounds of the type $\text{Nb}_3\text{Sn}, \text{V}_3\text{Ga}$, the effective mass is very large, λ_L is large ($\sim 2000\text{\AA}$) and the Fermi velocity is small ($\sim 10^6 \text{ cm/sec}$). Also, in these

compounds the transition temperature T_0 above which superconductivity disappears is found to be high (18°K in Nb_3Sn). As we will see later, Δ is roughly proportional to T_0 and is therefore larger. For all these reasons ξ_0 is very small ($\sim 50\text{\AA}$). Therefore for this class of materials Eq. (1-9) is well applicable in weak fields. We call these second kind (Type II) or London superconductors.

In order to complete this discussion, it is necessary to mention the case of superconducting alloys, for which the coherence length and penetration depth are modified by mean free path effects, which we will discuss later. Qualitatively, if the mean free path due to disorder in the structure is short, the coherence length becomes smaller than $\hbar v_F/\pi\Delta$ and λ_L is increased with respect to Eq. (1-7). Therefore it frequently occurs that the addition of impurities into a Pippard superconductor transforms it into a London superconductor.

The distinction here between the two classes is crucial for all experiments made in the presence of external fields. Historically, during a period of 20 years after the discovery of the Meissner effect, experiments were mainly carried out in first kind superconductors. The detailed study of second kind superconductors is much more recent. Paradoxically, the theory has followed the inverse order. Equation (1-9) was introduced by the London brothers in 1935, but the necessary modifications for first type superconductors was only proposed by Pippard in 1953. We now study in detail the magnetic properties of the two types.

7.1.7 REFERENCES

On superfluidity:

F. London, Superfluids, Vol. I, 2nd ed. New York: Dover, 1961.

General discussion of experimental data on superconductors:

E. A. Lynton, Superconductivity, 2nd ed. London: Methuen and Co., 1965.

More recent advances on the superfluidity concept:

J. Bardeen and R. Schrieffer, Progress in Low Temperature Physics, Vol. III, edited by C. G. Gorter. Amsterdam: North Holland, 1961. J. M. Blatt, Theory of Superconductivity. New York: Academic Press, 1964.

Proceedings of the Brighton Symposium on Quantum Fluids (Brighton, 1965) to be published in Reviews of Modern Physics 1966.

7.2 MAGNETIC PROPERTIES OF FIRST KIND SUPERCONDUCTORS

7.2.1 2-1 CRITICAL FIELD OF A LONG CYLINDER

A long superconducting cylinder of radius r_0 is placed in a solenoid of radius $r_1 > r_0$ (Fig. 2-1).

A (weak) current I flows in the coil. The resulting field distribution $h(r)$ is shown in Fig. 2-2. Outside the sample, $h(r)$ takes a constant value H . In the sample the field falls rapidly (in a depth $\lambda \sim 500\text{\AA}$) to 0. We restrict our attention to a macroscopic specimen ($r_0 \gg \lambda$). Then, on the scale r_0 , the field does not penetrate into the sample.

This complete flux expulsion is observed for weak external fields H , but, when H reaches a critical value H_c , a radical modification occurs:

(1) The field becomes uniform across the entire section.

(2) The specimen is no longer superconducting (this we can see in principle by measuring the resistivity between the ends of the cylinder). With sufficiently perfect specimens, one can verify that this transition is reversible. If I is now decreased, the superconducting state reappears with total flux expulsion. Typical values of H_c are given in Table 2-1. The critical field decreases with increasing temperature, roughly according to the law

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right] \quad (2-1)$$

(For $T > T_0$ the material is normal even in zero field; T_0 is the

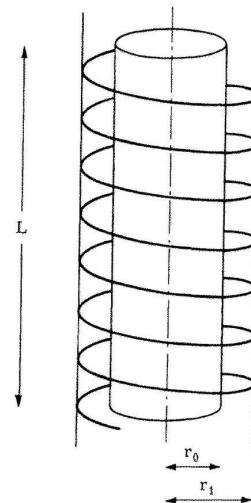


Figure 2-1

Experimental geometry to measure the critical field. The sample is a long cylinder (of length L and radius r_0). It is placed in a coil of radius r_1 .

transition temperature in zero field.) From H_c , we can calculate the difference in free energy between the normal and superconducting states:

- (a) When the cylinder is normal the field is uniform across the solenoid

$$h = \frac{4\pi NI}{cL} \quad (2-2)$$

(where N is the number of turns in the solenoid and L is its length, which is also the length of the specimen). The free energy of the system becomes

$$\mathcal{F}_a = \pi r_0^2 L F_n + \pi r_1^2 L \frac{h^2}{8\pi} \quad (2-3)$$

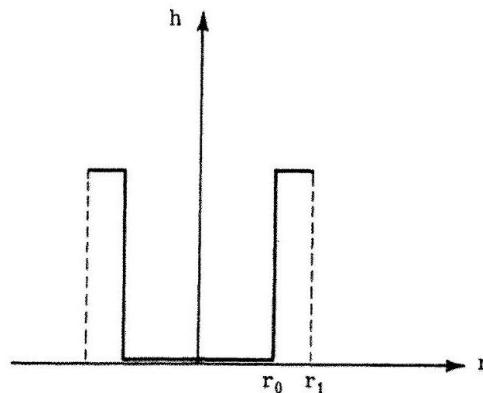


Figure 2-2 The field distribution of the coil and cylinder of Fig. 2-1 while the cylinder is superconducting. The field penetrates only up to one penetration depth in the sample. On the scale of the figure we may say that H drops abruptly to 0 inside the sample.

F_n is the free energy density of the normal sample and the second term is the magnetic energy stored in the coil.

(b) Suppose now that the cylinder becomes superconducting, the current being kept constant in the coil. The field is zero in the sample, but it maintains the value (2-2) in the region $r_0 < r < r_1$ ¹ The free energy becomes

$$\mathcal{F}_b = \pi r_0^2 L F_s + \pi (r_1^2 - r_0^2) L \frac{h^2}{8\pi} \quad (2-4)$$

where F_S is the free energy density of the superconducting sample. Equation (2-4) neglects the penetration of the field in the thickness and

¹ In order to demonstrate this property, one writes $\text{curl } h = (4\pi/c)j$, from which

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

and one takes for a contour a line of force passing through the coil (in the region $r_0 < r < r_1$). The contributions to $\phi h \cdot dl$ from the parts of the line of force enclosing the magnetic current in the exterior of the coil are negligible if the solenoid is long, and one obtains $h = (4\pi NI/cL)$.

Table 2-1

Values of T_c and $H_c(0)$ for some metals

	Zn	Cd	Hg(α)	Al	Ga	In	Tl	Sn	Pb
$H_c(0)$ (G)	53	30		99	51	283	162	306	803
T_c (K)	0.88	0.56	4.15	1.19	1.09	3.41	1.37	3.72	7.18

also the kinetic energy of the surface currents - both these terms are surface effects, and are negligible for a macroscopic cylinder ($r_0 \gg \lambda$).

Note that $\mathcal{F}_b < \mathcal{F}_a$, because (1) $F_s < F_n$ and (2) the magnetic term is smaller in state b . What has become of the energy $\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b$ when the transition occurs? Answer: The flux ϕ passing through the coil diminishes when we go from (a) \rightarrow (b). This induces a voltage V in the coil. The work done by this voltage V on the external circuit is

$$\int VIdt = \int_a^b -\left(\frac{N}{c} \frac{d\phi}{dt}\right) Idt \quad (2-5)$$

The current I is kept constant during the transition. Therefore,

$$\begin{aligned} \int VIdt &= \frac{N}{c} I (\phi_a - \phi_b) \\ &= \frac{NI}{c} \pi r_0^2 h \\ &= \pi r_0^2 L \frac{h^2}{4\pi} \end{aligned} \quad (2-6)$$

At equilibrium between the two states ($h = H_c$), we must have $\mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b = SVI dt$. Using Eqs. (2-3) and (2-4), we obtain

$$F_n - F_S = \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (2-7)$$

From these relations one can deduce a series of thermodynamical properties. Fix the current I and vary the temperature. The entropy (per cubic centimeter) of each phase is determined from the formulas

$$S_n = -\frac{dF_n}{dt} \quad S_s = -\frac{dF_s}{dT} \quad (2-8)$$

Therefore the difference in entropy between the two phases at equilibrium becomes

$$S_n - S_S = -\frac{1}{4\pi} H_c \frac{d_c}{dT} \quad (2-9)$$

The latent heat of the transition is

$$L = T(S_n - S_S) = -\frac{T}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT} \quad (2-10)$$

This heat is positive; it is necessary to furnish this energy to pass from the superconducting state to the normal state.²

L vanishes when one considers the transition in zero field: for $T = T_c, H_c = 0$, and experiment shows that for all superconductors studied until now dH_c/dT remains finite, therefore $[L]_{H=0} = 0$.

Thus in zero field the superconducting transition is of the second order. There is a discontinuity in the specific heat

$$\begin{aligned} C_n - C_S &= T \frac{d}{dT} (S_n - S_S)_T = T_c \\ &= -\frac{T}{4\pi} \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_T^2 = T_c \end{aligned} \quad (2-11)$$

Formulas (2 – 10) and (2 – 11) have been verified to better than 1% in several metals (notably Sn, In, Ta); these experiments demand some care; it is especially necessary to assure that equilibrium has set in, that is, no flux is "frozen" in the superconductor, and so on. The practical interest of the relations (2 – 10) and (2 – 11) is to relate the thermodynamic quantities (latent heat and specific heat) to the critical field curve, which is often easier to measure.

7.2.2 2-2 Penetration Depths

7.2.3 Relation between Current and Field in a First Kind Superconductor

On the macroscopic scale, a weak field ($h < H_c$) does not penetrate into a first kind superconductor. However, on the microscopic scale, the field does not vary discontinuously at the surface. It penetrates a certain depth λ in the metal. We would like to compute λ .

In Chapter 1 we derived λ from the London equation

$$\text{curl } j = -\frac{ne^2}{mc} h \quad (2-12)$$

But, in superconductors of the first kind ($\xi_0 > \lambda$), Eq. (2-12) is not valid. We need a more general relation between currents and fields, applicable even when j and h have rapid variations in space.

It turns out that the most convenient variable here is not the field h , but rather the vector potential A such that

$$\text{curl } A = h \quad (2-13)$$

This equation does not define A completely. We often find it convenient to specify A exactly by adding the supplementary conditions

$$\begin{aligned} \text{div } A &= 0 \\ A_n &= 0 \quad \text{on the sample surface} \end{aligned} \quad (2-14)$$

(A_n is the component of A normal to the surface). When Eqs. (2-14) are satisfied we say that A is chosen in the London gauge. In the London gauge (2-12) can be rewritten as

² Consequence: If one passes from the superconducting state to the normal state in a thermally isolated specimen, the temperature of the sample decreases.

$$j = -\frac{ne^2}{mc} A \quad (2-15)$$

since insertion of (2-13) gives (2-12) and insertion of (2-14) gives

$$\begin{aligned} \operatorname{div} j &= 0 \text{ (continuity equation)} \\ j_n &= 0 \text{ on the surface} \end{aligned}$$

The latter surface condition is satisfactory if no external current is fed into the sample.

Equation (2-15) applies only when j and A vary slowly in space on the scale ξ_0 . In general, we may guess that the current $j(\mathbf{r})$ at one point will depend on the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ at all neighboring points \mathbf{r}' such that $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \xi_0$. A phenomenological relation constructed to describe this effect, has been proposed by Pippard; in the London gauge it has the form

$$J(r) = C \int \frac{(A(r) \cdot R)R}{R^4} e^{-R/\xi_0} d\mathbf{r}' \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (2-16)$$

The coefficient C is simply determined by noticing that when A varies slowly spatially (over distances $\sim \xi_0$), it can be taken out of the integral, and one must obtain the London value (2-15). This gives

$$C \frac{4\pi}{3} \xi_0 = -\frac{ne^2}{mc} \quad C = \frac{-3ne^2}{mc}$$

The choice of the simple form (2-16) for the relation between current and vector potential was a guess of Pippard. Later, after the development of the microscopic theory, it was verified that the exact relation between field and current is very close to (2-16) if ones takes

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta} \quad (\text{for } T = 0) \quad (2-18)$$

The exact relation between j and A will be discussed in Chapter 4. It is much more complicated algebraically than (2-16) and the approximate Pippard form remains very useful. We now apply it to a study of penetration depths.

7.2.4 The Penetration Depth

Eq. (2-16) is valid for a bulk superconductor. But we now want to study penetration phenomena near the sample surface: in general the relation between j and A is then modified. In practice, the following prescription applies: keep Eq. (2-16), but extend the integration $\int d\mathbf{r}'$ only to points \mathbf{r}' in the superconductor, and, more restrictively, to points \mathbf{r}' from which an electron can travel in a straight line to point r . For instance, if there is a small empty cavity in the metal, one must exclude the "shadow" of the cavity, as shown in Fig. 2-3. (This prescription is the correct one for the (usual) case where reflection of individual electrons on the surface is diffuse. We shall derive it later from the microscopic theory.)

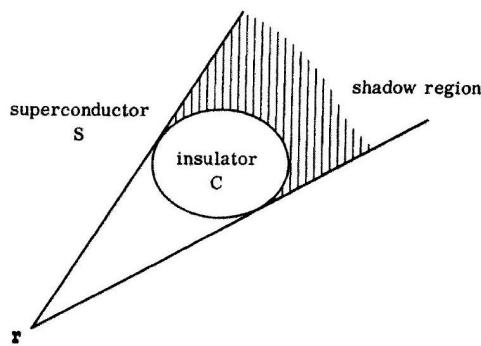


Figure 2-3

"Shadow effect" in the calculation of the current $j(r)$ induced by a magnetic perturbation $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$. A cavity or an insulating precipitate occupies region C inside the superconductor S. Electrons are reflected diffusely at the SC boundary. The magnetic potentials $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$, in C and in the shadow region do not contribute to $j(\mathbf{r})$.

Consider now a specimen with a plane surface x0y, the superconducting side being $z > 0$, A and j are directed along the x axis. The penetration depth λ can then be estimated by another intuitive argument of Pippard's: if $\mathbf{A}(z)$ was essentially constant on a thickness $\sim \xi_0$ near the surface, we would have, in this region, from Eq. (2-16): $j = - (ne^2/mc) \mathbf{A}$ (the London result). But in fact $\mathbf{A}(z)$ is nonzero only in a smaller thickness λ . Thus the integral (2-16) is reduced, roughly by the factor λ/ξ_0 :

$$j \simeq -\frac{ne}{mc} \cdot \frac{\lambda}{\xi_0} A \quad (\lambda \ll \xi_0)$$

Using this relation in conjunction with $\text{curl } h = (4\pi/c)j$, we obtain an (approximate) penetration law of the form $h(z) = h(0)e^{-z/\lambda}$, where λ is defined self-consistently by

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} &= \frac{4\pi ne^2}{mc^2} \frac{\lambda}{\xi_0} \\ \lambda^3 &= \lambda_L^2 \xi_0 \quad (\lambda \ll \xi_0) \end{aligned}$$

A (much more complicated) rigorous calculation gives $\lambda^3 = 0.62 \lambda_L^2 \xi_0$.

The essential conclusions are that, in the Pippard limit, λ becomes larger than the London value $(\lambda/\lambda_L) \sim (\xi_0/\lambda_L)^{1/3} > 1$, but λ remains much smaller than the coherence length $(\lambda/\xi_0) \sim (\lambda_L/\xi_0)^{2/3} < 1$.

7.2.5 Methods to Measure the Penetration Depth

Historically, the first determinations of λ were made by measuring the magnetic susceptibility of very small specimens (colloids or films). Experimentally, one first verifies that the transition temperature of even very fine colloids ($\sim 100\text{\AA}$) is not very different from that of bulk samples. One can therefore expect that the parameters [n_s , $\Delta(0)$], which occur in ξ_0 and λ_L , are practically the same in small particles as in the bulk state, and this is encouraging. However, there are several difficulties:

- (a) There is a rather large uncertainty in the grain dimensions of the colloid.
- (b) In general, one has many lattice defects in such materials and therefore the electronic mean free path ℓ is rather short, and badly known. When ℓ is comparable to ξ_0 , the Pippard formula (2-16) must be modified.

The other methods used to determine λ reduce to measuring the value of a self- or mutual inductance in the presence of the superconductor. The principle of the mutual inductance measurement is represented in Fig. 2-4.

The coil 1 creates a field h_e along the exterior of the film and a field $h_i = \rho h_e \ll h_e$ in the interior region. The field h_i is detected by the coil 2. From ρ one can determine λ by suitable theoretical analysis. In practice, one is able to measure coefficients $\rho \sim 10^{-9}$. This allows one to work with relatively thick films ($\sim 10\lambda$) for which the crystallographic state is well defined [and this minimizes objection (b)].

One can also measure the self-inductance of a coil surrounding a superconducting cylinder (method initially suggested by Casimir). If e is the distance between coil and specimen (see Fig. 2-5), the magnetic flux penetrates a surface $\sim \pi R(e + \lambda)$. As $\lambda \sim 10^3\text{\AA}$ it is necessary to make e as small as possible (typically $e \sim 2$ mm, R being 4 mm). In practice e is not known to sufficient precision and the method serves mainly to determine the temperature dependence

of λ . A different technique, but similar in principle, is to construct a microwave resonant cavity with the superconducting material.

(1) transmitting coil

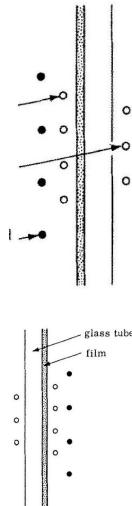


Figure 2-4 Inductive method to measure the penetration depths of thin cylindrical films [after Sarachik, et al., Phy's. Rol. Letters, 452(1960)]. The transmitting coil creates a field attenuated in the film. The receiving coil in the central region detects the field that has leaked through the superconducting film. The solenoid is used to study the field dependence of the penetration depth.

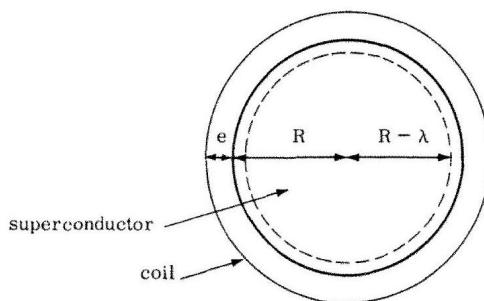


Figure 2-5

Self-induction method to measure penetration depths on a superconducting cylinder of radius R . The cylinder is surrounded by a coil of radius $R + e$. The flux is contained in a ring of thickness $e + \lambda$. In practice e is not known accurately and only the changes of λ with temperature can be measured.

7.2.6 Discussion

PENETRATION IN THE PURE METALS AT ABSOLUTE ZERO

Does the experimental determination of λ permit us to verify the phenomenological Pippard relation? For the pure metals at absolute zero we can calculate separately

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \quad \lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n e^2} \right)^{1/2}$$

Taking v_F and n/m from measurements of specific heat, anomalous skin effect, and so on, in the normal state, and $\Delta(0)$ from measurements in the superconducting state, we can then predict a theoretical value for λ ($\lambda^3 = 0.62\lambda\lambda_L^2\xi_0$) for $\lambda_L \ll \xi_0$ (and more complex formulas when

$\lambda_L \sim \xi_0$). Table 2-2 gives a comparison between such theoretical values and the experimental data (extrapolated to 0°K). There is satisfactory qualitative agreement, but it would be rather difficult to determine ξ_0 from λ if one had no other information. The detailed form of relation (2-16) cannot be considered established by this type of measurement.

We are now beginning to obtain finer verifications, mainly by measurement of magnetic field transmission through a thin film. In particular, the complete solution of Eq. (2 - 16) for such a film predicts that when $\xi_0 \gg \lambda$, the field does not have a constant sign, but the ratio ρ can become negative; this has been observed experimentally (Drangeid and Sommerhalder, 1962).

Table 2-2

	λ_L	ξ_0	λ_{th}	λ_{exp}
Al	157	16,000	530	490 - 515
Sn	355	2,300	560	510
Pb	370	830	480	390

after Bardeen and Schrieffer, Low Temperature Physics, edited by C. J. Gorter (Amsterdam: North Holland, 1961), Vol. III, p. 170.

7.2.7 EXTENSION TO ALLOYS

When the electronic mean free path ℓ is limited by the presence of impurities, it is natural to expect that the relation between current (at the point \mathbf{r}) and vector potential (at the point \mathbf{r}') contains an attenuation factor $e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\ell}$. One is therefore led to assume, with Pippard,

$$j(\mathbf{r}) = C \int \frac{[\mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}] \mathbf{R}}{R^4} e^{-R(1/\xi_0 + 1/\ell)} d\mathbf{r} \quad (2-19)$$

The normalization coefficient C is assumed to be independent of ℓ (therefore equal to its pure metal value $-3ne^2/4\pi mc\xi_0$); in other words, one assumes that the contributions to $j(r)$ coming from points \mathbf{r}' in the neighborhood of r , ($|r' - r| \ll \ell$) are not modified by the impurities. This hypothesis has permitted Pippard to explain a series of experiments on the dilute SnIn alloy system. One finds that λ increases with the concentration of impurities (Fig. 2-6) and the results are well interpreted by the formula (2-19). One limiting case is particularly remarkable. When $\lambda \gg \ell$ we can neglect the variations of $A(r')$ in Eq. (2-19) and perform the integration

$$j(\mathbf{r}) = CA(\mathbf{r}) \frac{4\pi}{3} \frac{1}{1/\xi_0 + 1/\ell} \quad (2-20)$$

This is a London type equation, but with a coefficient modified with respect to the pure metal. In particular, if $\ell \ll \xi_0$, we have

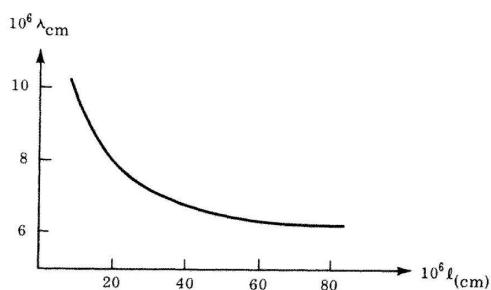


Figure 2-6

The variation of the penetration depth with mean free path in tin-indium alloys. (After A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. (London), A216, 547 (1953).) These results are in excellent agreement with Pippard's prediction (2-21).

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{ne^2}{mc}\frac{\ell}{\xi_0}\mathbf{A}(\mathbf{r})$$

which leads to a penetration depth λ

$$\lambda = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\ell} \right)^{1/2} \quad (\lambda \gg \ell, \quad \xi_0 \gg \ell) \quad (2-21)$$

In this domain λ is proportional to $\ell^{-1/2}$ and therefore to the square root of the impurity concentration.

The agreement between theory and experiment in the SnIn system gives an excellent justification of the Pippard assumptions. In Chapter 4, we see that the microscopic theory confirms them to a large extent.

7.2.8 VARIATIONS OF λ WITH TEMPERATURE

Until now we have essentially limited our discussion to the case $T = 0$. For finite T , the situation can qualitatively be described in the following way: The Pippard equation (2 – 16) remains valid with a value ξ_0 almost temperature independent. The normalization coefficient C is a function of temperature, and vanishes at the transition point T_c . Very near T_c , C is a linear function of $T_c - T$. A theoretical universal curve for C , derived from the microscopic theory, is given in Chapter 4 (Section 5). Once C is known, one computes λ by solving Eq. (2-20). In an attempt to short circuit this heavy machinery, the experimentalists often refer to the empirical law

$$\lambda^2(T) = \lambda^2(0) \frac{T_c^4}{T_c^4 - T^4} \quad (2-22)$$

The form (2-22) gives a good fit to the experimental data on tin. It has also the correct feature that $\lambda \sim (T_c - T)^{-1/2}$ when $T \rightarrow T_c$. However, it must be emphasized that a universal law such as (2-22) cannot be applied to all superconductors, because two independent parameters (for instance, ξ_0 and the London penetration depth λ_L) are involved in the calculation of λ .

7.2.9 2-3 MAGNETIC PROPERTIES OF A SAMPLE OF ARBITRARY SHAPE: INTERMEDIATE STATE

7.2.10 Origin of the Intermediate State

In order to define the critical field H_c we chose a cylindrical specimen placed in a field parallel to the axis of the cylinder. This geometry assures that the field h be the same over the entire surface

of the specimen ignoring end effects. We now consider a less trivial case, for example, a superconducting sphere of radius a placed in a uniform external field H_0 . If H_0 is small, the lines of force are expelled from the specimen and assume the form of Fig. 2-7.

The field configuration external to the sphere is determined by the equations

$$\operatorname{div} h = \operatorname{curl} h = 0 \quad h \rightarrow H_0 \text{ as } r \rightarrow \infty \quad (2-23)$$

where r is the distance measured from the center of the sphere. Finally, the Meissner effect imposes the condition that no line of force can penetrate into the sphere. The normal

component of h vanishes on the surface of the sphere

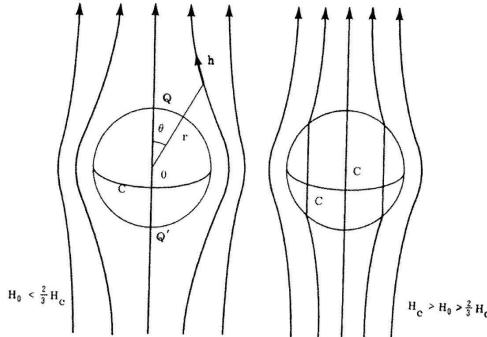


Figure 2-7 The magnetic field distribution about a superconducting sphere of radius a . For applied fields H_0 less than $\frac{2}{3}H_c$, there is a complete Meissner effect and the field at the equator (at any point on circle C) is $\frac{3}{2}H_0$; the field at the poles (Q, Q') is zero. For $H_c = H_0 > \frac{2}{3}H_c$, the sphere is in the intermediate state.

$$(h_n)_{r=a} = 0 \quad (2-24)$$

The appropriate solution in the exterior region is

$$h = H_0 + H_0 \frac{a^3}{2} \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (2-25)$$

The component of h parallel to the surface of the specimen is

$$|h_\theta|_{r=a} = \frac{3}{2}H_0 \sin \theta \quad (2-26)$$

At points Q and Q' , h is zero. On the equatorial circle ($\theta = \pi/2$) the tangential component is maximum and is $\frac{3}{2}H_0$. The surface points experience fields between 0 and $\frac{3}{2}H_0$. When H_0 attains the value $\frac{2}{3}H_c$, the field at the equatorial circle becomes equal to H_c . Therefore, for $H_0 > \frac{2}{3}H_c$, certain regions of the sphere pass into the normal state. But there must still exist superconducting regions since $H_0 < H_c$. (If the entire sphere were normal, the field would be equal to H_0 throughout and, because $H_0 < H_c$, the system would be unstable and superconductivity would reappear.) Therefore in the domain

$$\frac{2H_c}{3} < H_0 < H_c \quad (2-27)$$

there will be a coexistence of normal and superconducting regions. This situation is called the intermediate state.

Notice that the range of fields H_0 for which one will observe such an equilibrium between the two phases is given by (2-27) only for a specimen in the form of a sphere. If instead of a sphere we had a prolate and/or oblate ellipsoid in the direction of H_0 , then the equatorial field would be slightly and/or very different from H_0 and the domain of existence of the intermediate state would be small and/or large. In particular, if we consider a thin metallic slab, H_0 being perpendicular to the plane of the slab, we predict that the intermediate state will exist throughout the domain $0 < H_0 < H_c$. (When H_0 is nonzero, if the slab were to remain entirely superconducting, the field at the edge of the slab would be very large, therefore $> H_c$ and it is thus necessary for normal regions to be established.)

Let us consider precisely such a slab of thickness e . The appearance of the normal (N) and superconducting (S) regions is represented in Fig. 2-8. The regions N and S form laminas perpendicular to the plane of the figure. The lines of force only penetrate in the region N. On the contact planes between the N and S regions, the field h must be equal to H_c in order to ensure equilibrium between the two planes.

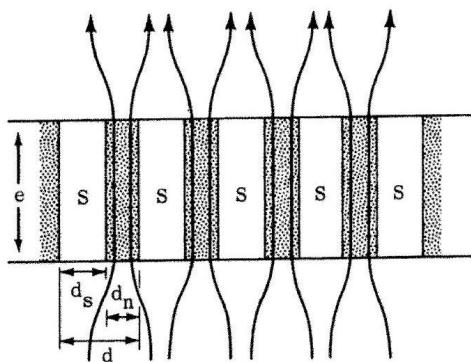


Figure 2-8

Field distribution in a slab in a perpendicular field. For all fields $H < H_c$, the sample is in an intermediate state with a laminar structure of normal and superconducting domains (small distortions of the slabs near the surface are not taken into account).

In the N regions, \mathbf{h} is parallel to the z axis, $\text{div } \mathbf{h} = 0$ and $\text{curl } \mathbf{h} = 0$. Thus \mathbf{h} is constant and, therefore, equal to H_c through the N region. In the region S , $\mathbf{h} = 0$. For this simple geometry, the fraction $\rho = d_S / (d_S + d_N)$ of S regions is fixed directly by the condition of conservation of flux-far from the film, the field is uniform, $\mathbf{h} = H_0$, and the flux becomes SH_0 (where S is the surface area of the film). In the film, the flux is concentrated through a surface $S(1 - \rho)$ and the field is H_c . Therefore

$$SH_0 = S(1 - \rho)H_c \quad (2-28)$$

$$\rho = 1 - \frac{H_0}{H_c}$$

An important observation is that, for macroscopic samples ($e \gg \xi_0$) the thicknesses of the layers d_s, d_n are much smaller than the sample dimensions (smaller than e) (this has been verified by detailed experiments to be described later). Thus for many purposes we can ignore the microscopic structure of alternating layers, and we need to know only the relative amount of S regions given by ρ .

The derivation of ρ was very simple for the slab. For more complicated sample shapes, the determination of ρ and of the macroscopic average field of any point requires a more general analysis (due to Peierls), discussed in the following sections and applied to several typical cases.

7.2.11 Preliminary Thermodynamics

We now define some macroscopic concepts (induction B , thermodynamic field \mathbf{H} , and so on) useful for the description of situations where there is only a partial penetration of the lines of force. One such case is the intermediate state of macroscopic samples. Other applications will be found in Chapter 3 in connection with Type II superconductors.

DEFINITION OF THE FREE ENERGY The system consists of a specimen + external objects (coils, generators). We define a free energy as follows: First, we take the energy of the electrons in the sample

$$U = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{eA}{c} \right)^2 + V_i \right] + \sum_{i>j} V_{ij} \quad (2-29)$$

Here A is the vector potential, related to the field $h(r)$ by the relation $\text{curl } A = h \cdot V_i$. V_i represents the electron-electron interactions and V_i the one electron potentials. Second, we add an entropy term - TS. Then two contributions appear in practice as an integral over the sample volume.

$$U - TS = \int_{\text{sample}} F_S dr \quad (2-30)$$

Third, we include in the free energy the magnetic field energy $\int (h^2/8\pi) dr$. The sum of the three contributions we call the free energy

$$\mathcal{F} = \int_{\text{sample}} F_S dr + \int_{\text{all space}} \frac{h^2}{8\pi} dr \quad (2-31)$$

DEFINITION OF THE INDUCTION B We often meet situations where the microscopic field $h(r)$ in the sample has strong variations in space on a scale Δx much smaller than the sample dimension (Example: the intermediate state pattern of Fig. 2-8). We then find it convenient to introduce a vector $B(\mathbf{r})$ giving the average of h in a region around point r of dimensions small compared with the sample, but large compared with Δx .

$$B = \bar{h} \quad (2-32)$$

Outside of the sample, we take by definition $B = h$. On a microscopic scale, h satisfies to the equations

$$\begin{aligned} \text{curl } h &= \frac{4\pi}{c} j \\ \text{div } h &= 0 \end{aligned} \quad (2-33)$$

where j is the local current density. Thus the induction B satisfies to

$$\begin{aligned} \text{curl } B &= \frac{4\pi}{c} j \\ \text{div } B &= 0 \end{aligned} \quad (2-34)$$

j is the macroscopic current density.

DEFINITION OF THE THERMODYNAMIC FIELDH Suppose that (by changing the currents in the coils) the field distribution $h(r)$ is changed slightly. At each point \mathbf{r} , $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ changes by a small amount of $\delta\mathbf{B}(\mathbf{r})$. To first order in $\delta\mathbf{B}$ the change $\delta\mathcal{F}$ of the free energy is, in its most general form,

$$\delta\mathcal{F} = \int \frac{H(r)}{4\pi} \cdot \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) dr \quad (2-35)$$

where the factor $(1/4\pi)$ has been inserted for convenience, and $H(r)$ is some vector function of \mathbf{r} . We call $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ the thermodynamic field at point \mathbf{r} ³. Outside of the sample we must have

$$\frac{\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{h}}{4\pi} = \frac{\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}}{4\pi} \quad (2-36)$$

and $\mathbf{h} = \mathbf{B}$. Thus $\mathbf{h} = \mathbf{H} = \mathbf{B}$ out of the sample. Equation (2-35) is a rather abstract definition of \mathbf{H} . To get a physical feeling for \mathbf{H} consider only situations where no external currents are fed into the sample. Then we can write for the current

$$\bar{j} = \bar{j}_s + j_{\text{ext}} \quad (2-37)$$

$\bar{j}_s(\mathbf{r})$ is the average supercurrent at point r in the sample (by definition j_s is 0 out of the sample). j_{ext} is the current in the coils, generators, and so on. Since no current is fed directly into the sample, the distinction between j_{ext} and \bar{j}_s is clear cut ($j_{\text{ext}} = 0$ in the sample). Then we have simply

$$\text{curl } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{ext}} \quad (2-38)$$

Proof of Eq. (2-38): When $B(r)$ varies by $\delta B(r)$, in a time δt , an electric field E , given by

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t}$$

is generated. The work done by E on the external currents is $\delta t \int j_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} dr$ or conversely the work done by the external currents is

$$\delta W = -\delta t \int \mathbf{E} \cdot j_{\text{ext}} dr \quad (2-39)$$

For a reversible transformation at constant temperature, we know from thermodynamics that $\delta W = \delta F$. We want to compare this expression with (2-35). For that purpose we transform (2-35) as follows:

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta t \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} dr \\ &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{curl } \mathbf{E} dr \\ &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \text{curl } \mathbf{H} dr - \frac{c\delta t}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\sigma \end{aligned} \quad (2-40)$$

The last integral is to be taken over a distant surface surrounding the entire system. It represents the radiated energy and for a slow, reversible transformation it is negligible. Then comparing (2-40) and (2-39) we see that (2-38) is satisfied.

Conclusion. All currents contribute to $\text{curl } \mathbf{B}$ (Eq. 2-34), but only j_{ext} contributes to $\text{curl } \mathbf{H}$ (Eq. 2-38). We might be tempted to say that H is the field that would exist in the absence of the specimen (the same j_{ext} being kept on the coils). This is correct for the cylindrical geometry of Fig. 2-1 but is wrong in general. Consider, for instance, the spherical sample of Fig. 2-7. Here the lines of force are distorted in the presence of the sphere and this implies a change of $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (though not of $\text{curl } \mathbf{H}$).

Remark on boundary conditions. The equation $\text{div } \mathbf{B} = 0$ implies as usual that the normal component of B be continuous at the surface of the specimen. On the other hand, the tangential component of \mathbf{B} is, in general, not continuous. $\text{Curl } \mathbf{B}$ contains the supercurrent. Often we find supercurrents localized on the surface (physically in a thickness λ near the surface). If we let S be the current per cm on the surface, then by integration of (2-34) we find

$$\mathbf{n} \times (B_{\text{ext}} - B_{\text{int}}) = \frac{4\pi}{c} S \quad (2-41)$$

(n is a unit vector normal to the surface and directed outward).

³ Note that in the complete Meissner effect region, $B \equiv 0$ and H is undetermined.

7.2.12 Thermodynamic Potential for Fixed T and j_{ext}

When both fields and temperatures are allowed to change, the free energy variation (2-35) becomes

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} d\mathbf{r} - S\delta T \quad (2-42)$$

where S is the entropy. When the values of $B(r)$, at each point r , and the temperature T , are fixed, the equilibrium state corresponds to the minimum of \mathfrak{F} . Very often, however, this is not the situation of interest. The quantities fixed during the experiment are T and the currents j_{ext} in the coils. We now construct a thermodynamic potential S adapted to this situation. Define

$$S = \mathcal{F} - \int \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} d\mathbf{r} \quad (2-43)$$

Then

$$\delta S = - \int \frac{\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H}}{4\pi} d\mathbf{r} - S\delta T \quad (2-44)$$

Since $\text{div } \mathbf{B} = 0$ we can set $\mathbf{B} = \text{curl } \bar{\mathbf{A}}$ (where $\bar{\mathbf{A}}$ is the macroscopic vector potential) and integrate by parts

$$\begin{aligned} S\delta T + \delta S &= -\frac{1}{4\pi} \int \text{curl } \bar{\mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{H} d\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi} \int \bar{\mathbf{A}} \cdot \text{curl } \delta \mathbf{H} d\mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{c} \int \bar{\mathbf{A}} \cdot \delta j_{\text{ext}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2-45)$$

Thus $\delta G = 0$ when T and j_{ext} are fixed. The equilibrium state for fixed T and j_{ext} corresponds to the minimum of G . In practice, we usually construct first \mathfrak{F} and \mathbf{B} on a microscopic model; then we form S and finally on minimizing S we have a condition defining the equilibrium state. This condition plays the same role as the relation $B = \mu\mathbf{H}$ in a paramagnetic or diamagnetic medium.

7.2.13 Relation between B and H in the Intermediate State

In order to obtain this relation, we calculate the Gibbs potential $G d\mathbf{r}$ of a volume element $d\mathbf{r}$ of a specimen when it is in the intermediate state [a fraction ρ of the volume $d\mathbf{r}$ being superconducting (S) and a fraction $(1 - \rho)$ being normal (N)]. In (N), the microscopic field takes on a certain value h_n ; in (S) it is zero. We show that the condition of minimum S leads to $h_n = H_c$. In terms of ρ

$$\mathbf{B} = (1 - \rho)\mathbf{h}_n + \rho \cdot 0 = (1 - \rho)\mathbf{h}_n \quad (2-46)$$

The free energy per cubic centimeter becomes

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + (1 - \rho) \frac{h_n^2}{8\pi} \quad (2-47)$$

The second term represents the condensation energy in the superconducting regions and the third term the magnetic energy. We neglect the (NS) surface energy and also the terms arising from the distortion of the lines of force in the neighborhood of the surface of the specimen; on the macroscopic scale these surface terms are negligible. Expressing F in terms of the variables ρ and \mathbf{B} , we obtain

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)} \quad (2-48)$$

Now forming the thermodynamic potential G , we find

$$G(B, \rho) = F - \frac{BH}{4\pi} = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)} - \frac{BH}{4\pi} \quad (2-49)$$

If we minimize G : (1) With respect to ρ , we obtain

$$|B| = H_c(1 - \rho) \quad (2-50)$$

On comparing Eqs. (2 – 50) and (2 – 46), we see that the field in the normal regions h_n is equal to H_c (this property was previously cited for a simple example on page 26).

(2) With respect to B , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial B} &= 0 \\ B &= H(1 - \rho) \end{aligned} \quad (2-51)$$

We conclude that (1) the field \mathbf{H} is parallel to B , (2) the length of \mathbf{H} must be constant and equal to H_c in the entire specimen. This is the condition equivalent to the relation $B = \mu H$ in a paramagnetic medium. But note that here the relation $B(H)$ is not linear. In order to calculate the field distribution in our sample, it is necessary to solve the equations

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{and } \mathbf{B}_{\text{normal}} \text{ continuous at the surface}) \quad (2-52)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{and } \mathbf{H}_{\text{tangential}} \text{ continuous}) \quad (2-53)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \frac{H_c}{|B|} \quad (2-54)$$

Equation 2-53 expresses our assumption that no current is fed into the sample (see Eq. 2-38).

7.2.14 Applications

We still limit ourselves to the (most usual) case where the specimen is not directly connected to the current generator. Then the lines of force, inside the sample, are straight lines. In order to show this, we write (proof due to London)

$$H^2 = H_c^2 \quad (2-55)$$

$$0 = \nabla(H^2) = 2(H \cdot \nabla)H + 2H \times \operatorname{curl} H$$

In the sample, $\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0$, then $(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} = 0$. The vector \mathbf{H} does not vary along a line of forces and therefore the line of force is straight.

Example. Let us return to a spherical sample placed on an exterior field H_0 such that $\frac{2}{3}H_c < H_0 < H_c$. We can construct the solution of the system(2-52), (2 – 53), (2 – 54) in the following manner.

In the interior of the sphere ($r < a$) we take H and B to be parallel to the z axis and constant. In magnitude, $H = H_c$ and B has a certain unknown value B_0 . In the exterior, on the other hand,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} = H_0 - H_1 \frac{a^3}{2} \nabla \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (2-56)$$

where H_1 is a constant to be determined. The condition on the continuity of H_{tang} at the surface imposes

$$\left(H_0 + \frac{H_1}{2} \right) \sin \theta = H_c \sin \theta \quad (2-57)$$

The condition of the continuity of B_{norm} gives

$$(H_0 - H_1) \cos \theta = B_0 \cos \theta \quad (2-58)$$

Upon comparing these two equations we find

$$\begin{aligned} B_0 &= 3H_0 - 2H_c \\ H_1 &= 2(H_c - H_0) \end{aligned} \quad (2-59)$$

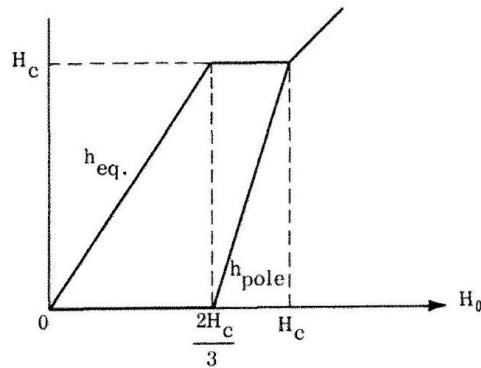


Figure 2-9

The field at the equator and the field at the poles of a superconducting sphere. For $H_0 < \frac{2}{3}H_c$, there is a complete Meissner effect, and the polar field vanishes. For $\frac{2}{3}H_c < H_0 < H_c$, the sphere is in the intermediate state; the equatorial field remains constant at H_c while the polar field increases from zero to H_c .

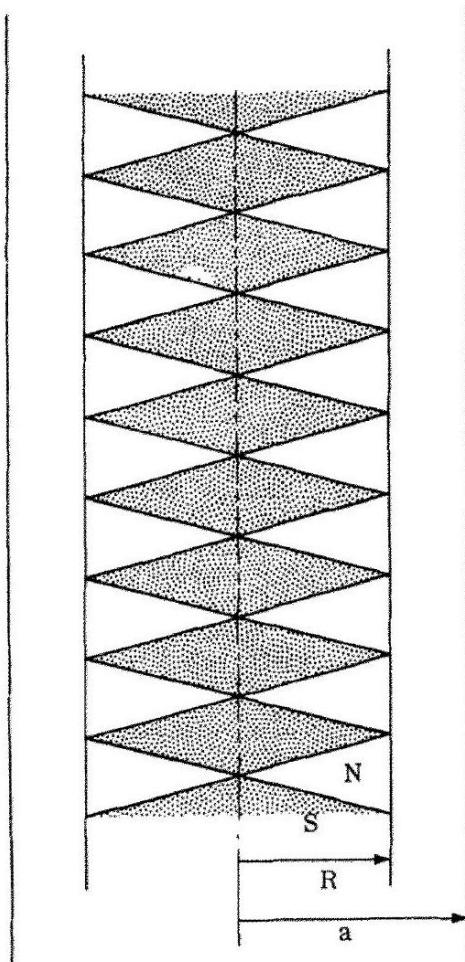


Figure 2-10 A schematic representation of the domain structure in a superconducting wire of radius a carrying a current $I > I_C$ (2-60). There are a normal surface layer and an intermediate state core of radius R . The interface (R) is determined by $H(R) = H_c$.

7.2.15 Conclusions.

(1) There exists a solution such that B is constant throughout the sphere. The fraction of superconducting regions $\rho = 1 - B_0/H_C$ is therefore the same throughout the sphere.

(2) The induction B_0 is a linear function of the applied field H_0 . In practice, one can measure B_0 by placing a magnetic probe in the neighborhood of the poles Q, Q' of the sphere. Since B_{norm} is continuous, the field immediately exterior to the sphere near Q or Q' is equal to B_0 . The field H_c is measured by placing the probe on the equatorial circle (from the continuity of H_{tang}). Experimentally one very nearly obtains diagrams of the theoretical form (Fig. 2-9) in clean samples.

7.2.16 CRITICAL CURRENT

OF A SUPERCONDUCTING WIRE

The wire of radius a is connected to the poles of a generator that supplies a current I . The field at the surface of the wire is $H(a) = 2I/ca$. When $H(a) < H_c$, the wire can be completely superconducting. This defines a critical current

$$I_c = H_c \frac{ca}{2} \quad (2-60)$$

When I becomes larger than I_c , $H(a) > H_c$, and the wire' must become normal near the surface. However it cannot become entirely normal, since, if it were, the current I would be spread uniformly through the section and the field h would be very small in the central region; therefore the wire must remain at least partially superconducting. Finally there is an exterior normal region $R < r < a$ and a superconducting or intermediate interior region $0 < r < R$. In the exterior region $B = H$ and at the boundary $H(R) = H_c$. This allows us to predict the current I_1 , which flows through the interior region

$$H(R) = H_c = \frac{2I_L}{cR} \quad (2-61)$$

$$I_1 = \frac{cRH_c}{2} = I_c \frac{R}{a} < I_c \quad (2-62)$$

Therefore $I_1 < I_c < I$. The exterior region must carry a current $I - I_1$. Since this is a normal region, there must be an electric field \mathbf{E} directed along the axis of the wire; this field \mathbf{E} must be the same throughout the wire since $\text{curl } E = 0$.

This shows that the interior region cannot be entirely superconducting since it would short circuit the field \mathbf{E} . It must, in fact, be in the intermediate state with N and S laminas perpendicular to the axis of the cylinder (Fig. 2-10). This situation is discussed in detail in the book by London.

7.2.17 PRINCIPLE OF THE CRYOTRON

The cryotron is a control device invented by Buck in 1956; the principle is shown on Fig. 2-11. The "control" current I' creates a field $H' = 4\pi NI'/cL$ in the solenoid (where N is the number of turns

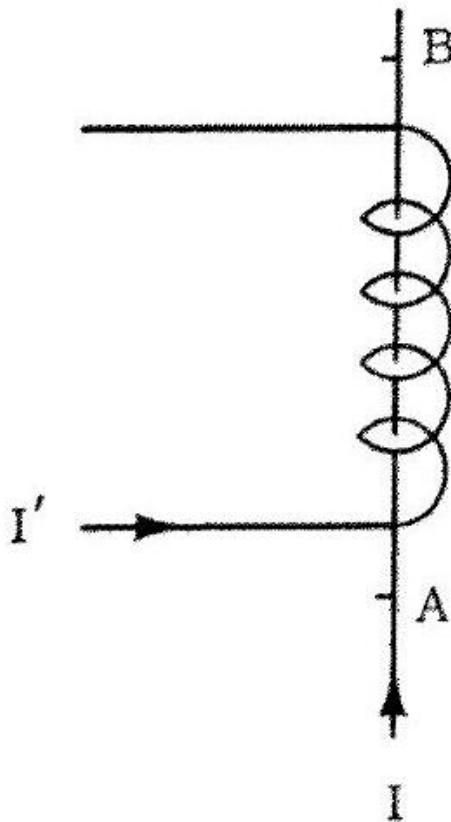


Figure 2-11

The principle of the cryotron. The current passing through the superconducting wire AB is controlled by the current I' flowing through the solenoid. When the field in the coil reaches H_C , the wire AB becomes normal.

and L is the length of the coil). A superconducting wire AB of diameter $2a$ and critical field H_c passes through the solenoid. For $H' < H_c$, the wire has zero resistance. For $H' > H_c$, the resistance is finite. It is therefore possible to control a current I passing through AB by the current I' . The minimum current value of I' required to make AB normal is

$$I'_m = \frac{cL}{4\pi N} H_c \quad (2-63)$$

On the other hand, the current I cannot be too large; otherwise the line AB passes into the intermediate state as we have previously seen

$$I \leq I_c = \frac{caH_c}{2} \quad (2-64)$$

The current gain of the cryotron is

$$G = \frac{I_c}{I'_m} = 2\pi N \frac{a}{L} \quad (2-65)$$

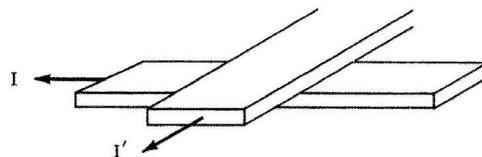


Figure 2-12

A more efficient (shorter time constants) cryotron can be constructed of two crossed metallic films separated by a thin insulated layer.

In Buck's first experiment, the control coil was made of a niobium wire (superconductor with a high critical field ~ 2000 G) of diameter ~ 0.1 mm. The wire AB (of tantalum) had $H_c \sim 100$ G at 4.2°K and a diameter $2a = 0.2$ mm. For a coil of only one turn, this corresponds to $N/L \sim 1$, and $G \sim 6$. In practice it is not useful to increase N for this increases the self-inductance of the coil and finally increases the time constant τ of the cryotron (for only one turn, the τ is not less than 10^{-5} sec). In practice, the time constants are reduced considerably by replacing the set up in Fig. 2-11 by two thin crossed metallic films (Fig. 2-12) separated by an insulating layer approximately 1000\AA thick. Since the self-inductance is proportional to this thickness, it is quite small and the time constants fall into the domain $10^{-8} - 10^{-9}$ sec.

7.2.18 Microscopic Structure of the Intermediate State

A slab (Fig. 2-13) of thickness e and lateral dimensions $L_x L_y$ (very large) is placed in a perpendicular field H_0 - normal and superconducting domains will occur. We assume that these domains are in the form of layers, as shown on the figure. (Experimentally, this arrangement is often found.) We wish to know the thickness d_n or d_s of the normal and of the superconducting regions, and the period $d = d_n + d_s$ of the domain structure.

To do this, we construct the free energy \mathcal{F} , and then minimize it (with respect to d_n, d_s , or equivalent parameters) for fixed H_0 (fixed H_0 means fixed flux through the slab; thus the appropriate potential is \mathcal{F} , not \mathcal{S}).

In a zero-order approximation we consider the S and N domains as exactly plane layers and neglect all surface energies. Then the free energy is simply

$$\mathcal{F}_{\text{macroscopic}} = -\frac{H_c^2}{8\pi} L_x L_y e \frac{d_s}{d} + \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{d}{d_n} e L_x L_y \quad (2-66)$$

The first term is the condensation energy in the S regions. The second is the magnetic field energy $h^2/8\pi$, in the N regions, where $h = H_0 (d/d_n)$ by flux conservation.

Going now to a first-order approximation, one must add three corrections to \mathfrak{F} .

(1) To create a wall between an S region and an N region we need a certain surface energy γ per cm^2 of wall. Dimensionally it is convenient to write this γ in the form

$$\gamma = \frac{H_c^2}{8\pi} \delta \quad (2-67)$$

where the length δ is of order $10^3 - 10^4 \text{\AA}$. The corresponding contribution to \mathcal{F} is

$$\gamma e L_y \times (\text{number of walls}) = \frac{H_c^2}{8\pi} \delta e L_y \frac{2L_x}{d} \quad (2-68)$$

(2) The lines of force "open up" near the sample surface and the superconducting domains become thinner near the ends. Thus we lose some condensation energy, in a volume of order $d_S^2 L_y$ for each S domain. This gives a contribution

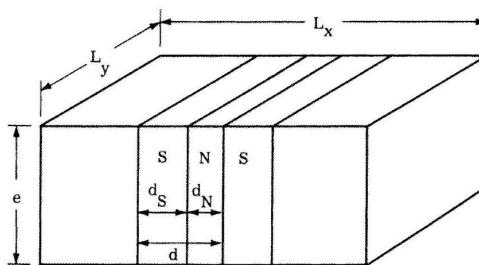


Figure 2-13

Microscopic structure of the normal and superconducting regions in the intermediate state of a slab. The domains form a laminar structure of period $d \sim \sqrt{e\delta}$ (e = slab thickness, $\delta \cong$ thickness of a wall).

$$\frac{H_c^2}{8\pi} d_S^2 L_y \frac{L_x}{d} U_0(\rho_s) \quad (2-69)$$

where $\rho_s = d_S/d$ and $U_0(\rho_s)$ is a dimensionless function that can be computed when the exact shape of the "thinner" regions is known.

(3) The magnetic field energy $\int (h^2/8\pi) dr$ is also modified near the surface, and this gives a term of the form

$$\frac{H_0^2}{8\pi} d_S^2 L_y \frac{L_x}{d} V_0(\rho_s) \quad (2-70)$$

where $V_0(\rho_s)$ is another dimensionless function. (The calculation of U_0 and V_0 is described in Landau and Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media.)

We can choose as independent variables ρ_s and d . If we first minimize the free energy with respect to ρ_s , we find that for a macroscopic sample ($e \gg \xi_0$)

$$1 - \rho_s = \frac{H_0}{H_c} \quad (2-71)$$

This, as we know, expresses that the field in the normal regions is equal to H_c . Then we minimize \mathcal{F} with respect to d . The d -dependent terms are the three correction terms

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = & \mathcal{F}_{\text{macroscopic}} + \frac{H_c^2}{8\pi} e L_x L_y \\ & \times \left[\frac{2\delta}{d} + (\rho_s^2 U_0 + \rho_s^2 (1 - \rho_s)^2 V_0) \frac{d}{e} \right]\end{aligned}\quad (2-72)$$

The optimum d is given by

$$d^2 = \frac{\delta e}{\phi(\rho_s)} \quad (2-73)$$

where $\phi = \frac{1}{2} [\rho_s^2 U_0 + \rho_s^2 (1 - \rho_s)^2 V_0]$. Typically, for $H_o/H_c \sim 0.7$, $\phi \sim 10^{-2}$ and thus $d \sim 10\sqrt{\delta e}$. Taking $e = 1 \text{ cm}$, $\delta = 3000 \text{ Å}$, we arrive at $d \sim 0.6 \text{ mm}$. Near the ends ($\rho_s \rightarrow 0$ or $\rho_n \rightarrow 1$), ϕ tends toward 0 and d becomes still larger. How can we observe this domain structure? Various methods have been used:

(1) A fine bismuth wire (whose resistance is strongly dependent on field) is moved close to the surface of the sample. The resistance is large in the N regions and small in the S regions (Meshkovsky and Shalnikov, 1947).

(2) Niobium powder is placed on the sample. Niobium has a high critical field ($\sim 2000 \text{ G}$). Thus the grains are always superconducting and diamagnetic, they tend to avoid the lines of force, and they gather on the S regions.

(3) The specimen is covered with a thin layer of cerium glass (typical thickness $\sim 0.1 \text{ mm}$). This glass has a large Faraday rotation. Polarized light traveling along the magnetic field H_0 (normal to the sample surface) has its plane of polarization rotated by an angle θ when it traverses the glass; the total rotation after being reflected from the sample is then 2θ . Since, in general, θ is proportional to the field ($\theta \sim 0.02\% \text{ mm/G}$), if the specimen is observed between crossed analyzer and polarizer, the N regions, where $h \neq 0$, appear bright. Ultimately, these measurements furnish a determination of the wall energy (characterized by the length δ).

Problem. What are the corrections to the critical field of the plate due to the fact that the thickness e is finite?

Solution. If we minimize the free energy with respect to d , keeping as other independent variables the reduced field $h_r = H_0/H_c$ and $\rho_s = d_s/d$ we find

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = & \frac{H_c^2}{8\pi} e_x L_y \left[-\rho_s + \frac{h_r^2}{1 - \rho_s} + 4 \left(\frac{\delta}{e} \right)^{1/2} \phi^{1/2} \right] \\ \phi = & \frac{1}{2} \rho_s^2 [U_0(\rho_s) + h_r^2 V_0(\rho_s)]\end{aligned}$$

In the region of interest, h_r is close to 1, ρ_s is close to 0, and we may write for ϕ

$$\phi \cong \theta^2 \rho_s^2$$

where $\theta^2 = \frac{1}{2} |U_0(0) + V_0(0)| = (1/\pi) \ln 2 = 0.22$ (this numerical value is obtained in the previously mentioned calculation of Landau and Lifshitz). Minimizing \mathcal{F} with respect to ρ_s , we obtain the condition

$$-1 + \left(\frac{h_r}{1 - \rho_s} \right)^2 + 4\theta \left(\frac{\delta}{e} \right)^{1/2} = 0$$

The critical field of the plate is reached when \mathcal{F} is equal to the normal state free energy $(H_0^2/8\pi) e L_y L_x$. This leads to the condition

$$\rho_s \left(\frac{h_r^2}{1 - \rho_s} - 1 \right) + 4\theta \left(\frac{\delta}{e} \right)^{1/2} \rho_s = 0$$

Both conditions are satisfied when

$$\begin{aligned} \rho_s &= 0 \\ 1 - h_r^2 &= 4\theta \left(\frac{\delta}{e} \right)^{1/2} \\ H_0 &\cong H_c \left(1 - 2\theta \left(\frac{\delta}{e} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

By taking $e = 1$ mm and $\delta = 10^4 \text{ \AA}$, we get a 3% decrease of the critical field. Similar deviations from the macroscopic theory occur in all geometries; very often they are important in the discussion of experimental results in type I superconductors.

7.2.19 A PARADOX

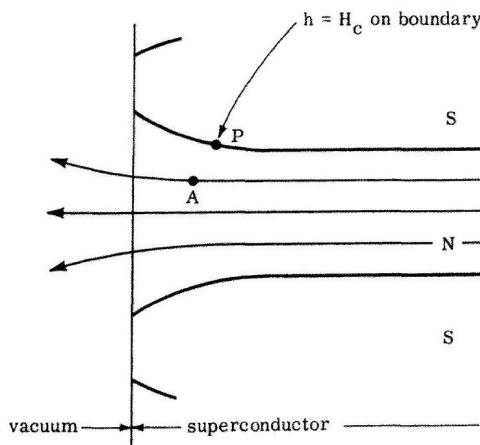
If we look carefully at the domain structure of Fig. 2-14a, we notice that at a point such as A , in the N regions, the lines of force have "opened up." Thus the field is significantly lower than at point P on the boundary, that is, lower than H_c . At first sight this is troublesome. We would expect a region near A to become superconducting again. This complication has been considered by Landau. He concluded that the normal regions should "branch" as shown on Fig. 2-14b, possibly up to such a fine scale that the domain structure would become unobservable. In fact, the simple domain structure is often observed. Branching does not take place in clean samples with dimensions of order 1 cm. The critical field at point A is reduced below H_c by an effect similar to that discussed in the problem above (but here the dimension of interest is d , not e , thus the effect is large). Thus A can remain normal in rather low fields.

If we had a superconductor of thickness $e = 1$ mile, d would be of order 1 cm, we could still apply macroscopic considerations in the neighborhood of P , and some branching would take place. The branching model is not wrong; it is simply not adequate for the usual scale of sample dimensions. (Another way to favor branching is not to increase e , but rather to reduce δ -this could be done in suitable alloy systems.)

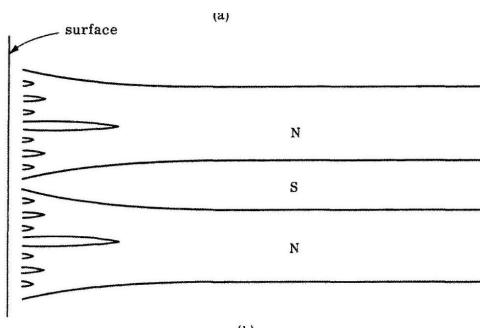
7.2.20 ORIGIN OF THE SURFACE ENERGY

We qualitatively discuss two extreme cases:

(1) $\xi_0 \gg \lambda$: In our previous macroscopic discussion, there was a sharp boundary between the normal region N and the superconducting region S (to fix ideas, we shall take this boundary as being the yz plane, the fields being along z and the N region corresponding to $x < 0$). On the N side, the thermodynamic potential was lowered by the magnetic



(a)



(b)

Figure 2-14

(a) The domain structure near the surface. Note that, at a point such as A , the field is smaller than at point P (as is indicated by the curvature of the lines of flux): $h(A) < h(P) = H_c$. There are some small normal regions near the ends where $h < H_c$! (b) Landau's branching model. Such a branching is required if one wants to keep $h > H_c$ everywhere in the normal regions. In fact branching does not take place: The condition $h > H_c$ applies only to macroscopic normal regions. Here the small regions of interest near the surface have critical fields significantly lower than H_c ; they can remain normal for $h < H_c$ and the simpler model of Fig. 2 - 14a is the correct one.

field terms $H_c^2/8\pi - H_c^2/4\pi$ (see Eq. 2-49). On the S side, S was lowered by the condensation energy $-H_c^2/8\pi$. Now, what does happen on a microscopic scale? If λ is small, it is still correct to assume that the field drops abruptly at the limiting plane $x = 0$. The new feature is that on the S side ($x > 0$), superconductivity is "damaged" in a region of thickness $\sim \xi_0$ near the boundary. Thus we lose the condensation energy $H_c^2/8\pi$ on an interval $\sim \xi_0$ and this gives a wall energy $\gamma \sim (H_c^2/8\pi) \xi_0$ (i.e., $\delta \sim \xi_0$).

(2) $\xi_0 \ll \lambda$: In this case the above contribution is negligible. We can calculate the field distribution by using London's equation (Fig. 2 - 15). Let us put the wall in the yz plane, the fields being directed along the z axis. In the normal region ($x < 0$), $h = H_c$. In the S region ($x > 0$), $h = H_c e^{-x/\lambda}$. The thermodynamic potential becomes

$$S = \int_{x>0} dr \left(F_n - \frac{H_c^2}{8\pi} + \frac{h^2}{8\pi} - \frac{Hh}{4\pi} + \lambda^2 \frac{(\frac{dh}{dx})^2}{8\pi} \right) \quad (2-74)$$

The first term is the free energy of the normal phase in zero field; the second term is the condensation energy ($\rho = 0$ for $x < 0$ and $\rho = 1$ for $x > 0$); the third term is the magnetic field

energy; the fourth is the microscopic equivalent of $-BH/4\pi$. Finally, the last term represents the kinetic energy of the currents.

We first verify that, far from the wall, the Gibbs function density is the same in the two phases (equilibrium condition) and \mathcal{G} can be written in the form

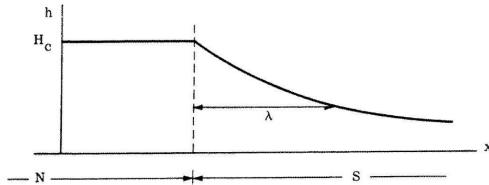


Figure 2-15

Microscopic field distribution at a wall separating normal and superconducting domains. In the normal domain, $h = H_c$; h falls to zero within a penetration depth on the superconducting side.

$$G = \int dr \left(F_n - \frac{H_c^2}{8\pi} \right) + \gamma S$$

where S is the surface area of the wall and γ is the surface tension given by

$$\gamma = \int_0^\infty dx \left[\frac{h^2 + \lambda^2 (\frac{dh}{dx})^2}{8\pi} - \frac{hH_c}{4\pi} \right] = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda \quad (2-75)$$

In this limit, the surface tension is negative and the system decreases its energy by creating new walls; the largest possible number of walls is created, and it is evident that the magnetic properties will be found to be considerably different from those cited previously. It is for this reason that materials having $\xi_0 < \lambda$ are called second kind superconductors. We study them in the next chapter.

7.3 MAGNETIC PROPERTIES OF SECOND KIND SUPERCONDUCTORS

7.3.1 3-1 MAGNETIZATION CURVES OF A LONG CYLINDER

Type II superconductors are characterized by the following macroscopic properties:

(1) A cylinder placed in a longitudinal field H does not exhibit a "perfect" total flux expulsion (Meissner effect), except for weak field $H < H_{c1}$.

If one calculates the critical field H_c defined by the difference in free energies between the normal and superconducting states in zero field:

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (3-1)$$

one finds that H_{c1} is clearly smaller than H_c . For example, for the compound V_3Ga , calorimetric measurements in zero field (giving $F_n - F_S$) indicate $(H_c)_{T=0} \simeq 6000G$, and magnetic measurements give $(H_{C1})_{T=0} \simeq 200G$.

(2) For $H > H_{C1}$, lines of force penetrate the cylinder, but even

¹ The notation H_{C1} for the first penetration field has been recommended by the participants of the Colgate Conference on Superconductivity (1963).

at thermal equilibrium this penetration is not complete. The flux ϕ passing through the cylinder remains less than its value when the sample is in the normal state. This implies the existence of permanent currents in the specimen, which is thus still superconducting. This situation exists for fields $H_{C1} \leq H \leq H_{C2}$. H_{C2} is larger than H_c and is sometimes very large-for V_3Ga $(H_{C2})_T = 0 \sim 300,000G$.

(3) For $H > H_{C_2}$ a macroscopic sample does not show any expulsion of flux $B \equiv H$. However superconductivity is not completely destroyed. In an interval $H_{C_2} < H < H_{C_3}$ there remains on the surface of the cylinder a superconducting sheath (of typical thickness 10^3\AA). (In most cases $H_{C_3} \sim 1.69H_{C_2}$.) The existence of this sheath can be shown, for instance, by measuring the resistance between two probes on the sample surface. It is found that for low measuring currents the resistance vanishes. Physically the sheath has the following origin: It is easier to nucleate a small superconducting region near the sample surface - just as it is easier to grow bubbles on the bottom of a glass of beer than to grow them from an arbitrary point in the beer. (A somewhat more sophisticated version of this argument will be discussed in Chapter 5.)

The variation with temperature of the fields $H_{C_1}, H_{C_2}, H_{C_3}$ is represented in Fig. 3-1. We now focus our attention on the region $H_{C_1} < H < H_{C_2}$ where partial flux penetration occurs. The existence of this region of the (H, T) plane was clearly shown for the first time in early experiments on alloys by Schubnikov (1937). We call it the Schubnikov phase, or sometimes the vortex state. (The latter name comes from the microscopic picture to be derived in Section 3-2.)

The partial flux penetration in the Schubnikov phase can be described in terms of a diagram $B(H)$; the aspect of this diagram is shown in Fig. 3-2. Sometimes, instead of the induction B , the experimentalists prefer to plot the "magnetization" M defined by

$$M = \frac{B - H}{4\pi} \quad (3-2)$$

The $M(H)$ curve is shown in Fig. 3-3.

(In practice the observation of these curves is often complicated by difficulties in attaining equilibrium; for example, structural defects oppose the displacement of the lines of force.)

In Fig. 3-3 the dashed line represents the magnetization curve found for a first kind superconductor with the same H_c . These two curves are related by a remarkable property - the areas they subtend are equal.

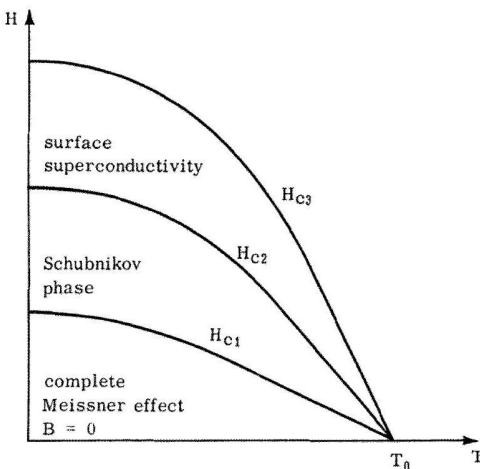


Figure 3-1 Phase diagram for a long cylinder of a Type II superconductor.

Proof: Let G_S be the Gibbs function per unit volume for the superconducting state

$$G_S = F_S(B) - \frac{BH}{4\pi} \quad (3-3)$$

G_S is a minimum for fixed H , that is, at equilibrium

$$\left(\frac{\partial G_S}{\partial B} \right)_H = 0 \quad (3-4)$$

Let G_n be the Gibbs function for the normal state

$$G_n = F_n + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH}{4\pi} \quad (3-5)$$

At thermodynamic equilibrium in the normal phase $(\partial G_n / \partial B)_H = 0$; therefore, $B = H$ and

$$G_n = F_n - \frac{H^2}{8\pi} \quad (3-6)$$

Let the field vary from H to $H + \delta H$. From (3-3) and (3-4)

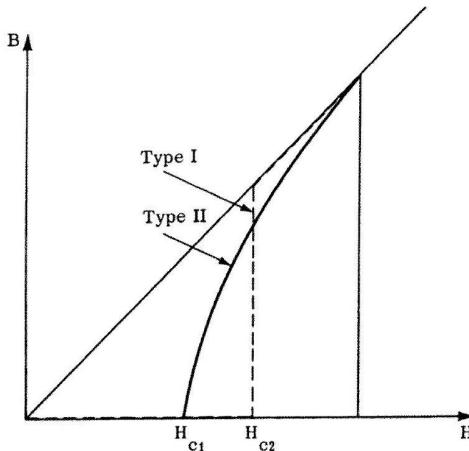


Figure 3-2 The induction (or flux /cm²) in the cylinder as a function of the applied field H . The full curve applies for a Type II superconductor, the dotted curve for a Type I.

$$\frac{\partial G_S}{\partial H} = -\frac{B}{4\pi} \quad (3-7)$$

and from (3-6)

$$\frac{\partial G_n}{\partial H} = -\frac{H}{4\pi} \quad (3-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial H} (G_n - G_S) = \frac{B - H}{4\pi} = M \quad (3-9)$$

We now integrate this relation between $H = 0$ and $H = H_{C_2}$. At $H = H_{C_2}$, the two phases are in equilibrium and $G_n = G_S$. For $H = 0, B = 0$ we have $G_n = F_n$, $G_S = F_S$, and by definition

$$(F_n - F_s)_{B=0} = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

The result is therefore

$$\int_0^{H_{C_2}} M dH = \frac{-H_c^2}{8\pi} \quad (3-10)$$

and we conclude that the area subtended by the curve of Fig. 3-3 depends only on H_c . From the equilibrium magnetization curves, one can therefore determine H_c and the condensation energy.

We now discuss the transition occurring when the applied field H becomes equal to one of the limiting values H_{c1} or H_{c2} . Consider first the transition at H_{C_2} . Experimentally this is a second-order transition in all cases studied up to now.

(1) Magnetization measurements show that the $B(H)$ curve is continuous at $H = H_{C_2}$.

(2) In the few cases (V_3Ga) where thermal measurements have been performed, it appears that there is no latent heat for the transformation, but only a discontinuity in the specific heat.

It is possible to relate this discontinuity to the magnetization curves by a purely thermodynamic analysis (Goodman, 1962). Let i and j be the two phases of interest (for the case at hand i would represent the Schubnikov phase and j the phase with $B \equiv H$, where the bulk of the sample is normal)

$$G_i = F_i(T, B_i) - \frac{B_i H}{4\pi} \quad (3-11)$$

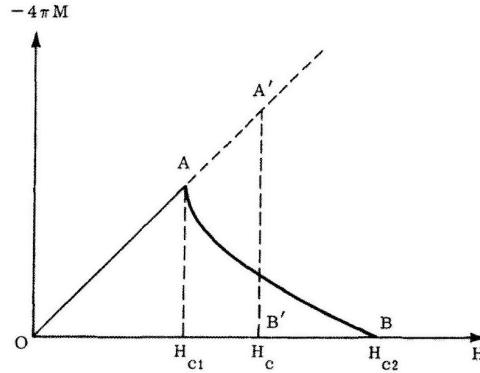


Figure 3-3

The reversible magnetization curve of a long cylinder of Type I (dotted line) or Type II (solid line) superconductor. If the two materials have the same thermodynamic field H_c , the areas OAB and $OA'B'$ are equal.

G_i is the Gibbs function per cm^3 of the i th phase. The relation between the field H and the induction B in this phase is obtained by minimizing G for fixed H and T

$$\frac{\partial}{\partial B_i} F_i(T, B_i) = \frac{H}{4\pi} \quad (3-12)$$

the entropy S_i is deduced from the relations

$$S_i = - \left(\frac{\partial G_i}{\partial T} \right)_H = - \frac{\partial F_i}{\partial T} \quad (3-13)$$

When the field satisfies a certain condition $H = H^*(T)$, there is an equilibrium between the phases i and j (i.e., for the present case $H^* = H_{C2}$). On this curve, one has

$$G_i = G_j \quad (3-14)$$

Suppose that there is no latent heat associated with the transformation. Then, along the curve $H = H^*(T)$, the two phases have the same entropy

$$S_i = S_j \quad (3-15)$$

We first show that this excludes any discontinuity in B at the transition. To show this, we calculate the variation of F_i when one moves along the equilibrium curve [$dH = (dH^*/dT)dT$]

$$\frac{dF_i}{dT} = \frac{\partial F_i}{\partial T} + \frac{\partial F_i}{\partial B_i} \frac{dB_i}{dT} \quad (3-16)$$

From this equation and using (3-12) and (3-13), we obtain the variation of G along the equilibrium curve

$$\frac{dG_i}{dT} = -S_i - \frac{B_i}{4\pi} \frac{dH}{dT} d^* \quad (3-17)$$

Along the equilibrium curve we have constantly $G_i = G_j$, therefore $dG_i/dT = dG_j/dT$; if also $S_i = S_j$ we necessarily have $B_i = B_j$; B is continuous at the transition.

We now calculate the specific heat in constant field

$$C_i = T \left(\frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_H \quad (3-18)$$

We can transform the second factor by calculating the total derivative of the entropy along the equilibrium curve

$$\frac{dS_i}{dT} = \left(\frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_H + \left(\frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T \frac{dH^*}{dT} \quad (3-19)$$

From (3-15), $dS_i/dT = dS_j/dT$ along the equilibrium curve and

$$C_j - C_i = T \frac{dH^*}{dT} \left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T - \left(\frac{\partial S_j}{\partial H} \right)_T \right] \quad (3-20)$$

We transform $(\partial S_i/\partial H)_T$ by using (3-13) and (3-12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T &= \left(\frac{\partial S_i}{\partial B_i} \right)_T \left(\frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T = -\frac{\partial^2 F_i}{\partial B_i \partial T} \left(\frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial H(B_i T)}{\partial T} \left(\frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T \end{aligned} \quad (3-21)$$

Finally, we write the variation of H^* with respect to T in the form

$$\frac{dH^*}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{B_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial B_i} \right)_T \frac{dB}{dT} \quad (3-22)$$

where $dB/dT = dB_i/dT = dB_j/dT$ represents the variation of B along the equilibrium curve. On inserting $(\partial H/\partial T)_B$ from (3-22) into (3-21) we find

$$\left(\frac{\partial S_i}{\partial H} \right)_T = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^*}{dT} \left(\frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T + \frac{1}{4\pi} \frac{dB}{dT} \quad (3-23)$$

$$C_j - C_i = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{dH^*}{dT} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial B_j}{\partial H} \right)_T - \left(\frac{\partial B_i}{\partial H} \right)_T \right] \quad (3-24)$$

Therefore, if one knows $H^*(T)$ and the permeabilities $(\partial B_i/\partial H)_T$ for each of the phases, one can predict the discontinuity in the specific heat. For the transition ($i \rightarrow j$) we have a finite permeability (> 1) in the vortex state (i) from Fig. 3-2 and a permeability equal to 1 in the normal state (j). Therefore $C_i > C_j$. At this time all the necessary information is not available to compare (3-24) to experiment. However, for V_3Ga , $C_i - C_j$ and dH_{C2}/dT are known and if one makes a reasonable extrapolation for $\partial B/\partial H$ in order to predict its value at H_{C2} one finds an agreement to within about 10% from magnetic and calorimetric measurements. A similar analysis can be carried out in principle for the transition at $H = H_{C1}$. Here, however, the permeability $(\partial B/\partial H)_H = H_{C1}$ in the Schubnikov phase is probably infinite, as shown by the theoretical calculations of Section 3-2. From (3-24) this leads to an infinite peak in the specific heat at the transition. The singularity is, in fact, weak and easily masked by hysteresis effects. It has been observed recently (on Niobium) by the Rutgers group.

7.3.2 3-2 VORTEX STATE: MICROSCOPIC DESCRIPTION

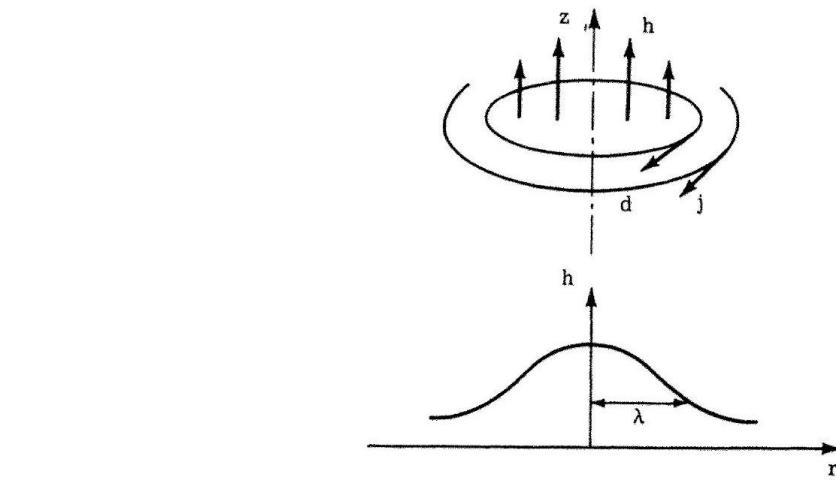
7.3.3 Negative Surface Energy

We have previously seen that in a London ($\xi < \lambda$) superconductor the surface tension of a wall separating normal and superconducting regions becomes negative. Under these conditions, we guess that in the presence of a field a state is created where the N and S regions are finely divided and where the wall energy gives an important contribution to the thermodynamic potential. This situation is very different from that encountered for a Pippard superconductor where the walls are less numerous and where their energy can be neglected in a macroscopic treatment.

Consider, for example, the limit where B is small (that is, few lines of force penetrate the specimen and only a small fraction of the sample is normal). There are essentially two possibilities to maximize the surface to volume ratio for the N regions:

We can form lamina of very small thickness ($\geq \xi$) or filaments of small diameter ($\sim \xi$). In the case of $\lambda \gg \xi$, theoretical calculations show that the second solution is lowest in energy.² We therefore find filaments. They are represented in Fig. 3-4a.

Each filament has a hard core of radius ξ where the superconducting electron density n_s falls as is shown in Fig. 3-4c. The lines of force are not confined to the hard core; the field is maximum at the center of the filament but extends a distance λ (Fig. 3-4b). Annular



(a)
(b)

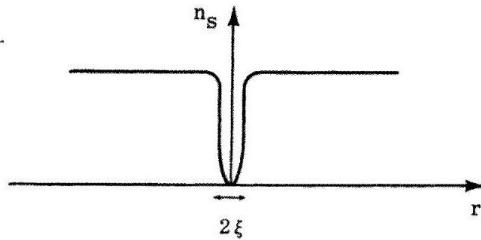


Figure 3-4

Structure of one vortex line in a Type II superconductor. The magnetic field is maximum near the center of the line. Going outwards, h decreases because of the screening in an "electromagnetic region" of radius $\sim \lambda$ (the penetration depth) (Fig. 3-4b). On the other hand,

² See problem, page 71.

the number of superconducting electrons per $\text{cm}^3 n_S$ is reduced only in a small "core region" of radius ξ (Fig. 3 – 4c).

currents j encircle the filament and screen out the field for $r > \lambda$. For $r > \xi$, that is, in most of the region of interest, the currents and fields can be simply calculated by London's equations. It will be shown that the radius and exact form of the hard core only appear in the argument of a logarithm; therefore it will not be necessary to know them accurately. In the limit $\xi \ll \lambda$ we shall, in fact, see that the properties of a filament are very easy to calculate.

What is the flux $\phi = \int h \cdot d\mathbf{r}$ carried by a filament?

Experiment and theory show us that if a bulk superconducting annulus surrounds some lines of force the enclosed flux can only take on discrete values

$$\begin{aligned}\phi &= k\phi_0 \quad (\text{k is an integer}) \\ \phi_0 &= \frac{ch}{2e} = 2 \times 10^{-7} \text{ Gcm}^2\end{aligned}\tag{3-25}$$

The explanation of this effect will be given at the end of Chapter 4. The same result applies here. In order to attain the state of maximum subdivision, each filament carries one quantum of flux ϕ_0 . This condition fixes the field scale in Fig. 3 – 4 b, and the structure of the filament is completely defined.

Such a quantized filament, formed of a very thin hard core surrounded by currents rotating about the axis, is very analogous to the vortex lines found in superfluid He^4 when the helium container is rotated. The only important difference is that the helium atoms are not charged, making $e = 0$ in Eq. (1 – 13). We see that the penetration depth λ in He^4 is infinite and the particle currents j , instead of decreasing exponentially for $r > \lambda$, decrease very slowly (as in $1/r$) far from the filament. Historically, vortex lines were first discussed for the He^4 problem by Onsager and Feynman; the generalization to superconductivity is due to Abrikosov (1956). When the superconducting metal contains a finite density of these lines, we say that it is in the vortex state.

7.3.4 Properties of One Isolated Vortex Line

We now study in detail the structure of one vortex line in the limit $\lambda \gg \xi$. The "hard core" of radius ξ is very small and we shall, for the moment, neglect completely its contribution to the energy.

Then the line energy is given by the formula

$$J = \int_{(r>\xi)} dr \frac{1}{8\pi} [h^2 + \lambda^2(\text{curl } h)^2] \tag{3-26}$$

Equation (3-26) has been derived in Chapter 1 (assuming $\lambda \gg \xi$). For a pure superconductor, the penetration depth λ has the London value

$$\lambda_L = \left[\frac{mc^2}{4\pi n_S e^2} \right]^{1/2} \tag{3-27}$$

For a superconducting alloy, with $\lambda \gg \xi$, Eq. (3-26) still applies, but with a modified (larger) value of λ , as explained in Chapter 2 (see the discussion after Eq. 2-20). In Eq. (3-26) the integration is carried out in all space outside of the "hard core" ($r > \xi$). We also choose to compute the energy per unit length of line; the resulting energy per $\text{cm} J$ is called the line tension. Demanding that J be a minimum leads as usual to the London equation

$$h + \lambda^2 \text{curl curl } h = 0 \quad |r| > \xi \tag{3-28}$$

In the interior of the hard core Eq. (3-28) must be replaced by something more complicated. But, since the hard core has a very small radius, we can try to replace the corresponding singularity, simply by a two-dimensional delta function $\delta_2(r)$, and write

$$h + \lambda^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = \phi_0 \delta_2(r) \quad (3-29)$$

where ϕ_0 is a vector along the line direction. We now show that the strength ϕ_0 in (3-29) represents the total flux carried by the line.

Integrate (3-29) over the interior surface of a circle C of radius r encircling the axis of the cylinder and use the curl formula:

$$\int h \cdot d\sigma + \lambda^2 \oint \operatorname{curl} h \cdot d\ell = \phi_0 \quad (3-30)$$

if the circle has a radius $r \gg \lambda$, the currents $j(r) = c/4\pi \operatorname{curl} h$ are negligible and the line integral along the perimeter of the circle vanishes. Thus the total flux carried by the filament has the value ϕ_0 .

We now pass on to the explicit solution of (3-30) to which is added the Maxwell equation

$$\operatorname{div} h = 0 \quad (3-31)$$

The field h is directed along the z axis; the current lines are circles in the xy plane. It is easy to predict the value of $\operatorname{curl} h$, that is, the current, in the region $\xi \ll r \ll \lambda$. In fact, if we reconsider (3-30) with a circle C whose radius is in this domain, the term $Jh \cdot d\sigma$ is negligible (only a fraction r^2/λ^2 of the flux ϕ_0 passes through the circle C) and we have

$$\lambda^2 2\pi r |\operatorname{curl} h| = \phi_0 \quad (3-32)$$

and

$$|\operatorname{curl} h| = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{1}{r} \quad (\xi < r \ll \lambda) \quad (3-33)$$

Since h is directed along the z axis, we have $|\operatorname{curl} h| = -dh/dr$ and upon integrating this relation

$$h = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda}{r} \right) + \text{const} \right] \quad (\xi < r < \lambda) \quad (3-34)$$

In order to derive the constant of integration in (3-34), it is necessary to write the complete solution to (3-30) and (3-32), which is

$$h = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{r}{\lambda} \right) \quad (3-35)$$

where K_0 is the zero-order Bessel function of an imaginary argument defined as in Morse and Feshbach.³ The important properties of this solution are the asymptotic form (3-34) for $r \ll \lambda$ (it is found that the constant vanishes) and the asymptotic form for large distances

$$h = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2r}} e^{-r/\lambda} \quad (r \gg \lambda) \quad (3-36)$$

Once the fields are determined, it is easy to calculate the energy J . On integrating the second term in (3-28) by parts,

$$J = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int d\sigma \cdot h \times \operatorname{curl} h \quad (3-37)$$

where the integral $\int d\sigma$ is to be taken over the surface of the hard core (cylinder of radius $\sim \xi$). It is convenient to calculate \mathfrak{J} per cm of length along the filament. Then

$$J = \frac{\lambda^2}{8\pi} 2\pi \xi h(\xi) |\operatorname{curl} h(\xi)| \quad (3-38)$$

which is, from (3-34) and (3-33),

$$J = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right) \quad (3-39)$$

DISCUSSION OF THIS FORMULA

(1) J only depends upon ξ logarithmically.

(2) J is a quadratic function of the flux. Upon going to a situation where the flux is $2\phi_0$, it is preferable to have two filaments of flux ϕ_0 (total energy $2J$) than a filament of double flux (energy $4J$). This justifies the choice for ϕ_0 of the minimum flux value, that is, the quantum of flux.

(3) It is possible to rewrite J at $T = 0$ in a rather different form by using the relations

$$\phi_0 = \frac{ch}{2e}, \quad \xi = \xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \quad (3-40)$$

and a relation (which will be proven by the microscopic theory) between the condensation energy and the energy gap $\Delta(0)$:

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0) \quad (3-41)$$

where $N(0) = m^2 v_F / 2\pi^2 \hbar^3$ is the density of states (for one direction of spin) at the Fermi energy in the normal state per unit energy and per cm^3 . Upon regrouping these formulas, we obtain

$$J = \frac{\pi^3}{3} \frac{H_c^2}{8\pi} \xi^2 \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (T = 0) \quad (3-42)$$

This formula is interesting for the following reason:

Until now we have neglected the contribution of the hard core to the line energy. In fact, superconductivity is more or less destroyed in the hard core section and this takes an extra energy $J_{\text{int}} \sim (H_c^2 / 8\pi) \xi^2$.

Dimensionally from (3-42) this energy is comparable to \mathfrak{J} . Numerically, however, it is much smaller. A more detailed calculation gives for the total energy

$$J = \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left(\ln \frac{\lambda}{\xi} + \epsilon \right) \quad (\lambda \gg \xi)$$

The numerical constant ϵ includes the effect of the hard core and is of the order of 0.1.

Problem. Discuss the structure of vortices in a thin film, the applied magnetic field being normal to the film surface (J. Pearl, 1964).

Solution. Again there is a "hard core" of radius ξ (which we assume to be small) surrounded by current rings. But since the currents are restricted to the thickness d of the film, their screening capacity is weak and the "electromagnetic region" is more spread out than in a long vortex line.

Inside the film, we apply Eq. (3-29)

³ Methods of Theoretical Physics, (New York: McGraw-Hill, 1953), Chap. 10, p. 1321.

$$\mathbf{h} + \frac{4\pi\lambda^2}{c} \operatorname{curl} \mathbf{j} = \phi_0 \delta_2(r) \mathbf{n}_z$$

where f is the current density and n_z is a unit vector normal to the film. It is convenient to use the vector potential A rather than the field $h = \operatorname{curl} A$. In the London gauge, we find

$$A + \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{J} = \Phi$$

where $\Phi_r = \Phi_z = 0$ and $\Phi_\theta = \phi_0/2\pi r$.

Now average over the thickness d of the film. If $d \ll \lambda$, A and J are nearly constant in the thickness. Call J the total current $J = jd$. Then

$$J = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} (\Phi - A)$$

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{d}$$

Now replace the film by a infinitesimally small current carrying sheet in the plane $z = 0$, the current density being $J\delta(z)$. This will be valid when d is much smaller than the range of the electromagnetic region.

In terms of the current sheet the equation valid for all space is

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} A = \operatorname{curl} h = \frac{4\pi}{c} j = \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} \delta(z) (\Phi - A)$$

or (since $\operatorname{curl} \operatorname{curl} A = -\nabla^2 A$ in the London gauge)

$$-\nabla^2 A + A \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} \delta(z) = \Phi \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} \delta(z)$$

This result was derived here from the London Eq.(3-29). In actual thin films, such a simple equation does not usually hold. But it is still correct to assume a linear current response of the form $J = (c/4\pi\lambda_{\text{eff}})(\Phi - A)$, where λ_{eff} is some unknown constant, which can be obtained from another experiment (λ_{eff} is, in fact, the effective penetration depth in parallel fields, which could be measured on a hollow cylinder made with the same film).

To solve the equation for A , introduce the three-dimensional Fourier transform

$$A_{qk} = \int A(xyz) \exp i(q_x x + q_y y + kz) dx dy dz$$

and the two-dimensional transforms

$$A_q = \frac{1}{2\pi} \int dk A_{qk} = \int A \delta(z) \exp i(q_x x + q_y y) dx dy dz$$

$$\Phi_q = \int \Phi(xy) \exp i(q_x x + q_y y) dx dy = i \frac{\phi_0}{q^2} n_z x q$$

Then

$$(q^2 + k^2) A_{qk} + \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} A_q = \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} \Phi_q$$

Solve for \mathbf{A}_{qk} and integrate over k :

$$A_q = -\frac{1}{2\pi} \int dk \frac{1}{q^2 + k^2} (A_q - \Phi_q) \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} = -\frac{1}{2q\lambda_{\text{eff}}} (A_q - \Phi_q)$$

$$A_q = \Phi_q \frac{1}{1 + 2q\lambda_{\text{eff}}}$$

From this, all required information can be extracted:

(a) The current has components

$$J_q = \frac{c}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} (\Phi_q - A_q) = \frac{c}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} \Phi_q \frac{2q\lambda_{\text{eff}}}{1 + 2q\lambda_{\text{eff}}}$$

When $q \gg \lambda_{\text{eff}}^{-1}$, J_q is proportional to Φ_q . Thus at small distances r from the center of the vortex

$$\begin{aligned} J(r) &= \frac{c}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} \Phi(r) \\ J &= \frac{c\phi_0}{8\pi^2\lambda_{\text{eff}} r} \quad (\xi \ll r \ll \lambda_{\text{eff}}) \end{aligned}$$

When $q \ll \lambda_{\text{eff}}^{-1}$

$$\begin{aligned} J_q &\approx \frac{c}{4\pi\lambda_{\text{eff}}} 2q\lambda_{\text{eff}} \Phi_q = \frac{c\phi_0}{2\pi} \frac{i_z \times q}{q} \\ J &= \frac{c\phi_0}{4\pi^2 r^2} \quad (r \gg \lambda_{\text{eff}}) \end{aligned}$$

The size of the screening region is λ_{eff} . But even beyond λ_{eff} , J decreases only slowly with distance.

(b) The normal field component h_z in the film is derived from

$$h_{zq} = (-iq \times \mathbf{A}_q)_z = \frac{\phi_u}{1 + 2q\lambda_{\text{eff}}}$$

When $q \gg \lambda_{\text{eff}}^{-1}$

$$\begin{aligned} h_{zq} &\sim \frac{\phi_0}{2q\lambda_{\text{eff}}} \\ h_z(r) &\sim \frac{\phi_0}{4\pi\lambda_{\text{eff}} r} \quad (\xi < r \ll \lambda_{\text{eff}}) \end{aligned}$$

At large r we derive h_z most easily from the current J

$$\begin{aligned} h_z &= -\frac{4\pi\lambda_{\text{eff}}}{c} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Jr) \\ &\cong \frac{2}{\pi} \frac{\phi_0 \lambda_{\text{eff}}}{r^3} \end{aligned}$$

(c) The self-energy of the vortex is derived from Eq. (3-26); the required components of h and $\text{curl } h$ at the core surface ($\xi \ll \lambda_{\text{eff}}$) are quoted above. The result is

$$E = \left(\frac{\phi_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}} \log \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi} = \frac{137}{16} \frac{\hbar c}{\lambda_{\text{eff}}} \log \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\xi}$$

Typically $\lambda_{\text{eff}} \sim 1000 \text{\AA}$ and $E \sim 30 \text{ eV}$.

(d) The force between two vortices is

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\phi_0}{c} \mathbf{n}_z \times J(\mathbf{R}_{12})$$

Note that at long distances $J \sim 1/R^2$ and the repulsion energy decreases only like $1/R$. This long range is due to the fact that most of the interaction takes place not through the superconductor, but through the empty space above and below.

7.3.5 Interactions between Vortex Lines

7.3.6 TWO VORTEX LINES

Consider two parallel lines directed along the z axis with positions $r_1 = (x_1, y_1), r_2 = (x_2, y_2)$. The magnetic field distribution is determined by the equations

$$h + \lambda^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = \phi_0 [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]$$

which is the generalization of (3-29). The solution h is the superposition of the fields h_1 and h_2 due to the filaments (1) and (2).

$$\begin{aligned} h(r) &= h_1(r) + h_2(r) \\ h_1(r) &= \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r - r_1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

The energy of the system is still written

$$F = \int \frac{h^2 + \lambda^2(\operatorname{curl} h)^2}{8\pi} dr = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int h \times \operatorname{curl} h \cdot d\sigma$$

Here the integral $\int d\sigma$ is to be taken over the surfaces of the two hard cores ($|r - r_i| = \xi$); writing explicitly the two contributions to h we obtain

$$F = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int (d\sigma_1 + d\sigma_2) \cdot (h_1 + h_2) \times (\operatorname{curl} h_1 + \operatorname{curl} h_2)$$

There are 8 terms that we regroup as follows: First the individual energy of each filament

$$\frac{\lambda^2}{8\pi} \left[\int d\sigma_1 \cdot h_1 \times \operatorname{curl} h_1 + \int d\sigma_2 \cdot h_2 \times \operatorname{curl} h_2 \right] = 2J$$

then the terms

$$\int (h_1 + h_2) \cdot (\operatorname{curl} h_1 \times d\sigma_2 + \operatorname{curl} h_2 \times d\sigma_1)$$

which tend toward 0 in the limit where $\xi \ll \lambda$ because $h_1 + h_2$ and $\operatorname{curl} h_1$ are finite in the domain of integration $\int d\sigma_2$. There remains an important contribution

$$U_{12} = \frac{\lambda^2}{8\pi} \int (h_1 \times \operatorname{curl} h_2 \cdot d\sigma_2 + h_2 \times \operatorname{curl} h_1 \cdot d\sigma_1)$$

In effect, $\operatorname{curl} h_2$ is proportional to $1/|r - r_2|$ for $|r - r_2| \ll \lambda$ from (3-33) and after integration one obtains a finite result as $\xi \rightarrow 0$. If we set

$$h_{12} = h_1(r_2) = h_2(r_1) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$$

then using (3-33) we obtain

$$U_{12} = \frac{\phi_0 h_{12}}{4\pi}$$

U_{12} represents the interaction energy (per cm) of two filaments. This is a repulsive energy which decreases as $(1/\sqrt{r_{12}}) e^{-r_{12}/\lambda}$ at large distances, and which diverges as $\ln(|\lambda/r_{12}|)$ at short distances.

A remark about forces. Let us compute the force f_2 experienced by line 2, as due to the interaction U_{12}

$$f_{2x} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = -\frac{\phi_0}{4\pi} \frac{\partial h_{12}}{\partial x_2}$$

Introduce now the current $f = n_s ev$, which would exist, in the presence of line 1 alone, at the point x_2y_2 . Then $j_y = -(c/4\pi)(\partial h_{12}/\partial x_2)$ by Maxwell's equation and we have

$$f_{2x} = \frac{\phi_0}{c} j_y = \frac{1}{2} hnvy$$

When more than one line is acting on line 2, Eq. (3-52) remains valid provided we interpret v as the total superfluid velocity at point (x_2y_2) .

Conclusion. A line is in static equilibrium when the superfluid velocity at any point on the line is 0.

7.3.7 MAGNETIZATION CURVES

We now form the Gibbs function, minimize it, and deduce the density of vortices existing in the sample in thermal equilibrium.

$$G = n_L J + \sum_{ij} U_{ij} - \frac{BH}{4\pi}$$

The first term represents the individual energies of the lines, n_L is the number of lines per cm^2 , related to the induction B by

$$B = n_L \phi_0$$

(This expresses the fact that each vortex carries a flux ϕ_0 .) The second term in (3-53) describes the repulsive interactions between vortices; the explicit form of U_{ij} is given by (3-49) and (3-50). Finally, the last term gives the effect of the field H and favors large values of B . It plays the role of a pressure that tends to increase the density of vortices.

In order to numerically evaluate the interaction term, it is useful to distinguish several regions:

- (1) In the small induction region ($n_L \lambda^2 \ll 1$), only the interaction between nearest neighbor vortices is important and the sum $\sum U_{ij}$ converges rapidly.
- (2) When B is larger ($n_L \lambda^2 \gg 1$), the range λ of the interaction becomes large compared to the spacing of the filament lattice, and other methods are preferable to evaluate $\sum U_{ij}$.
- (3) Finally, when n_L becomes comparable to $1/\xi^2$, the hard cores begin to overlap and the elementary methods used in this section are no longer valid. But, qualitatively, we may guess that when the hard cores do overlap, superconductivity is destroyed in the bulk. This corresponds to inductions $B \sim \phi_0/\xi^2$.

THE FIRST PENETRATION FIELD H_{C_1}

At very low line densities (low B), the interaction term in Eq. (3-53) is small and we shall first neglect it completely. Then, using Eq.(3-54) we get

$$G \cong B \left(\frac{5}{\phi_0} - \frac{H}{4\pi} \right)$$

When $H < 4\pi J/\phi_0$, G is an increasing function of B . The lowest G is obtained for $B = 0$ (complete Meissner effect).

When $H > 4\pi J/\phi_0$, we can lower G by choosing $B \neq 0$. There is some flux penetration.

We conclude that the first penetration field is given by

$$H_{c1} = \frac{4\pi J}{\phi_0} = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \log \frac{\lambda}{\xi}$$

H_{c1} is often much smaller than the "thermodynamic" field H_c defined by (3-1). For $T = 0$, for example, on using (3-40) and (3-41), we find

$$\frac{H_{c1}}{H_c} = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\xi}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda}{\xi} \right)$$

The result is therefore $H_{c1}/H_c \sim \xi/\lambda$ and this may be much smaller than 1. A measurement of H_{c1} and H_c , in principle, allows a determination of ξ and λ . For example, for V_3Ga , if at $T = 0$, $H_c \sim 6000G$ and $H_{c1} \sim 200G$, one finds from (3-57) that $\lambda/\xi \sim 80$ and then, from (3-56), $\lambda \sim 2000\text{\AA}$ and $\xi \sim 25\text{\AA}$. These orders of magnitude are still rather inaccurate because of current uncertainties in H_c and H_{c1} , but it is hoped that the situation will improve in the near future.

7.3.8 FIELDS SLIGHTLY LARGER THAN H_{C_1}

For finite line densities (finite B 's) we must take into account the interaction term in Eq. (3-53). To minimize this repulsive energy, the lines will take a regular arrangement. Detailed calculations based on (3-53) show that, at all B 's, the most favorable arrangement is triangular, as shown on Fig. 3-5 (J. Matricon, 1964).

If H is only slightly larger than H_{c1} , we can guess that the equilibrium density of lines n will be small, and thus the distance between neighboring lines d will be large. If $d > \lambda$, we may keep only the nearest neighbor contributions to the interaction term in (3-53) and write

$$G \cong \frac{B}{4\pi} \left[H_{c1} - H + \frac{1}{2} z \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right]$$

where z is the number of nearest neighbors of one line ($z = 6$ for the triangular lattice), d is related to the induction B through the relation

$$B \equiv \phi_0 n_L = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\phi_0}{d^2} \quad (\text{triangular lattice})$$

Equation (3-59) can be easily verified on Fig. 3-5. The function $G(B)$ is represented in Fig. 3-6. Since $H > H_{C_1}$, the initial slope $(\partial G / \partial B)_{B=0}$

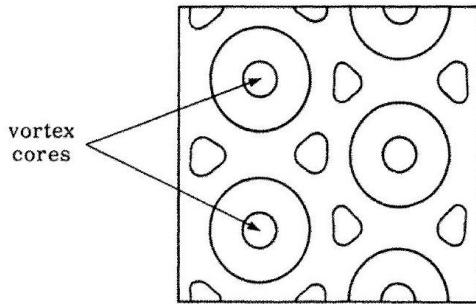


Figure 3-5

A triangular lattice of vortex line (after Kleiner, Roth, and Autler, Phy's. Rev., 133A, 1226 (1964). The plane of the figure is normal to the field direction. The contours give the lines of constant n_s . This figure describes the situation at high fields (nearly overlapping cores).

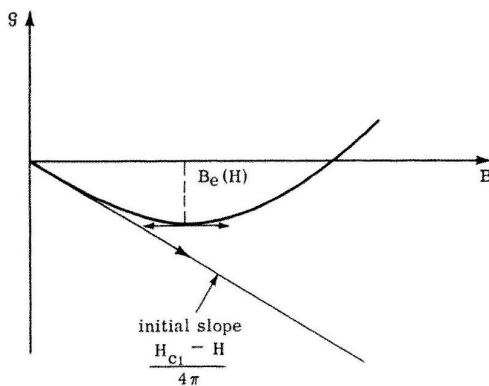


Figure 3-6 The thermodynamic potential S as a function of the induction B ($B = n_L \phi_0$ measures the number of vortices per $\text{cm}^2 n_L$). The equilibrium value of B [$B_e(H)$] corresponds to the minimum of g .

is negative. As B increases, the interaction term begins to contribute but rather slowly, since it is proportional to $K_0(d/\lambda)$. When $d > \lambda$ we may write, according to (3-36)

$$K_0\left(\frac{d}{\lambda}\right) \sim \exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right) = \exp\left[-1.07\sqrt{\frac{\phi_0}{B\lambda^2}}\right]$$

Thus the interaction term is exponentially small at small B 's. At larger B 's however, it dominates the over-all behavior and $G(B)$ increases. There is a minimum of G for some value $B = B(H)$. $B(H)$ is the induction found at equilibrium in the field H . The theoretical $B(H)$ or $M(H)$ has been computed along these lines by Goodman and is shown on Fig. 3-7, together with experimental results on a particularly good MoRe alloy.

The following points must be noticed:

The theoretical curve has an infinite slope $(\partial M/\partial H)_H = H_{c_1} = \infty$ at the first penetration field. Physically, this reflects the fact that the lines repel each other like $e^{-d/\lambda}$, that is, we may think of their interaction as having a finite range λ . At field slightly larger than H_{c_1} it is thus possible to form many lines in the sample without competing against the interaction energy. The experimental curve does not show

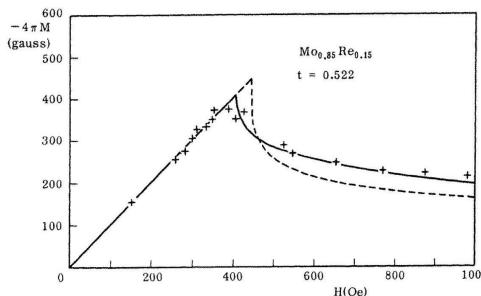


Figure 3 – 7

Experimental magnetization of a molybdenum-rhenium alloy at $T = 0.52 T_0$ (after Joiner and Blaugher, Rev. Mod. Phy., 36, 67 (1964)). Also shown are two theoretical magnetization curves (after B. B. Goodman). The broken curve is for a laminar model, the continuous one for vortex lines.

a very large slope $(\partial M/\partial H)_H = H_{c_1}$; this is not very surprising since in the region of interest the interactions between lines are very weak and the lines can easily be pinned by structural defects. However, as we depart from H_{c_1} by more than 10%, we get good agreement between theory and experiment.

A similar theoretical curve can be drawn for another model where the flux-carrying units are not vortex lines, but laminas (see problem, p. 71). If the distance between laminas is d , we

again find a repulsion between units proportional to $e^{-d/\lambda}$. However, in this case, the induction B is proportional to d^{-1} , while in the line case it is proportional to d^{-2} as shown by Eq. (3-59). Thus the fall of $M(H)$ for $H > H_{C_1}$ is more rapid in the laminar model than in the vortex line model. The two theoretical curves are compared on Fig. 3-7; it is apparent that the vortex line gives a better fit, as emphasized by Goodman.

$$\text{DOMAIN } \frac{1}{\lambda^2} \ll n_L \ll \frac{1}{\xi^2}$$

In this region the vortices form a rather dense lattice and the interactions extend to distant neighbors. The interaction energy can then be calculated by the following method: The field $h(r)$ directed along the z axis is the solution of

$$h + \lambda^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = \phi_0 \sum_i \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \\ \operatorname{div} h = 0$$

where $r_i = (x_i, y_i)$ denotes the position of the i th vortex. The points \mathbf{r}_i form a two-dimensional periodic lattice. We define the Fourier transform h_J by

$$h_J = n_L \int_{\text{cell}} h(x_i, y_i) \exp[i(J_x x + J_y y)] dx dy$$

Since $h(x_i, y_i)$ is periodic, h_J is nonvanishing only when J is a reciprocal lattice vector. From (3-61),

$$h_J = \frac{n_L \varphi_0}{1 + \lambda^2 J^2}$$

Finally the free energy becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{8\pi} \int (h^2 + \lambda^2 \operatorname{curl}^2 h) dr \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_J h_J^2 (1 + \lambda^2 J^2) = \frac{B^2}{8\pi} \sum_J \frac{1}{1 + \lambda^2 J^2} \\ &= \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \sum_{J \neq 0} \frac{1}{1 + \lambda^2 J^2} \end{aligned}$$

In the sum $\sum_{J \neq 0}$, the minimum magnitude of the vectors J is of the order $1/d \sim \sqrt{n_L}$ and $\lambda^2 J^2 \sim n_L \lambda^2 \gg 1$ in the domain of interest. Therefore $1/(1 + \lambda^2 J^2)$ can be replaced by $1/\lambda^2 J^2$. Finally we must perform the sum $\sum_{J \neq 0} 1/J^2$, which depends on the particular lattice considered. Here, we will simplify the calculation by replacing the sum by an integral

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{J^2} &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2 n_L} \int \frac{dJ_x dJ_y}{J^2} \rightarrow \frac{1}{2\pi n_L} \int_{J_{\min}}^{J_{\max}} \frac{J dJ}{J^2} \\ &= \frac{1}{2\pi n_L} \ln \left| \frac{J_{\max}}{J_{\min}} \right| \end{aligned}$$

with $J_{\min} \sim 1/d$ and $J_{\max} \sim 1/\xi$ (the Fourier components relative to the interior of the hard core must be excluded). We finally find

$$\begin{aligned} F &= \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B}{4\pi} H_{c_1} \frac{\ln \beta d/\xi}{\ln \lambda/\xi} \\ G &= F - \frac{BH}{4\pi} \end{aligned}$$

In (3-64) β is a numerical constant of the order unity (for the triangular lattice, Matricon has calculated $\beta = 0.381$). The $B(H)$ relation is obtained as usual by imposing $\partial G/\partial B = 0$. This gives

$$H = B + H_{c_1} \frac{\ln \left(\beta' \frac{d}{\xi} \right)}{\ln \frac{\lambda}{\xi}}$$

where $\beta' = \beta e^{-1/2}$ and where d is always related to B by Eq. (3-59). The logarithmic dependences predicted by (3-65) are in rather good agreement with the experimental data on reversible magnetization curves in materials with $\lambda \gg \xi$.

DOMAIN $n_L \sim \xi^{-2}$

Here, as already pointed out, our simple model breaks down, and we shall need a more elaborate approach based on the Landau-Ginsburg equations (Chapter 6). The upper critical field H_{C_2} is of order φ_0/ξ^2 . This, physically, corresponds to the onset of overlap between the hard cores.

Problem. Compare the Gibbs function in the filamentary structure described above with that of a possible laminar structure.

Solution. As before, we shall limit our considerations to the case $\lambda \gg \xi$. The laminar structure will be formed of planes, for example, perpendicular to the x axis, and equidistant (spacing d) (Fig. 3-8). In the neighborhood of each of these planes, over a thickness $\sim 2\xi$, the superconductivity is strongly perturbed (N regions). In the remainder (S regions), the density of superconducting electrons has the value n_S . Such a model has been discussed in detail by Goodman (1961). The fields $h(x)$ (parallel to the z axis) are determined by the London equation

$$h = \lambda^2 \frac{d^2 h}{dx^2}$$

except in the thin (N) regions. The solution is of the form

$$h = H_m \cosh(x/\lambda) / \cosh P$$

where $P = d/2\lambda$ and H_m is the field in the N regions. The free energy of the (S) regions becomes, from (3-26),

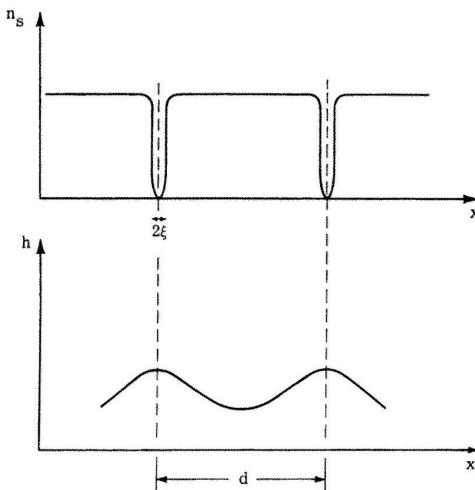


Figure 3-8

The laminar model for the Schubnikov phase. Thin normal sheets N of thickness $\sim 2\xi$ alternate with superconducting sheets S . The N sheets repel each other. The range of the repulsive forces is the penetration depth λ .

$$F_1 = \frac{2}{d} \int_0^{d/2} dx \frac{h^2 + \lambda^2 \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}{8\pi} = \frac{H_m^2 \tanh p}{8\pi} \frac{\tanh p}{p}$$

It is necessary to add the formation energy of the N regions

$$F_2 \cong \frac{H_c^2}{8\pi} \frac{2\xi}{d} = \frac{H_c^2}{8\pi} \frac{1}{PK}$$

where $\kappa = \lambda/\xi$. Finally, to obtain the Gibbs function, we must add a term

$$\begin{aligned} -\frac{BH}{4\pi} &= -H \frac{H_m}{4\pi} \frac{\tanh P}{P} \\ G_{\text{laminar}} &= \frac{1}{8\pi} \left[H_m^2 \frac{\tanh P}{P} + \frac{H_c^2}{P.K} - 2HH_m \frac{\tanh P}{P} \right] \end{aligned}$$

On minimizing G with respect to H_m we obtain $H = H_m$.

$$G_{\text{laminar}} = \frac{1}{8\pi P} \left[-H^2 \tanh P + \frac{H_c^2}{\kappa} \right]$$

For $H < H_C/\sqrt{\kappa}$ the minimum G is obtained for infinite P , which corresponds to a complete Meissner effect. For $H > H_c/\sqrt{\kappa}$ the minimum occurs for finite P . The initial field for penetration is therefore $H_c/\sqrt{\kappa}$ for the laminar model. This is to be compared with the result for the vortex line model, Eq. (3-56).

$$H_{c1} = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{H_c}{\kappa} \ln \kappa (\kappa \gg 1)$$

for $\kappa \gg 1, H_{C1} < H_C/\kappa$. For $H_{C1} < H < H_c/\kappa^{1/2}$, we have

$$\begin{aligned} G_{\text{vortex}} &< G_{\text{Meissner}} \\ G_{\text{laminar}} &= G_{\text{Meissner}} \end{aligned}$$

therefore, $G_{\text{vortex}} < G_{\text{laminar}}$; that is, the vortex state is more favorable in the weak induction domain.

It is also possible to make the comparison in the region where H is larger ($H \sim H_C$, for example). We are then in the region $P \ll 1$ for the laminar model. By expanding $\tanh P \cong P - P^3/3$ and minimizing G, we obtain

$$G_{\text{laminar}} = -\frac{H^2}{8\pi} + \left(\frac{3}{2\kappa} \right)^{2/3} \frac{H_c^{4/3} H^{2/3}}{8\pi}$$

In the vortex line model, the potential is determined from (3-64) and (3-65)

$$\begin{aligned} G_{\text{vortex}} &= -\frac{1}{8\pi} (H - H')^2 \\ H' &= H_{c1} \frac{\ln d/\xi}{\ln \kappa} = \nu \frac{H_c}{\kappa} \end{aligned}$$

where ν is a constant of order unity. For $T = 0$

$$\nu = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \ln \frac{d}{\xi}$$

In the region of interest $H' \ll H$ and

$$G_{\text{vortex}} = -\frac{H^2}{8\pi} + \nu \frac{HH_c}{4\pi\kappa}$$

therefore

$$\frac{G_{\text{laminar}} + \frac{H^2}{8\pi}}{G_{\text{vortex}} + \frac{H^2}{8\pi}} = \text{const} \left(\frac{KH}{c} \right)^{1/3}$$

when $H < \kappa H_c$ (which roughly corresponds to the upper critical field H_{c2}), $G_{\text{laminar}} > G_{\text{vortex}}$. Thus the vortex state is still most stable in the intermediate and high field regions.⁴

Problem. Discuss the equilibrium magnetization curves for a second kind superconductor in the form of an ellipsoid of revolution, the field being applied along the ellipsoidal axis.

Solution. The equations $\text{div } B = 0$, $\text{curl } H = 0$, and $B = (H/|H|)B_e(H)$, where $B_e(H)$ is the equilibrium induction in the presence of a field H measured for a long cylinder, allow a solution where B and H are constant in the ellipsoid with $H = H_0 - NM = H_0 - N(B - H)/4\pi$ where N is the demagnetizing coefficient of the ellipsoid. The relation between B and the applied field is therefore given by the implicit formula

$$B = B_e \left(\frac{H_0 - \frac{NB}{4\pi}}{1 - \frac{N}{4\pi}} \right)$$

B is nonzero for $H_0 > H_{C1}(1 - N/4\pi)$. The slope $(dB/dH_0)_{B=0}$ is finite and equal to $4\pi/N$. The upper critical field remains equal to H_{C2} since $B(H_{C2}) = H_{C2}$ when the transition is second order.

Problem. Discuss the scattering of slow neutrons by a regular lattice of vortex lines in a superconductor.

Solution. The interaction between neutron and lines is $\mu_n h(\mathbf{r})$ where $\mu_n = 1.91e/2Mc$ is the neutron moment and M the neutron mass. Consider a scattering event where the neutron momentum changes from $\hbar k_0$ to $\hbar(k_0 + q)$. The corresponding scattering amplitude is given by the Born approximation formula

$$a = \frac{M}{2\pi\hbar^2} \int \mu_n h(r) e^{iq \cdot r} dr$$

This is nonzero only if $q = J$, where J is a reciprocal lattice vector associated with the two-dimensional "line lattice." From (3-62) we find

$$\int h(r) e^{iJ \cdot r} dr = \frac{BV}{1 + \lambda^2 J^2} = \frac{n_L \phi_0 V}{1 + \lambda^2 J^2}$$

where V is the sample volume and n_L the number of lines per cm^2 . Thus

$$a_J = \frac{1}{2} 1.91 \frac{n_L V}{1 + \lambda^2 J^2}$$

For a triangular lattice of lines with nearest neighbor distance d , we have $n_L = (2/\sqrt{3})(1/d^2)$ and, for the first reflection, $J = (4\pi/\sqrt{3})d^{-1}$. Taking $B = 2000\text{G}$ ($n_L = 10^{10}$), we get $d \sim 10^3 \text{\AA}$ and $J \sim 6.710^5 \text{ cm}^{-1}$. For $\lambda = 1000 \text{\AA}$ this gives $(\lambda J)^2 \cong 45 \gg 1$. We compute the amplitude a per atom (since this is the quantity familiar to experimentalists). Inserting for V an atomic volume of 30\AA^3 we get $a \cong 0.710^{-13} \text{ cm}$. The corresponding "coherent scattering cross section" is $4\pi a^2 \sim 5 \times 10^{-28} \text{ cm}^2 = 0.5 \text{ millibarns}$ - a small, but measurable value.

The scattering angle θ for this first reflection is very small $\theta \cong (J/k_0) = (2/\sqrt{3})(\lambda_n/d)$ where we have introduced the neutron wavelength $\lambda_n = 2\pi/k_0$. At best, with subthermal neutrons we can make λ_n as large as $\sim 5 \text{\AA}$. For the above example this leads to angles $\theta \sim 6.10^{-3} \text{ rad}$ (or $20'$ of arc). The experiment has been performed on Nb metal (Cribier, Jacrot, et al., 1964). Due

These elementary calculations of G are not sufficient in the neighborhood of H_{c2} . We return later to a study of the region using the Landau-Ginsburg equations.

to the $1/(1+\lambda^2 J^2)$ dependence of a , it has been possible only to observe the first reflection (with the smallest J). (See Fig 3-9.)

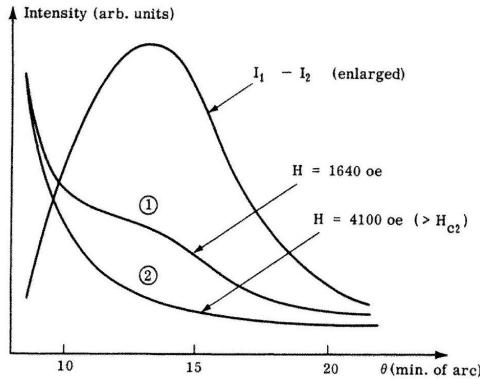


Figure 3-9

Neutron scattering by an array of vortex lines in niobium metal at $T = 4.2^\circ\text{K}$. (Courtesy of D. Cribier.)

Problem. Calculate the broadening of a nuclear magnetic resonance line arising from the field inhomogeneities associated with the vortex state (P. Pincus, 1964).

Solution. In intermediate fields $H_{c_1} \ll H \ll H_{c_2}$ where the vortices form a dense lattice, the field distribution is given by the Fourier transform of Eq. (3-62). A knowledge of all the moments of the field distribution would completely determine the nuclear magnetic resonance line shape (if this were the only source of broadening). However if the line does not have anomalous wings, as is often the case (Jaccarino and Gossard, 1964), the second moment is a good measure of the line width (see A. Abragam, Principles of Nuclear Magnetism, Clarendon Press, 1961). Thus the line width is given by

$$\Delta H = [\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2]^{1/2}$$

where $\langle \rangle$ denotes a spatial average. The term $\langle h \rangle$ is just $n_L \phi_0 = B \langle h^2 \rangle$ can easily be calculated from Eq. (3-62):

$$\langle h^2 \rangle = S^{-1} \int h^2(r) d\sigma = \sum_J h_J h_{-J} = n_L^2 \phi_0^2 \sum_J [1 + (\lambda J)^2]^{-2}$$

where S is the surface area of the sample perpendicular to the field. On replacing the sum over reciprocal lattice vectors by an integral in a similar manner as is done in the text after Eq. (3-63), we obtain

$$\Delta H = \frac{B}{\sqrt{4\pi}} \frac{d}{\lambda} \left[1 + \left(\frac{2\pi\lambda}{d} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

where for simplicity we have assumed a square lattice. This result is valid in the domain $d \gg \xi$. In the intermediate field region $d \ll \lambda$, this leads to

$$\Delta H \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\phi_0}{(2\pi)^{3/2} \lambda^2}$$

Notice that this width is of the order of H_{C_1} (for V_3Ga , $\lambda \sim 2000\text{\AA}$, $\Delta H \approx 20\text{Oe}$) and remains nearly field independent on to fields of the order of H_{c_2} where the inhomogeneous broadening vanishes. For fields near H_{C_1} ($d \approx \lambda$), the broadening is more severe. More detailed calculations of the line shape using Eq. (3-62) have been performed by Matricon.

Problem. Compute the energy of a vortex line near the surface of the specimen, the line being parallel to the surface.

Solution. Let the line, and the fields, be parallel to the z axis, the limiting surface being the $y0z$ plane, the sample occupying the half-space $x > 0$. The field $h(r)$ is governed by the equation

$$h + \lambda^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} h = \phi_0 \delta_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L)$$

where r_L represents the two-dimensional coordinate of the line we shall take $r_L = (x_L, 0)$ and ϕ_0 is a vector, of length ϕ_0 , along z . The boundary conditions on the surface are

$$h = H \quad (\operatorname{curl} h)_x = 0 \quad (0 \text{ normal current})$$

where H is the applied field. The solution $h(r)$ will be written as

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$$

where $h_1 = H \exp(-x/\lambda_L)$ represents the field penetration in the absence of any line, while h_2 is due to the line, and can be obtained by a method of images. To the line $(x_L, 0)$ we add an image of opposite sign located at $(-x_L, 0)$ and take for h_2 the algebraic sum of the field due to the line and image. Thus h_2 automatically vanishes on the limiting surface $x = 0$ and the boundary condition is satisfied.

Having constructed $h(r)$, we now compute the thermodynamic potential

$$S = \int dr \left\{ \frac{h^2 + \lambda^2(\operatorname{curl} h)^2}{8\pi} - \frac{H \cdot h}{4\pi} \right\}$$

The integral is taken in the sample volume ($x > 0$) except for the core region of the line, which is excluded. The last term is the microscopic analog of the standard $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/4\pi$ term for macroscopic systems. We transform S into a surface integral, using the London equation for h , and we obtain

$$S = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_{(\text{core and plane})} d\sigma \cdot \left(\frac{1}{2} h - H \right) \times \operatorname{curl} h$$

The surface integral $\int d\sigma$ includes the surface of the hard core (giving a contribution S') and the surface of the specimen (giving a contribution S''). As usual the only important term in $\int_{\text{core}} d\sigma$ (in the limit $\xi \rightarrow 0$) comes from the singular term in $\operatorname{curl} h$, and the result is

$$S' = \frac{\phi_0}{4\pi} \left(\frac{1}{2} h(r_L) - H \right)$$

The second term S'' may be written as

$$\varrho'' = -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_{\text{plane}} d\sigma \cdot h_1 \times \operatorname{curl} h$$

since on the sample surface $h = h_1 = H$. Writing $\operatorname{curl} h = \operatorname{curl} h_1 + \operatorname{curl} h_2$ we can separate in G'' a term involving $h_1 \times \operatorname{curl} h_1$, which is the energy in the absence of the line, an additive constant we drop from now on. We are left with

$$S'' = -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_{\text{plane}} d\sigma \cdot h_1 \times \operatorname{curl} h_2$$

We rewrite this integral as

$$\int_{\text{plane}} = \int_{\text{core} + \text{plane}} - \int_{\text{core}}$$

By making use of London's equation for \mathbf{h} , in the region outside the core, we have

$$\int_{\text{core} + \text{plane}} d\sigma \cdot h_1 \times \text{curl } h_2 = \int_{\text{core} + \text{plane}} d\sigma \cdot h_2 \times \text{curl } h_1$$

h_1 is not singular near the line axis; thus the core contribution to the righthand side vanishes when $\xi \rightarrow 0$. The integral on the plane also vanishes since $(\mathbf{h}_2)_{x=0} = 0$. Finally

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_{\text{core}} d\sigma \cdot h_1 \times \text{curl } h_2 = \frac{\phi_0 h_1(r_L)}{8\pi} \\ S &= \frac{\phi_0}{4\pi} \left[H \exp(-x_L/\lambda) + \frac{1}{2} h_2(r_L) - H \right] \end{aligned}$$

[Note incidentally that $S = 0$ when $x_L = 0$, that is, when the line is just on the surface, since $h_2(x = 0) = 0$.] If we analyze $h_2(r_L)$ into a direct term and an image term, the direct term gives as a contribution to g the line self-energy $J = \phi_0 H_{C1}/4\pi$. The image term describes an attraction between line and image, of value $-(\phi_0/8\pi) h(2x_L)$ where $h(r)$ is the function giving the field at distance r of a single line (Eq. 3-35). Finally

$$S = \frac{\phi_0}{4\pi} \left[H \exp(-x_L/\lambda) - \frac{1}{2} h(2x_L) + H_{C1} - H \right]$$

7.3.9 Discussion

(1) The term $(\phi_0 H/4\pi) \exp(-x_L/\lambda)$ describes the interaction of the line with the external field and the associated screening currents. It has the same form as Eq. (3-50). It is a repulsive term.

(2) The term $-\phi_0 h(2x_L)/8\pi$ represents the attraction between the line and its image. The magnitude of this energy differs from Eq. (3-50) by a factor $\frac{1}{2}$. But the force derived from it has the conventional magnitude $\phi_0 j/c$ [when differentiating $h(2x_L)$ with respect to x_L , we get a factor 2].

(3) The aspect of $S(x_L)$ for various values of the applied field H is shown on Fig. 3-10. When $H \sim H_{C1}$ there is a strong barrier opposing the entry of a line. We can understand this barrier as follows: When $H = H_{C1}$, $S(x_L = 0) = S(x_L = \infty) = 0$. if we start from x_L large and bring the line closer to the surface,

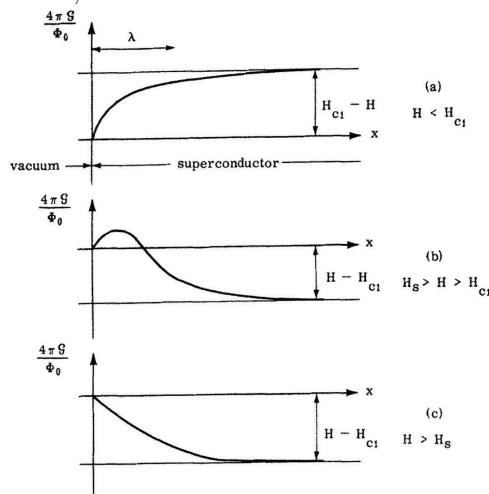


Figure 3-10

Surface barrier impeding the entry of the first flux line is a Type II superconductor. (a) When $H < H_{c1}$, the force on the line always points towards the surface: no lines can exist (in an ideal specimen). (b) When $H_S > H > H_{c1}$ the line gains an energy $(\phi_0/4\pi)(H - H_{ci})$ as it reaches the deep inside of the sample. But there is a barrier near the surface, and the line will not enter if the surface is clean. (c) When $H > H_S$, the barrier disappears.

the repulsive term ($\sim \exp(-x_L/\lambda)$) dominates the image term ($\sim \exp(-2x_L/\lambda)$). Thus S becomes positive and we have a barrier. The barrier disappears, however, in high fields as is clear in Fig. 3 – 10 (c). When $H > H_S = \phi_0/4\pi\lambda\xi$, it can be seen from the equation for S that the slope $(\partial S/\partial x_L)x_L = \xi$ becomes negative.⁵

⁵ We shall see later from the microscopic analysis that the field H_S thus defined is of the order of the thermodynamic critical field H_c .

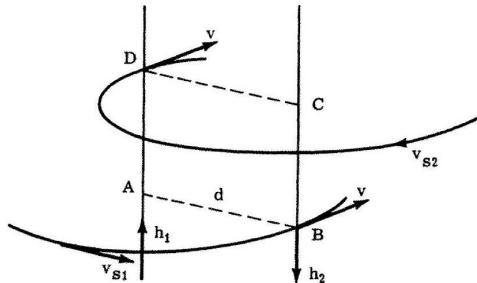
The conclusion is that, at field $H < H_S$, the lines cannot enter in an ideal specimen (although their entry is thermodynamically allowed as soon as $H > H_{c1}$). These surface barrier effects have been predicted independently by Bean and Livingston and by the Orsay group. They have been observed experimentally on lead thallium alloys (Tomash and Joseph) and on niobium metal (de Blois and de Sorbo). (The sample surface must have very few irregularities on the scale of λ .)

7.3.10 Vortex Line Motions

Consider the two antiparallel vortices of Fig. 3-11. According to Eq. (3 – 50) they attract each other. Will they move under the action of this force, or will they stand still? This question is very much debated at the present time. My personal belief is that in a pure metal each line will drift in the other's velocity field. They will thus both move at right angle from their common plane, with a velocity

$$v_{\text{drift}} = v_{12}$$

where v_{12} is the superfluid velocity at point 2 due to the presence of line 1.



(1) (2)

Figure 3-11

Two antiparallel vortex lines in a pure superconductor of Type II. \mathbf{v}_{s1} (\mathbf{v}_{s2}) is the superfluid velocity induced by line 1 (2). Each line drifts with the local superfluid velocity \mathbf{v} . For that particular geometry both lines go with the same velocity. Note that \mathbf{v} is normal to the plane $ABCD$ of the lines.

Such drift motions should lead to amusing collective modes for an assembly of vortex lines in a very pure metal of Type II. (P. G. de Gennes, J. Matricon, 1962.)

In dirty superconductors, on the other hand, friction between the lines and the lattice will dominate the motion. The two antiparallel vortex lines AD and CB will then move toward one another, as shown on Fig. 3 – 12, with a velocity

$$v_{\text{drift}}(2) = -v_{\text{drift}} \left(1; \frac{f}{\eta} \right)$$

where f is the attractive force between the lines, as given by Eq. (3-52) and η is a viscosity coefficient. We can estimate η with the following assumptions: suppose that the currents due to line 1 are not distorted near the core of line 2. This core then carries a current density $j = nev_{12}$. But this core is essentially normal. Thus we expect a loss (per unit length of line 2)

$$w = \frac{j^2}{\sigma\pi\xi^2}$$

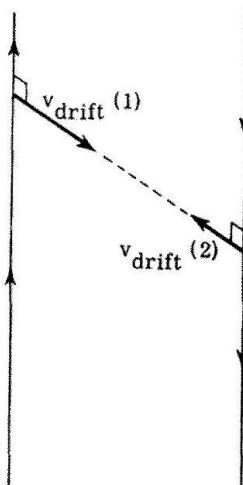
where $\sigma = ne^2\tau/m$ is the normal state conductivity and ξ the core radius. This power dissipation must also be equal to $fv_{\text{drift}}(2) = 1/\eta f^2$. Recalling from Eq. (3-52) that $f = \frac{1}{2}nhv_{12}$, we obtain

$$\eta = \frac{n\tau h^2}{4\pi m\xi^2}$$

Viscous motions which are reasonably well described by this type of damping have been observed in dirty materials by Kim and coworkers.

Figure 3-12

Two antiparallel vortex lines in a dirty superconductor of Type II: the lines move toward each other with a drift velocity controlled by friction with the lattice.



Part III

Problems and Questions in

Superconductivity

8 Типичные задачи

(!!! добавлю из общефиза ЭД и конд сред сюда многие задачи!!!)

8.1 Вопросы на понимание сверхпроводимости

8.1.1 Вопросы на понимание феноменологии и качественных соображений

Какова глубина проникновения поля в сверхпроводник?

(про лондоновскую длину, все такое.)

I-motiv.3 Levitation of superconductor

(???? почему такое явление есть?????)

Overview of GL theory

- a) Discuss in detail the Ginzburg-Landau (GL) theory. Explain how to arrive at the GL equations, discuss the physical meaning of the coefficients and parameters in the GL-equations.
- b) Explain how the characteristic length scales appear from the GL theory and how to understand their physical meaning. Explain also their temperature dependence according to the GL theory.
- c) Which characteristic length scale does not directly evolve from the GL theory? What is its physical meaning?
- d) Compare the GL theory with other theories and models for superconductivity.
(потом допишу, типичные хорошие вопросы)

8.1.2 Вопросы на понимание типичной микроскопической теории

1. Фазовым переходом какого рода является сверхпроводящий переход?
2. Запишите выражение для спектра возбуждений $\varepsilon(p)$ в модели Бардина-Купера-Шриффера.
3. Какова связь между энергетической щелью $\Delta(0)$ и критической температурой сверхпроводника T_c ?
4. Как зависит от константы взаимодействия λ энергетическая щель $\Delta(0)$ при нулевой температуре? Аналитична ли эта зависимость?
5. Чему равна энергия связи куперовской пары при константе взаимодействия λ ?
6. Как связаны энергетическая щель Δ и концентрация сверхпроводящих электронов n_s ?
7. Как зависит от температуры энергетическая щель сверхпроводника $\Delta(T)$ вблизи точки перехода T_c ?
8. Как зависит от температуры T критический ток $j_c(T)$ сверхпроводника вблизи точки перехода T_c ?
9. Как зависит от температуры T критическое магнитное поле $\mathcal{H}_c(T)$ сверхпроводника вблизи точки перехода T_c ?
10. Как зависит от температуры T теплоемкость сверхпроводника $C_s(T)$ ниже точки перехода T_c ?

8.1.3 Вопросы на понимание флюктуационных методов в сверхпроводниках

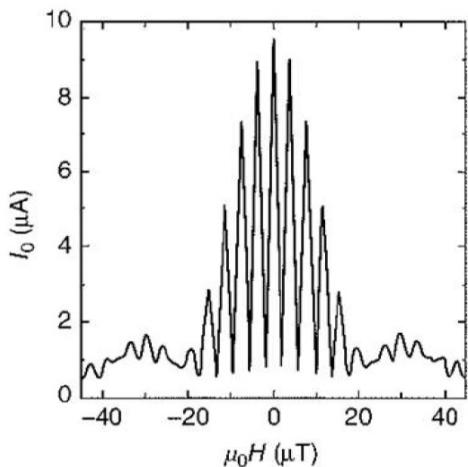
1. Запишите выражение для функционала Гинзбурга-Ландау Ω_s .
2. Запишите уравнение Гинзбурга-Ландау для комплексного параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$.
3. Запишите уравнение Гинзбурга-Ландау для векторного потенциала $\mathcal{A}(\mathbf{r})$.
4. Как зависит от температуры T корреляционная длина ξ вблизи точки перехода T_c ? Чему равен размер куперовской пары?
5. Как зависит от температуры T лондоновская глубина проникновения λ вблизи точки перехода T_c ?
6. Запишите выражение для плотности сверхпроводящего тока j_s .
7. Запишите равенство, выражающее сущность эффекта Мейсснера.
8. Запишите выражения для кванта магнитного потока Φ_0 и магнитного потока через полость сверхпроводника Φ .
9. В каком соотношении находятся корреляционная длина ξ и лондоновская глубина проникновения магнитного поля λ для сверхпроводников II рода?
10. Запишите оценочные выражения для верхнего \mathcal{H}_{c2} , нижнего \mathcal{H}_{c1} и термодинамического \mathcal{H}_c критических магнитных полей.
11. Возможно ли проникновение в сверхпроводник нормального к поверхности магнитного поля?

12. Возможно ли проникновение в сверхпроводник электрического поля?

8.1.4 Задачи на понимание других эффектов со сверхпроводниками

KUL-lect.joseph.eff Diffraction and interference in a YBaCuO SQUID structure (???)

We see results of (???) some experiment)



Can you explain the observed oscillations? Can you estimate the ratio ASQUID / AJJ?

Solution (?????) (don't know yet....)

8.1.5 Задачи на гипотетические вопросы о сверхпроводниках

(из курса Фейгальмана скорее всего много вопросов можно найти.)

Когда могут быть кванты потока более чем 1? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

Когда могут быть решетки абрикосова не треугольные? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

Когда могут быть кванты потока более чем 1? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

Когда могут быть кванты потока более чем 1? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

Когда могут быть кванты потока более чем 1? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

Когда могут быть кванты потока более чем 1? (?????)

(хз, там какая-то умная теория на это.)

8.2 Задачи общей физики

8.2.1 Задачи про элементарные сверхпроводники

(овч 2)

8.2.2 Упрощенные задачи про сверхпроводники

(овч 3)

8.3 Типичные теорфизические задачи

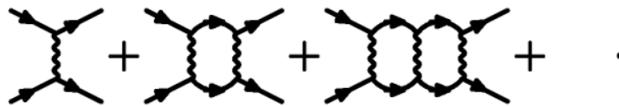
(добавлю из Белоусова и типичного статфиза задачи)

8.3.1 Задачи на сверхпроводимость

ЛШ-58. Куперовская неустойчивость.

В п. 10.2.1 при вычислении температуры перехода мы использовали приближение (10.11), для того чтобы ограничить сверху область интегрирования по энергии $\xi(\mathbf{p})$ (см. также (10.3)). На самом деле, поскольку сверхпроводимость возникает из-за обмена фононами с относительно большим временем запаздывания, более корректно рассматривать нелокальное во времени взаимодействие, которое обрезало бы не интегралы по импульсам, а интегралы по частотам.

Рассмотрим мацубаровскую амплитуду рассеяния в куперовском канале $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ (энергии сталкивающихся частиц равны $\pm\varepsilon$, а разлетающихся $-\pm\varepsilon'$). Она дается суммой лестничных графиков, изображенных на рис. ниже



Пусть каждой волнистой линии соответствует множитель $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$. Будем считать взаимодействие точечным и соответственно пренебрежем зависимостью Γ^C и Γ^0 от импульсов.

- Суммируя куперовскую лестницу, выведите интегральное уравнение, определяющее $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$.
- Рассмотрите модель, в которой $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ факторизуется:

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) v(i\varepsilon')$$

где λ - константа взаимодействия, а функция $v(i\varepsilon)$ - формфактор, определяющий масштаб энергий (спиновая структура опущена). Найдите температуру, при которой Γ^C обращается в бесконечность.

- в) В случае, когда

$$v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_D^2}},$$

найдите связь между T_c и ω_D . Модель (10.45) нефизична, поскольку настоящее электрон-фононное взаимодействие приводит к затравочной вершине Γ^0 , зависящей от переданной энергии $\varepsilon - \varepsilon'$. Тем не менее, поскольку эта модель учитывает запаздывание притяжения между электронами на временах $\approx \omega_D^{-1}$, она дает качественно правильные предсказания.

Решение 58 а. Выведем уравнение на $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$, суммируя диаграммы на рис. 10.8. Заметим, что в этих диаграммах сумма 4-импульсов $s = p_1 + p_2$ одинакова в каждой петле. Поэтому интегральное уравнение, соответствующее этим диаграммам, имеет вид

$$\Gamma^C(p, p'; s) = \Gamma^0(p, p') + \int \Gamma^0(p, k) G(k) G(s - k) \Gamma^C(k, p'; s) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

(конечно, по частотам следует брать не интеграл, а мацубаровскую сумму). Это уравнение отличается от аналогичного уравнения теории ферми-жидкости знаком перед интегральным членом. (Отличие возникает из-за того, что ферми-жидкостные диаграммы содержат фермионные петли, а куперовские диаграммы - нет.) Полагая $s = 0$ и пренебрегая зависимостью Γ^0 и Γ^C от пространственного импульса, перепишем уравнение (10.55) так:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') + T \sum_{\varepsilon''} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') G(i\varepsilon'', \mathbf{p}) G(-i\varepsilon'', -\mathbf{p}) \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon').$$

Интеграл по импульсам вычисляется переходом к интегрированию по ξ :

$$\int \frac{1}{(\varepsilon'')^2 + \xi_p^2} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{\pi \nu_0}{|\varepsilon''|}$$

Поэтому уравнение на куперовскую амплитуду принимает вид

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') + \pi \nu_0 T \sum_{\varepsilon''} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon') / |\varepsilon''|$$

Решение 58 б. Уравнение (10.58) можно решить, если зависимость от ε и ε' факторизуется. Тогда уравнение становится вырожденным. Перепишем его, явно выделяя зависимость от ε' :

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon) \left(v(i\varepsilon') + \pi\nu_0 T \sum_{\varepsilon''} v(i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon') / |\varepsilon''| \right).$$

Таким образом, оба члена в уравнении пропорциональны $v(i\varepsilon)$, поэтому $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') \approx v(i\varepsilon)$. Из соображений симметрии следует, что зависимость от ε' такая же:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \alpha v(i\varepsilon) v(i\varepsilon')$$

где α - константа, которую можно определить, подставив (10.60) в (10.59):

$$\alpha = \lambda + \pi\nu_0\alpha\lambda T \sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'') / |\varepsilon''|$$

Таким образом,

$$\alpha = \lambda \left(1 - \pi\nu_0\lambda T \sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'') / |\varepsilon''| \right)^{-1}.$$

Это выражение обращается в бесконечность, если

$$\pi T \sum_{\varepsilon''} v^2(i\varepsilon'') / |\varepsilon''| = 1/\lambda\nu_0$$

Условие (10.63) и определяет температуру перехода T_c .

Решение 58 в. В случае

$$v(i\varepsilon) = \omega_D / (\omega_D^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$$

уравнение на температуру перехода (10.63) принимает такой вид:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_D^2}{(\omega_D^2 + \pi^2 T_c^2 (2n+1)^2) (2n+1)} = \frac{1}{\lambda\nu_0}.$$

Удобно вначале решить это уравнение с логарифмической точностью, а затем найти T_c более точно. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ обрезает сумму в (10.63) при $n \approx n_{\max} = \omega_D / \pi T_c$. Если считать $n_{\max} \gg 1$ и пренебречь множителем $v^2(i\varepsilon)$, заменив верхний предел суммы на n_{\max} , получим

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{n+1/2} = \ln n_{\max} = \frac{1}{\nu_0 \lambda}$$

откуда

$$T_c \approx \frac{\omega_D}{\pi} e^{-1/\lambda\nu_0}$$

Значение коэффициента в этой формуле таким образом найти нельзя. Для этого надо точнее вычислить сумму в (10.65).

Заметим, что в сумме (10.65) имеются два масштаба: T_c и ω_D , причем, согласно (10.67), $T_c \ll \omega_D$. Поэтому вклады этих масштабов можно разделить, используя следующий стандартный прием. Разобъем сумму на две части: по $n < n_0$ и по $n > n_0$, причем точку разбиения n_0 выберем так, что $n_0 \gg 1$, и одновременно $2\pi T_c n_0 \ll \omega_D$. Найдем сумму по каждой из областей, а затем сложим результаты. В области $n < n_0$ можно заменить функцию $v(i\varepsilon)$ на единицу, после чего эта часть суммы легко вычисляется с помощью тождеств

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \ln 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n \right) = C$$

где $C = 0,577\dots$ - постоянная Эйлера. Складывая эти два тождества, получаем вклад области $n < n_0$:

$$S(n < n_0) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{2}{2n+1} \approx \ln(2n_0)$$

В высокочастотной области $n > n_0$ можно пренебречь T_c по сравнению с ω_D и заменить сумму интегралом, который легко вычисляется:

$$S(n > n_0) = \int_{2\pi T n_0}^{\infty} \frac{\omega_D^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \omega_D^2} \Big|_{2\pi T n_0}^{\infty}$$

В пределе $\omega_D \gg 2\pi n_0 T_c$ находим

$$S(n > n_0) = \ln \frac{\omega_D}{2\pi n_0 T_c}$$

Теперь, суммируя вклады от областей $n < n_0$ и $n \geq n_0$, приводим уравнение (10.63) к виду

$$\frac{1}{\lambda \nu_0} = \ln \frac{\omega_D}{\pi T_c} + C$$

Решая его, находим уточненное выражение для температуры перехода T_c :

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D e^{-1/\lambda \nu_0}$$

где $\gamma = e^C$.

ЛШ-59. Температурная зависимость щели $\Delta(T)$

Определите температурную зависимость $\Delta(T)$ для запаздывающего взаимодействия

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)v(i\varepsilon'), \quad v(i\varepsilon) = \frac{\omega_D}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_D^2}}$$

из задачи 58. Примите во внимание, что из-за запаздывания щель Δ становится функцией энергии ε спаривающихся частиц.

а) Соответственно рассмотрите величину $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$ и, модифицируя уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta} &= \lambda \int F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d\varepsilon d^3 p}{(2\pi)^4}, \\ \Delta &= \lambda T \sum_{\omega_n} \int F(i\omega_n, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \lambda T \sum_{\omega_n} \int \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + \Delta^2} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \end{aligned}$$

получите для $\tilde{\Delta}(\varepsilon)$ уравнение самосогласования.

б) В найденном уравнении вычислите интеграл по ξ . Изобразите качественное поведение решения уравнения $\Delta(T)$ на графике. Как $\Delta(T)$ ведет себя при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow T_c$?

в) Найдите сверхпроводящую щель $\Delta(T)$ в пределе низких температур ($T \rightarrow 0$) и вблизи точки перехода ($T \rightarrow T_c$).

Решение 59 а. Диаграммы на рисунках

$$\begin{aligned} G(\varepsilon) &= \text{---} \varepsilon \text{---} + \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} + \dots \\ F(\varepsilon) &= \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} + \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} + \dots \\ \Delta &= \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} = \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} + \text{---} \varepsilon \text{---} \Delta \text{---} \varepsilon \text{---} + \dots \end{aligned}$$

показывают, что щель Δ возникает в результате свертки аномальной функции $F(i\varepsilon, \mathbf{p})$ и куперовской вершины $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$. (???????????????????????)

Поэтому в общем случае щель зависит от энергии и, соответственно, мы будем использовать обозначение $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$. При этом уравнение самосогласования принимает следующий вид:

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = T \sum_{\varepsilon'} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') F(i\varepsilon', \mathbf{r} = \mathbf{r}'),$$

где

$$F(i\varepsilon, \mathbf{r} = \mathbf{r}') = \int \frac{\tilde{\Delta}(i\varepsilon)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + \tilde{\Delta}^2(i\varepsilon)} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Таким образом, в общем случае щель следует определять из интегрального уравнения. Оно несколько упрощается, если зависимость $\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon')$ от энергии факторизуется. Тогда легко видеть, что щель $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$ пропорциональна $v(i\varepsilon)$. Таким образом, сверхпроводящие эффекты «выключаются» при $|\varepsilon| \gg \omega_D$. Записывая $\tilde{\Delta}(i\varepsilon)$ в виде

$$\tilde{\Delta}(i\varepsilon) = \Delta(T)v(i\varepsilon)$$

получаем уравнение

$$\Delta(T) = \lambda T \sum_{\varepsilon} \int \frac{v^2(i\varepsilon)\Delta(T)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + v^2(i\varepsilon)\Delta^2(T)} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Решение 59 б. Вычисляя интеграл по ξ в $\Delta(T) = \lambda T \sum_{\varepsilon} \int \frac{v^2(i\varepsilon)\Delta(T)}{\varepsilon^2 + \xi_p^2 + v^2(i\varepsilon)\Delta^2(T)} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$, получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T \sum_{\varepsilon} \frac{v^2(i\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T)v^2(i\varepsilon)}}.$$

Рассмотрим качественно, как ведет себя решение этого уравнения. При $T \ll \Delta(T)$ сумму в правой части можно заменить интегралом. Таким образом, в этом пределе зависимость от T исчезает, и $\Delta(T)$ стремится к постоянному пределу. Зависимость от T должна быть очень слабой, поскольку для гладкой функции сумма очень хорошо аппроксимирует значение интеграла. Ясно также, что при увеличении температуры величина щели $\Delta(T)$ будет уменьшаться. Формально это следует из того, что сумма в правой части (10.78) переоценивает значение интеграла тем больше, чем больше расстояние между мацубаровскими частотами. Поэтому для того, чтобы удержать правую часть постоянной, рост температуры следует компенсировать убыванием $\Delta(T)$. Заметим, что при $\Delta = 0$ уравнение (10.78) совпадает с уравнением для определения температуры перехода (10.63), рассмотренным в предыдущей задаче. Это означает, что при $T = T_c$ щель $\Delta(T)$ обратится в нуль. Вблизи этой точки правая часть (10.78) зависит линейно от $T - T_c$ и квадратично от $\Delta(T)$. Поэтому $\Delta(T) \approx \sqrt{T_c - T}$. Из этих рассуждений также следует, что $\Delta(0) \approx T_c$. Полученная таким образом качественная зависимость $\Delta(T)$ согласуется с результатом численного решения уравнения Горькова, изображенном на рис. 10.11

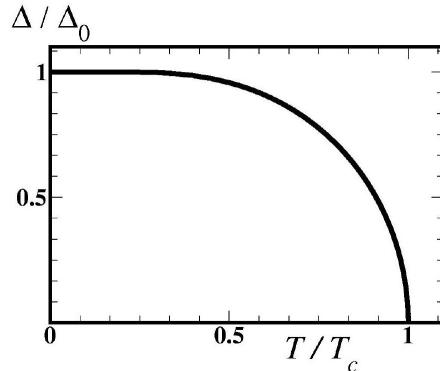


Рис. 10.11

Решение 59 в. Теперь вычислим $\Delta(T)$ при $T \rightarrow 0$. Вначале мы просто заменим сумму в (10.78) интегралом и получим, что $\Delta_0 \equiv \Delta(T=0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int_0^\infty \frac{v^2(i\varepsilon)d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2v^2(i\varepsilon)}}.$$

Найдем этот интеграл для нашей модельной функции $v(i\varepsilon) = \omega_D / (\varepsilon^2 + \omega_D^2)^{1/2}$. Вычисление сильно упрощается, если заметить, что $\Delta_0 \approx T_c \ll \omega_D$. Множитель $v^2(i\varepsilon)$ в подкоренном выражении важен лишь при $\varepsilon \leq \Delta_0$, но при таких энергиях $v^2(i\varepsilon) \approx 1$. С учетом этого обстоятельства уравнение на щель переписывается так:

$$\frac{1}{\nu_0\lambda} = \int_0^\infty \frac{\omega_D^2 d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + \omega_D^2) \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}}.$$

В этом интеграле имеется два существенно разных масштаба энергий: Δ_0 и ω_D . Поэтому можно применить прием, использованный при решении предыдущей задачи: разбить область интегрирования на две части: $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\varepsilon > \varepsilon_0$, причем $\Delta_0 \ll \varepsilon_0 \ll \omega_D$. Тогда интеграл в правой части (10.80) равен

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}} + \int_{\varepsilon_0}^\infty \frac{\omega_D^2 d\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon^2 + \omega_D^2)} = \ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} + \ln \frac{\omega_D}{\varepsilon_0}.$$

8.3.1 Задачи на сверхпроводимость

Промежуточная энергия ε_0 выпадает. Окончательно получаем

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta_0}.$$

Сравнивая это соотношение с выражением (10.73) для температуры перехода T_c , получаем соотношение

$$\Delta_0 = \frac{\gamma}{\pi} T_c$$

Заметим, что коэффициент в формуле (10.73) для T_c связан с конкретной формой обрезания по энергии. Что же касается соотношения (10.83) между Δ_0 и T_c , то при $T_c \ll \omega_D$ оно определяется только физикой низкоэнергетической области $\varepsilon \ll \omega_D$ и поэтому не зависит от выбора обрезающей функции $v(i\varepsilon)$. Кроме того, точно такое же соотношение между Δ_0 и T_c получается и при обрезании по ξ . Таким образом, соотношение (10.83) носит универсальный характер.

Теперь найдем поведение $\Delta(T)$ при конечных, но малых температурах. Для этого надо вычислить отличие суммы в правой части (10.78) от интеграла. Это можно было бы сделать с помощью формулы суммирования Пуассона (10.47). Однако гораздо проще получить ответ, заметив, что самым малым масштабом, на котором меняется правая часть (10.78), является Δ_0 . Поэтому при расчете низкотемпературных поправок структурой правой части на масштабе ω_D можно пренебречь. Тогда можно переписать (10.77) как

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = T \sum_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\varepsilon^2 + \xi^2 + \Delta^2}$$

Преобразуем правую часть, используя $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \int_0^{\infty} \operatorname{th} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}.$$

Этот интеграл логарифмически расходится, но его значение при $T = 0$ мы уже нашли, и сейчас нас интересуют поправки, возникающие при $T \neq 0$, которые, как мы сейчас увидим, описываются сходящимися интегралами. Минимальное значение аргумента гиперболического тангенса есть $\Delta/(2T) \gg 1$, поэтому можно заменить $\operatorname{th} x$ на $\operatorname{sign} x(1 - 2 \exp(-|x|))$. Таким образом,

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \exp \left(-\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{T} \right).$$

Так как при интегрировании второго члена вклад дают лишь $\xi \ll \Delta$, можно разложить квадратные корни следующим образом:

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2e^{-\Delta/T} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/2\Delta T} \left(1 - \frac{\xi^2}{2\Delta^2} \right) \frac{d\xi}{\Delta}$$

откуда

$$\ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left(1 - \frac{T}{8\Delta} \right)$$

где $\Delta_0 = \gamma T_c / \pi$ - щель при $T = 0$. Выписанная поправка к Δ_0 понадобится нам при вычислении термодинамического потенциала в задаче 60. (Точность выражения (10.88) может показаться чрезмерной, но оказывается, что главный член в выражении (10.88) не дает вклада в термодинамический потенциал, и нам придется учесть выписанную поправку.) Окончательно получаем

$$\Delta(T \ll T_c) = \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} e^{-\Delta_0/T} \left(1 - \frac{T}{8\Delta_0} \right) \right)$$

Теперь рассмотрим случай $T \rightarrow T_c$. В этом пределе $\Delta(T) \ll T$, поэтому правую часть (10.78) можно разложить по Δ :

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \pi T \sum_{\varepsilon} \left(\frac{v^2(i\varepsilon)}{|\varepsilon|} - \frac{\Delta^2 v^4(i\varepsilon)}{2|\varepsilon|^3} \right)$$

Как показано в задаче 58, первый член в правой части логарифмически зависит от T и сравнивается с левой частью при $T = T_c$. Поэтому его можно объединить с левой частью, получив $\ln T_c/T$. Что же касается второго члена, пропорционального Δ^2 , то он определяется областью $\varepsilon \approx \pi T$, и в нем можно заменить $v^4(i\varepsilon)$ на единицу. Таким образом

$$\ln \frac{T}{T_c} = -\frac{\pi \Delta^2}{2} T \sum_{\varepsilon_n} \frac{1}{|\varepsilon_n|^3}$$

Сумма по мацубаровским частотам легко выражается через ζ -функцию:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) \zeta(x).$$

Разлагая логарифм в левой части, получаем

$$\frac{T - T_c}{T_c} = -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta^2}{T_c^2}$$

откуда

$$\Delta_{T \rightarrow T_c}^2 = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} T_c (T_c - T)$$

Таким образом, и в этом случае обрезка при $\omega \approx \omega_D$ оказалась несущественной для вычисления щели.

Подводя итог, можно сказать, что конкретный вид обрезания важен в основном для определения T_c . Все остальные физические величины сверхпроводника могут быть выражены через T_c с помощью универсальных соотношений, не зависящих от вида конкретной функции запаздывания $v(i\varepsilon)$. Это происходит потому, что физика сверхпроводника определяется масштабами энергий порядка $T_c \ll \omega_D$. Это оправдывает применение популярной модели, в которой запаздывание на временах порядка ω_D^{-1} учитывается с помощью обрезания интегралов по ξ , а не по ε , т. е. запаздывающее взаимодействие заменяется на взаимодействие нелокальное в пространстве.

ЛШ-60. Теплоемкость при $T < T_c$

Покажите, что вклад электронов в термодинамический потенциал Ω сверхпроводящего металла дается диаграммным рядом, показанным на рис. 10.9.

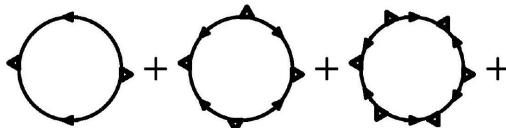


Рис. 10.9

Какие выражения сопоставляются различным диаграммам?

Выразите сумму графиков рис. 10.9 через функцию $\Delta(T)$, считая ее известной. Найдите температурную зависимость теплоемкости сверхпроводника:

а) при $T \ll T_c$

б) при $T \rightarrow T_c$. В этом случае достаточно взять первый график, показанный на рис. 10.9, поскольку вблизи T_c величина Δ мала. Сравните ответ с теплоемкостью нормального металла (см. [1], 36).

Вычисляя мацубаровскую сумму при низких температурах, удобно пользоваться формулой суммирования Пуассона $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx$, оставляя в сумме по k лишь члены с $k = 0, \pm 1$. Напомним, что применять формулу Пуассона следует с осторожностью, поскольку она справедлива лишь для функций, аналитических на всей вещественной оси.

Решение 60. Приступим теперь к расчету термодинамических величин сверхпроводника⁶. Характерный масштаб энергий, дающих вклад в термодинамику, оказывается порядка $\max\{\Delta_0, T_c\}$, и следовательно эффектами запаздывания на временах порядка ω_D^{-1} можно пренебречь, выражая все величины через T_c или Δ_0 .

Рассмотрим диаграммное разложение термодинамического потенциала, показанное на рис. 10.9. Как обычно, продифференцируем термодинамический потенциал по константе связи λ для того, чтобы убрать множитель $1/n$ перед диаграммами. Как нетрудно заметить, если в каждой из диаграмм на рис. 10.9 перерезать одну из электронных линий, то получается одна из диаграмм на рис. 10.6, причем соответствие взаимнооднозначное. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= T \sum_{\omega_n} \int G_0^{-1}(i\omega_n, \mathbf{p}) (G(i\omega_n, \mathbf{p}) - G_0(i\omega_n, \mathbf{p})) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \\ &= -T \sum_{\omega_n} \int \Delta^* F(i\omega_n, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = -\frac{|\Delta|^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Делая преобразование, мы воспользовались соотношениями (10.32) и (10.39).

Термодинамический потенциал получается интегрированием $\partial \Omega / \partial \lambda$ по $\lambda = 0$ до истинного значения. Чтобы проинтегрировать по λ , выразим $d\lambda$ через $d\Delta$ с помощью (10.39):

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = T \sum_{\omega_n} \int \frac{2\Delta d\Delta}{(\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}} + \Delta^2)^2} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Поэтому

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -2 \int_0^\Delta T \sum_{\omega_n} \int \frac{\Delta^3 d\Delta}{(\omega_n^2 + \xi_p^2 + \Delta^2)^2} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Интегрируя по ξ и Δ , получим

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi \nu_0 T \sum_{\omega_n} \left(\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} - 2|\omega_n| \right).$$

6) Эту задачу можно решить, вычисляя термодинамический потенциал идеального газа квазичастиц со спектром (10.37). Вместо этого мы воспользуемся диаграммами, чтобы проиллюстрировать некоторые общие положения. Снова рассмотрим предельные случаи.

a) $T \rightarrow 0$. При очень низкой температуре мацубаровская сумма $T \sum_{\omega_n} \dots$ хорошо аппроксимируется интегралом $\int \dots \frac{d\omega}{2\pi}$. Поправки нетрудно найти, перейдя от суммы к интегралу по формуле Пуассона, и удержав в ней только первые три члена:

$$\sum_n f(n) = \int f(x) dx + \int e^{2\pi i x} f(x) dx + \int e^{-2\pi i x} f(x) dx + \dots$$

Здесь

$$f(x) = \sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta^2}{\sqrt{(2\pi T x)^2 + \Delta^2}} - 4\pi T |x|$$

(Заметим, что неаналитичность $|x|$ не мешает использовать формулу Пуассона, поскольку для последнего слагаемого сумму в формуле Пуассона можно вычислить явно, не делая никаких приближений.) После громоздких вычислений, приведенных в конце решения, получим

$$\Omega_s = -\frac{V \nu_0 \Delta^2}{2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta} \right) \right)$$

Подставляя сюда $\Delta(T)$ из (10.89), находим

$$\Omega_s = -\frac{\nu_0 V \Delta_0^2}{2} \left(1 + 4\sqrt{\frac{2\pi T^3}{\Delta_0^3}} e^{-\Delta_0/T} \right)$$

Обратим внимание на происходящее здесь сокращение главного температурнозависящего члена. Из (10.102) найдем теплоемкость, дифференцируя энтропию по T :

$$C_s = T \frac{\partial S_s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial T^2} = 2\nu_0 V \sqrt{\frac{2\pi \Delta_0^5}{T^3}} e^{-\Delta_0/T}.$$

б) $T \rightarrow T_c$. В этом случае достаточно просто разложить (10.98) до четвертого порядка по Δ (член второго порядка обращается в нуль):

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi \nu_0 \Delta^4 T \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|^3}$$

Сумма, как и в задаче 59, выражается через ζ -функцию:

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{\nu_0 \Delta^4}{T_c^2}$$

Подставляя сюда Δ из (10.94), получим

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} V \nu_0 (T - T_c)^2$$

Дифференцируя по температуре, находим теплоемкость:

$$C_s - C_n = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu_0 T_c V$$

Напомним, что теплоемкость нормального металла есть

$$C_n = \frac{2\pi^2}{3} \nu_0 V T$$

поэтому

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = \frac{12}{7\zeta(3)}$$

Вычислим сумму в (10.98) при $T \rightarrow 0$. Согласно формуле суммирования Пуассона,

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\pi\nu_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2|\omega| \right) v e^{ik\omega/T} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Заметим, что первые два члена - плавные функции ω , поэтому интегралы от них экспоненциально малы. Поэтому нам достаточно удержать их лишь при $k = 0, \pm 1$. Что же касается последнего члена, то интеграл от него легко вычисляется и равен $-4T^2/k^2$. В результате выражение для термодинамического потенциала приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = & -\nu_0 \left[\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2\omega \right) d\omega + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \right) \cos \frac{\omega}{T} d\omega - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2}{k^2} \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл есть

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} - 2\omega \right) d\omega = \frac{\Delta^2}{2}$$

а сумма равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Оставшийся интеграл вычисляется так. Функция $\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$ имеет скачок на разрезе, идущем от точки $i\Delta_0$ до бесконечности. В остальной же части верхней полуплоскости функция аналитична, поэтому контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он огибал этот разрез (рис. 10.12)

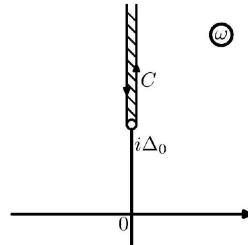


Рис. 10.12

Вводя переменную интегрирования u по формуле $\omega = i\Delta + iu$, приведем интеграл к виду

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\Delta^2 + 2u^2 + 4u\Delta}{\sqrt{2\Delta u + u^2}} e^{-(\Delta+u)/T} du$$

В этот интеграл дают вклад $u \approx T$, поэтому подынтегральное выражение можно разложить по u :

$$2\Delta^2 e^{-\Delta/T} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{15}{4} \frac{u}{\Delta} \right) e^{-u/T} \frac{du}{\sqrt{2\Delta u}} = \sqrt{2\pi T \Delta^3} e^{-\Delta/T} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta} \right)$$

В результате

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n}{V} = -\frac{\nu_0 \Delta^2}{2} \left(1 + 2\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta/T} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta} \right) \right) + \frac{\pi^2 \nu_0 T^2}{3}.$$

Заметим, что последний член в этой формуле есть не иное, как взятый с обратным знаком термодинамический потенциал нормального металла.

ЛШ-61. Влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость

Как уже обсуждалось в п. 10.1.1 влияние кулоновского взаимодействия на сверхпроводимость невелико благодаря сильному запаздыванию фонон (см. с. 275). Рассмотрим вопрос об относительной важности электрон-электронного и электронфононного взаимодействий более подробно.

Оказывается удобным ввести упрощенную модель взаимодействия, в которой между электронами имеется мгновенное отталкивание и запаздывающее притяжение, причем как отталкивание, так и притяжение считаются точечными. При этом затравочная амплитуда рассеяния в куперовском канале имеет вид

$$\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') = \lambda v(i\varepsilon)v(i\varepsilon') - \mu$$

где параметр μ характеризует величину отталкивания между электронами.

Найдите температуру, при которой амплитуда рассеяния в куперовском канале обращается в бесконечность. Покажите, что эффект отталкивания сводится к замене константы λ в выражении (10.30) для T_c на

$$\lambda_* = \lambda - \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln(\varepsilon_F/\omega_D)}.$$

Безразмерная величина кулоновского взаимодействия в металле есть $\nu_0 \mu \approx e^2/\hbar v_F$ в пределе высокой электронной плотности и $\nu_0 \mu \approx 1$ при обычных значениях плотности. Соответственно максимально возможная поправка к эффективной константе взаимодействия λ_* , согласно (10.49), имеет относительную малость $1/\ln(\varepsilon_F/\omega_D)$. Поэтому кулоновское взаимодействие в нормальном металле не может превратить притяжение в отталкивание и, следовательно, не подавляет сверхпроводимость.

Чтобы установить соответствие между моделью (10.48) и реальным кулоновским взаимодействием $V(\mathbf{q})$ в первом приближении достаточно подставить вместо μ среднее значение $V(\mathbf{q})$ в s-канале. Для случая экранированного кулоновского взаимодействия

$$V(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \varkappa^2}; \quad \varkappa^2 = 8\pi\nu_0 e^2$$

(см. задачу 45) получаем следующее выражение:

$$\mu = \langle V_c(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rangle = \frac{\pi e^2}{p_0^2} \ln \left(1 + \frac{4p_0^2}{\varkappa^2} \right),$$

где усреднение производится по положениям импульсов \mathbf{p} и \mathbf{p}' на ферми-поверхности.

Решение 61. Рассмотрим уравнение (10.58) для куперовской амплитуды рассеяния, полученное в решении задачи 58. Если куперовская амплитуда $\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon')$ имеет полюс при $T \rightarrow T_c$, то в уравнении (10.58) можно пренебречь свободным членом:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \pi\nu_0 T \sum_{\varepsilon''} \Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon'') \Gamma^C(i\varepsilon'', i\varepsilon') / |\varepsilon''|$$

Зависимость от ε' в этом уравнении «сокращается». Поэтому можно считать, что решение факторизуется:

$$\Gamma^C(i\varepsilon, i\varepsilon') = \Phi(i\varepsilon)\Phi(i\varepsilon')$$

(Зависимость Γ^C от ε и ε' должна быть одинаковой ввиду симметрии куперовской лестницы.) Тогда функция $\Phi(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(i\varepsilon) = \pi\nu_0 T \sum_{\varepsilon'} (\Gamma^0(i\varepsilon, i\varepsilon') / |\varepsilon'|) \Phi(i\varepsilon')$$

Для Γ^0 из условия задачи это интегральное уравнение оказывается вырожденным и легко решается. Видно, что функция $\Phi(\varepsilon)$ содержит два члена: пропорциональный $v(i\varepsilon)$ и не зависящий от ε . Ищем решение в виде

$$\Phi(\varepsilon) = av(i\varepsilon) + b$$

Подставляя это выражение в (10.119) и приравнивая коэффициенты перед $v(i\varepsilon)$ и перед константой, получаем

$$a = \pi\lambda\nu_0 T \sum_{\varepsilon'} [av^2(i\varepsilon') + bv(i\varepsilon')] / |\varepsilon'|,$$

$$b = -\pi\mu\nu_0 T \sum_{\varepsilon'} [av(i\varepsilon) + b] / |\varepsilon'|.$$

На этот раз мы не будем заниматься точным вычислением сумм в этом выражении, а найдем их с логарифмической точностью, поскольку основной интерес будут представлять величины, стоящие перед логарифмами. Суммы, содержащие $v(i\varepsilon)$ и $v^2(i\varepsilon)$ следует обрезать сверху при $\varepsilon \approx \omega_D$. Сумму, не содержащую факторов запаздывания, мы обрежем сверху при $\varepsilon \approx \omega_p$ ($\approx \varepsilon_F$) - на плазменной частоте,

8.3.1 Задачи на сверхпроводимость

которая играет в физике электрон-электронного взаимодействия роль, аналогичную ω_D для электрон-фононного взаимодействия. Таким образом, получаем

$$a = \nu_0 \lambda \ln \frac{\omega_D}{T} (a + b)$$

$$b = -\mu \nu_0 \left[a \ln \frac{\omega_D}{T} + b \left(\ln \frac{\omega_D}{T} + \ln \frac{\omega_p}{\omega_D} \right) \right].$$

Перенося во втором уравнении член $c \ln(\omega_p/\omega_D)$ в левую часть, можно переписать его в таком виде, что оно становится похоже на первое:

$$b = -\nu_0 \mu_* \ln \frac{\omega_D}{T} (a + b); \quad \mu_* = \frac{\mu}{1 + \nu_0 \mu \ln(\omega_p/\omega_D)}$$

Мы ввели здесь эффективную куперовскую амплитуду μ_* , которая отличается от μ из-за запаздывания фононов. Теперь, складывая первое из уравнений (10.123) с уравнением (10.124), приходим к условию совместности системы (10.123):

$$1 = (\lambda - \mu_*) \ln \frac{\omega_D}{T}$$

из которого находим температуру перехода:

$$T_c \approx \omega_D e^{-1/\lambda_* \nu_0}, \quad \lambda_* = \lambda - \mu_*$$

Таким образом, кулоновское взаимодействие действительно понижает температуру сверхпроводящего перехода, но не очень сильно. При $\nu_0 \mu \ln \epsilon_F / \omega_D \gg 1$ относительная поправка к λ мала как $1/\ln(\epsilon_F/\omega_D)$.

ЛШ-62. Тождество Уорда в нормальном металле.

При вычислении электромагнитного отклика сверхпроводника центральное место занимает рассмотренное в гл. 9 тождество Уорда $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})|_{\mathbf{k}=0, \omega \rightarrow 0} = -\frac{ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta}$, где $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \int \Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$ - поляризационный оператор (9.14) в частотно-импульсном представлении, следующее из калибровочной инвариантности. Оно приводит к сокращению градиентного и диамагнитного вкладов в электрический ток, с которым мы уже сталкивались в задаче 51 при выводе формулы Друде. Прежде чем заниматься электродинамикой сверхпроводников, изучим тождество Уорда более подробно в случае нормального металла.

a) Рассмотрим линейный отклик тока \mathbf{j} в идеальном ферми-газе электронов на неоднородный статический векторный потенциал \mathbf{A} . В импульсном представлении линейное соотношение \mathbf{j} и \mathbf{A} записывается как $\mathbf{j}_k = Q(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{A}}_k$. Калибровочная инвариантность требует, чтобы для ядра $Q(\mathbf{k})$ выполнялось свойство $Q(\mathbf{k})|_{k=0} = 0$. Согласно тождеству Уорда, это равенство обеспечивается сокращением градиентной $\langle \mathbf{v} G \mathbf{v} G \rangle$ и диамагнитной частей тока $\mathbf{j} = -\frac{e}{mc} \langle \psi^+(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \rangle \mathbf{A}(\mathbf{r})$ (см. задачу 51).

Проверьте это сокращение еще раз в более общем виде, не предполагая спектр электронов $\xi(\mathbf{p})$ квадратичным, а считая его произвольной функцией. Используйте соотношение $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p})$.

б) (Диамагнетизм Ландау.) С помощью тождества Уорда можно найти орбитальную магнитную восприимчивость χ_0 газа невзаимодействующих электронов. Согласно результату части а), разложение $Q(\mathbf{k})$ по \mathbf{k} начинается с члена второй степени: $Q(\mathbf{k}) = ak^2 + O(k^4)$.

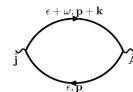


Рис. 10.10

Разложите петлю, показанную на рис. 10.10, по \mathbf{k} и определите константу a . Как a связана с χ_0 ? Проверьте, что $\chi_0 = -\frac{1}{3} \chi_{\text{пара}}$, где $\chi_{\text{пара}}$ - парамагнитная восприимчивость, найденная в задаче 23 (!?!??!?!?).

Если бы нас интересовало не сокращение $Q(0)$, а одно только вычисление χ_0 , можно было бы действовать иначе. Рассмотрим оператор орбитального магнитного момента. $\mu = \frac{e}{mc} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ и найдем его среднее, используя функцию Грина в слабом магнитном поле: $G_H(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp\left(\frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'\right) G_0(E, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. (Интеграл берется по прямому пути, соединяющему \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .) Восприимчивость χ_0 получится, если выделить из G_H линейный по H член.

Решение 62 а. Прежде чем вычислять $Q(0)$ для произвольного электронного спектра $\xi(\mathbf{p})$, уточним выражение для тока. Гамильтониан частиц со спектром $\xi(\mathbf{p})$ во внешнем магнитном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ есть

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \psi^+(\mathbf{r}) \xi \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla_{\mathbf{r}}$. Ток, согласно общим принципам, получается варьированием гамильтониана по \mathbf{A} :

$$\hat{\mathbf{j}} = e\psi^+(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} \xi \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r})$$

Выделим линейный по \mathbf{A} член:

$$\hat{\mathbf{j}} = e\psi^+(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{c} \psi^+(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{p}} [(\mathbf{A} \nabla_{\mathbf{p}}) \xi(\mathbf{p})] \psi(\mathbf{r})$$

При $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ это выражение для тока переходит в обычную квантовомеханическую формулу. Проще всего вычисляется вклад в $Q(0)$ второго члена:

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c} \left\langle \psi^+ \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \psi \right\rangle = -\frac{e^2}{c} \int \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{p})}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} n_F(\xi(\mathbf{p})) \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Чтобы найти вклад первого члена, поступим стандартным образом. В линейном по \mathbf{A} приближении взаимодействие тока с полем есть

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 r$$

Найдя, как обычно, поправку первого порядка к функции Грина и вычисляя с ее помощью $\langle \mathbf{j} \rangle$, получаем, что этот вклад дается петлей:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} \int \frac{v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{i\omega_n + i\Omega - \xi(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Мы ввели здесь множитель сходимости $e^{i\omega_n \tau}$ ($\tau \rightarrow +0$), который отвечает за правильный порядок ψ и ψ^+ (ср. с задачей 35).

При $\Omega = 0$ и $\mathbf{k} = 0$ это выражение сводится такому:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi(\mathbf{p}))^2} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}$$

Учитывая, что $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p})$, перепишем $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0)$ в виде

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = -\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int v_\alpha(\mathbf{p}) \nabla_\beta \frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}$$

после чего проинтегрируем по частям:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(0) = +\frac{e^2}{c} \lim_{\tau \rightarrow +0} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \nabla_\beta v_\alpha(\mathbf{p}) \frac{1}{i\omega_n - \xi(\mathbf{p})} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3} = -Q_{\alpha\beta}^{(2)}$$

(суммирование по мацубаровским частотам производится так же, как в выражении (7.59) в решении задачи 35). (!?!) тут самая главная часть задачи, задачу 35 выучить нужно, чтобы понимать последний переход!!!) Итак, $Q_{\alpha\beta}(0) = 0$.

Решение 62 б. (Диамагнитная восприимчивость) (?????) Чтобы найти диамагнитную восприимчивость ферми-газа χ_0 , свяжем ее с константой a в разложении $Q(\mathbf{k}) = ak^2 + \dots$ По определению $Q(\mathbf{k})$,

$$\mathbf{j} = \hat{Q} \mathbf{A} = -a \nabla^2 \mathbf{A}$$

С другой стороны, ток связан с намагниченностью:

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = c \operatorname{rot} \chi_0 \mathbf{B} = \chi_0 c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, ток можно записать так:

$$\mathbf{j} = -\chi_0 c \nabla^2 \mathbf{A}$$

Отсюда находим $\chi_0 = a/c$.

Теперь вычислим a . Предположим, что волновой вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси z , и найдем Q_{xx} :

$$Q_{xx} = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{e^2}{c} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x(\mathbf{p} + \mathbf{k}) v_x(\mathbf{p})}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{k}})(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}$$

В отличие от спиновой восприимчивости, орбитальная восприимчивость определяется не только окрестностью поверхности Ферми, но и всеми состояниями под ней, потому что квантование Ландау затрагивает все состояния с $E < E_F$, и конечная восприимчивость χ_0 возникает из-за отличия суммы квантованных энергий от интеграла по непрерывному спектру. Поэтому мы ограничимся случаем $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$. Разлагая $Q(k)$ по $k_z = k$, и имея в виду, что для квадратичного спектра $v_x(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = v_x(\mathbf{p}) = p_x/m$, запишем

$$Q_{xx} = - \frac{e^2 k^2}{c} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x^2}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\chi_0 = \frac{e^2}{c^2} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{v_x^2 v_z^2}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Теперь усредним по углам ($\langle v_x^2 v_z^2 \rangle = v^4/15$):

$$\chi_0 = \frac{e^2}{15c^2 m^4} T \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n \tau} \int \frac{p^4}{(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}})^4} \frac{2d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Интеграл по модулю импульса трехкратным интегрированием по частям приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{p^6 dp}{(i\omega_n + E_F - p^2/2m)^4} = -\frac{5m^3}{2} \int_0^\infty \frac{dp}{i\omega_n + E_F - p^2/2m}$$

после чего суммирование по ω_n дает, как обычно, распределение Ферми (см. формулу (7.59) в решении задачи 35):

$$\chi_0 = -\frac{e^2}{12\pi^2 mc^2} \int_0^\infty n_F(\xi_p) dp = -\frac{e^2 p_0}{12\pi^2 mc^2}$$

Используя выражение для спиновой восприимчивости, найденное в задаче 24

$$\chi_{nara} = 2\mu_B^2 \nu_0 = \frac{e^2}{4m^2 c^2} \frac{mp_0}{\pi^2}$$

находим соотношение между орбитальной и спиновой восприимчивостью:

$$\chi_0 = -\frac{1}{3} \chi_{nara}$$

Отметим, что это соотношение не универсально. Как видно из нашего вычисления, вклад в χ_0 дает весь спектр, а не только поверхность Ферми. Поэтому полученное соотношение между χ_0 и $\chi_{\text{пара}}$ верно лишь для квадратичного спектра. При более общем законе дисперсии $\xi(\mathbf{p})$ восприимчивость χ_0 по величине может оказаться даже больше, чем $\chi_{\text{пара}}$. В этом случае нормальный металл оказывается диамагнетиком.

ЛШ-63. Уравнение Лондонов.

Найдите отклик тока в сверхпроводнике на статический векторный потенциал. Отличие от задачи 62 состоит в том, что теперь сокращения при $\mathbf{q} = 0$ нет. Положив $\mathbf{q} = 0$ в соотношении $\mathbf{j}_q = Q(\mathbf{q}) \mathbf{A}_q$, получим так называемое уравнение Лондонов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{mc} n_s \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Величина n_s называется сверхтекучей плотностью. Как связаны n_s и Δ при $|T - T_c| \ll T_c$?

Физическая причина отсутствия сокращения вкладов в $Q(0)$ заключается в том, что калибровочная инвариантность в сверхпроводнике спонтанно нарушена. В нормальном металле сокращение $Q(0)$ обеспечивается тождеством Уорда (9.16), следующим из калибровочной инвариантности. А в сверхпроводнике калибровочная инвариантность отсутствует.

Определите глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Для этого с помощью уравнения Лондонов решите задачу о проникновении магнитного поля в объем сверхпроводника близи поверхности. Покажите, что магнитное поле затухает в глубину по экспоненциальному закону: $H(x) = H(0) \exp(-x/\delta_\Lambda)$, $x > 0$, и найдите связь δ_Λ с n_s .

Покажите, что пренебрегать зависимостью ядра $Q(q)$ от q законно, если лондоновская глубина проникновения δ_Λ достаточно велика: $\delta_\Lambda \gg \xi_0 = \hbar v_F / \Delta_0$.

Решение 63. В этой задаче мы вычислим $Q(0)$ для сверхпроводника. При этом основное отличие от вычисления для нормального металла, проделанного в задаче 62, возникает из-за необходимости учесть как нормальные, так и аномальные средние.

Среднее от диамагнитного вклада в ток есть просто

$$Q^{(2)}(0) = -ne^2/mc$$

Что же касается градиентного вклада $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k})$, то он получается усреднением произведения токов и дается следующим выражением:

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega_s, \mathbf{k}) = \frac{1}{2c} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau} d\tau \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left\langle T_\tau \psi_\sigma^+(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\alpha \psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\sigma'}^+(0, 0) \hat{j}_\beta \psi_{\sigma'}(0, 0) \right\rangle d^3\mathbf{r}$$

где σ, σ' - спиновые индексы, а $\mathbf{j} = -i\frac{e}{m}\nabla\mathbf{r}$.

Теперь необходимо спарить ψ -операторы, учитывая как нормальные, так и аномальные средние. При этом теорема Вика по-прежнему справедлива, поскольку операторы ψ и ψ^+ можно выразить линейным образом через операторы рождения и уничтожения квазичастиц сверхпроводника, для которых аномальные средние равны нулю. Таким образом,

$$\left\langle T_\tau \psi_\sigma^+(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\alpha \psi_\sigma(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\sigma'}^+(0, 0) \hat{j}_\beta \psi_{\sigma'}(0, 0) \right\rangle = -\hat{j}_\alpha G_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\beta G_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r}, -\tau) - \hat{j}_\alpha F_{\sigma\sigma'}^+(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\beta F_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{r}, -\tau)$$

Тогда $Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k})$ принимает вид

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{2c} \int_{-\beta}^{\beta} e^{i\Omega\tau} d\tau \int d^3r e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left[2\hat{j}_\alpha G(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\beta G(-\mathbf{r}, -\tau) + 2\hat{j}_\alpha F(\mathbf{r}, \tau) \hat{j}_\beta F^*(-\mathbf{r}, -\tau) \right]$$

Заметим, что знаки петель, содержащих функции G и F , оказываются одинаковыми. Переписывая выражение (10.150) в импульсном представлении, получаем

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}(i\Omega, \mathbf{k}) = -\frac{Te^2}{c} \sum_{\omega_n} \int v_\alpha \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) v_\beta \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \times \\ \times \left\{ G \left(i\omega_n, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) G \left(i\omega_n + i\Omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + F \left(i\omega_n, \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) F^* \left(i\omega_n + i\Omega, \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right\} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Тогда при $\mathbf{k} = 0$

$$Q^{(1)}(0) = \frac{1}{3} Q_{\alpha\alpha}^{(1)}(0) = -\frac{e^2 T}{3m^2 c} \sum_{\omega_n} \int \mathbf{p}^2 \left(G^2(i\omega_n, \mathbf{p}) + |F(i\omega_n, \mathbf{p})|^2 \right) \frac{2d^3p}{(2\pi)^3}$$

Собирая вместе $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ и учитывая определение n_s , получим

$$n - n_s = -\frac{2T\nu_0 p_0^2}{3m} \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2} d\xi$$

Обратим внимание на то, что при интегрировании по ω выражение (10.153) обращается в нуль, в то время как при интегрировании по ξ этого не происходит. Следовательно, оно не вполне корректно определено. Дело в том, что эта величина не «сидит» на поверхности Ферми, и для правильного учета состояний вдали от уровня Ферми следовало бы брать плотность состояний, зависящую от энергии. Однако сверхтекучая плотность, несомненно, определяется поверхностью Ферми, потому что только там и происходит перестройка электронных состояний. В глубине же фермиевского моря (т.е. при $\xi \sim E_F$) ничего не происходит. Поэтому можно поступить так: вычесть из этого выражения аналогичное с $\Delta = 0$, т. е. для нормального металла. Тогда вклад глубоких состояний выпадет. При этом, как мы знаем, для нормального металла $n_s = 0$. В результате

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\xi^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} - \frac{\xi^2 - \omega_n^2 + \Delta^2}{(\xi^2 + \omega_n^2 + \Delta^2)^2} \right] d\xi.$$

Получившееся выражение можно интегрировать в любом порядке. Лучше всего сначала проинтегрировать по ξ . При этом оказываются полезными следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$$

После интегрирования получаем ответ:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} T \sum_{\omega_n} \frac{\pi \Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

а) $T \rightarrow 0$. Заменим сумму интегралом:

$$n_s = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} \frac{\pi \Delta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \frac{2\nu_0 p_0^2}{3m} = \frac{p_0^3}{3\pi^2} = n.$$

Видим, что при $T = 0$ сверхтекучая плотность равна полной, как и должно быть в трансляционно-инвариантной системе.

б) $T \rightarrow T_c$. В этом случае достаточно пренебречь Δ в знаменателе. Тогда сумма выражается через ζ -функцию (см. задачу 59), что дает

$$\frac{n_s}{n} = \frac{7\Delta^2}{4\pi^2 T_c^2} = 2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

Таким образом, при $T \rightarrow T_c$ сверхтекучая плотность уменьшается до нуля.
Теперь свяжем n_s с глубиной проникновения. Запишем закон Ампера:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A}$$

Поскольку $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, имеем

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{A}$$

Пусть граница образца перпендикулярна оси x , а магнитное поле параллельно оси z . Тогда

$$A_y(x) = A_y(0) e^{-x/\delta_\Lambda}$$

где

$$\delta_\Lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}$$

Отсюда получаем, что магнитное поле

$$H_z = -\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{A_y(0)}{\delta_\Lambda} e^{-x/\delta_\Lambda} = H_z(0) e^{-x/\delta_\Lambda}$$

экспоненциально затухает в глубь сверхпроводника, причем глубина проникновения равна δ_Λ .

В нашем расчете мы пренебрегали дисперсией $Q(k)$. Выясним, при каких условиях это законно, или, иными словами, каков масштаб пространственной дисперсии в сверхпроводнике. Чтобы определить этот масштаб, следует сравнить kV (это и есть величина, которой мы пренебрегли) со всеми остальными величинами в знаменателях функций G и F в (10.151). Сравнивая ξ с Δ , получаем характерный волновой вектор $k_0 \approx \xi^{-1}(T) \approx \Delta(T)/(\hbar v_F)$. Заметим, однако, что при $T \rightarrow T_c \Delta(T) \rightarrow 0$ и основную роль в знаменателе играет $\omega_{n=0} = \pi T_c \approx \Delta_0$. Поэтому на самом деле характерный волновой вектор при любых температурах есть $k_0 \approx \xi_0^{-1} \approx \Delta_0/(\hbar v_F)$. Для того чтобы наш расчет был применим, должно быть $\delta_\Lambda \gg \xi_0$. В этом случае сверхпроводник называют лондоновским. Противоположный предельный случай называется пиппартовским.

Оказывается, что в сверхпроводниках есть два пространственных масштаба. Один из них, $\xi(T)$, - это масштаб корреляций параметра порядка Δ . Другой, ξ_0 , это размер куперовской пары. При $T \rightarrow T_c$ различие между ними становится весьма ощутимым, поскольку при приближении T к T_c корреляционная длина $\xi(T)$ расходится, в то время как размер пары ξ_0 (он же масштаб пространственной дисперсии) при этом остается конечным.

В заключение покажем, как производить подобные расчеты с помощью матричной функции Грина

$$\widehat{G} = \begin{bmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & F_{\uparrow\downarrow} \\ F_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix}$$

Она удовлетворяет такому уравнению:

$$(i\omega - \xi(\mathbf{p})\tau_z - \Delta_1 \tau_x - \Delta_2 \tau_y) \widehat{G} = \widehat{1}$$

($\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2$). Оператор тока равен

$$\widehat{\mathbf{j}} = c \frac{\delta \widehat{G}^{-1}}{\delta \mathbf{A}} = e \mathbf{v}(\mathbf{p}) \widehat{1} - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} \tau_z, \quad \widehat{G} := -\frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} i\omega_n + \xi & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n - \xi \end{pmatrix};$$

Вычисляя

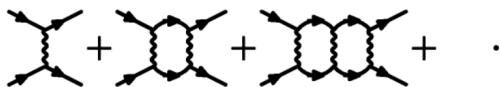
$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\hat{j}_\alpha \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \hat{j}_\beta \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \right) &= \frac{e^2 v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p})}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2} \text{Tr} ((i\omega_n + \xi\tau_z + \Delta\tau_x)(i\omega_n + \xi\tau_z + \Delta\tau_x)) = \\ &= 2e^2 v_\alpha(\mathbf{p}) v_\beta(\mathbf{p}) \frac{\Delta^2 + \xi^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2)^2}, \end{aligned}$$

получим то же выражение, что и ранее (см. (10.156)).

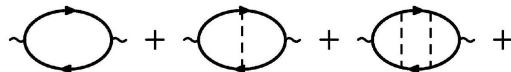
ЛШ-64. Теорема Андерсона.

Обычно говорят, что куперовские пары образованы электронами с противоположными импульсами и спинами. Оказывается, беспорядок не разрушает куперовские пары, хоть импульс и становится плохим квантовым числом. Качественно это можно пояснить так. В присутствии примесей электроны двигаются по ломанным, от одной примеси к другой. За каждым электроном вдоль линии его движения остается деформация решетки, представляющая собой шлейф из виртуальных фононов, рассасывающийся за время порядка ω_D^{-1} . Этот «ароматический след» притягивает другие электроны, причем эффект притяжения максимален для электрона, движущегося в точности по той же траектории, но в обратном направлении. Такие состояния есть при любой степени беспорядка, поскольку увеличение концентрации примесей лишь делает траектории более изломанными, но не выделяет определенного направления движения на каждой из них (в отличие, скажем, от траекторий в магнитном поле). Из этого рассуждения видно, что чисто потенциальное рассеяние на примесях, оставляющее систему инвариантной по отношению к обращению времени, не подавляет сверхпроводимость. А магнитное поле, например, подавляет.

Рассмотрите куперовскую восприимчивость χ_C в присутствии примесей. Чтобы получить χ_C , усредните по беспорядку диаграммы куперовской лестницы



При этом каждый блок куперовской лестницы превращается в диффузионную лестницу, подобную



Покажите, что наличие примесей не меняет $\chi_C(\mathbf{k} = 0)$ и, следовательно, не приводит к изменению T_c .

Решение 64. Для того чтобы изучить влияние примесей на T_c , рассмотрим диаграммы, образующие один блок куперовской лестницы, и усредним их по беспорядку:

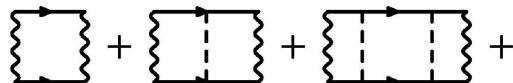


Рис. 10.13

Они имеют ту же структуру, что и диаграммы

. Отличие состоит в том, что куперовская петля теперь содержит примесную лестницу, описывающую рассеяние куперовской пары на примесях. Поэтому

$$\Gamma^C = -\frac{\lambda}{1 + \lambda\Pi_c}$$

где



Рис. 10.14

сумма лестничных диаграмм. По сути дела, такая сумма уже была вычислена нами в задаче 54. Напомним, что усредненная по беспорядку функция Грина в грязном металле равна

$$G(i\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \frac{1}{2\tau} \text{sign } \omega_n}.$$

Каждая ступенька куперовской лестницы, состоящая из двух функций Грина, взятая при $\Omega = 0, \mathbf{s} = 0$, есть

$$B_c(i\omega_n) = \int G(i\omega_n, \mathbf{p}) G(-i\omega_n, -\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0 d\xi}{(\omega_n + \frac{1}{2\tau} \text{sign } \omega_n)^2 + \xi^2} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2\tau|\omega_n|}$$

8.3.2 Трудные задачи на типичную сверхпроводимость (???????)

Суммировать B_c по ω_n не следует, поскольку столкновения с примесями - упругие.

Теперь вычислим всю примесную лестницу. При этом полезно вспомнить, что примесная штриховая линия равна $n\nu_0^2 = (2\pi\nu_0\tau)^{-1}$ (см. гл. 9). (???????)

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$L(i\omega_n) = B_c(i\omega_n) + \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} B_c^2(i\omega_n) + \dots = \frac{B_c(i\omega_n)}{1 - B_c(i\omega_n)/(2\pi\nu_0\tau)} = \frac{\pi\nu_0}{|\omega_n|}$$

Как мы видим, τ полностью исчезло из этой формулы. Отметим, что выпадение τ из ответа формально обвязано тому же сокращению, которое обеспечивает сохранение числа частиц при вычислении коррелятора плотность-плотность в ферми газе с примесями:

$$\langle n(\omega, \mathbf{q})n(-\omega, -\mathbf{q}) \rangle_{\mathbf{q}=0} = \pi\nu_0/(i\omega)$$

(см. задачу 52). Находим куперовскую петлю:

$$\Pi_c = -T \sum_{\omega_n} L(i\omega_n) = -2\pi\nu_0 T \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{|\omega_n|} = -\nu_0 \ln \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}$$

Поэтому

$$T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D e^{-1/\lambda\nu_0}$$

как и в отсутствие примесей.

8.3.2 Трудные задачи на типичную сверхпроводимость (???????)

Приведу некоторые относительно сложные задачи о сверхпроводниках с примесями. (?? мб и другом тоже, пока другого не знаю.)

ЛПП-65*. Лондоновская длина в сплаве

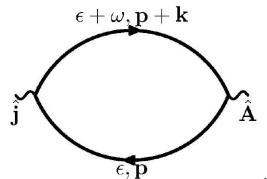
Рассеяние на примесях уменьшает сверхтекущую плотность n_s в формуле Лондонов (10.52). Чтобы найти зависимость n_s от концентрации примесей, определим ядро $Q(0)$ с учетом беспорядка. Процедура усреднения по беспорядку аналогична рассмотренной в задачах 50 и 51 (!?!?!?!?), с той только разницей, что вместо функций Грина свободных фермионов в сверхпроводнике надо использовать нормальную и аномальную функции (10.35) и (10.36).

а) Усредните по примесям матричную функцию Грина \hat{G} . Используйте введенную в гл. 9 (???) модель δ -функциональных примесей. Получите формулу

$$\langle \hat{G}(i\omega, \mathbf{p}) \rangle = \left(\hat{G}_0(i\omega, \mathbf{p})^{-1} + \frac{i\omega - \Delta\tau_x}{2\tau(\omega^2 + \Delta^2)^{1/2}} \right)^{-1}$$

Не теряя общности, вычисления можно упростить, считая $\Delta^* = \Delta$. При этом в матричной записи $\hat{G}_0^{-1}(i\omega, \mathbf{p}) = i\omega - \tau_z \xi(\mathbf{p}) - \Delta\tau_x$.

б) Усредните по беспорядку диаграмму для $Q(\mathbf{k})$, имеющую вид



Вычислив $\text{Tr}(\hat{j}\hat{G}\hat{j}\hat{G})$ получите $Q(\mathbf{k})$, после чего по $Q(\mathbf{k} = 0)$ определите сверхтекущую плотность.

Решение 65 а. (!?!?!?) суть решения напишу обязательно тут!!! все полностью опирается на задачи 50, 51)

Начнем с усреднения функций Грина сверхпроводника по примесям. Для этого мы вычислим матричную собственно-энергетическую часть



Рис. 10.15

При этом матричное выражение для примесной линии таково:

$$nu_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \hat{1}$$

(примеси одинаково хорошо рассеивают как электроны, бегущие вперед, так и назад, и при этом не переводят одно из спаривающихся состояний в другое, поскольку у них разный спин). Вычисляем собственно-энергетическую часть в первом порядке по концентрации примесей, следуя методу задачи 50:

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -\frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{i\omega_n \hat{1} + \xi_p \hat{\tau}_z - \Delta \hat{\tau}_x}{\omega_n^2 + \Delta^2 + \xi_p^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

Интегрируя по ξ , получаем

$$\hat{\Sigma}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\tau} \frac{i\omega_n \hat{1} + \Delta \hat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}$$

Таким образом

$$\hat{G}^{-1} = \hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma} = i\tilde{\omega}_n \hat{1} - \xi \hat{\tau}_z - \tilde{\Delta} \hat{\tau}_x$$

где

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n \left(1 + \frac{1}{2\tau \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right), \quad \tilde{\Delta} = \Delta \left(1 + \frac{1}{2\tau \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right)$$

Обратим внимание, что

$$\tilde{\omega}_n / \tilde{\Delta} = \omega_n / \Delta$$

Как мы убедимся в дальнейшем, это свойство очень важно.

При вычислении $\hat{\Sigma}$ мы использовали затравочные функции Грина G и F . Что произойдет, если теперь подставить исправленные функции Грина в выражение для $\hat{\Sigma}$? Оказывается, $\hat{\Sigma}$ при этом не изменится. Это легко видно из (10.178), поскольку при изменении в этом выражении ω_n и Δ в одно и то же число раз величина $\hat{\Sigma}$ не меняется. Поэтому полученный нами ответ автоматически оказался решением интегрального уравнения для $\hat{\Sigma}$, точно так же, как и для нормального металла (см. задачу 50).

В принципе, щель в грязном сверхпроводнике следует определять заново, решая уравнение самосогласования $\Delta_{\alpha\beta} = \lambda \int F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d\varepsilon d^3p}{(2\pi)^4}$, принимающее вид

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu_0 d\xi \tilde{\Delta}}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2}$$

Интегрируя по ξ , приходим к уравнению

$$\Delta = \pi \lambda \nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}} = \pi \lambda \nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}$$

не содержащему концентрации примесей. (Во втором равенстве мы использовали (10.181).) Таким образом, примеси не влияют не только на T_c , но и на термодинамику сверхпроводника вообще. Так происходит потому, что для термодинамических свойств существенна лишь полная плотность состояний (или, грубо говоря, сколько длин волн укладывается на каждой квазичастичной траектории) и совершенно не важно, как эти состояния устроены (т. е. по каким конкретно траекториям движутся квазичастицы, по прямым, или по ломанным, рассеиваясь на примесях).

Решение 65 б. Теперь рассмотрим отклик сверхтекучего тока на внешнее магнитное поле. В отличие от T_c , эта величина гораздо более чувствительна к форме траекторий и сильно изменяется даже при малых концентрациях примесей. (Достаточно, чтобы длина свободного пробега стала меньше, чем размер куперовской пары (0).) Определим сверхтекучую плотность. Как и в задаче 51, для вычисления отклика достаточно провести вычисления с усредненными по примесям функциями Грина, потому что диаграмма с примесной линией, соединяющей разные функции Грина, равна нулю (из-за того, что вершина взаимодействия с электромагнитным полем векторная). Усредненные же функции Грина отличаются от затравочных лишь заменой $\omega_n \rightarrow \tilde{\omega}_n, \Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$. Поэтому можно сразу написать формулу для n_s по аналогии с задачей 50:

$$\frac{n - n_s}{n} = T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 + \tilde{\Delta} - \tilde{\omega}_n^2}{(\xi^2 + \tilde{\Delta} + \tilde{\omega}_n^2)^2} d\xi$$

8.3.2 Трудные задачи на типичную сверхпроводимость (???????)

Как и ранее, вычтем из этого выражения его значение при $\Delta = 0, \tau = \infty$, чтобы исключить вклад ферми-моря. Интегрирование по ξ дает:

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}^2}{\left(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2\right)^{3/2}}$$

Итак,

$$\frac{n_s}{n} = \pi T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^{3/2} \left(1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}\right)}.$$

При малой концентрации примесей, когда $\tau\Delta_0 \gg 1$, это выражение воспроизводит результат задачи 63, а в противоположном «грязном» пределе $\tau\Delta_0 \ll 1$ дает следующее:

$$\frac{n_s}{n} = 2\pi\tau T \sum_{\omega_n} \frac{\Delta^2}{(\omega_n^2 + \Delta^2)^2} = \pi\tau\Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}.$$

Интересно, что в грязном сверхпроводнике даже при $T \rightarrow 0$ сверхтекучая плотность много меньше полной:

$$\frac{n_s(T \rightarrow 0)}{n} = \pi\tau\Delta_0 \ll 1$$

то связано с нарушением трансляционной инвариантности и «торможением» электронов примесями. Подставляя n_s в формулу для глубины проникновения δ_Λ , получаем

$$\delta_\Lambda = \frac{1}{2\pi} \sqrt{mc^2 / [e^2 \Delta \tau \operatorname{th}(\Delta/2T)]}$$

ЛШ-66*. Влияние магнитных примесей на сверхпроводимость.

Пусть кроме обычных примесей имеются также и магнитные:

$$H_{int} = \sum_{\mathbf{r}_a} J \psi^+(\mathbf{r}_a) \hat{S}_a^k \hat{S}_a^k \psi(\mathbf{r}_a)$$

Здесь \hat{S}_a^k - оператор спина a -й примеси. Спины примесей будем считать некоррелированными. Такие примеси нарушают симметрию по отношению к обращению времени и поэтому легко подавляют сверхпроводимость. Найдите T_c как функцию концентрации примесей $n_{\text{маг}}$. Покажите, что сверхпроводимость подавляется при относительно малой концентрации $n_{\text{маг}} \approx T_c/(v_F\sigma)$, где σ - сечение рассеяния на магнитной примеси.

Решение 66. (!?!?!)? суть решения напишу обязательно тут!!!)

Вначале найдем усредненную по парамагнитным примесям функцию Грина. Для того чтобы ее вычислить, мы используем модифицированную крестовую технику. Введем четырехкомпонентные функции Грина

$$\hat{G} = - \begin{pmatrix} \langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0, 0) \rangle & \langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta(0, 0) \rangle \\ \langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, \tau) \psi_\beta^+(0, 0) \rangle & \langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}, \tau) \hat{\psi}_\beta^+(0, 0) \rangle \end{pmatrix}$$

(α и β - спиновые индексы). При этом функция Грина в отсутствие примесей равна

$$\hat{G}_0 = - \frac{1}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} (i\omega_n + \xi) \delta_{\alpha\beta} & -\Delta_{\alpha\beta} \\ -\Delta_{\alpha\beta}^+ & (i\omega_n - \xi) \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

а $\Delta_{\alpha\beta} = i\Delta\sigma_{\alpha\beta}^y$ ($\sigma_{\alpha\beta}^i$ - спиновые матрицы Паули). Как и в предыдущей задаче, найдем собственno-энергетическую часть из диаграммы на рис. 10.16:

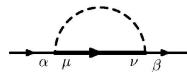


Рис. 10.16

В случае парамагнитных примесей штриховая линия имеет нетривиальную спиновую структуру. Ее можно найти, вычислив коррелятор флуктуаций примесного потенциала:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_a J\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \sigma_{\alpha\beta}^i S_i^a \sum_b J\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_b) \sigma_{\mu\nu}^k S_k^b \right\rangle &= n_{\text{mag}} J^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle S^i S^k \rangle \sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^k = \\ &= \frac{S(S+1)}{3} n_{\text{mag}} J^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^i \end{aligned}$$

Стоящее здесь скалярное произведение матриц Паули можно преобразовать, используя тождество Фирца: $\sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\mu\nu}^i = 2\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}$. Получаем:

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{n_{\text{mag}}}{3} J^2 S(S+1) (2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_{\mu\nu}(i\omega_n, \xi) \nu_0 d\xi$$

Подставим вначале в этот интеграл \widehat{G}_0 . Интегрирование производится довольно просто, и мы получаем

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s} \frac{i\omega_n \widehat{1} - 2\delta_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \widehat{\tau}_x + \Delta_{\alpha\beta} \widehat{\tau}_x}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}$$

где $\tau_s = \frac{3}{\pi\nu_0 n_{\text{mag}} J^2 S(S+1)}$ - время релаксации спина на примесях. Поскольку $\Delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = 0$, то мы получаем таким образом, что $\widehat{G}^{-1} = \widehat{G}_0^{-1} - \widehat{\Sigma}$ отличается от \widehat{G}_0 заменой ω_n и Δ на

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n \left(1 + \frac{1}{2\tau_s \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right), \quad \tilde{\Delta} = \Delta \left(1 - \frac{1}{2\tau_s \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} \right)$$

Однако заметим, что теперь, в отличие от задачи 64,

$$\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} \neq \omega/\Delta.$$

Поэтому если теперь подставить \widehat{G} в (10.194), то получится другое значение $\widehat{\Sigma}$. Попробуем решить задачу самосогласованно, подставляя в (10.194) \widehat{G} с неизвестными $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Delta}$. Тогда

$$\widehat{\Sigma}_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi\tau_s} \frac{i\tilde{\omega}_n \widehat{1} - \tilde{\Delta}_{\alpha\beta} \widehat{\tau}_x}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}}.$$

Уравнение Дайсона теперь приводит к условию самосогласования, определяющему $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega + \frac{\tilde{\omega}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}, \\ \tilde{\Delta} &= \Delta - \frac{\tilde{\Delta}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}. \end{aligned}$$

Теперь запишем уравнение Горькова, определяющее щель:

$$\Delta = \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_0 d\xi F(i\omega_n, \xi) = \lambda T \sum_{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta} \nu_0 d\xi}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2 + \xi^2} = \pi \lambda \nu_0 T \sum_{\omega_n} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\Delta}^2}}.$$

Из-за того, что $\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} \neq \omega/\Delta$, это уравнение отличается от уравнения для чистого сверхпроводника.

Выведем отсюда уравнение, определяющее температуру перехода сверхпроводника с парамагнитными примесями T_c^* . Полагая $\Delta \rightarrow 0$, решим полученные уравнения $\tilde{\omega} = \omega + \frac{\tilde{\omega}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}$, и $\tilde{\Delta} = \Delta - \frac{\tilde{\Delta}}{2\tau_s \sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2}}$:

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2\tau_s} \text{sign } \omega, \quad \tilde{\Delta} \left(1 + \frac{1}{2\tau_s |\tilde{\omega}|} \right) = \Delta.$$

Тогда уравнение на T_c^* имеет вид:

$$1 = 2\pi \lambda \nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{\tilde{\Delta}}{\Delta \tilde{\omega}_n} = 2\pi \lambda \nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\tilde{\omega}_n + 1/2\tau_s} = 2\pi \lambda \nu_0 T_c^* \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n + 1/\tau_s}.$$

Остановимся на физическом смысле этой формулы. При рассеянии на парамагнитной примеси спин электрона может перевернуться, и τ_s есть среднее время между двумя переворотами спина, т.е. время

жизни куперовской пары. Знаменатель в (10.204) описывает развал куперовских пар из-за рассеяния на магнитных примесях и уменьшение эффективного времени взаимодействия.

Если τ_s велико по сравнению с h/T_c^* , то парамагнитные примеси лишь слегка сдвигают T_c . Но при $\tau_s \approx h/T_c^*$ сверхпроводимость полностью подавляется. Найдем критическое τ_s^* , полагая $T_c^* = 0$ и заменяя сумму на интеграл:

$$\frac{1}{\lambda\nu_0} = \ln \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{\omega + 1/\tau_s^*} = \ln(\omega_D\tau_s^*)$$

откуда

$$\tau_s^* = 2\gamma\hbar/(\pi T_c)$$

Таким образом, парамагнитные примеси даже в малых концентрациях могут существенно повлиять на свойства сверхпроводника и даже полностью подавить сверхпроводимость. При этом оказывается, что в определенном интервале по концентрации примесей существует режим так называемой бесщелевой сверхпроводимости, в котором сопротивление металла равно нулю, но энергетическая щель отсутствует. Так получается из-за того, что примеси меняют энергию связи электронов в паре по-разному в разных частях образца.

ЛШ-67*. Верхнее критическое поле в грязном сверхпроводнике

Сверхпроводимость можно подавить магнитным полем, поскольку оно нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Как именно происходит это подавление, зависит от характеристик сверхпроводника. Рассмотрим грязный сверхпроводник, в котором $l \ll \xi_0$, и, начиная с сильного поля H , в котором сверхпроводимость подавлена, будем постепенно уменьшать величину H и определим пороговое значение H , при котором сверхпроводимость восстанавливается. Оказывается, для этого нужно изучить устойчивость системы по отношению к малым неоднородным флуктуациям $\Delta(\mathbf{r})$. Формально, для этого надо рассмотреть куперовскую лестницу в слабом статическом поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, таком что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Записав для этого случая уравнение самосогласования $\Delta_{\alpha\beta} = \lambda \int F_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d\varepsilon d^3 p}{(2\pi)^4}$ в пределе $\Delta \rightarrow 0$, найдите, при каком поле существует нетривиальное решение этого уравнения. Это поле называется верхним критическим полем H_{c2} .

Решение 67. (!?!?!)? суть решения напишу обязательно тут!!!

Как и в задаче 64, мы вначале найдем куперовскую примесную лестницу, а затем подставим ее в уравнение самосогласования. Вычисление куперовской лестницы во внешнем магнитном поле в общем случае довольно сложно. Однако если поле медленно меняется на длине свободного пробега, эта задача сильно упрощается. Заметим, что две ступеньки примесной лестницы находятся друг от друга на расстоянии порядка l . Это позволяет пренебречь изменением поля на одной ступеньке и рассмотреть ступеньку в постоянном поле. Изменение поля мы учтем, переходя к суммированию ступенек, каждая из которых чувствует магнитное поле на своем отрезке траектории.

Поскольку нас интересуют неоднородные решения уравнения самосогласования, мы вначале вычислим примесную лестницу при ненулевом суммарном импульсе \mathbf{s} в нулевом магнитном поле. Это можно сделать так же, как и в задаче 54. Одна ступенька лестницы вычисляется точно так же:

$$B_c = \iint \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\nu_0 d\xi}{(i\omega - \xi + \frac{i}{2\tau} \text{sign } \omega)(-i\omega - \xi + \mathbf{s}\mathbf{v} - \frac{i}{2\tau} \text{sign } \omega)} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + i\tau\mathbf{s}\mathbf{v}} = \frac{2\pi\nu_0\tau}{1 + 2|\omega|\tau + \tau D s^2}$$

где D - коэффициент диффузии. Суммируя лестницу, получаем

$$C_\omega(\mathbf{s}) = \frac{B_c}{1 - B_c/2\pi\nu_0\tau} = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D s^2}$$

Теперь учтем магнитное поле. Пусть сначала его векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ постоянен. Тогда его учет сведется к сдвигу импульсов $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ в функциях Грина. Поэтому в примесной лестнице \mathbf{s} заменится на $\mathbf{s} - 2e\mathbf{A}/c$:

$$\hat{C}_\omega = \frac{2\pi\nu_0}{2|\omega| + D (\mathbf{s} - \frac{2e}{c} \mathbf{A})^2}.$$

Удобно записать это выражение в координатном представлении. Будем считать $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ функцией начальной и конечной точек. Заменив \mathbf{s} на $-i\nabla_{\mathbf{r}}$, перепишем выражение для куперона в форме дифференциального уравнения:

$$\left[2|\omega| + D \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \right] C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Что изменится, если $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ - медленно меняющаяся функция? Если мы намерены учитывать лишь первые два порядка по \mathbf{A} в знаменателе (10.209), то легко понять, что все возможные усложнения связаны с появлением членов, зависящих от $\text{div } \mathbf{A}$, поскольку это единственная вращательно инвариантная комбинация из производных \mathbf{A} . (Иными словами, если \mathbf{A} становится функцией \mathbf{r} , возникает вопрос о порядке операторов

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и ∇ в купероне.) Но выбирая калибровку, в которой $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, мы всегда можем добиться исчезновения подобных поправок. Поэтому для того, чтобы вычислить примесную лестницу, достаточно решить уравнение

$$\left[2|\omega| + D \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \right] C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Это уравнение можно вывести и напрямую. Для этого надо рассмотреть такие поправки к одной «ступеньке»:

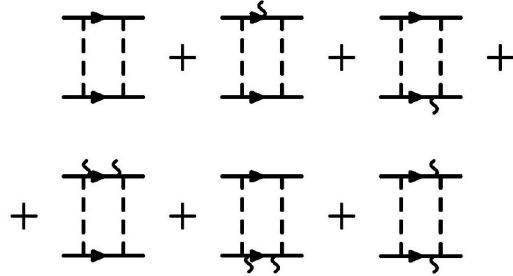


Рис. 10.17

(Волнистые линии на этом рисунке изображают взаимодействие с внешним магнитным полем.) После этого суммирование лестницы дает уравнение (10.211). Теперь запишем уравнение самосогласования, полагая $\Delta \rightarrow 0$. Вблизи H_{c2} состояние неоднородно, поэтому Δ зависит от \mathbf{r} . Уравнение Горькова имеет вид

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Аномальная гриновская функция $F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ дается при $\Delta \rightarrow 0$ единственной диаграммой:

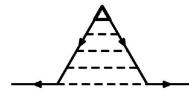


Рис. 10.18

Сравнивая ее с диаграммой для примесной лестницы, находим

$$F(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}) = \int \Delta(\mathbf{r}') C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r'$$

Поэтому уравнение самосогласования записывается так:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') d^3 r'$$

Чтобы найти его решения, удобно разложить $\Delta(\mathbf{r})$ по нормированным собственным функциям $\varphi_n(\mathbf{r})$ оператора в левой части (10.211). Эти функции обладают такими свойствами:

$$\begin{aligned} D \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \varphi_n(\mathbf{r}) &= \mu_n \varphi_n(\mathbf{r}), \\ \int \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_m^*(\mathbf{r}) d^3 r &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

(μ_n – n -е собственное значение). Запишем $\Delta(\mathbf{r})$ в виде

$$\Delta(\mathbf{r}) = \sum_n \Delta_n \varphi_n(\mathbf{r})$$

Куперон можно выразить через $\varphi_n(\mathbf{r})$:

$$C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\pi\nu_0 \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}')}{2|\omega| + \mu_n}$$

Это соотношение легко проверить, заметив, что эта функция в силу (10.215) удовлетворяет уравнению при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, а при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ левая часть уравнения совпадает с δ -функцией, поскольку интеграл от нее по \mathbf{r} равен 1 в силу (10.216). Тогда уравнение (10.214) перепишется так:

$$\Delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\nu_0 \lambda \Delta_n}{2|\omega| + \mu_n} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Оно имеет нетривиальное решение при

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2|\omega| + \mu_n}$$

Интеграл следует обрезать сверху при $\omega = \omega_D$, как и ранее. В результате

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \ln \frac{2\omega_D}{\mu_n}.$$

Найдем собственные значения μ_n . Для этого нужно решить уравнение (10.215). Выберем калибровку $A_y = -Hx$. Тогда можно заметить, что уравнение (10.215) совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой $m = (2D)^{-1}$, зарядом $q = 2e$ и энергией μ_n в магнитном поле H . Из квантовой механики известно, что в этом случае собственные значения таковы:

$$E_n = \omega_H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}; \quad \omega_H = \frac{qH}{mc}.$$

Это означает, что

$$\mu_n = \frac{4DeH}{c} \left(n + \frac{1}{2} \right) + Dk_z^2.$$

Поскольку собственные значения растут с ростом H , критическое магнитное поле определяется наименьшим собственным значением. Оно равно $\mu_0 = 2DeH/c$. Таким образом

$$\frac{1}{\nu_0 \lambda} = \ln \frac{\omega_{DC}}{DeH_{c2}}.$$

Выражая λ через T_c с помощью (10.73), получаем окончательно

$$H_{c2} = \frac{\pi}{2\gamma} \frac{T_c c}{De} = \frac{\pi}{\gamma} \frac{T_c}{\hbar D} \Phi_0$$

где $\Phi_0 = \hbar c/2e$ - квант потока.

Заметим, что собственные функции, отвечающие минимальному собственному значению, локализованы:

$$\varphi_{n,k_y}(x, y, z) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_H^{1/2}} e^{ik_y y} e^{-(x-x_0)^2/2l_H^2},$$

$\Gamma \pi e$

$$l_H = \sqrt{\hbar c/(qH)}, \quad x_0 = ck_y/(qH).$$

Таким образом, сверхпроводимость возникает в «нитях» толщины l_H . При понижении поля концентрация нитей быстро возрастает, пока они не заполнят собой весь объем.

В каких случаях переход от сверхпроводимости к нормальному металлу в магнитном поле устроен так, как описано в решении? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить магнитные поля, соответствующие различным сценариям разрушения сверхпроводимости. Мы вычислили магнитное поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости неоднородным образом. Оценим поле, соответствующее разрушению сверхпроводимости сразу во всем объеме. Для этого надо сравнить энергию магнитного поля в объеме сверхпроводника с энергией конденсации. Энергия магнитного поля на единицу объема есть

$$E_{\text{mag}} = H^2/8\pi$$

Энергию конденсации легко оценить, считая, что частицы в интервале энергий Δ за счет конденсации поникают свою энергию на Δ . Число таких частиц в единице объема есть $\nu_0 \Delta$, поэтому энергия конденсации равна

$$E_c \approx \nu_0 \Delta^2 \approx \nu_0 T_c^2$$

Таким образом, магнитное поле, соответствующее однородному разрушению сверхпроводимости (термодинамическое критическое поле), есть

$$H_c \approx T_c \sqrt{\nu_0}$$

Сравним его с H_{c2}

$$\frac{H_c}{H_{c2}} \approx \sqrt{De\nu_0} c \approx \frac{v_F l \sqrt{mp_F/\hbar^3}}{c} \approx l \sqrt{\frac{e^2 p_F^3}{mc^3 \hbar^3}} \approx \frac{l}{\delta_\Lambda}$$

где δ_Λ - лондоновская глубина проникновения в чистом сверхпроводнике, определенная в (10.162). Таким образом, $H_{c2} \gg H_c$ при $l \ll \delta_\Lambda$. В этом случае H_{c2} действительно определяет границу сверхпроводящей фазы. Если же $H_{c2} \ll H_c$ (т. е. $\delta_\Lambda \ll l$), то переход происходит однородно по всему объему при поле H_c . В этом случае при $H = H_{c2} < H_c$ ничего особенного не происходит.

ЛШ-68. О туннелировании (???)

(!!! потом много в 1 части напишу указаний про эту задачу!)

- a) Выведите формулу для туннельного тока

$$I(V) = 4e \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon + eV) \text{Im} G_b^R(\mathbf{p}', \varepsilon) [n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)] \frac{d\varepsilon}{\pi}$$

где $n_F(\varepsilon)$ - фермиевская функция распределения, а $G_a^R(\mathbf{p}, \varepsilon) = -i \int_0^\infty \langle [a_\mathbf{p}^+(t), a_\mathbf{p}(0)] \rangle e^{i\varepsilon t} dt$, используя мацубаровскую технику.

Для этого рассмотрите отклик туннельного тока $\hat{I} = i\hat{X}e^{ieVt} - i\hat{X}^+e^{-ieVt}$ на поле, пропорциональное туннельному оператору $X = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'}$. Используя аналитические свойства мацубаровских функций Грина, перейдите от мнимых частот к вещественным и тем самым свяжите функцию отклика с величинами в реальном времени.

б) Рассмотрите туннелирование между двумя идеальными ферми-газами с постоянной плотностью состояний. Покажите, что при $eV \ll E_F$ вольт-амперная характеристика линейна, т. е. выполняется закон Ома $V = RI$, причем сопротивление контакта R не зависит от температуры и определяется соотношением

$$R^{-1} = 4\pi e^2 \nu_a \nu_b |T_0|^2$$

где ν_a и ν_b - плотности состояний берегов контакта.

в) Пусть в одном из ферми-газов имеется взаимодействие между частицами, так что собственно-энергетическая часть оказывается равной

$$\Sigma(\xi, \varepsilon) = a\xi - b\varepsilon$$

где ε - энергия частицы, а $\xi = v_F(p - p_0)$, причем $\xi, \varepsilon \ll E_F$. Найдите туннельное сопротивление.

Указание: Для электрон-фононного взаимодействия собственно-энергетическая часть есть функция ε , а от ξ не зависит (см. гл. 6). Поэтому в этом случае $a = 0$. Для электрон-электронного взаимодействия собственно-энергетическая часть зависит как от ξ , так и от ε , и поэтому $a \neq 0$ и $b \neq 0$. (????!??!)

Решение 68 а. Согласно формуле Кубо, среднее от оператора туннельного тока (11.13) в низшем порядке теории возмущений по туннельному гамильтониану (11.11) равно

$$I(t) = i \int_{-\infty}^t \langle [\hat{H}_T(t'), \hat{I}(t)] \rangle dt'.$$

Благодаря фазовым множителям $e^{\pm ieVt}$ операторы $\hat{H}_T(t)$ и $\hat{I}(t)$ явно зависят от времени. Чтобы свести задачу вычисления туннельного тока к стандартной задаче о нахождении функции отклика в равновесном состоянии, введем обобщенную восприимчивость $\chi(\omega)$

$$\chi(\omega) = i \int_0^\infty \langle [\hat{X}(t), \hat{I}(0)] \rangle e^{i\omega t} dt$$

описывающую отклик туннельного тока на поле \hat{X} , определенное соотношением (11.12). Нетрудно видеть, что туннельный ток как функция напряжения V на туннельном контакте связан с $\chi(\omega)$ следующим соотношением:

$$I(V) = 2 \text{Re} \chi(\omega = eV)$$

Чтобы вычислить $\chi(\omega)$, найдем мацубаровскую восприимчивость

$$\chi_M(i\Omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \rangle e^{i\Omega_n \tau} d\tau$$

а затем продолжим ее на вещественные частоты. Раскроем среднее с помощью определений $\hat{I} = \dot{\hat{Q}}_a = ie \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'} + \text{h.c.}$, $X = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{b}_{\mathbf{p}'}$ получим

$$\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \rangle = \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \left\langle T_\tau \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^+(\tau) \hat{b}_{\mathbf{p}'_1}(\tau) \left(T_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^+(0) \hat{b}_{\mathbf{p}'_2}(0) - T_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2}^* \hat{a}_{\mathbf{p}_2}(0) \hat{b}_{\mathbf{p}'_2}^+(0) \right) \right\rangle.$$

В отсутствие сверхпроводящих корреляций в пробнике и образце средние вида $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'}^+ \rangle$ и $\langle \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} \rangle$ равны нулю. (не очень глубоко это понимаю) Поэтому только вклад второго члена в $\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \rangle$ оказывается отличным от нуля. Далее, спаривая операторы, находим (????? почему минус в второй функции Грина?)

$$\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \rangle = -ie \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 G_a(\tau, \mathbf{p}) G_b(-\tau, \mathbf{p}')$$

где $G_a(\tau, \mathbf{p}) = -\langle T_\tau \hat{a}_{\mathbf{p}}(\tau) \hat{a}_{\mathbf{p}}^+(0) \rangle$ и $G_b(\tau, \mathbf{p}) = -\langle T_\tau \hat{b}_{\mathbf{p}}(\tau) \hat{b}_{\mathbf{p}}^+(0) \rangle$ - мацубаровские функции Грина соответственно пробника и образца. Записав функции Грина в частотном представлении (???) подставив в $\chi_M(i\Omega_n)$, получим

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 G_a(i\omega_m + i\Omega_n, \mathbf{p}) G_b(i\omega_m, \mathbf{p}')$$

где множитель 2 учитывает суммирование по проекциям спина. Теперь выполним аналитическое продолжение с помощью интегрального представления $G(i\varepsilon_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } G^R(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\varepsilon - i\varepsilon_n} d\varepsilon$, с помощью которого мацубаровские функции Грина выражаются через мнимые части запаздывающих функций. В результате получим:

$$\chi_M(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\text{Im } G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im } G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}')}{(i\omega_m + i\Omega_n - \varepsilon)(i\omega_m - \varepsilon')} \frac{d\varepsilon d\varepsilon'}{\pi^2}$$

Далее, сумма по ω_m вычисляется с помощью тождества $T \sum_{\omega_m} \frac{1}{(i\omega_m + i\omega_n - \xi_{p+k})(i\omega_m - \xi_p)} = \frac{n_F(\xi_{p+k}) - n_F(\xi_p)}{i\omega_n - \xi_{p+k} + \xi_p}$. Таким образом,

$$\chi_M(i\Omega_n) = -\frac{2ie}{\pi^2} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im } G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}') \frac{n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon + i\Omega_n} d\varepsilon d\varepsilon'.$$

Аналитическое продолжение (11.46) на вещественные частоты достигается заменой $i\Omega_n$ на $\omega + i0$. Вещественная часть полученного выражения дает туннельный ток

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \delta(\varepsilon' - \varepsilon - eV) \times \text{Im } G_a^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \text{Im } G_b^R(\varepsilon', \mathbf{p}') (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon')) d\varepsilon d\varepsilon'.$$

Интегрирование по ε уничтожает δ -функцию и мы получаем искомое выражение для туннельного тока:

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } G_a^R(\varepsilon + eV, \mathbf{p}) \text{Im } G_b^R(\varepsilon, \mathbf{p}') (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) d\varepsilon$$

Полученная формула имеет совершенно общий характер, поскольку при её выводе не делалось никаких предположений о спектре и характере взаимодействия в пробнике и образце.

Решение 68 б. Применим общую формулу

$$I(V) = \frac{4e}{\pi} \sum_{\mathbf{pp}'} |T_{\mathbf{pp}'}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } G_a^R(\varepsilon + eV, \mathbf{p}) \text{Im } G_b^R(\varepsilon, \mathbf{p}') (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) d\varepsilon$$

к задаче о туннельном контакте между двумя нормальными металлами. Мнимая часть запаздывающей функции Грина $G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = (\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} + i0)^{-1}$ равна

$$\text{Im } G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi\delta(\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})$$

Рассмотрим более простой случай шероховатого барьера, когда туннельный матричный элемент не зависит от импульсов: $T_{\mathbf{pp}'} = T_0$. Величина T_0 есть значение туннельного матричного элемента при энергии вблизи E_F . При этом каждая из двух функций Грина в общей формуле для тока через контакт интегрируется по импульсам отдельно и соответственно вклад каждой из них есть

$$\int \text{Im } G_{a(b)}^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = -\pi\nu_{a(b)}$$

где $\nu_{a(b)}$ - плотность состояний с одной проекцией спина.

Нетрудно проверить, что

$$\int (n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + eV)) d\varepsilon = eV$$

при произвольной температуре. Поэтому туннельный ток (11.48) можно записать в виде

$$I(V) = V/R, \quad \text{где} \quad R = \left(4\pi e^2 |T_0|^2 \nu_a \nu_b \right)^{-1}$$

- сопротивление туннельного контакта. Таким образом, для контакта между нормальными металлами справедлив закон Ома, причем сопротивление при $T \ll E_F$ не зависит от температуры.

Нетрудно убедиться в том, что закон Ома с независящим от температуры сопротивлением получается и при произвольной зависимости туннельного матричного элемента $T_{\mathbf{pp}'}$ от импульсов \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Интересно, что даже в случае туннелирования через идеально гладкий барьер, при котором сохраняется параллельная барьеру компонента импульса, закон Ома по-прежнему имеет место при $T \ll E_F$. Эффект сохранения импульса при туннелировании существенно влияет на характер зависимости $I(V)$ при $eV, T \ll E_F$ только в тех случаях, когда и образец, и пробник представляют собой достаточно низкоразмерные системы.

Решение 68 в. Одночастичная функция Грина с собственно-энергетической частью вида (11.31) имеет вид

$$G(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{G_0^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(\varepsilon, \mathbf{p})} = \frac{1}{\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a) + i0}$$

При этом туннельная плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int \text{Im } G(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \delta(\varepsilon(1+b) - \xi_{\mathbf{p}}(1+a)) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{\nu_0}{1+a}$$

где ν_0 - плотность состояний без учета взаимодействия. Таким образом оказывается, что туннельная плотность состояний не зависит от константы b .

Полезно сравнить этот ответ с перенормировкой спектра квазичастиц. Функция Грина имеет полюс при

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{1+a}{1+b} v_F (|\mathbf{p}| - p_0)$$

Таким образом, константа b дает вклад в перенормировку спектра, не меняя при этом туннельный ток. Так происходит потому, что константа b определяет величину скачка в распределении частиц по импульсам на ферми-поверхности, равную вычету функции Грина в квазичастичном полюсе

$$Z = 1/(1+b)$$

Но поскольку перенормировка туннельной плотности состояний пропорциональна

$$\nu(\varepsilon) \approx Z(\partial\varepsilon/\partial\xi)^{-1}$$

вклады константы b в эффективную массу и в вычет Z взаимно сокращаются. Таким образом, туннельный ток зависит не только от перенормированного спектра квазичастиц $\varepsilon = \xi(p)$, но и от их структуры, описываемой величиной Z .

В случае электрон-фононного взаимодействия $a = 0$, и поэтому туннельный ток оказывается точно таким же, как и в отсутствие взаимодействия. Качественно это объясняется адиабатичностью фононов. Туннелирование электрона в металл происходит мгновенно, поэтому при туннелировании решетку можно считать неподвижной. Таким образом, вероятность туннелирования определяется свойствами свободных электронов. Фононы же затем за время порядка ω_D^{-1} подстраиваются под конечное состояние электронов после туннелирования, каким бы оно ни было.

Заметим, что наш вывод об отсутствии влияния электрон-фононного взаимодействия на туннельный ток имеет весьма общий характер. Как нетрудно видеть, туннельная плотность состояний (11.54) не меняется, если собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon)$ зависит от энергии ε произвольным образом. Для полного сокращения эффектов взаимодействия требуется лишь отсутствие зависимости Σ от \mathbf{p} , которое в случае электрон-фононного взаимодействия обеспечивается адиабатичностью фононов.

ЛШ-69. Туннельный ток в NS-контакте

Рассмотрим туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводником, к которому приложено напряжение V . Выразите туннельный ток при $T < T_c$ через сопротивление контакта R в нормальном состоянии, т. е. при $T > T_c$. Покажите, что при нулевой температуре зависимость туннельного тока от V имеет порог:

$$I = \frac{1}{R} \sqrt{V^2 - (\Delta/e)^2} \text{sign } V,$$

где Δ - сверхпроводящая щель при $T = 0$. Найдите зависимость туннельного тока от температуры при $0 < T < T_c$.

Решение 69. Для нахождения туннельного тока между нормальным металлом и сверхпроводником можно воспользоваться общим соотношением

$$\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$$

При этом в сверхпроводнике аномальные средние вида $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^+ \rangle$ отличны от нуля, и поэтому требуется заново проанализировать вклад двух членов $\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$ в туннельный ток. Однако оказывается, что поскольку в нормальном металле средние $\langle \hat{b}_{\mathbf{p}_1}^- \hat{b}_{\mathbf{p}_2}^- \rangle$ равны нулю, первый член в $\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$ по-прежнему обращается в нуль при усреднении. Поэтому, как и в задаче 68, можно перейти от $\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$ к выражению (11.48), в которое входят туннельные плотности состояний пробника и образца.

Туннельная плотность состояний дается мнимой частью функции Грина. Аналитическое продолжение функции Грина сверхпроводника (10.35) с положительных мацубаровских частот на вещественную ось дает

$$G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\varepsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\varepsilon^2 - \xi_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2 + i0 \operatorname{sign} \varepsilon}$$

Следовательно туннельная плотность состояний есть

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} G^R(\varepsilon, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon + \xi) \delta(\varepsilon^2 - \xi^2 - \Delta^2) \operatorname{sign} \varepsilon d\xi$$

Вычисляя интеграл от δ -функции, находим

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \nu_0 |\varepsilon| / (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2} & \text{при } |\varepsilon| > \Delta \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| < \Delta \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что этот результат может быть записан в виде $\pi \nu_0 \partial \xi / \partial \varepsilon$, т.е. как плотность состояний квазичастиц с законом дисперсии $\varepsilon^2 = \Delta^2 + \xi^2$. Хотя такой подход игнорирует различие между туннелирующими электронами и квазичастицами, в которые они превращаются в сверхпроводнике, результат в данном случае оказывается верным. Причина состоит в том, что квазичастицы теории БКШ состоят из двух электронов с одинаковой энергией. Их вклады в туннельную плотность состояний равны $|u_p|^2$ и $|v_p|^2$, где u_p и v_p - коэффициенты преобразования Боголюбова. Но поскольку $u_p^2 + v_p^2 = 1$, суммарный вклад двух компонент квазичастицы в туннельный ток определяется только свойствами квазичастичного спектра. Так происходит потому, что эффекты взаимодействия в теории БКШ учитываются только в рамках теории среднего поля, и поэтому многочастичные эффекты оказываются относительно простыми.

Подставляя туннельную плотность состояний (11.60) в (11.48), находим туннельный ток:

$$I_{N-S}(V) = 4\pi e \nu_a \nu_b |T_0|^2 \int_{|\omega| > \Delta} (n_F(\omega) - n_F(\omega + eV)) \frac{|\omega| d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}.$$

Рассмотрим случай нулевой температуры. Пусть $eV > 0$. Тогда интегрирование по энергиям производится в интервале $-eV < \varepsilon < 0$. При $eV < \Delta$ интеграл (11.61) обращается в нуль, поскольку в этой области не выполнено условие $|\varepsilon| > \Delta$. Для $eV > \Delta$ находим

$$I_{N-S}(V) = \frac{1}{eR} \int_{-eV}^{-\Delta} \frac{|\varepsilon| d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} = \frac{\sqrt{(eV)^2 - \Delta^2}}{eR}$$

Таким образом, зависимость туннельного тока от напряжения имеет порог, равный Δ/e . Рассматривая аналогично случай $eV < 0$, получаем искомую зависимость (11.32), обладающую свойством антисимметрии: $I_{N-S}(-V) = -I_{N-S}(V)$.

Порог при $eV = \Delta$ является резким только при нулевой температуре. При конечной температуре в нормальном металле всегда имеются квазичастицы с энергией $\varepsilon > \Delta$, которые могут туннелировать в сверхпроводник. Поэтому естественно ожидать, что при $T > 0$ корневая особенность размывается и туннельный ток оказывается отличным от нуля при всех напряжениях.

Чтобы убедиться в том, что это действительно так, найдем туннельный ток под порогом при малых температурах $T \ll \Delta$. Интеграл в (11.61) при таких T определяется окрестностями точек $\varepsilon = \pm\Delta$. Введем обозначение $\varepsilon = \pm(\Delta + x)$ в каждой из областей. Как будет ясно из дальнейших вычислений, характерное значение x оказывается порядка T , поэтому можно разложить плотность состояний по x/Δ . Выражение для туннельного тока соответственно принимает вид

$$I_{N-S}(V, T) = 4\pi e \nu_a \nu_b |T_0|^2 \int_0^{\infty} [n_F(\Delta + x) + n_F(-\Delta - x) - n_F(\Delta + eV + x) - n_F(-\Delta - x + eV)] \frac{\Delta dx}{\sqrt{2\Delta x}}.$$

8.3.2 Трудные задачи на типичную сверхпроводимость (???????)

Упростим полученное выражение, воспользовавшись тождеством $n_F(-\varepsilon) = 1 - n_F(\varepsilon)$, которому удовлетворяет фермиевская функция распределения. Получаем

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{1}{eR} \int_0^\infty [n_F(\Delta - eV + x) - n_F(\Delta + x + eV)] \sqrt{\frac{\Delta}{2x}} dx.$$

(мы выразили туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии). При больших положительных значениях энергии фермиевская функция распределения переходит в большинственную,

$$n_F(\varepsilon \gg T) \approx e^{-\varepsilon/T}$$

и поэтому выражение для туннельного тока принимает следующий вид:

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{1}{eR} e^{-\Delta/T} \operatorname{sh} \frac{eV}{T} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\Delta}{x}} e^{-x/T} dx$$

Вычисляя интеграл по x с помощью известного представления гамма-функции, находим

$$I_{N-S}(V, T) = \frac{\sqrt{2\pi\Delta T}}{eR} e^{-\Delta/T} \operatorname{sh} \frac{eV}{T}$$

Это выражение неприменимо в узкой окрестности порога при $(eV - \Delta) \sim T$, поскольку при таких напряжениях приближение (11.65) нельзя применять к первому члену в (11.64).

Итак, при $0 < T \ll \Delta$ ток (11.61) при $eV < \Delta$ экспоненциально мал. По мере роста температуры ток под порогом $eV < \Delta$ возрастает, и когда температура достигает T_c , вольт-амперная характеристика становится омической, как для контакта между двумя нормальными металлами.

Помимо термоактивационного вклада в ток, описываемого формулой (11.67), под порогом $eV = \Delta$ существует еще один весьма интересный вклад, не исчезающий при $T \rightarrow 0$. Он связан с когерентным туннелированием пары электронов с противоположными импульсами и спинами. Оказавшись в сверхпроводнике, такие два электрона могут образовать куперовскую пару. Туннелирование пары, в отличие от одночастичного туннелирования, не требует затраты энергии Δ на каждую частицу, и поэтому такой вклад не «вымерзает» при низких температурах. Когерентное туннелирование пар электронов часто называют андреевским отражением, поскольку описанный процесс перехода двух электронов из нормального металла в сверхпроводник можно рассматривать как превращение электрона в дырку при отражении от поверхности сверхпроводника. Вероятность двухчастичного туннелирования пропорциональна $|T_0|^4$, а не $|T_0|^2$, как для одночастичного туннелирования. Поэтому при $|T_0| \ll 1$ и не слишком низкой температуре двухчастичные процессы очень редки по сравнению с одночастичными. Вследствие этого андреевское отражение вносит существенный вклад в туннельный ток лишь при достаточно низких температурах⁵.

ЛШ-70. Эффект Джозефсона.

(мб перенесу в раздел про сверхпроводимость)

Туннельный ток через контакт, связывающий два сверхпроводника, обладает весьма интересными свойствами. В этом случае помимо одночастичного вклада в ток, рассмотренного в задачах 68 и 69, появляется дополнительный вклад, связанный с туннелированием куперовских пар. Формально этот вклад можно описать, заменив нормальные функции Грина в диаграмме на рис. 11.3 на аномальные - см. рис. 11.6. Таким образом, туннельный эксперимент позволяет «измерить» аномальную функцию Грина в сверхпроводнике.

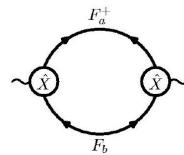


Рис. 11.6

Покажите, что в равновесии, при $V = 0$, двухчастичный ток отличен от нуля и равен

$$I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)$$

где $\varphi_{a(b)}$ - значения фазы сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{a(b)} = |\Delta_{a(b)}| e^{i\varphi_{a(b)}}$ на разных берегах контакта. Туннельный контакт между двумя сверхпроводниками, в котором имеет место эффект Джозефсона ($I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)$), называется соответственно джозефсоновским контактом.

Рассмотрите случай, когда сверхпроводники по обе стороны контакта одинаковые, т.е. $\Delta_{a(b)} = \Delta e^{i\varphi_{a(b)}}$. Получите формулу для максимального тока в джозефсоновском контакте:

$$I_0 = \frac{\pi\Delta}{2eR} \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}$$

где R - сопротивление контакта при $T > T_c$. Связь между максимальным джозефсоновым током I_0 и сопротивлением контакта в нормальном состоянии называется соотношением Амбера-Баратова.

Решение 70. Поскольку теперь у нас с обеих сторон контакта находятся сверхпроводники, первый член в выражении

$$\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$$

оказывается отличным от нуля и усреднение необходимо выполнить заново. Как нетрудно видеть, первый член усредняется так же, как и раньше, с единственной разницей, состоящей в замене нормальных средних на аномальные.

Соответствующий вклад в восприимчивость χ_M выписывается по аналогии с задачей 68 и оказывается равным

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} |T_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}|^2 F_{a,\mu\nu}^+(i\Omega_n + i\omega_m, \mathbf{p}) F_{b,\nu\mu}(i\omega_m, \mathbf{p}')$$

где $F_a(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ и $F_b(i\varepsilon_n, \mathbf{p})$ - аномальные функции Грина берегов контакта, а μ и ν - спиновые индексы. Суммируя по μ и ν с учетом спиновой структуры аномальных функций Грина, получаем выражение по виду сходное с (11.45) с точностью до замены нормальных функций Грина на аномальные:

$$\chi_{M,S-S}(i\Omega_n) = -2ieT \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{k}} |T_{\mathbf{p}\mathbf{k}}|^2 F_a^+(i\Omega_n + i\omega_m, \mathbf{p}) F_b(i\omega_m, \mathbf{k})$$

Обратим внимание на то, что знаки выражений (11.45) и (11.69) совпадают. Это соответствует общему наблюдению о совпадении знаков «нормальных» и «аномальных» петель, сделанному в решении задачи 63.

Поскольку, как мы увидим, джозефсоновский ток отличен от нуля в равновесии, т. е. при $V = 0$, нам будет достаточно вычислить $\chi_{M,S-S}(i\Omega_n)$ при $\Omega_n = 0$. Аналитическое продолжение оказывается ненужным, и можно сразу записать выражение для туннельного тока:

$$\begin{aligned} I_{S-S} &= 4e|T_0|^2 T \operatorname{Im} \sum_{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_a^* \nu_a d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_a^2 + |\Delta_a|^2} \frac{\Delta_b \nu_b d\xi_b}{\omega_m^2 + \xi_b^2 + |\Delta_b|^2} = \\ &= 4\pi^2 e|T_0|^2 \nu_a \nu_b T \operatorname{Im} \sum_{\omega_m} \frac{\Delta_a^* \Delta_b}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2} \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}} \end{aligned}$$

Полученное выражение отлично от нуля когда фазы параметра порядка по разные стороны контакта различны. Пусть $\Delta_{a,b} = |\Delta_{a,b}| e^{i\varphi_{a,b}}$. Выражая туннельный матричный элемент T_0 через сопротивление контакта в нормальном состоянии, получаем соотношение Джозефсона:

$$I = I_0 \sin(\varphi_b - \varphi_a), \quad \text{где} \quad I_0 = \frac{\pi}{eR} T \sum_{\omega_m} \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{\sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_a|^2} \sqrt{\omega_m^2 + |\Delta_b|^2}},$$

максимальный ток через контакт.

Отметим еще раз, что, в отличие от других разновидностей туннельного тока, джозефсоновский ток не связан с релаксацией к равновесному состоянию. Эффект Джозефсона ($I = I_0 \sin(\varphi_a - \varphi_b)$) имеет место в термодинамическом равновесии, и соответственно ток (11.71) между двумя сверхпроводниками с различающимися фазами параметра порядка может течь неограниченно долго.

Из-за того, что джозефсоновский ток отличен от нуля в равновесии также мы не рассматриваем вклад в туннельный ток $\left\langle T_\tau \hat{X}(\tau) \hat{I}(0) \right\rangle = \sum_{\dots} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \langle \dots \rangle$, содержащий нормальные средние. Как мы видели в задачах 68 и 69, такой вклад описывает некогерентное туннелирование отдельных электронов и приводит к току, исчезающему при $V = 0$.

Формула (11.71) для I_0 упрощается в случае, когда параметры порядка по обе стороны контакта отличаются только фазой: $|\Delta_a| = |\Delta_b| \equiv \Delta$. При этом

$$I_0 = \frac{\pi}{eR} T \sum_{\omega_m} \frac{\Delta^2}{\omega_m^2 + \Delta^2},$$

после чего суммирование легко производится с помощью тождества $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$. В этом случае мы получаем соотношение (11.34) для максимального джозефсоновского тока I_0

О большом токе через контакт Что произойдет, если пропустить через контакт ток, больший чем I_0 ? Детальный ответ на этот вопрос зависит от свойств цепи, в которую включен контакт. Однако джозефсоновский контакт используемый в таком режиме обладает одним весьма общим свойством. При токе превосходящем I_0 на контакте появится конечное напряжение $V(t)$, в общем случае зависящее от времени. Это напряжение приводит к изменению фазы $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ согласно соотношению Джозефсона для фазы

$$\hbar \frac{d\varphi}{dt} = 2eV(t)$$

8.3.3 Задачи на неоднородные сверхпроводящие состояния.

которое следует из калибровочной инвариантности. Таким образом, фаза и ток оказываются зависящими от времени. Зная свойства внешней цепи, можно самосогласованно связать напряжение на контакте $V(t)$ и туннельный ток $I(t)$, и таким образом определить динамику системы. Читатель, интересующийся этим режимом работы джозефсоновского контакта, обычно называемым нестационарным эффектом Джозефсона, может найти обсуждение соответствующих вопросов в литературе, процитированной на с. 287.

8.3.3 Задачи на неоднородные сверхпроводящие состояния.

Фиг-13.1.

Найти низколежащие андреевские уровни в плоском контакте сверхпроводник - нормальный металл - сверхпроводник (S-N-S) в зависимости от разности фаз χ на сверхпроводящих берегах и при произвольном соотношении $\hbar v_F / \Delta$ и толщины нормальной области d .

Фиг-13.2.

Показать, что S-N-S контакт при разности фаз $\phi = \pi$ всегда содержит андреевский уровень с энергией $E = 0$.

Фиг-13.3.

Найти электронную теплоемкость в смешанном состоянии сверхпроводника I рода, считая, что нормальные домены имеют плоскую форму и их толщина равна $d_N \gg \hbar v_F / \Delta$, а температура $T \ll T_c$.

Фиг-13.4.

Найти эффективную массу M_z возбуждений в коре абрикосовского вихря для произвольного отношения электронных масс m_z/m_{\perp} .

Фиг-13.5.

Найти плотность электронных состояний в s-сверхпроводнике в смешанном состоянии с магнитным полем $B \ll H_{c2}$ при малых энергиях $E \ll \Delta$, и его теплоемкость при $T \ll T_c$.

Фиг-13.6.

Рассмотреть гранулу очень малого размера a из сверхпроводящего металла. Найти (используя стандартную модель БКШ) оценку для величины a , при которой конечность размера гранулы начинает заметно влиять на условие для куперовской неустойчивости нормального металлического состояния.

Фиг-13.7.

Найти уровни ϵ_{μ} в вихре в сверхпроводнике с p-спариванием типа $d_{\pm}(k) \propto k_x \pm ik_y$ (как в A-фазе³), для случая магнитного поля направленного вдоль оси z .

8.3.4 Задачи на функционал Гинзбурга-Ландау (!?)

(мб это в статфизе буду писать, пока не скорее всего и там и тут будет раздел об этом.)

Б-3.4.5.

Комплексность сверхпроводящего параметра порядка $\psi = |\psi| \times \exp(i\theta)$ приводит к эффекту квантования магнитного потока в сверхпроводнике. Наряду с вектор-потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ градиент фазы $\nabla\theta$ также дает вклад в плотность сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi\delta^2} \left(\frac{\hbar c}{2e} \nabla\theta - \mathbf{A} \right).$$

Доказать, что поток магнитного поля Φ через замкнутый контур C , на котором сверхпроводящий ток тождественно равен нулю $\mathbf{j}_s = 0$ и параметр порядка отличен от нуля $\psi \neq 0$, всегда кратен целому числу n квантов магнитного потока $\phi_0 = \pi\hbar c/e$. Найти пример простейшего вихревого состояния, несущего несколько квантов магнитного потока.

Б-3.4.6. Параметры сверхпроводника второго рода

Для предельного сверхпроводника второго рода с параметром Гинзбурга-Ландау $\kappa \gg 1$ найти:
 а) энергию на единицу длины прямолинейного квантового вихря;
 б) нижнее или первое критическое магнитное поле H_{c1} .

Б-3.4.7.

Коэффициент γ перед градиентным членом в разложении Гинзбурга-Ландау для свободной энергии сверхпроводящего кристалла должен отражать анизотропию направлений в кристалле и представляет собой тензор второго ранга γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

В одноосном кристалле с тетрагональной или с гексагональной симметрией:

$$\gamma_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j) \gamma_{\perp} + n_i n_j \gamma_{\parallel},$$

где \mathbf{n} - единичный вектор в направлении оси симметрии кристалла. (В кристаллах с кубической симметрией $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$). Рассмотреть анизотропию верхнего критического поля, т. е. зависимость поля H_{c2} от угла θ между осью симметрии кристалла \mathbf{n} и направлением внешнего магнитного поля.

Б-3.4.8.

Параллельно плоской поверхности сверхпроводника приложено внешнее магнитное поле. Показать, что образование сверхпроводящей фазы начинается в приповерхностном слое сверхпроводника, и оценить соответствующее поверхностное критическое поле H_{c3} . Найти диапазон магнитных полей, в котором возможно явление поверхностной сверхпроводимости, заключающееся в наличии сверхпроводящей фазы в приповерхностном слое и ее отсутствии в объеме сверхпроводника.

Б-3.4.9.

Имеется тонкая пластина сверхпроводника первого рода с параметром Гинзбурга-Ландау $\kappa \ll 1$ и толщиной D . Пластина находится во внешнем магнитном поле H_0 , параллельном плоскостям пластины. Найти распределение сверхпроводящего тока и магнитного поля в пластине и определить критическое значение толщины пластины, при которой изменяется род фазового перехода в магнитном поле.

Б-3.4.10

. Определить критическую плотность сверхпроводящего тока j_s , который может протекать по тонкой пленке сверхпроводника толщиной d , много меньшей корреляционной длины ξ и глубины проникновения магнитного поля δ . Считать плотность сверхпроводящего тока однородной по сечению пленки.

Б-3.4.11

. Определить период осцилляций температуры сверхпроводящего перехода тонкого полого цилиндра радиуса R и толщиной $d \ll \xi, \delta, R$ в зависимости от величины потока магнитного поля $\Phi = \pi R^2 H$, направленного вдоль оси цилиндра (эффект Литтла-Паркса).

Б-3.4.12

. Определить коэффициент поверхностного натяжения для границы между сверхпроводящей и нормальной фазами в сверхпроводнике первого рода с предельно малым параметром Гинзбурга-Ландау $\kappa \ll 1$, когда можно пренебречь глубиной проникновения магнитного поля и считать, что магнитное поле не проникает в сверхпроводящую область.

Б-3.4.13 Взаимодействие двух вихревых линий (!?!?!?!)

Найти в сверхпроводнике второго рода с $\kappa \gg 1$ энергию и силу взаимодействия двух параллельных вихревых линий, расположенных на расстоянии $r \gg \xi$ друг от друга. Показать, что квантованные вихри с одинаковым направлением циркуляции сверхпроводящего тока отталкиваются, а с противоположно направленными - притягиваются.

Б-3.4.14 Притяжение вихревой линии

Показать, что вихревая линия, параллельная поверхности сверхпроводника, притягивается к его поверхности. Определить силу притяжения.

Б-3.4.15

. Металл с магнитными атомами, в котором могут сосуществовать и конкурировать два явления: сверхпроводимость и ферромагнетизм, можно назвать ферромагнитным сверхпроводником. Например, халькогениды HoMo_6S_8 , HoMo_6Se_8 и борид ErRh_4B_4 . Считая температуры сверхпроводящего перехода T_c и Кюри θ близкими, ферромагнитный сверхпроводник можно описать в рамках теории функционала Гинзбурга-Ландау с двумя взаимодействующими параметрами порядка: сверхпроводящим $\psi(\mathbf{r})$ и намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, используя следующее разложение для плотности свободной энергии, отсчитанной от нормального состояния:

$$\Delta F = \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{A(T)}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{B}{4}\mathbf{M}^4 + GM^2|\psi|^2$$

Константа взаимодействия $G > 0$, что соответствует подавлению сверхпроводимости при появлении ферромагнитного упорядочения. Коэффициенты разложения $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ и $A(T) = A_0(T - \theta)$, а остальные не зависят от температуры. Для случая $T_c > \theta$ определить возможные фазы, найти род фазовых переходов и построить фазовую диаграмму состояний в зависимости от константы взаимодействия. Считать, что ферромагнитное состояние энергетически гораздо выгоднее, чем сверхпроводящее.

Б-3.4.16

Пусть в изотропном ферромагнитном сверхпроводнике одновременно реализуются ферромагнитное и сверхпроводящее состояния. С учетом энергии магнитного поля величиной $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}$ и энергий неоднородности функционал Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\Delta \mathcal{F} = \int d^3r \Delta F (\mathbf{M}(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})),$$

$$\Delta F = \frac{C_m}{2}(\nabla \mathbf{M})^2 + \frac{A(T)}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{B}{4}\mathbf{M}^4 + \frac{(\mathbf{h} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} + \frac{\gamma}{2} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + GM^2|\psi|^2.$$

При температурах заметно ниже точки Кюри θ и сверхпроводящего перехода T_c абсолютные величины вектора намагниченности \mathbf{M} и сверхпроводящего параметра ψ можно считать фиксированными. Найти условие на коэффициент магнитной жесткости C_m , при котором однородное ферромагнитное упорядочение становится неустойчивым и возникает спин-спиральная фаза, в которой вектор намагниченности \mathbf{M} равномерно поворачивается в плоскости, перпендикулярной выделенной оси при движении вдоль этой оси. Такая магнитная структура называется антиферромагнитным геликоидом. Определить период геликоида (шаг спирали) в зависимости от глубины проникновения магнитного поля δ . Возможность состояний с квантованными вихрями не рассматривать.

Б-3.4.17

. В нормальной фазе при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода возможны флуктуации сверхпроводящего параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$. Определить пространственную корреляционную функцию $\langle \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') \rangle$, пренебрегая членом четвертого порядка в функционале Гинзбурга-Ландау.

Б-3.4.18

. Возможность флюктуационного рождения сверхпроводящих куперовских пар в нормальной фазе при температуре выше температуры сверхпроводящего перехода T_c создает дополнительный вклад в диамагнитную восприимчивость металла. Вычислить флюктуационную поправку к диамагнитной восприимчивости во внешнем магнитном поле H при $T > T_c$ для нульмерного сверхпроводника - сферической гранулы малого радиуса такой, что $R \ll \xi$ и $R \ll \delta$.

Б-3.4.19

В нульмерном сверхпроводнике - малой грануле с характерным размером $R \ll \xi(T)$ - найти поведение квадрата модуля сверхпроводящего параметра порядка $|\psi_0(T)|^2$ в области температур, близких к критической точке перехода T_c в объемном сверхпроводнике. Найти условие малости размытия фазового перехода, если объем гранулы V , а среднее расстояние между уровнями энергий вследствие размерного квантования равно $\delta\varepsilon$.

Фиг-2.1.

Найти зависимость T_c сверхпроводящего цилиндра с толщиной стенок d и радиусом $R \gg d \geq \xi_0$ от магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра (эффект Литтла-Паркса).

Фиг-2.2.

Найти, как квантуется магнитный поток внутри тонкой ($d \ll \lambda$) сверхпроводящей пленки, нанесенной на поверхность цилиндрической нити радиуса $R \gg (d, \lambda)$.

Фиг-2.3.

Найти параллельное критическое магнитное поле и критический ток для тонкой сверхпроводящей пленки (толщина $d \ll \lambda$).

Фиг-2.4.

Пленка сверхпроводящего металла толщины d нанесена на толстый слой нормального металла. Граница S/N полностью прозрачна для электронов. Длина когерентности $\xi(T) = \xi_0 (1 - T/T_{c0})^{-1/2}$, причем $\xi_0 \ll d$. Найти сдвиг температуры перехода в зависимости от толщины d . Длину когерентности в нормальном металле ξ_n при $T \sim T_{c0}$ считать постоянной.

Фиг-2.5.

Показать, что при $\kappa > 1/\sqrt{2}$ неустойчивость нормального состояния по отношению к образованию сверхпроводящего параметра порядка наступает при поле $H_{c2}(T) > H_c(T)$.

8.3.5 Задачи на общие свойства сверхпроводников 2го рода

Фиг-3.1.

Найти зависимость плотности тока $j(r)$ на расстоянии r от центра вихря в тонкой пленке толщины $d \ll \lambda$, затем вычислить энергию такого вихря и энергию взаимодействия вихря и анти-вихря на расстоянии $r \gg \lambda$. Вычисления довести до конца в двух предельных случаях, $r \ll \lambda^2/d$ и $r \gg \lambda^2/d$.

Фиг-3.2.

Исследовать "поверхностный барьер" для входа вихрей в сверхпроводник II рода, используя лондоновское приближение; найти внешнее поле H^* при котором поверхностный барьер исчезает.

Фиг-3.3*

Выяснить, сохраняется ли поверхностный барьер (задача #1) для случая тонких пленок толщины $d \ll \lambda$.

Фиг-3.4.

Найти критическое поле H_{c3} , при котором с понижением поля возникают поверхностные сверхпроводящие состояния (выразить его значение через H_{c2}).

Фиг-3.5*.

Показать, что при $\kappa = 1/\sqrt{2}$ взаимодействие вихрей исчезает, а все три критические поля H_c , H_{c1} и H_{c2} равны между собой.

Фиг-3.6.

Найти $B(H)$ при полях слегка больших H_{c1} , т.е. $H - H_{c1} \ll H_{c1}$.

Фиг-3.7.

Определить уширение линии ЯМР из-за неоднородности магнитного поля в сверхпроводнике при $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$.

9 Другие задачи

9.1 Теорфизические задачи об отдельных методах и явлениях

9.1.1 Задачи на вихри

Фиг-5.1.

Имеется пленка высокотемпературного сверхпроводника YBaCuO с $T_c = 93.5^\circ\text{K}$. Толщина пленки 100 nm. В поперечном поле $B = 8T$ при температуре $T = 90.5^\circ\text{K}$ измерено удельное сопротивление $0.5\mu\Omega \cdot \text{см}$. Найти среднюю скорость дрейфа вихрей v_v , если через пленку течет транспортный ток с плотностью $j = 10^4 \text{ A/cm}^2$. Найти также коэффициент диффузии вихрей D , размерность коего cm^2/s .

Фиг-5.2.

Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ от температуры вблизи критической, $T \rightarrow T_c - 0$, при наличии слабого магнитного поля, индуцирующего вихри, для случая пиннинга вихрей на цилиндрических отверстиях диаметра $d > \xi_0$. Пояснение: учсть рост $\xi(T)$ вблизи T_c . Двумерную плотность отверстий n_2 считать самым малым параметром задачи.

Фиг-5.3.

Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ от температуры вблизи критической, $T \rightarrow T_c - 0$, при наличии слабого магнитного поля, индуцирующего вихри. Пиннинг вихрей возникает теперь из-за изотропных слабых дефектов. Объемная плотность дефектов n_3 велика, $n_3\xi_0^3 \gg 1$.

Фиг-5.4.

Один вихрь находится в сверхпроводящей пленке, поперечно ее плоскости, и зацепляется за одно цилиндрическое отверстие диаметра $d > \xi_0$, ось которого параллельна направлению магнитного поля. Толщину пленки считать сколь угодно большой. При достаточно высокой температуре T , близкой к T_c , тепловые изгибы флукутации вихря становятся заметными, т.е. их типичная амплитуда $u_T = (\langle u^2 \rangle)^{1/2}$ превышает величину d . В такой ситуации сила пиннинга вихря резко падает, но остается ненулевой. Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ в этом режиме от температуры.

Фиг-6.1.

К относительно тонкой пленке сверхпроводника (толщина $d \gg \xi$, но при этом $d \ll a_0 = \sqrt{\Phi_0/B}$) приложено слабое параллельное магнитное поле, создающее двумерную решетку из вихревых линий, расположенных в плоскости пленки, со средним расстоянием между вихрями $a_0 \gg \lambda$. Считать что все стандартные параметры сверхпроводника $-\xi, \lambda$ - известны. В пленке имеются точечные дефекты, приводящие к флукутациям положения вихревых линий, в частности, поперечный "ход" $|u(z) - u(0)| \propto z^{2/3}$. Кроме того, дефекты приводят к ненулевой величине критического тока пленки j_c , которая много меньше тока распаривания j_0 . Требуется найти, как меняется зависимость $B(H)$ в изучаемой области $B \ll H_{c1}$ из-за наличия дефектов.

Фиг-6.2.

Для сверхпроводника с $\xi \ll \lambda$ в магнитном поле B находящемся в интервале $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$ задан критический ток j_c малый по сравнению с током распаривания j_0 . Величина j_c определяется пиннингом на слабых изотропных дефектах. Эти же дефекты приводят к разрушению дальнего порядка решетки вихрей на расстояниях $R_c \gg \lambda \gg a_0$. Оценить величину R_c , считая остальные параметры заданными.

Фиг-6.3.

Для решетки точечных вихрей в тонкой пленке сверхпроводника, находящейся в поперечном поле $B \ll H_{c2}$, найти температуру плавления T_M вихревой решетки. Все параметры считать заданными, толщина $d \leq \xi \ll \lambda$.

9.1.2 Задачи на флюктуационные эффекты

Фиг-4.1.

Получить по порядку величины параметра Гинзбурга Gi для сверхпроводников размерности $d = 1, 2, 3$, как в чистом так и в чистом и грязном пределах, выразив их через параметры металла (k_F и длина пробега l), поперечные размеры (для $d = 1, 2$) и температуру перехода T_c .

Решение (У Варламова Ларкина решена, подразумеваясь для нее еще!!)

Фиг-4.2.

Вычислить отношение χ_{fl}/χ_0 флюктуационной диамагнитной восприимчивости к восприимчивости металла для трехмерного сверхпроводника.

Фиг-4.3.

Оценить ширину $Gi(B)$ флюктуационной области вблизи линии $H_{c2}(T)$ при достаточно сильных магнитных полях, $B \gg GiH_{c2}(0)$.

Фиг-4.4.

Оценить величину температурного интервала $T_{c0} - T_{BKT}$ для слоистого ВТСП семейства BiCaSrCuO исходя из данных по сопротивлению вдоль слоев при температуре порядка $1.5T_c$ (даные найти самостоятельно в литературе, например с помощью библиографии в книге В.В.Шмидта).

Фиг-4.5.

Для тонкой пленки сверхпроводника (толщина $d \ll \lambda$) оценить величину линейного сопротивления $(dV/dI)|_{I \rightarrow 0}$ при $T < T_c$, возникающего из-за ненулевой концентрации "пирловских" вихрей.

Фиг-4.6*.

Вывести и решить уравнения ренормгруппы Костерлица для фазового перехода распаривания вихрей в пленке, найти зависимость $R_c(T)$ при $T \rightarrow T_c - 0$.

9.1.3 Задачи на эффект Джозефсона

Фиг-7.1.

Найти основную температурную зависимость критического тока $S - N - S$ перехода при $T \rightarrow T_c$, используя теорию Гинзбурга-Ландау. Рассмотреть случай одинаковых и разных сверхпроводящих металлов.

Фиг-7.2

Найти отношение критического тока I_c к току захвата I_r в джозефсоновском тунNELьном контакте с большим параметром Мак-Камбера $\beta_C \gg 1$.

Фиг-7.3

Найти зависимость высоты n -ой ступеньки Шапиро от ее номера n для простейшей резистивной модели джозефсоновского контакта.

Фиг-7.4

Вывести зависимость $I_c(B)$ критического тока от магнитного поля для короткого джозефсоновского перехода длины $L \leq \lambda_J$, где λ_J джозефсонская глубина проникновения.

Фиг-7.5

Для двухконтактного СКВИДа найти зависимость критического тока I_c от магнитного потока в катушке Φ_{ext} в двух предельных случаях: большого и малого параметра $\beta_L = 2\pi\mathcal{L}I_c/\Phi_0$, где \mathcal{L} - индуктивность петли СКВИДа.

Фиг-7.6*

Для длинного джозефсоновского перехода с длиной $L \gg \lambda_J$ плотность сверхтока в котором испытывает флуктуации по длине перехода, $j_c(x) = j_0 + \delta j(x)$, где среднее от $\delta j(x)$ равно 0, а коррелятор $\langle \delta j(x) \delta j(x') \rangle = D\delta(x - x')$, найти и зависимость полного критического тока от магнитного поля B при больших полях, когда в области перехода находится много вихрей Джозефсона.

9.1.4 Задачи на вихри и сопротивление от них

Фиг-5.1.

Имеется пленка высокотемпературного сверхпроводника YBaCuO с $T_c = 93.5^\circ\text{K}$. Толщина пленки 100 nm. В поперечном поле $B = 8T$ при температуре $T = 90.5^\circ\text{K}$ измерено удельное сопротивление $0.5\mu\Omega \cdot \text{см}$. Найти среднюю скорость дрейфа вихрей v_v , если через пленку течет транспортный ток с плотностью $j = 10^4 \text{ A/cm}^2$. Найти также коэффициент диффузии вихрей D , размерность коего cm^2/s .

Фиг-5.2.

Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ от температуры вблизи критической, $T \rightarrow T_c - 0$, при наличии слабого магнитного поля, индуцирующего вихри, для случая пиннинга вихрей на цилиндрических отверстиях диаметра $d > \xi_0$. Пояснение: учесть рост $\xi(T)$ вблизи T_c . Двумерную плотность отверстий n_2 считать самым малым параметром задачи.

Фиг-5.3.

Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ от температуры вблизи критической, $T \rightarrow T_c - 0$, при наличии слабого магнитного поля, индуцирующего вихри. Пиннинг вихрей возникает теперь из-за изотропных слабых дефектов. Объемная плотность дефектов n_3 велика, $n_3\xi_0^3 \gg 1$.

Фиг-5.4.

Один вихрь находится в сверхпроводящей пленке, поперечно ее плоскости, и зацепляется за одно цилиндрическое отверстие диаметра $d > \xi_0$, ось которого параллельна направлению магнитного поля. Толщину пленки считать сколь угодно большой. При достаточно высокой температуре T , близкой к T_c , тепловые изгибные флуктуации вихря становятся заметными, т.е. их типичная амплитуда $u_T = (\langle u^2 \rangle)^{1/2}$ превышает величину d . В такой ситуации сила пиннинга вихря резко падает, но остается ненулевой. Найти зависимость критического тока $j_c(T)$ в этом режиме от температуры.

9.1.5 Задачи на флуктуационные эффекты в слабых контактах

Фиг-8.1.

Найти среднее напряжение на джозефсоновском контакте с током $I < I_c$, возникающее из-за термически индуцированных процессов проскальзывания фазы (емкостью контакта пренебречь). Температуру считать малой по сравнению с E_J .

Фиг-8.2.

Найти в квазиклассическом приближении при $T = 0$ зависимость среднего напряжения $\bar{V}(I)$ в квантовом джозефсоновском контакте с $E_J \gg E_C$ и $1/R = 0$, от тока в контакте I , при $I_c - I \ll I_c$.

Фиг-8.3.

Найти в квазиклассическом приближении при $T = 0$ зависимость среднего напряжения $\bar{V}(I)$ в квантовом джозефсоновском контакте с $E_J \gg E_C$ и $1/R = 0$, от тока в контакте I , при условии $I \ll I_c$.

Фиг-8.4.

Рассмотреть сверхпроводящее кольцо индуктивности L , замкнутое на квантовые джозефсоновский контакт энергии E_J и емкости C . Для случая, когда параметр $\beta_L = 2\pi L I_c / c\Phi_0$ слегка превышает 1, вывести эффективный гамильтониан двухуровневой квантовой системы. Найти условия на параметры задачи, при которых нижние 2 состояния будут заметно отделены по энергии от более высоких возбужденных состояний.

Part IV

Other Properties of Superconductors and Effects

10 Углубленные основы сверхпроводимости

(!!! всякую прямо специфику в отдельную запись переношу. Тут подробно, но на супер конкретные вопросы есть и отдельная запись. мб многое отсюда туда и перенесу.)

10.1 Еще раз сверхпроводимость, но по Киттелю, Мхиенкову, Пухову, де Роеку, т.п.

10.1.1 Экспериментальные факты по Киттелю

Введение (???)

замечание: В этой главе B_a означает внешнее магнитное поле. Критическая величина внешнего магнитного поля B_{ac} при использовании системы СГС обозначается, как обычно, через H_c . Единицы напряженности поля B_{ac} : в системе Стт.гауссы, в системе СИ-tesla. В системе СИ $B_{ac} = \mu_0 H_c$.

При охлаждении некоторых металлов и сплавов до достаточно низкой температуры (обычно лежащей в области температур жидкого гелия) их сопротивление скачком падает до нуля. Это явление впервые наблюдал Камерлинг-Оннес в Лейдене в 1911 г., спустя три года после того, как им впервые был

1. Камерлинг-Оннес [1] писал: «Значение сопротивления ртути в жидком состоянии при 0°C составляет 172,7 Ом. Экстраполяция от точки плавления до 0°C с учетом температурного коэффициента сопротивления для твердой ртути дает значение сопротивления ртути в твердом состоянии, равное 39,7 Ом. При 4,3°К сопротивление уменьшается до 0,094 Ом, что составляет 0,0021 от значения сопротивления, которое имела бы твердая ртуть при 0°C. Обнаружено, что при 3°К сопротивление падает ниже $3 \cdot 10^{-6}$ Ом, что составляет одну десятимиллионную от значения, которое было бы при 0°C. При уменьшении температуры до 1,5°К эта величина оставалась верхним пределом сопротивления». Библиография работ, относящихся к тому периоду, приведена в обзоре Гортера [2].

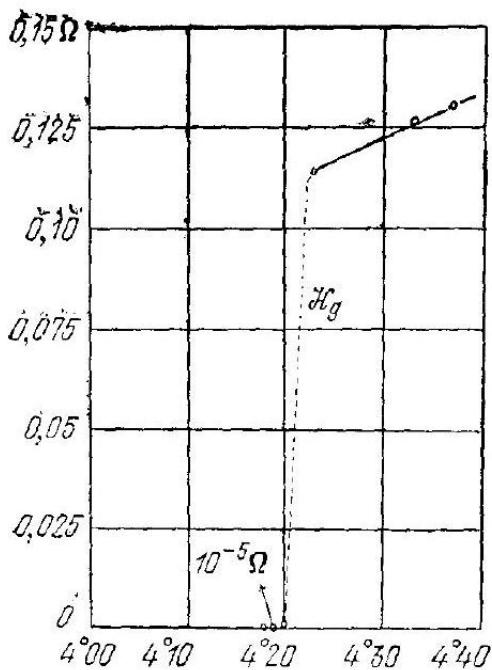


Рис. 12.1. Сопротивление образца ртути (в омах) в зависимости от абсолютной температуры.

Эта кривая результат экспериментов КамерлингОннеса, которые и были открытием сверхпроводимости. Получен жидккий гелий. На рис. 12.1 приведены результаты его экспериментов со ртутью. Следует обратить внимание на то, что температурный интервал, в котором сопротивление уменьшалось до нуля, чрезвычайно узок. Температура, при которой происходит фазовый переход из состояния с нормальным электрическим сопротивлением в сверхпроводящее состояние, называется критической температурой T_c .

Экспериментальные факты

Электрическое сопротивление в сверхпроводящем состоянии точно равно нулю или по крайней мере так близко к нулю, что не наблюдалось ослабления тока в сверхпроводящем кольце в течение более чем года вплоть до прекращения эксперимента.

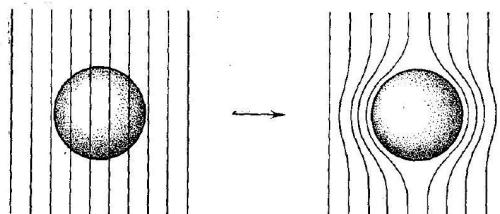
Уменьшение сверхпроводящего тока в катушке из $\text{Nb}_{0,75}\text{Zr}_{0,25}$ 

Рис. 12.2. Эффект Мейснера в сверхпроводящем шаре, охлаждаемом в постоянном внешнем магнитном поле; при охлаждении ниже температуры перехода линии индукции B выталкиваются из шара. Изучалось Файллом и Милсом [3], которые измеряли магнитное поле, создаваемое сверхпроводящим током, точным методом ЯМР (см. гл. 17). Они установили, что время спада сверхпроводящего тока составляет не менее 100000 лет. В некоторых сверхпроводящих материалах, особенно в тех, которые используются для сверхпроводящих магнитов, наблюдались конечные времена спада вследствие необратимых перераспределений магнитного потока в сверхпроводнике.

Магнитные свойства сверхпроводников столь же нетривиальны, как и электрические свойства. Нулевое электрическое сопротивление достаточно хорошо характеризует сверхпроводящее

состояние, но не может объяснить его магнитных свойств. Экспериментально обнаружено, что сверхпроводник в слабом магнитном поле будет вести себя как идеальный диамагнетик, в объеме которого магнитная индукция равна нулю. Если поместить образец в магнитное поле и охладить его ниже температуры перехода в сверхпроводящее состояние, то магнитный поток, первоначально пронизывающий образец, окажется вытесненным из него. Этот эффект называется эффектом Мейснера. Схематически это показано на рис. 12.2. Эти уникальные магнитные свойства играют важнейшую роль в описании сверхпроводящего состояния.

Звестно, что сверхпроводящее состояние представляет собойупорядоченное состояние электронов проводимости металла. \' порядочение заключается в том, что электроны, свободные выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние, при охлаждении ниже этой температуры связываются в пары. Природа процесса образования электронных пар была впервые объяснена в 1957 г. Бардином, Купером и Шриффером [4] 1). Настоящая глава посвящена элементарному рассмотрению сверхпроводящего состояния. Мы обсудим также основные физические процессы в тех материалах, которые используются для сверхпроводящих магнитов, не вдаваясь в подробности технологии их изготовления.

Сверхпроводящие материалы. Многие металлические элементы периодической системы, а также сплавы, интерметаллические соединения и полупроводники²⁾ могут переходить в сверхпроводящее состояние³⁾. Температуры перехода, известные на сегодняшний день, лежат в интервале примерно от 21°К

1. В том же 1957 г., но позднее, теория сверхпроводимости (в несколько иной форме, чем в работе [4]) была разработана Н. Н. Боголюбовым и его сотрудниками. - Прим. перев.
2. Сверхпроводимость некоторых полупроводников была теоретически предсказана Коэном [5]. По поводу экспериментов с SrTiO с дефицитом кислорода см. работу Скули и др. [6]; минимальная концентрация носителей составляла $2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, критическая температура такого образца $T_c \approx 0,01^\circ\text{K}$. и др. [7].
3. Обзор данных по сверхпроводимости приводится в работе Маттиаса

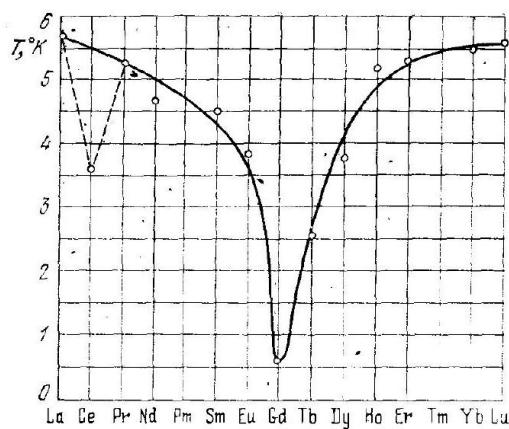


Рис. 12.3. Температуры сверхпроводящего перехода твердых растворов пантакча с редкоземельными элементами (в количестве 1 ат. %) (по Маттиасу, Сулу и Коренцвиту). Большинство редкоземельных элементов, образующих твердые растворы с танталом, имеют атомные магнитные моменты, обусловленные нескомпенсированным электронными спинами в 5f-оболочке.

для сплава Nb₃ (Al_{0.8}Ge_{0.2}) до 0,01°К для некоторых полупроводников.

Для многих металлов сверхпроводимость не была обнаружена вплоть до самых низких температур (обычно значительно ниже 1°К). Так, например, Li, Na и K оставались обычным

10.1.2 Сверхпроводимость некоторых соединений

проводниками при охлаждении до $0,08^{\circ}\text{K}$, $0,09^{\circ}\text{K}$ и $0,08^{\circ}\text{K}$ соответственно. Аналогично вели себя Cu, Ag и Au, которые исследовались вплоть до температур $0,05^{\circ}\text{K}$, $0,35^{\circ}\text{K}$ и $0,05^{\circ}\text{K}$ соответственно.

Теоретически было показано (Карбott и Дайнс [8]), что если Na и K являются сверхпроводниками то соответствующие им температуры перехода будут меньше, чем 10^{-5} °К. Это предсказание относится к случаю, когда давление равно атмосферному. Цезий переходит в сверхпроводящее состояние ($T_c = 1,5$ °К) при давлении 110 кбар, пройдя несколько фазовых превращений.

Любой ли немагнитный метаплический элемент переходит в сверхпроводящее состояние при достаточно низкой температуре? Этого мы не знаем. При экспериментальном исследовании сверхпроводников со сверхнизкими температурами перехода важно исключить из них даже ничтожные количества чужеродных парамагнитных элементов, так как они могут сильно понизить температуру перехода.

Примесь железа в концентрации несколько миллионных долей разрушает сверхпроводимость, который в чистом виде имеет $T_c = 0,92^\circ\text{K}$, а 1 ат. % Gd понижает критическую температуру T_c для La (см. [10]) с $5,6^\circ\text{K}$ до $0,6^\circ\text{K}$ (рис. 12.3). Несметаллические примеси не оказывают такого сильного влияния на температуру перехода, хотя они могут изменить поведение сверхпроводников в сильных магнитных полях.

1. Об экспериментах с цезием см. работу Уиттига [9].

ТАВЛИЦА 12.

10.1.2 Сверхповодимость некоторых соединений

Соединение	T_c , °К	Соединение	T_c , %
Nb ₃ Sn	18,05	V ₃ Ga	16,5
Nb ₃ (Al _{0,8} Ge _{0,2})	20,9	V ₃ Si	17,1
Nb ₃ Al	17,5	UCo	1,70
Nb ₃ Au	11,5	Ti ₂ Co	3,44
NbN	16,0	La ₃ In ^{In}	10,4
MoN	12,0	Ins*)	1,9

*) Металлическаяя фаза под давлением.

Известные сверхпроводящие элементы и их температуры перехода представлены в табл. 12.1. Установлено, что ни одновалентные металлы (за исключением Cs под давлением), ни ферромагнитные металлы, ни редкоземельные элементы (за исключением лантана La, который имеет незаполненную электронную оболочку 4f) не являются сверхпроводниками. В табл. 12.2 представлены температуры перехода ряда представляющих интерес сверхпроводящих соединений.

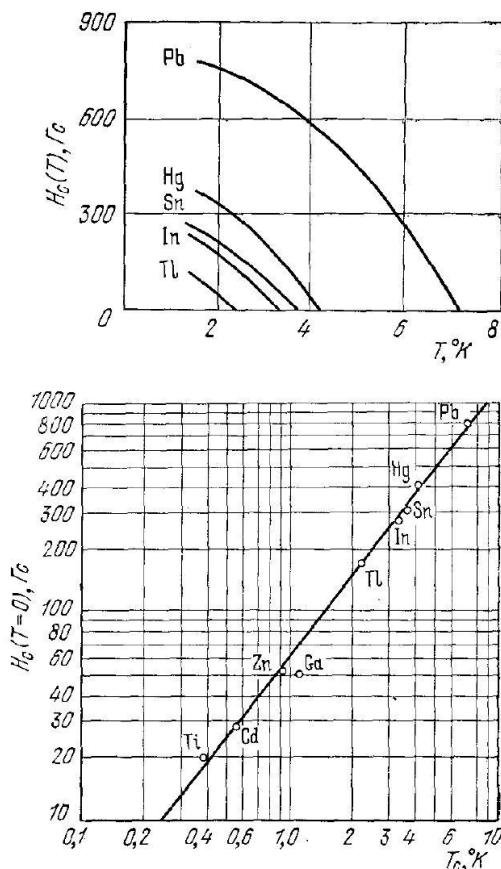
Разрушение сверхпроводимости магнитным полем. Сверхпроводимость может быть разрушена достаточно сильным магнитным полем. Пороговое или критическое магнитное поле, необходимое для разрушения сверхпроводимости, обычно обозначают через $H_c(T)$; величина критического поля зависит от температуры. При критической температуре критическое поле равно нулю: $H_c(T_c) = 0$. На рис. 12.4 показана зависимость критического

поля от температуры для некоторых сверхпроводящих элементов. Эти кривые одновременно являются границами, отделяющими сверхпроводящее состояние (область, лежащая налево и вниз от данной кривой) от нормального (область, лежащая направо и вверх относительно данной кривой). Зависимость $H_c(0)$ от T_c для ряда сверхпроводников показана на рис. 12.5.

Замечание: Мы будем обозначать критическое магнитное поле через B_{ac} , что не является общепринятым обозначением среди ученых, работающих в области сверхпроводимости. В системе СГС $H_c \equiv B_{ac}$, а в системе СИ $H_c \equiv B_{ac}/\mu_0$. Через B_a обозначено внешнее магнитное поле.

Эффект Мейснера. В 1933 г. Мейснер и Оксенфельд [11] обнаружили, что если сверхпроводник охлаждать в магнитном поле до температуры ниже температуры перехода, то в точке перехода линии магнитной индукции B будут вытолкнуты из Рис. 12.4. Кривые критического поля $H_c(T)$ для некоторых сверхпроводников. Одна из кривых (слева) соответствует сверхпроводящему состоянию образца, область над кривой (справа) – нормальному.

Рис. 12.5. Зависимость критического поля H_c при $T = 0$ от температуры перехода T_c для сверхпроводников в виде массивных образцов (по обеим осям – логарифмический масштаб).



сверхпроводника (рис. 12.2). Эффект Мейснера показывает, что сверхпроводник ведет себя во внешнем поле B_a так, как если бы внутри образца было $B = 0$. Для тонких длинных образцов, расположенных вдоль поля B_a , размагничивающий фактор [см. (13.15) и (17.43)] пренебрежимо мал и можно записать ¹⁾:

$$(СГС) \quad B = B_a + 4\pi M = 0, \text{ или } \frac{M}{B_a} = -\frac{1}{4\pi};$$

$$(СИ) \quad B = B_a + \mu_0 M = 0, \text{ или } \frac{M}{B_a} = -\frac{1}{\mu_0}.$$

Этот очень важный результат не может быть получен просто из того факта, что

сверхпроводник является веществом с равным нулю сопротивлением; из закона Ома $E = \rho j$ видно, что при конечном j и $\rho \rightarrow 0$ поле E должно быть равно нулю. Из

1. О диамагнетизме, намагнченности M и магнитной восприимчивости см. гл. 15. Диамагнитная восприимчивость массивных сверхпроводников много больше, чем для типичных диамагнетиков. В соотношении (12.1) величина M есть намагнченность, эквивалентная сверхпроводящим токам в образце. уравнения Максвелла следуют, что $d\mathbf{B}/dt \sim \text{rot } \mathbf{E}$, так что при нулевом сопротивлении $d\mathbf{B}/dt = 0$, т. е. магнитный поток в металле не может изменяться, когда металл переходит в сверхпроводящее состояние. Эффект Мейснера противоречит этому результату и дает основания считать, что идеальный диамагнетизм и отсутствие сопротивления являются двумя существенно независимыми свойствами сверхпроводящего состояния.

На рис. 12.6а показана кривая намагничивания, которую можно ожидать для сверхпроводника, находящегося в условиях эксперимента Мейснера — Оксенфельда. Эта количественная кривая относится к образцу в форме длинного твердого цилиндра², помещенного в продольное магнитное поле. Многие образцы, изготовленные из чистых материалов, ведут себя таким образом; они называются сверхпроводниками I рода, или мягкими сверхпроводниками. Для сверхпроводников I рода величина H_c слишком низка, чтобы применять их для создания катушек сверхпроводящих магнитов.

Другие материалы описываются кривой, показанной на рис. 12.6б, и называются сверхпроводниками II рода. Обычно это сплавы (см. рис. 12.6в) или металлы переходной группы с большими величинами электрического сопротивления, т. е. имеющие малую длину свободного пробега электронов в нормальном состоянии. Мы увидим ниже, почему длина свободного пробега существенна для процессов «намагничивания» сверхпроводника.

Сверхпроводники II рода обладают сверхпроводящими электрическими свойствами вплоть до поля H_{c2} . Между нижним критическим полем H_{c1} и верхним критическим полем H_2 плотность потока $B \neq 0$ и эффект Мейснера является неполным. Значение H_{c2} может более чем в 100 раз превышать значение критического поля H_c , к которому мы приходим при термодинамическом подходе к рассмотрению перехода в сверхпроводящее состояние в нулевом магнитном поле. В области напряженностей полей между H_{c1} и H_{c2} линии потока пронизывают сверхпроводник и он находится в вихревом состоянии (см. ниже рис. 12.36). Для сплава Nb, Al и Ge при температуре кипения жидкого гелия (см. рис. 12.7) было достигнуто³ ню.ле. $H_{c2} =$

1. Мы предполагаем наличие еще одного различия между сверхпроводником и идеальным проводником (идеальный проводник представляет собой проводник, в котором нет никакого рассеяния электронов). Различие состоит в том, что, в отличие от сверхпроводника, в идеальном проводнике, помещенном в магнитное поле, не возникает постоянного экрана вихревых токов: магнитное поле проникает в идеальный проводник со скоростью около 1 см в час (см. книгу Пиппарда [12]).
2. При другой геометрии поле вблизи образца может быть неоднородным и сверхпроводимость может начинать разрушаться при полях, меньших H_c , например для шара - при $2/3H_c$, что является следствием того, что размагничающий фактор для шара не равен нулю.
3. Подробно о материалах с высоким значением H_{c2} см. работы [13-15]. Рис. 12.6а. Зависимость намагнченности от внешнего магнитного поля в случае массивного сверхпроводника, для которого осуществляется полное выталкивание магнитного поля (эффект Мейснера), т.е. имеет место идеальный диамагнетизм. Сверхпроводник с таким поведением называется сверхпроводником I рода. При поле выше критического

образец находится в норжальном состоянии и намагниченность мала (в данном масштабе — нулевая). Заметим, что по вертикали отложена величина минус $4\pi M$: отрицательная намагниченность M соответствует диамагнетизму. Величина $4\pi M$ равна магнитному полю, создаваемому сверхпроводящими токами, индуцированными внешним магнитным полем.

проводника, для которого осуществлено выталкивание магнитного поля Мейснера), т. е. имеет место диамагнетизм. Сверхпроводник с таким называется сверхпроводником выше критического образца нормального состояния и намагнича (в данном масштабе — нулевым, что по вертикали отложена величина $4\pi M$: отрицательная намагниченность соответствует диамагнетизму. Величина магнитного поля, создаваемого вихревыми токами, индуцированного магнитным полем.

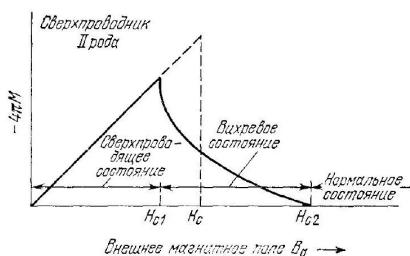
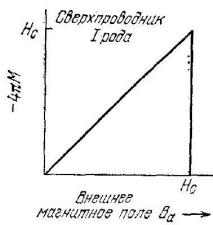


Рис. 12.60. Кривые намагничивания для сверхпроводника II рода. Магнитный поток начинает проникать в образец при поле H_{c1} , которое ниже термодинамического критического поля H_c . Между H_{c1} и H_c образец находится в вихревом состоянии. Выше H_c образец является во всех отношениях нормальным проводником, за исключением возможных поверхностных эффектов. Для данного H_c площадь под кривой намагничивания одинакова для сверхпроводников I и II рода.

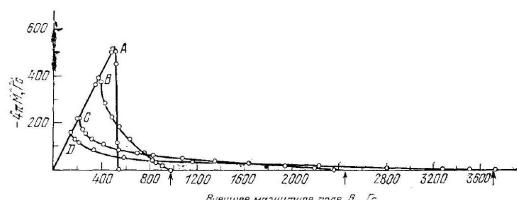


Рис. 12.6б. Кривые намагничивания отожженного поликристаллического свинца Pb и сплавов PbIn 4,2°K. A - чистый Pb; B - сплав с 2,08 вес. % In; C - сплав с 8,23 вес. % In; D - сплав с 20,4 вес. % In. (По Линвингстону.)

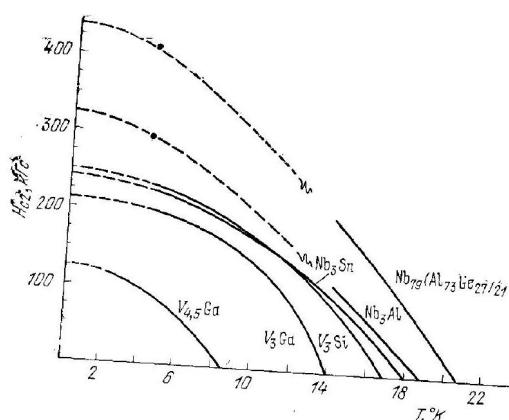


Рис. 12.7. Зависимость верхнего критического поля от температуры для различных сверхпроводников [15].

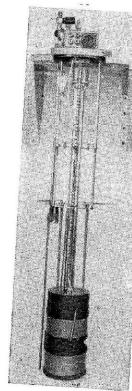


Рис. 12.8. Сверхгроводящий магнит. криостат с жидким пл погружения в криостат с жидким гелием.

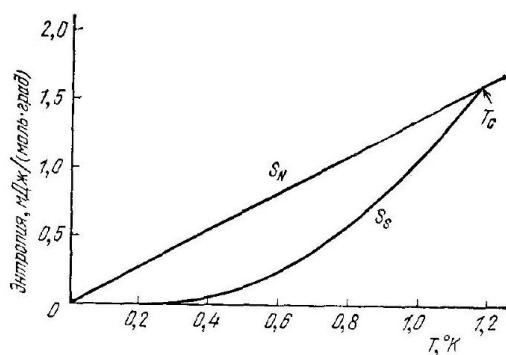


Рис. 12.9. Энтропия S алюминия в нормальном и сверхпроводящем состояниях в зависимости от температуры. В сверхпроводящем состоянии энтропия меньше, так как электроны более упорядочены, чем в нормальном состоянии. При любой температуре ниже T_c образец может быть переведен в нормальное состояние магнитным полем напряженностью больше критической. (N. E. Phillips.)

$= 410\text{кГс}$ (41 тесла). Используя соленоиды с обмотками из так называемых жестких сверхпроводников, некоторые фирмы изготавливают сверхпроводящие магниты (см. рис. 12.8), дающие весьма стабильные поля более 100 кГс. Жесткими сверхпроводниками называют сверхпроводники II рода с сильным магнитным гистерезисом, искусственно созданным механической обработкой.

Теплоемкость. Во всех сверхпроводниках энтропия при охлаждении ниже T_c уменьшается. Результаты экспериментов с Al представлены на рис. 12.9. Уменьшение энтропии при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее показывает, что сверхпроводящее состояние является более упорядоченным, чем нормальное, так как энтропия является мерой «разупорядочения» системы. Большинство электронов, термически возбужденных в нормальном состоянии, упорядочивается при переходе в сверхпроводящее состояние. Изменение энтропии при этом невелико. Для алюминия эта величина составляет $10^{-4}k_B$ На а ТОМ.

На рис. 12.10 приведены кривые температурной зависимости теплоемкости галлия: на рис. 12.10, а сопоставлены теплоемкости в нормальном и сверхпроводящем состояниях; на рис. 12.10, б видно, что ход изменения с температурой электронного вклада в теплоемкость галлия в сверхпроводящем состоянии - экспоненциальный с показателем экспоненты, пропорциональный $-1/T$. Такая форма кривой дает основания предположить, что характер возбуждения электронов связан с их переходом через нергетическую щель. Наличие энергетической щели (рис. 12.11)

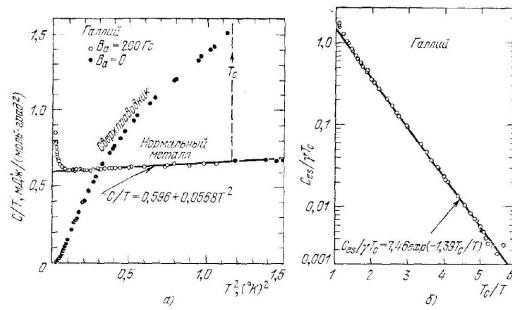


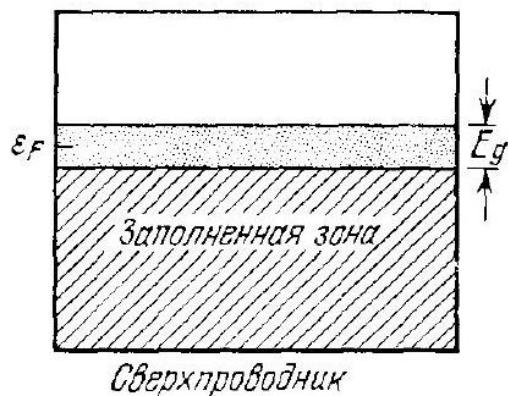
Рис. 12.10. а) Теплоемкость галлия в нормальном и сверхпроводящем состояниях. Нормальное состояние (восстанавливаемое при поле 200 Гс) имеет электронный, решеточный и (при низких температурах) ядерный квадрупольный вклады. б) Электронная часть теплоемкости C_{es} в сверхпроводящем состоянии (в логарифмическом масштабе) в зависимости от T_c/T . Видно, что зависи-

сность от $1/T$ — экспоненциальная; $\gamma = 0,60 \text{ мДж}/(\text{моль}\cdot\text{град}^2)$. (Из работы

Фніліпса [16].



a)



)

Рис. 12.11. а) Зона проводимости в нормальном состоянии. б) Энергетическая щель вблизи уровня Ферми в сверхпроводящем состоянии. Электроны, возбуждаемые в состояния над щелью, ведут себя как нормальные электроны: в высокочастотных полях они обусловливают сопротивление; при постоянном токе все определяется сверхпроводящими электронами. При абсолютном нуле над щелью нет электронов. Ширина щели E_g показана для наглядности большей, чем в действительности: обычно $E_g \sim 10^{-4}\epsilon_F$. является характерной (но не универсальной) особенностью

сверхпроводящего состояния. Теория Бардина — Купера

Уриффера (теория BKUI) позволяет объяснить наличие этой СсоGehHocT.

Энергетическая щель. Энергетическая щель в сверхпроводниках имеет совершенно другую природу, чем запрещенная зона в диэлектриках. Аргумент в экспоненциальной функции, описывающей температурную зависимость теплоемкости, позволяет определить величину полуширины энергетической щели ²⁾. На рис. 12.10, б видно, что теплоемкость галлия изменяется по закону $\exp(-\Delta/k_B T)$, где $\Delta \approx 1,4k_B T_c$. Таким образом, ширина щели

$$E_g \equiv 2\Delta = 2(1, 4k_B T_c), \text{ или } E_g/k_B T_c = 2, 8.$$

Отношение $E_g/k_B T_c$ является характерной величиной. В табл. 12.3 приведены значения ширин щелей для некоторых

ТАБЛІА 12.3

Энергетическая щель в сверхпроводниках при $T = 0$

													Al	Si
Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge			
		16, 3.4								2.4 3.2	3.3 3.5			
Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn (-)			
			30.5 3.80	2.7 3.4					1.5 3.2	10.5 3.6	11.5 3.5			
La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Tg (-)	Tl	Pb			
19. 3.7		14 3.60							16.5 4.6	7.35 3.57	27.3 4.38			

сверхпроводников³); эти данные получены из экспериментов по электронному туннелированию (см. ниже). Величину Δ часто называют параметром энергетической идиоли.

Переход из сверхпроводящего состояния в нормальное при нулевом магнитном поле является фазовым переходом второго рода. При фазовом переходе второго рода не выделяется скрытого тепла, однако теплоемкость испытывает скачок, ясно видный из рис. 12.10, а. Кроме этого с увеличением температуры до

1. В диэлектриках наличие запрещенной зоны связано с кристаллической решеткой, в сверхпроводниках наличие энергетической щели связано с особенностью ферми-газа.
 2. Ширина щели можно определить, сопоставляя теорию с результатами оптических и других методов измерения.
 - з) Данные взяты в основном из обзора Дугласа в Фаликова [17].

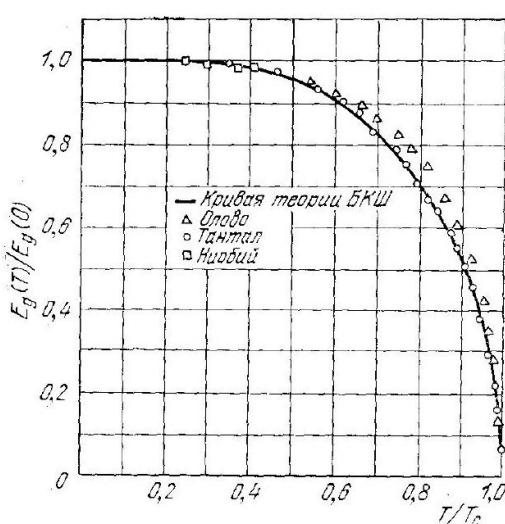


Рис. 12.12. Зависимость относительной ширины энергетической щели $E_g(T)/E_g(0)$ от относительной температуры T/T_c (по Таунсенду и Саттону). Сплошную кривую дает теория БКШ.

температуры перехода T_c энергетическая щель непрерывно уменьшается до нуля (см. рис. 12.12). Фазовый переход первого рода характеризовался бы наличием скрытой теплоты и скачком величины энергетической щели.

Свойства сверхпроводников в инфракрасном и СВЧ-диапазонах частот. Наличие в сверхпроводниках энергетической щели позволяет предположить, что, как и в полупроводниках с запрещенной зоной, фотоны, имеющие энергию, меньшую ширины энергетической щели, могут проходить через сверхпроводящий металл. Экспериментально это было установлено Гловером и Тинкхэмом, а также рядом других авторов. От любого металла фотоны отражаются из-за несогласования импедансов на границе вакуум - металл, но очень тонкая ($\sim 20\text{\AA}$) пленка пропускает больше фотонов в сверхпроводящем состоянии, чем в нормальном.

Для фотонов, имеющих энергию, меньшую ширины щели, электросопротивление сверхпроводника обращается в нуль при абсолютном нуле. На рис. 12.13 показаны экспериментальные результаты для далекой инфракрасной области. Для СВЧ-области результаты представлены на рис. 12.14. Видно, что при $T \ll T_c$ сопротивление в сверхпроводящем состоянии испытывает резкий скачок в области энергий, равных ширине щели. Для фотонов меньшей энергии поверхностное сопротивление отсутствует. Для фотонов большей энергии сопротивление приближается к сопротивлению в нормальном состоянии, поскольку такие фотоны вызывают переходы на незанятые «нормальные» энергетические уровни над щелью. Увеличение температуры не только уменьшает ширину щели (как на рис. 12.12), но и затягивает спад сопротивления для фотонов с энергией, меньшей 432

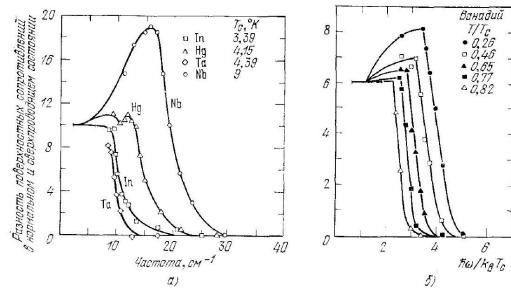


Рис. 12.13. При высоких частотах поверхностное сопротивление сверхпроводника приближается к поверхностному сопротивлению нормального металла. а) Зависимость разности поверхностных сопротивлений в нормальном и сверхпроводящем состояниях от частоты. Кривые нормированы так, что самая низкая частота одинакова для каждого элемента. б) Та же величина для ванадия в зависимости от температуры. (По Ричардсу и Тинкхэму [18].)

Рис. 12.14. Изотермы отношения поверхностных сопротивлений алюминия как функции частоты фотонов. (По Бионди и Гарфункелю [19].)

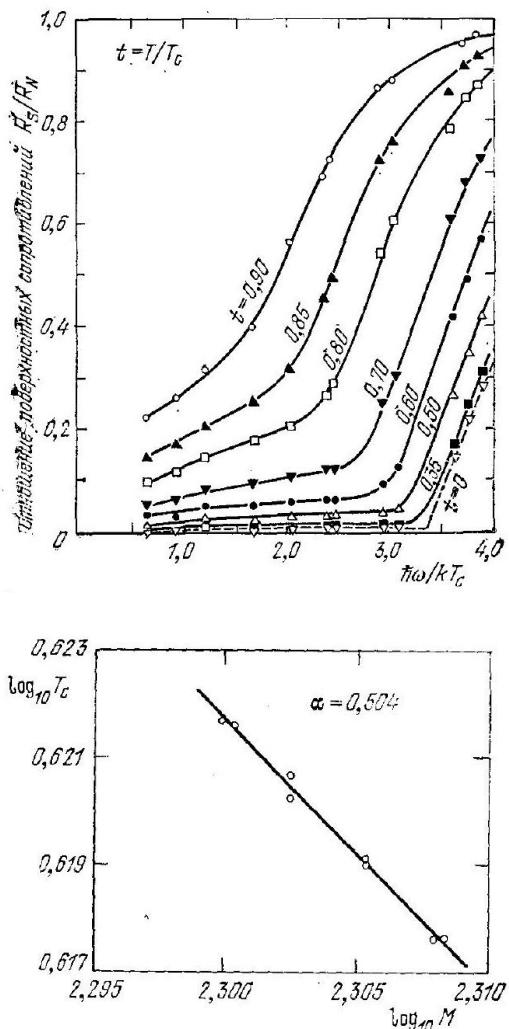


Рис. 12.15. Представленная в двойном логарифмическом масштабе зависимость критической температуры от среднего значения массового числа разделенных изотопов ртути [22].

ширины щели, за исключением случая нулевой частоты. При нульвой частоте сопротивление определяют в основном сверхпроводящие электроны, а не нормальные электроны, возбуждаемые за счет тепловых перебросов в область выше цели. При конечных частотах инерциальность сверхпроводящих электронов не позволяет им полностью экранировать электрическое поле, что приводит к возможности поглощения энергии нормальными тепловыми электронами.

Изотопический эффект. Установлено, что критическая температура сверхпроводника зависит от его изотопического состава. Впервые это было установлено в опытах Максвелла [20] и Рейнольдса с сотрудниками [21]. Чтобы дать представление о величине этого эффекта, укажем, что для ртути при изменении среднего значения массового числа M от 199,5 до 203,4 (в ат. ед. массы) критическая температура изменяется от 4,185°К до 4,146°К. При смешивании различных изотопов одного и того же элемента температура перехода меняется незначительно.

Экспериментальные данные по изотопическому эффекту можно в общем случае описать соотношением

$$M^\alpha T_c = \text{const}$$

выполняющимся для изотопов каждого данного элемента; для ртути это соотношение иллюстрируется кривой, приведенной на рис. 12.15. Экспериментальные значения α представлены в табл. 12.4.

Зависимость T_c от массового числа показывает, что колебания решетки, а, следовательно, и взаимодействие электронов с решеткой имеют важное значение для явления сверхпроводимости¹⁾. Других же причин зависимости температуры перехода в отсутствие изотопического эффекта в Ru и Os можно объяснить, если принять во внимание зонную структуру этих металлов; см. работы Гарленда [23] и Макмиллана [24].

10.1.3 Изотопический эффект в сверхпроводниках

Теория

Экспериментальные значения α в соотношении $M^\alpha T_c = \text{const.}$ где M - массовое число изотопа (По работе Гарленда [23] с исправлениями, предложенными В. Комптон.)

Herlectuo	a	Вееств	α
Zn	$0,45 \pm 0,05$	Ru	$0,00 \pm 0,05$
Cd	$0,32 \pm 0,07$	Os	$0,15 \pm 7,05$
Sn	$0,47 \pm 0,02$	Mo	$0,33$
Hg	$0,50 \pm 0,03$	Nb ₃ Sn	$0,08 \pm 0,02$
Pb	$0,49 \pm 0,02$	Mo ₃ Ir	$0,33 \pm 0,03$
Tl	$0,61 \pm 0,10$	Zr	$0,00 \pm 0,06$

сверхпроводящее состояние от числа нейтронов в ядре-ист. Исходная простая модель БКШ давала следующий результат:

$$T_c \sim \theta_{\text{Дебая}} \sim M^{-1/2},$$

так что в формуле (12.2) $\alpha = 1/2$, однако учет кулоновского взаимодействия между электронами изменяет это соотношение и равенство $\alpha = 1/2$ не является незулемым.

Теоретическое доказательство бесконечной проводимости (???)

(я хз, напишу что ли потом, пока не думал про это.)

10.1.4 Теоретическое рассмотрение

Теория

В теоретической интерпретации явлений, связанных с сверхпроводимостью, можно отметить несколько этапов. Некоторые результаты следовали непосредственно из термодинамики. Многие важные результаты можно было описать с помощью феноменологических уравнений: уравнений Лондонов и уравнений Ландау - Гинзбурга. Общепринятая теория сверхпроводимости была разработана Бардином, Куллером и Шриффером и стала основой последующих исследований. Наше рассмотрение будет отчасти схематическим из-за сложности, присущей теории на ее современном уровне.

Термодинамика перехода в сверхпроводящее состояние. Ван Лер и Кеезом [25] экспериментально показали, что переход из нормального состояния в сверхпроводящее является термодинамически обратимым в том же смысле, в каком можно считать обратимым переход между жидким и газообразной фазами вещества при медленном испарении.

Из наличия эффекта Мейснера также следует, что переход является обратимым. Следовательно, для рассмотрения перехода можно применить термодинамику и определить разность

- Гортер и азимир [26]. Результат, полученный в этой работе, анали. гичен формуле для dp/dT , где p - давление паров.



Рис. 12.16. Статическое магнитное поле внутри неограниченного соленоида, когда он пустой, когда он содержит нормальный металл и когда он содержит сверхпроводник. Магнитное поле в вакууме и в нормальном металле равно \mathbf{B}_a ; в области между соленоидом и сверхпроводником магнитное поле тоже равно \mathbf{B}_a , в сверхпроводнике $\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b = 0$, где \mathbf{B}_b — поле наведенных сверхпроводящих токов в поверхностном слое образца.

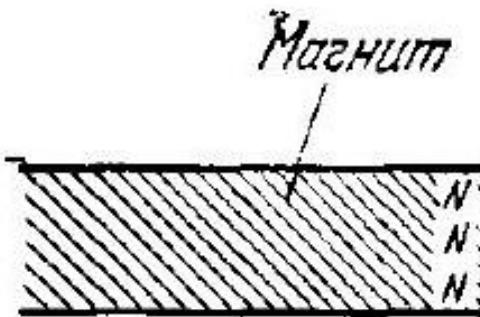
значений энтропии в нормальном и сверхпроводящем состояниях, пользуясь кривой зависимости критического поля H_c от температуры. Рассмотрим сверхпроводник I рода, для которого полностью выполняется эффект Мейснера, т. е. $\mathbf{B} = 0$ внутри сверхпроводника (рис. 12.16). Мы увидим, что критическое поле ¹⁾ H_c является хорошей количественной мерой для оценки разности энергий сверхпроводящего и нормального состояний при абсолютном нуле.

Равновесная энергия сверхпроводящего состояния металла по отношению к энергии нормального состояния может быть определена с помощью калориметрических или магнитных измерений. Сначала выполняются прямые измерения теплоемкости нормального металла в магнитном поле и сверхпроводящего в отсутствие поля. Далее, используя величину разности теплоемкостей, мы найдем разность энергий при абсолютном нуле, т. е. равновесную неравенство сверхпроводящего состояния. При этом, пользуясь измерениями теплоемкости, мы предполагаем, что термодинамические свойства нормального состояния не зависят от поля. Равновесную энергию и свободную энергию можно получить также, определив напряженность магнитного поля, при которой происходит разрушение сверхпроводящего состояния и переход в нормальное состояние.

Почти идеальный диамagnetизм является важным свойством, характеризующим сверхпроводники I рода. Согласно эффекту Мейснера, внутри массивного сверхпроводника магнитная

индукция \mathbf{B} обращается в нуль, так что сверхпроводник ведет себя как идеальный диамагнетик. Соотношения (12.1) относятся и к предельным случаям тонких пленок или тонких длиниых

- Обозначение H_c применяется всегда по отношению к массивным образцам, но не к тонким пленкам. Для сверхпроводника II рода под H_c обычно понимается термодинамическое критическое поле, которое можно определить из равновесной энергии. а)



6.

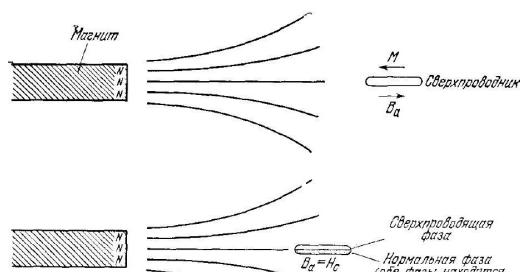


Рис. 12.17, а) Сверхпроводник, в котором полностью осуществляется эффект Мейснера, имеет $B = 0$, т. е. намагниченность $M = -B_a/4\pi$ (в единицах СГС). Работа (на единицу объема), производимая над сверхпроводником при перемещении его из бесконечности в поле B_a постоянного магнита, выражается в виде

$$(CC)W = - \int \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_a = \frac{1}{8\pi} B_a^2$$

б) При достижении внешним полем величины B_{ac} нормальное и сверхпроводо-

дяющее состояния находятся в равновесии. При этом плотности свободных энергий равны: $F_N(T, B_{ac}) = F_s(T, B_{ac})$.

образцов, ориентированных вдоль направления внешнего поля, Т. е. имеем:

$$\begin{aligned} (\text{СГС}) \quad \mathbf{B} &\equiv \mathbf{B}_a + 4\pi\mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{B}_a/4\pi, \\ (\text{С}) \quad \mathbf{B} &\equiv \mathbf{B}_a + \mu_0\mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{B}_a/\mu_0. \end{aligned}$$

Для понимания явления перехода сверхпроводника в нормальное состояние при наличии внешнего поля \mathbf{B}_a рассмотрим работу, совершающую над сверхпроводником при переносе его из бесконечности (приложенное поле равно нулю) в положение r в поле постоянного магнита. Для работы, совершающей в этом процессе (рис. 12.17), имеем:

$$W = - \int_0^{B_a} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B}_a$$

на единицу объема образца. Эта работа переходит в энергию магнитного поля. Уравнение термодинамики для этого процесса имеет вид:

$$dU = TdS - M \cdot dB_a$$

1. См. главы 22,23 книги Кннтеля [27]. Нли, Для сверхпроводника, в котором связь M с описывается соотношением (12.3), имеем:

$$\begin{aligned} \text{(СГС)} \quad dU_S &= TdS + \frac{1}{4\pi} B_a dB_a \\ \text{(ЧИ)} \quad dU_S &= TdS + \frac{1}{\mu_0} B_a dB_a \end{aligned}$$

Таким образом, при абсолютном нуле, когда $TdS = 0$, увеличение плотности энергии сверхпроводника при переносе его из области с нулевым полем в область с полем B_a составляет:

$$\begin{aligned} \text{(СТС)} \quad U_S(B_a) - U_S(0) &= \frac{1}{8\pi} B_a^2 \\ \text{(ЧН)} \quad U_S(B_a) - U_S(0) &= \frac{1}{2\mu_0} B_a^2. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим немагнитный металл в нормальном состоянии. Если не учитывать пренебрежимо малую магнитную восприимчивость 1), то $M = 0$ и энергия металла в нормальном состоянии не зависит от поля. В частности, при поле, равном критическому, имеем:

$$U_N(B_{ac}) = U_N(0)$$

Результаты (12.7) и (12.8) нам понадобятся для определения равновесной энергии сверхпроводящего состояния при абсолютном нуле. При критическом значении приложенного поля B_{ac} энергии сверхпроводящего и нормального состояний равны:

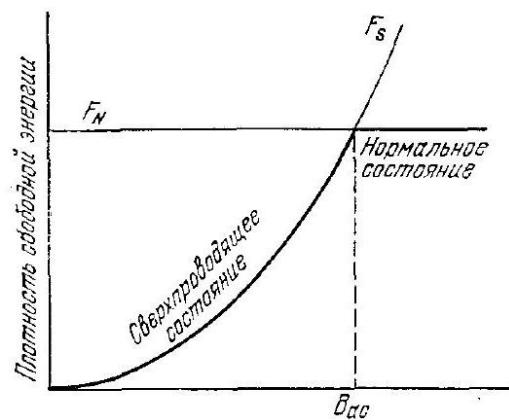
$$\begin{aligned} \text{(СГС)} \quad U_N(B_{ac}) &= U_S(B_{ac}) = U_S(0) + \frac{1}{8\pi} B_{ac}^2 \\ \text{(ЧН)} \quad U_N(B_{ac}) &= U_S(B_{ac}) = U_S(0) + \frac{1}{2\mu_0} B_{ac}^2. \end{aligned}$$

В системе $CHH_c \equiv B_{ac}/\mu_0$, тогда как в СГС $H_c \equiv B_{ac}$. Если приложенное поле равно критическому, то равновесными являются оба состояния: сверхпроводящее и нормальное. Наконец, из (12.8) следует, что

$$\begin{aligned} \text{(СГС)} \quad U_N(0) &= U_S(0) + \frac{1}{8\pi} B_{ac} \\ \Delta U \equiv U_N(0) - U_S(0) &= \frac{1}{8\pi} B_{ac}^2 \end{aligned}$$

где ΔU - равновесная энергия сверхпроводящего состояния при абсолютном нуле на единицу объема образца. Например, из табл. 12.1 возьмем B_a для алюминия, равное 105 Гс при

- Это предположение удовлетворяется для сверхпроводников I рода. В сверхпроводниках II рода $H_c \ll H_{c2}$ и в сильных полях изменение в спиновом паранагнетизме электронов проводимости (гл. 15) приводит к значительному снижению энергии нормальной фазы по сравнению со сверхпроводящей фазой. В некоторых сверхпроводниках II рода верхнее критическое поле ограничивает этот эффект. Клогстон [28] предполагал, что $H_{c2}(\max) = 18400T_c$, где H_{c2} - в гауссах, а T_c - в $^{\circ}\text{K}$ (см. также работу Чандрасекара [29]).



Приложенное магнитное поле $B_a \rightarrow$

Рис. 12.18. Плотность свободной энергии F_N не зависит от напряженности приложенного поля B_a . При том значении температуры, для которого построен график, материал является сверхпроводящим в нулевом магнитном поле, т. е. $F_S(T, 0)$ меньше, чем $F_N(T, 0)$. Если материал находится в сверхпроводящем состоянии во внешнем магнитном поле, то эффект Мейснера увеличивает F_S на величину $B_a^2/8\pi$ (в единицах СГС), т. е.

$$F_S(T, B_a) = F_S(T, 0) + \frac{1}{8\pi} B_a^2$$

При $B_a > B_{ac}$ плотность термодинамического потенциала меньше в нормальном состоянии, чем в сверхпроводящем, и устойчивым является нормальное состояние. Начало вертикальной оси соответствует $F_S(T, 0)$. Предполагается, что при $T = 0$ энергии U_S и U_N равны.

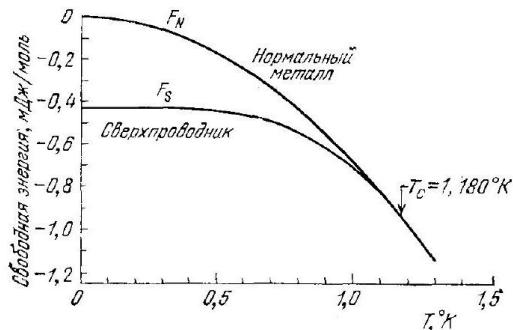


Рис. 12.19. Экспериментальные зависимости свободной энергии от температуры для алюминия в сверхпроводящем и нормальном состояниях. При температуре ниже температуры перехода $T_c = 1,180^\circ\text{K}$ свободная энергия меньше в сверхпроводящем состоянии. Кривые сливаются при температуре, равной T_c , так что переход является фазовым переходом II рода (скрытая теплота при переходе отсутствует). Кривая для F_S получена в нулевом магнитном поле, кривая для F_N — в поле, достаточном для перехода образца в нормальное состояние. Существенно, что F_N не зависит от напряженности магнитного поля. (N. E. Phillips.) абсолютном нуле, и, подставляя в (12.10), получим:

$$(\text{СГС}) \Delta U = (105)^2/8\pi \approx 440/\text{см}^3,$$

что находится в прекрасном согласии с результатами тепловых измерений, которые дают 430 эрг/см³.

При конечной температуре нормальная и сверхпроводящая фазы находятся в равновесии при равенстве свободных энергий $F = U - TS$. Свободные энергии двух фаз в зависимости от магнитного поля представлены на рис. 12.18. Экспериментальные зависимости свободной энергии двух фаз от температуры представлены на рис. 12.19. При приближении к

критической температуре наклон кривых dF/dT становится одинаковым, так что скрытая теплота отсутствует.

Уравнение Лондонов. Мы объяснили эффект Мейснера, гриняя магнитную восприимчивость сверхпроводника равной $\chi = -1/4\pi$ в системе СГС, или $\chi = -1$ в СИ. Это предположение является довольно грубым, так как не объясняет эффекты проникновения потока в тонких пленках. Нельзя ли модифицировать уравнения электродинамики (такие, как закон Ома) так, чтобы объяснить эффект Мейснера? При этом мы не хотим модифицировать сами уравнения Максвелла.

Электропроводность металла в нормальном состоянии описывается законом Ома:

$$j = \sigma \mathbf{E}.$$

Нам нужно существенно модифицировать (12.12), чтобы описать и электропроводность, и эффект Мейснера в сверхпроводящем состоянии. Давайте постулируем некоторые положения и посмотрим, что получится. Предположим, что в сверхпроводящем состоянии плотность тока прямо пропорциональна векторному потенциалу A локального магнитного поля. По причинам, которые станут ясными позже, выберем коэффициент пропорциональности равным $-c/(4\pi\lambda_L^2)$ (в системе СГС). Здесь c — скорость света, λ_L — константа, имеющая размерность длины. В СИ этот коэффициент равен $-1/\mu_0\lambda_L^2$. Вместо (12.12) имеем:

$$(СГС) \quad j = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} A, \quad (СМ) \quad j = -\frac{1}{\mu_i\lambda_L^2} A.$$

Это — уравнение Лондонов [30]¹). Свойства векторного потен-

1. Уравнение Лондонов (12.13) написано с векторным потенциалом, выбранным в калибровке Лондонов, т. е. принимается, что $\operatorname{div} A = 0$ и $A_n = 0$ на любой внешней поверхности, через которую не подводится внешнего тока. Индекс n обозначает компоненту, нормальную к поверхности. Следовательно, при этой калибровке имеем $\operatorname{div} i = 0, i_n = 0$; это есть истинные физические граничные условия. Уравнение в форме (12.13) применимо лишь для односвязных сверхпроводников; дополнительные члены могут появиться при рассмотрении диска или цилиндра, однако (12.14) остается справедливым независимо от геометрии образца. Циала приведены в Приложении I. Преобразуем (12.13), взяв rot от обеих частей:

$$\begin{aligned} (СГС) \quad \operatorname{rot} j &= -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{B}, \\ (СИ) \quad \operatorname{rot} j &= -\frac{1}{\mu_i\lambda_L^2} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Сначала покажем, что из уравнения Лондонов следует эффект Мейснера. В статических условиях из уравнений Максвелла получим: (СГС) $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} j$ (СИ) $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$

Беря rot от обеих частей, получим:

$$(СГС) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} j,$$

$$(СИ) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot} j,$$

что вместе с (12.14) для сверхпроводника дает:

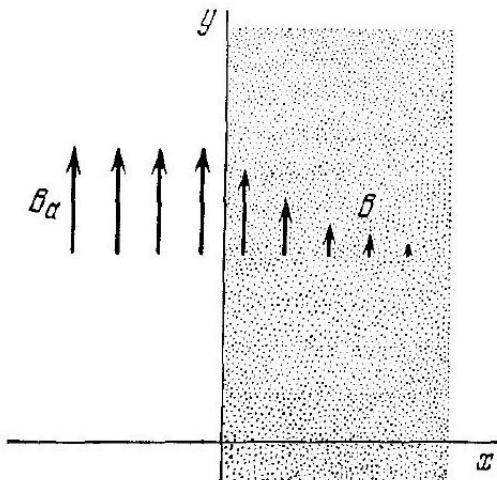
$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L} \mathbf{B}$$

Это уравнение объясняет эффект Мейснера, так как оно не допускает постоянного в пространстве решения, т. е. однородное магнитное поле не может существовать в сверхпроводнике. Иными словами, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 = \text{const}$ не является решением (12.17),

если только \mathbf{B}_0 не равно тождественно нулю. Этот результат следует из того, что $\nabla^2 \mathbf{B}_0$ всегда равно нулю, а \mathbf{B}_0/λ_L^2 обращается в нуль, только когда \mathbf{B}_0 равно нулю.

В сверхпроводнике при движении внутрь от наружной поверхности поле убывает экспоненциально. Густь полубесконечный сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, как это показано на рис. 12.20. Если $B(0)$ д поле на поверхности раздела, то дитя поля внутри сверхпроводника решение (12.17)

Рис. 12.20. Проникновение магнитного поля в полубесконечный сверхпроводник. Глубина проникновения λ определяется как расстояние, на котором величина поля падает в e раз. Обычно в чистом сверхпроводнике $\lambda \approx 500\text{\AA}$.



имеет вид ¹⁾

$$B(x) = B(0) \exp(-x/\lambda_L)$$

В этом примере предполагается, что магнитное поле параллельно границе раздела. Видно, что λ_L определяет глубину проникновения магнитного поля; λ_L известна как лондоновская глубина проникновения. Истинная глубина проникновения не определяется одной только λ_L , так как известно, что уравнение Лондонов является некоторым упрощением.

Для понимания физического смысла уравнения Лондонов и для оценки порядка величины λ_L проведем следующие простые рассуждения. Плотность тока запишем, как обычно, в виде

$$j = nqv$$

где n - концентрация носителей с зарядом q . Магнитное поле описывается векторным потенциалом A . Скорость v в соответствии с (I. 16) (стр. 745) связана с полным импульсом p соотношением:

$$(СГС) \quad p = mv + \frac{q}{c}A, \quad v = \frac{1}{m} \left(p - \frac{q}{c}A \right)$$

Следовательно, (12.19) можно записать в виде

$$(СГС) \quad j = \frac{nq}{m}p - \frac{nq^2}{mc}A.$$

(В системе СН величина c заменяется на единицу.)

Если в сверхпроводящем состоянии $p = 0$, то уравнение Лондонов получается из (12.21) в лондоновской калибровке для A . Достижение квантовой теории сверхпроводимости заключается в том, что она объясняет, почему полный импульс равен нулю в сверхпроводящем

состоянии, но не равен нулю в нормальном состоянии. При $p = 0$ уравнение (12.21) примет вид:

$$(\text{СГС}) \quad j = -\frac{nq^2}{mc} A, \quad (\text{CI}) \quad j = -\frac{nq^2}{m} A,$$

которое является уравнением Лондонов (12.13), в котором

$$(\text{СГС}) \quad \lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi nq^2}, \quad (\text{CH}) \quad \lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 nq^2}.$$

Если эффективными носителями являются пары электронов с зарядом $q = -2e$, то концентрация n в (12.23) есть половина

1. Это выражение и уравнение Лондонов не вполне корректны, так как не учитывается длина свободного пробега электронов и ограничения на пространственную локализацию, налагаемые принципом неопределенности. Го этим соображениям в теорию вводится длина когерентности. Уравнение Лондонов, связывающее $j(\mathbf{r})$ и $A(\mathbf{r})$, не вполне точно для полей, быстро меняющихся в пространстве; величину $j(\mathbf{r})$ должна определять некая форма локального среднего A , взятого на длине когерентности.

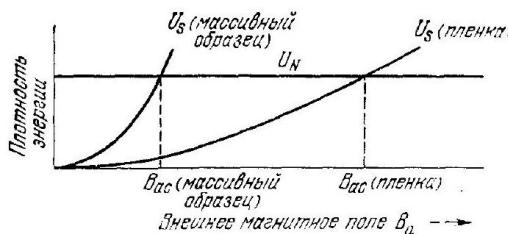


Рис. 12.21. Увеличение критического поля для тонкой пленки по сравнению с массивным сверхпроводником. В тонкой пленке происходит не полная экранировка магнитного поля, что, в свою очередь, приводит к более слабой зависимости свободной энергии от магнитного поля, чем в случае массивного образца. В данном магнитном поле состояние с наименьшей плотностью энергии является устойчивым.

концентрации электронов проводимости. В качестве m при этом выступает удвоенная масса электрона. Типичное экспериментальное значение глубины проникновения для металлов (см. работу Лонка [31]) составляет 500 Å, что по порядку величины совпадает со значением, получаемым из (12.23).

Если поместить в магнитное поле тонкую пленку, то оно будет проникать в нее, оставаясь при этом достаточно однородным, если только ее толщина значительно меньше λ_L , т. е. эффект Мейснера в тонких пленках не полный. В этом случае наводимое поле значительно меньше B_a и эффект от B_a в плотности энергии сверхпроводящего состояния мал, так что формула (12.7) неприменима. Из нашего термодинамического рассмотрения (рис. 12.21) следует, что значения критического поля для тонких пленок в параллельном магнитном поле должны быть чрезвычайно высокими, как это видно из рис. 12.33 (см. ННУКе).

Длина когерентности. Лондоновская глубина проникновения λ_L является фундаментальным параметром, характеризующим сверхпроводник. Другим и не менее важным независимым параметром является длина когерентности ξ . Длина когерентности представляет собой расстояние, на протяжении которого в магнитном поле, меняющемся в пространстве, ширина энергетической щели существенно не изменяется. Уравнение Лондонов является локальным уравнением, так как оно связывает плотность тока в точке r с векторным Потенциалом в той же точке. Поскольку $j(r)$ есть произведение $\mathbf{A}(r)$ на постоянное число, то ток

с необходимостью повторяет вариации векторного потенциала. Длина когерентности ξ определяет расстояние, на протяжении которого мы должны усреднять для получения j . В действительности в теории вводятся две длины когерентности, но мы не будем в это вдаваться. Любые пространственные изменения в состоянии электронной системы требуют избыточной кинетической энергии'). Ра—зумно ограничить пространственные изменения $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ так, чтобы избыточная энергия была меньше равновесной энергии сверхпроводящего состояния. В предлагаемом ниже выводе выражения для длины когерентности при абсолютном нуле (основанном на соотношении неопределенности) мы будем исходить из сравнения волновой функции $\psi(x) = \exp(ikx)$ плоской волны с сильно модулированной волновой функцией:

$$\varphi(x) = 2^{-1/2} (e^{i(k+q)x} + e^{ikx}).$$

Плотность вероятности, связанная с плоской волной, одинакова во всем пространстве:

$$\psi^* \psi = e^{-ikx} e^{ikx} = 1,$$

тогда как для $\varphi^* \varphi$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi^* \varphi &= \frac{1}{2} (e^{-i(k+q)x} + e^{-ikx}) (e^{i(k+q)x} + e^{ikx}) = \\ &= \frac{1}{2} (2 + e^{iqx} + e^{-iqx}) = 1 + \cos qx, \end{aligned}$$

причем модуляция определяется волновым вектором q . Кинетическая энергия волны $\psi(x)$ есть

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} k^2.$$

Кинетическая энергия модулированной плотности вероятности имеет большую величину; действительно,

$$\begin{aligned} \int dx \varphi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) [(k+q)^2 + k^2] \approx \\ &\approx \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{\hbar^2}{2m} kq, \end{aligned}$$

где мы пренебрели q^2 , предполагая, что $q \ll k$.

Наличие модуляции приводит к увеличению энергии на $\hbar^2 kq / 2m$. Если это увеличение превышает по величине ширину энергетической щели E_g , то сверхпроводимость разрушается. Критическая величина q_0 модулирующего волнового вектора определяется соотношением:

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_F q_0 = E_g.$$

Определим собственную длину когерентности ξ_0 через критическое значение q_0 , а именно $\xi_0 = 2\pi/q_0$. Из (12.29) имеем:

$$\xi_0 = \frac{2\pi\hbar^2 k_F}{2mE_g} = \frac{\pi\hbar v_F}{E_g},$$

1. Модуляция собственной функции увеличивает кинетическую энергию, так как модуляция увеличивает интеграл от $d^2\varphi/dx^2$. Рассчитанные значения собственной длины когерентности ξ_0

и лондоновской глубины проникновения λ_L при абсолютном нуле

Металл	Собственная пиппардовская длина когерентности $\xi, 10^{-6} \text{ cm}^2$	лондоновская глубина проникновения $\lambda_L, 10^{-6} \text{ cm}^2$	$\frac{\xi_0}{\lambda_L}$
Al	23	3,4	6,2
Pb	160	1,6	100
Cd	8,3	3,7	2,2
Nb	76	11,0	6,9
	3,8	3,9	0,98

где v_F — скорость электронов на поверхности Ферми. Теория БКШ (см. книгу Киттеля [32]) дает похожий результат:

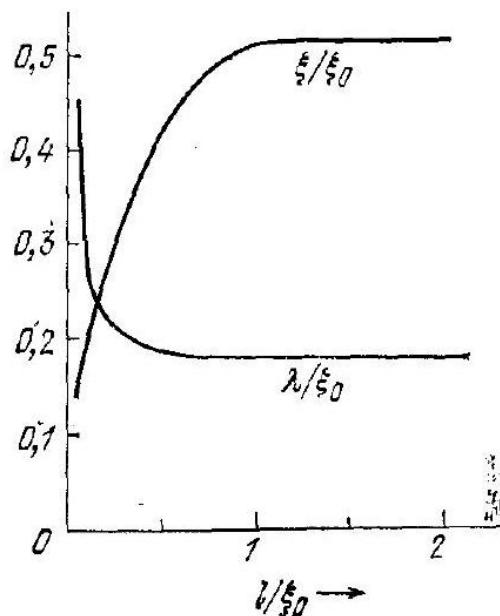
$$\xi_0 = \frac{2\hbar v_F}{\pi E_g}$$

В табл. 12.5 приведены вычисленные по формуле (12.31) значения ξ_0 (R. Meservey, B. B. Schwartz).

Собственная длина когерентности ξ_0 характеризует чистый сверхпроводник. В материалах с примесями и сплавах длина когерентности меньше ξ_0 . Это можно понять качественно: в материалах с примесями собственные функции электронов спутывают возмущения. Для возмущенных волновых функций можно построить заданную локализованную вариацию плотности тока с меньшей энергией, чем для гладких волновых функций.

Длина когерентности впервые появилась в решениях двух феноменологических уравнений, известных как уравнения Гинзбурга-Ландау; эти уравнения также следуют из теории БКЦ.

Рис. 12.22. Схематическая зависимость глубины проникновения λ и длины когерентности ξ от длины свободного пробега l электронов проводимости в нормальном состоянии в единицах ξ_0 . Кривые приведены для $\xi_0 = 10\lambda_L$. При малых значениях длины свободного пробега длина когерентности становится меньше, а глубина проникновения больше. Увеличение отношения λ/ξ характерно для сверхпроводников 11 рода.



Они описывают переходный слой между нормальной и сверхпроводящей фазами при их контакте. Было показано теоретически, что длина когерентности и истинная глубина проникновения зависят от длины свободного пробега электронов, измеренной в нормальном состоянии. Эта зависимость приведена на рис. 12.22.

Теория сверхпроводимости Бардина - Купера - Шриффера. Выше в простой форме было изложено то основное, что мы знаем о сверхпроводниках: интересные экспериментальные данные и феноменологические соотношения. Уже из этого описания можно усмотреть, что нет никакой нужды в каких-то отдельных теориях сверхпроводящих свойств для разных столбцов и строк периодической системы элементов, равно как для чистых металлов, с одной стороны, для сплавов - с другой, или, наконец, для сверхпроводников с различными кристаллическими структурами. Конечно, разные сверхпроводники обнаруживают количественное различие в деталях своих сверхпроводящих свойств, но очевидно также, что эти детали малосущественны при подходе с точки зрения уже существующей общей квантовой теории сверхпроводимости, которую мы будем сейчас обсуждать. Эта общая теория, как уже отмечалось выше, была создана в 1957 г. Бардином, Купером и Шриффером [4].

Результаты теории БКШ заключаются в следующем:

1. Притяжение 1) электронов может привести к тому, что основное состояние всей электронной системы отделяется от возбужденных состояний энергетической щелью. Критическое поле, тепловые свойства²⁾ и большинство электромагнитных свойств зависят от наличия энергетической щели. Расчеты, которые приводят к понятию энергетической щели и к частному случаю основного состояния, даваемому теорией БКШ, приведены в Приложении L. В специальных условиях сверхпроводимость может иметь место и без энергетической щели.
2. Взаимодействие электрон - решетка - электрон представляет собой притяжение и ведет к появлению энергетической щели такой ширины, что ее можно обнаружить экспериментально. Такое непрямое взаимодействие грубо можно описать следующим образом: электрон взаимодействует с решеткой и деформирует ее, для второго электрона решетка уже деформирована, и он движется так, чтобы использовать эту деформацию для понижения своей энергии. Таким образом, второй электрон взаимодействует с первым через посредство решеточной деформации или через фононное поле. Это взаимодействие динамиче-
1. Строго говоря, полное взаимодействие не сводится только к притяжению. Однако в сверхпроводящем состоянии отталкивание электронов меньше, чем в нормальном.
2. Наблюдаемые отношения $E_g(0)/k_B T_c$, приведенные в табл. 12.3, близки к предсказанным теорией БК. Характер фазового перехода из нормального состояния в сверхпроводящее описывается точно. ское, и массы атомов входят в теорию взаимодействия естественным Путем, обусловливая изотопический эффект.
3. Глубина проникновения и длина когерентности появляются как естественные следствия теории основного состояния теории БКШ. Уравнение Лондонов (12.13) получено для магнитных полей, медленно меняющихся в пространстве. Таким образом, основной эффект сверхпроводимости - эффект Мейснера - получается естественным путем 1).
4. Обнаружено, что критерий для наличия сверхпроводимости и для существования конечной температуры перехода элемента или сплава включает в себя Плотность электронных состояний на уровне Ферми $\mathcal{D}(\varepsilon_F)$ и потенциал электрон-решеточного взаимодействия U , который может быть оценен из электрического сопротивления. Для $U\mathcal{D}(\varepsilon_F) \ll 1$ теория БКШ дает:

$$T_c = 1,14\theta \exp \left[-\frac{1}{U\mathcal{D}(\varepsilon_F)} \right],$$

где θ - температура Дебая. В этом соотношении предполагается, что U соответствует притяжению (здесь $U > 0$); в противном случае основное состояние не является сверхпроводящим.

и:-

экспериментальные данные удовлетворяют результату для T_c по

крайней мере качественно.

Здесь заложен интересный парадокс: чем выше сопротивление при комнатной температуре, тем более вероятно, что металл будет сверхпроводником, когда его охладят ²⁾. Однако это имеет место, только если мы рассматриваем металлы со сравнимыми концентрациями электронов проводимости.

Другое простое заключение состоит в том, что элементы с четным числом валентных электронов на один атом имеют меньшую вероятность оказаться сверхпроводниками, чем элементы с нечетным числом валентных электронов; это по сути другая формулировка утверждения о том, что для заполнения зоны Бриллюэна четное число валентных электронов предпочтительнее, так что значение функции плотности состояний при $\varepsilon = \varepsilon_F$, т. е. $\mathcal{D}(\varepsilon_F)$, будет малым.

5. Магнитный поток в сверхпроводящем кольце квантуется и эффективный заряд носителя тока равен $2e$ (а не e). Основное состояние составлено из пар одноэлектронных состояний, а естественная трактовка факта квантования магнитного потока ³⁾,
1. Значение глубины проникновения не превышает даваемого формулой (12.23); качественное рассмотрение приводит к тому же результату.
2. Причина проста: электросопротивление при комнатной температуре является мерой электрон-фононного взаимодействия. В формуле для T_c по теории БКШ мы должны в качестве $\mathcal{D}(\varepsilon_F)$ брать значение функции плотности состояний для электронов с одинаковым направлением спина.
3. Первые эксперименты, в которых было обнаружено квантование магнитного потока, описаны в работах [33, 34]. Простое изложение теории квантования потока дано в Приложении ; см. также Приложение К.

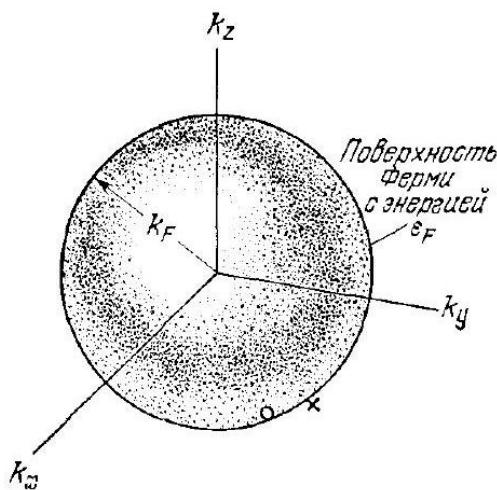


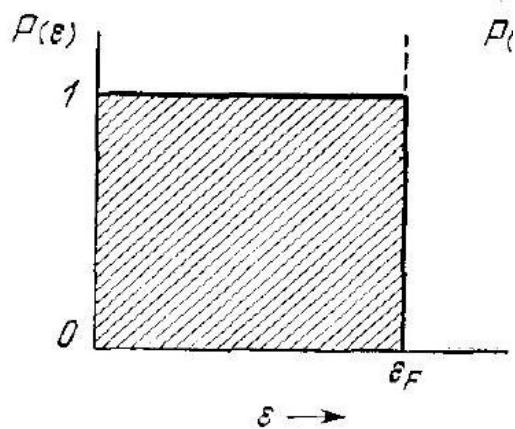
Рис. 12.23. Основное состояние невзаимодействующего ферми-газа; все одночастичные состояния с $k \leq k_p$ заняты; при $k > k_F$ все состояния свободны. Возбужденное состояние

с произвольно малой энергией можно образовать путем перемещения электрона из точки О внутри сферы Ферми около поверхности в точку X сразу над поверхностью Ферми.

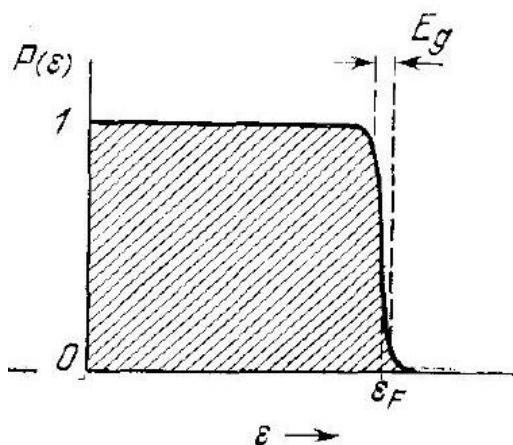
исходя из того, что заряды носителей тока равны $2e$, является прямым следствием теории.

Основное состояние в теории БКШ. В гл. 7 мы видели, что основное состояние ферми-газа невзаимодействующих электронов отвечает заполненной сфере Ферми (рис. 12.23). Это состояние, которые мы называем ферми-состоянием, допускает произвольны Малые возбуждения; мы можем образовать возбужденное состояние, беря электрон с поверхности Ферми и перенося его на какой-либо уровень, расположенный непосредственно над поверхностью Ферми. Теория БКШ показывает, что при соответствующем притягивающем взаимодействии между электронами основное состояние отделяется от наименшего возбужденного состояния конечным энергетическим интервалом (шелью) E_g .

Возможная графическая интерпретация образования основного состояния БКШ представлена на рис. 12.24. В основном состоянии сверхпроводника (отличном от ферми-состояния, см. рис. 12.24, б) занятые энергетические уровни одноэлектронных состояний имеются как выше, так и ниже энергии Ферми ε_F . На



а)



б)

Рис. 12.24. а) Вероятность P того, что в основном состоянии невзаимодействующего ферми-газа одноэлектронное состояние энергии ε занято. б) Основное состояние в теории БКШ отличается от ферми-состояния в области шириной порядка E_g около поверхности Ферми. (Обе кривые соответствуют абсолютному нулю.) первый взгляд кажется, что основное состояние системы по теории БКШ имеет большую энергию, чем ферми-состояние.

Из. сравнения зависимостей a и σ на рис. 12.24 видно, что кинетическая энергия состояния БКШ действительно выше, чем фермистояния. Однако вклад потенциальной энергии притяжения в состоянии БКШ (не показанный на рис. 12.24, б) таков, что полная энергия этого состояния меньше энергии ферми-состояния ε_F . Одночастичные состояния или пары состояний, энергии которых расположены выше энергии ε_F , включаются в основное состояние БКШ, так как ширина энергетической щели пропорциональна числу состояний, участвующих в образовании состояний БКШ. (Это подробнее поясняется в Приложении L.)

Если основное состояние БКШ для многоэлектронной системы описывается с точки зрения заполнения одночастичных состояний, то эти состояния вблизи поверхности Ферми заполняются аналогично распределению Ферми - Дирака для некоторой конечной температуры. Главной особенностью основного состояния БКШ является то, что одночастичные состояния заполняются попарно: если состояние с волновым вектором \mathbf{k} и спином, направленным вверх, занято, то состояние с волновым вектором $-\mathbf{k}$ и спином, направленным вниз, также занято. Если состояние $\mathbf{k}_{1\uparrow} \uparrow$ свободно, то состояние $-\mathbf{k}_{1\downarrow}$ тоже свободно.

Незатухающие токи. Факт устойчивости незатухающих токов в сверхпроводнике можно объяснить многими способами. Одна из трактовок, наиболее простых для понимания, принадлежит Ландау, который исходил из спектра элементарных

1. Положение в этом вопросе очень хорошо сформулировал Г. Рикейзен [35]: «Бесконечная проводимость сверхпроводников является их самым трудным для понимания свойством. Как получается, что механизмы рассеяния, примеси, фононы и т. д., столь эффективно уменьшающие ток в нормальном металле, становятся бессильными, когда металл становится сверхпроводником? Мы можем быть уверены, что никогда не покажем теоретически, что сверхпроводники обладают бесконечной проводимостью. Мы не можем сказать, что нет никакого механизма, уменьшающего ток, так как всегда имеется возможность, что мы не учли какой-либо слабый механизм рассеяния. По-видимому, верным является то, что мы не можем показать, что сопротивление меньше экспериментального максимума $10^{-20}\text{ОМ} \cdot \text{см}$, ибо это означает, что мы перебрали и изучили все механизмы рассеяния, относительный вклад которых порядка $10-11$ вклада от рассеяния на фонах в нормальных металлах. Самое большее, на что мы можем надеяться, это установить, что большая часть механизмов рассеяния, которые ограничивают проводимость в нормальном состоянии, не оказывают на нее влияния (по крайней мере в некотором приближении) в сверхпроводящем состоянии...»

«Кроме того, мы никогда не сможем экспериментально показать, что проводимость бесконечна. Фактически максимум сопротивления, который мы приводили, получен из наблюдений за током в кольце. Верхний предел для его. значения в односвязных сверхпроводниках значительно меньше...».

«Теоретически проводимость колец отличается от проводимости проволок. В проволоках для объяснения отсутствия сопротивления мы пользуемся только неэффективностью рассеяния. В кольцах мы имеем дело еще и с квантованием потока...».

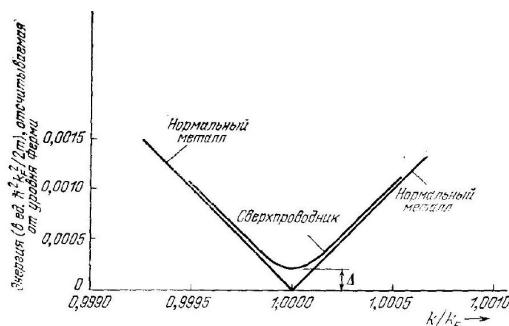


Рис. 12.25. Энергия возбуждения квазичастиц в нормальном и сверхпроводяще. Це состояниях как функция волнового вектора. Нулевая энергия соответствует основному состоянию ферми-газа. Добавление элайтрана в систему, находящуюся в нормальном состоянии, приводит к возникновению возбуждения с $k > k_F$, для которого энергия

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k_F^2) \approx \frac{\hbar^2}{m} k_F (k - k_F)$$

для $k - k_F \ll k_F$. Электрон, удаленный из системы, находящейся в нормальном состоянии, образует возбуждение типа дырки с $k < k_F$ и энергией

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} (k_F^2 - k^2) \approx \frac{\hbar^2}{m} k_F (k_F - k).$$

Энергия возбуждения квазичастиц в сверхпроводящем состоянии имеет вид $E_k = (\varepsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}$, где Δ - параметр энергетической шели. Кривые построены для значения $\Delta = 0,0002\varepsilon F$.

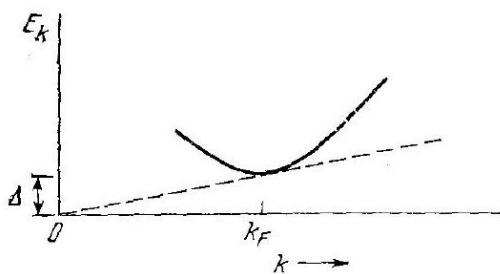


Рис. 12.26. Спектр элементарных возбуждений в сверхпроводнике. По вертикальной оси отложена энергия над основным состоянием одной из пары возбужденных частиц. По горизонтальной оси отложена величина волнового вектора. Пунктирная прямая имеет наклон, равный $\hbar v_c$, где v_c - критическая скорость.

возбуждений, приведенного на рис. 12.25 и 12.26, однако она не применима для бесцелевых сверхпроводников. Рассмотрим кристаллическую решетку с общей массой M , имеющую какой-либо дефект - фонон или примесный атом. Ток в сверхпроводящем состоянии можно рассматривать как коллективное движение электронного газа относительно решетки. Пусть ре-

шетка движется со скоростью v относительно электронного газа.

- Бесцелевая сверхпроводимость может возникать из-за наличия магнитных примесей; см. статью Хансена [36] и обзор Маки [37]. «Трение» возникнет и будет уменьшать эту скорость только в том случае, если такое относительное движение приведет к появлению возбуждений в электронном газе. При столкновении, в результате которого возникает возбужденное состояние с энергией E_k и импульсом $\hbar k$, из законов сохранения энергии и импульса будем иметь:

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 + E_k, \quad M v = M v' + \hbar k$$

Из этих двух соотношений получим:

$$0 = -\hbar k \cdot v + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + E_k$$

При $M \rightarrow \infty$ мы можем пренебречь членом $1/M$. Наименьшее значение скорости v , для которого удовлетворяется условие $E_s = \hbar k \cdot v$, есть критическая скорость

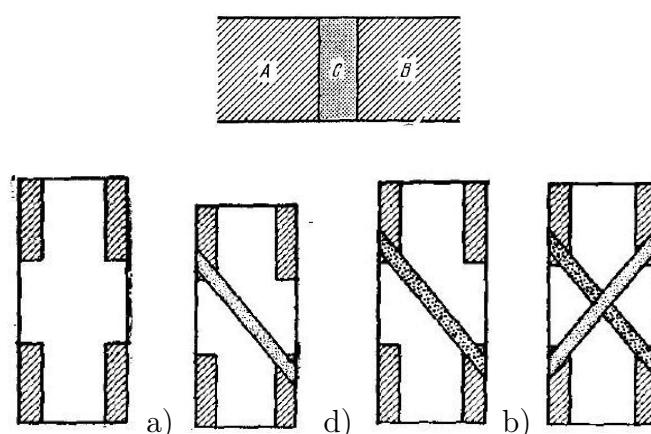
$$v_c = \text{мини} \text{ мальное значение } (E_k/\hbar k).$$

Если есть энергетическая щель, то $E_k > 0$, следовательно $v_c > 0$. Таким образом, сверхпроводящие токи могут течь со скоростями, меньшими v_c , без потерь энергии на возбуждение перехода электронов из сверхпроводящего состояния в нормальное. Значения плотности критического тока достаточно высоки (см. задачу 12.2). В основном аналогичное доказательство справедливо и для возбуждения пары электронов.

Одночастичное туннелирование. Рассмотрим два металла A и B , разделенные слоем C изолятора, как показано на рис. 12.27. Обычно изолятор является барьером для потока электронов проводимости, переходящих из одного металла в другой. Если слой C достаточно тонкий (менее $10 - 20\text{\AA}$), то имеется значительная вероятность того, что электрон, достигший слоя изолятора (встретив барьер), все же перейдет из одного металла в другой: это называется туннелированием. Представление о том, что частицы могут туннелировать через потенциальный барьер, появилось вместе с квантовой механикой. Во многих экспериментах изотирующий слой представляет собой слой окисла, образованный на одной из двух напыленных металлических пленок (см. рис. 12.28).

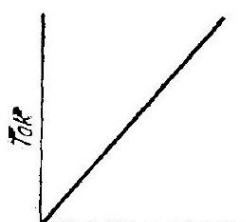
Если оба металла находятся в нормальном состоянии, то соотношение между током и напряжением (при малых

Рис. 12.27. Два металла A и B , разделенные тонким слоем изолятора C .

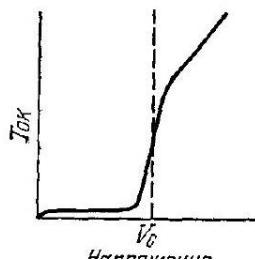


а)

Рис. 12.28. Приготовление «сэндвича». а) Стеклянная подложка с индиевыми контактами. б) Алюминиевая полоска шириной 1 мм и толщиной от 1000 до 3000 Å наносится поперек контактов. в) Окисление алюминиевой полоски с образованием слоя Al_2O_3 толщиной $10 - 20\text{\AA}$. 2) Тонкая пленка Sn наносится поперек алюминиевой пленки, образуя «сэндвич» $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Sn}$. Подводящие провода соединяются с индиевыми контактами; два контакта используются для измерения тока и два - для измерения напряжения. Критические температуры для Sn и Al составляют 3,7 и 1,2°К соответственно; между этими двумя температурами полоска Sn является сверхпроводящей, а полоска Al находится в нормальном состоянии. Слой Al_2O_3 - изолятор. (По Живеру и Мегерле.)



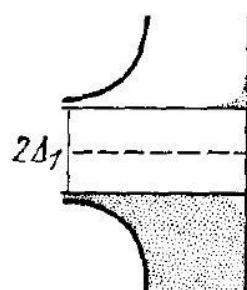
(ток от напряжения)
f)



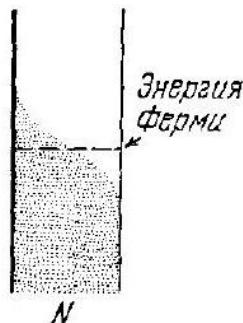
(ток от напряжения)

D)

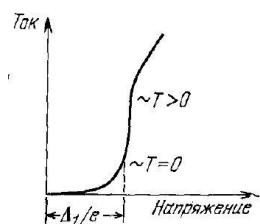
Рис. 12.29. а) Линейная вольт-амперная характеристика для контакта нормальных металлов, разделенных слоем оксида. б) Зависимость тока от напряжения в том случае, когда один из металлов находится в нормальном состоянии, а другой - в сверхпроводящем.



S



a)



d)

Рис. 12.30.

(??? короче, там ток к нулю стремиться при уменьшении напряжения что ли????????
важный вопрос, пока хз.)

Плотность состояний и вольт-амперная характеристика туннельного перехода. а) Энергия отложена по вертикали, а плотность состояний - по горизонтали. Один металл находится в нормальном состоянии, другой - в сверхпроводящем. б) Зависимость тока I от напряжения V . Пунктир указывает на ожидаемый скачок при $T = 0$. (По Живеру и Мегерле.) напряжениях) представляет собой закон Ома¹, т. е. плотность тока прямо пропорциональна приложенному напряжению (рис. 12.29, а).

Живер [40] обнаружил, что если один из металлов становится сверхпроводящим, то вольт-амперная характеристика превращается из прямой линии (рис. 12.29, а) в кривую, представленную на рис. 12.29, б. Рис. 12.30, а подчеркивает разницу между плотностями электронных состояний в сверхпроводнике и нормальном металле. В сверхпроводнике имеется энергетическая щель, середина которой совпадает с уровнем Ферми. При абсолютном нуле тока нет до тех пор, пока напряжение не станет равным $V = E_g/2e = \Delta/e$. Энергия, равная ширине щели E_g , соответствует распаду электронной пары в сверхпроводящем состоянии и образованию двух электронов или электрона и дырки в нормальном состоянии. Ток появляется тогда, когда $eV = \Delta$. При отличных от нуля температурах появляется слабый ток даже при низких напряжениях благодаря электронам в сверхпроводнике, которые перебрасываются через щель за счет теплового возбуждения.

На рис. 12.25 приведена другая интерпретация напряжения, необходимого для туннелирования. Одна кривая представляет собой энергию возбуждения, сообщаемую электрону или дырке, отсчитываемую от уровня Ферми, принятому за нулевой уровень; другая - энергию возбуждения квазичастиц в сверхпроводнике относительно того же уровня Ферми. Пороговое напряжение, при котором электрон переходит из нормального металла в сверхпроводник, определяется из соотношения $eV = \Delta$.

Изучение сверхпроводников путем одноэлектронного туннелирования оказалось очень плодотворным. Результаты находятся в хорошем согласии с теорией БКП. В Приложении К обсуждаются замечательные эффекты, возникающие при туннелировании пары сверхпроводящих электронов, известные как джозефсоновское туннелирование (эффекты Джозефсона).

Сверхпроводники второго рода. У сверхпроводников I и II рода основной механизм сверхпроводимости одинаков и представляет собой взаимодействие типа электрон - фонон - электрон. Сверхпроводники I и II рода имеют подобные тепловые свойства при переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное и обратно в нулевом магнитном поле. Однако эффект Мейснера в сверхпроводниках I и II рода (см. рис. 12.6) совершенно различен. Чистый сверхпроводник I рода выталкивает магнитное поле вплоть до момента скачкообразного и полного разрушения сверхпроводящего состояния, и лишь после этого поле полностью проникает в образец. Чистый сверхпроводник II рода полностью выталкивает магнитное поле только при

1. См., например, работы Живера и Мегерле [38] и Бардина [39]. относительно слабых полях, до значения поля H_{cr} . Выше H_{cr} поле частично проникает (рис. 12.6б), но образец остается электрически сверхпроводящим. При увеличении напряженности поля, иногда до 100 кГс и выше, поле проникает в весь объем образца и сверхпроводимость исчезает, именно это поле обозначают через H_2 . (Внешний поверхностный слой образца может остаться сверхпроводящим вплоть до еще более сильного поля H_{c3} .)

Существенное различие между физическими особенностями сверхпроводников I и II рода связано с длиной свободного пробега электронов проводимости в нормальном состоянии при низких температурах. Если длина когерентности больше, чем глубина проникновения, то сверхпроводник будет принадлежать к I роду. Большинство чистых металлов является сверхпроводниками I рода. Но если длина свободного пробега мала, длина когерентности мала, а глубина проникновения велика (рис. 12.22), то мы будем иметь дело со сверхпроводником II рода.

Ноиногда путем добавки небольшого количества легирующего элемента можно превратить металл из сверхпроводника I рода в сверхпроводник II рода. Например (см. рис. 12.6в), добавление двух весовых процентов индия в свинец превращает свинец из сверхпроводника I рода в сверхпроводник II рода, хотя температура перехода меняется при этом совсем незначительно. Гри этом превращении нет оснований ожидать ни изменения Ширины энергетической щели, ни скачка теплоемкости при температуре перехода. Такое количество легирующего элемента не изменяет коренным образом электронную структуру свинца как сверхпроводника, но его поведение в магнитном поле радикально меняется. Теория сверхпроводников II рода была разработана Гинзбургом, Ландау, Абрикосовым и Горьковым. Позднее Кунцлер с сотрудниками обнаружил, что проволока из Nb_3Sn_{II} может пропускать значительный сверхпроводящий ток в полях, достигающих 100 кГц.

Рассмотрим границу раздела между областями сверхпроводящего и нормального состояний в металлическом образце. С границей раздела связана дополнительная энергия. меется множество примеров того, что эта поверхностная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. С увеличением магнитного поля поверхностная энергия уменьшается. Сверхпроводник является сверхпроводником I рода, если поверхностная энергия всегда положительна, и сверхпроводником II рода, если поверхностная энергия при увеличении магнитного поля становится отрицательной.

Для случая, представленного на рис. 12.65, поверхностная энергия отрицательна для полей выше H_{c1} .

Знак поверхностной энергии определяет критические поля, хотя и мало связан с критической температурой. Ниже показано, что знак поверхностной энергии зависит от отношения:

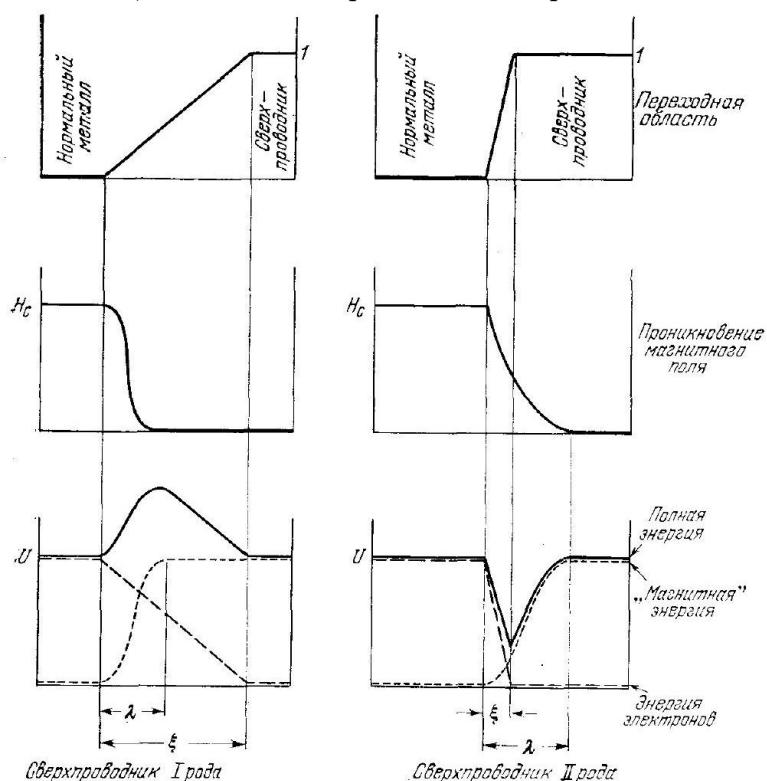


Рис. 12.31. Соотношения между энергиями на границе нормальной и сверхпроводящей фаз в сверхпроводниках I и II рода. Обратите внимание на увеличение полной энергии на границе в сверхпроводниках I рода и уменьшение энергии на границе в сверхпроводниках II рода; таким образом, поверхностная энергия положительна в сверхпроводниках I рода и отрицательна в сверхпроводниках II рода. (J. L. Olsen, E. Fischer.)

глубины проникновения λ длине когерентности ξ (см. рис. 12.31). Результаты обычно представляют, используя параметр Гинзбурга - Ландау:

$$x = \frac{\lambda}{\xi\sqrt{2}}.$$

В сверхпроводниках I рода $x < 1/\sqrt{2}$, в сверхпроводниках II рода $x > 1/\sqrt{2}$. Иначе говоря, сверхпроводник II рода ведет себя так, что глубина проникновения поля больше длины когерентности. Фактор $\sqrt{2}$ имеет чисто историческое происхождение.

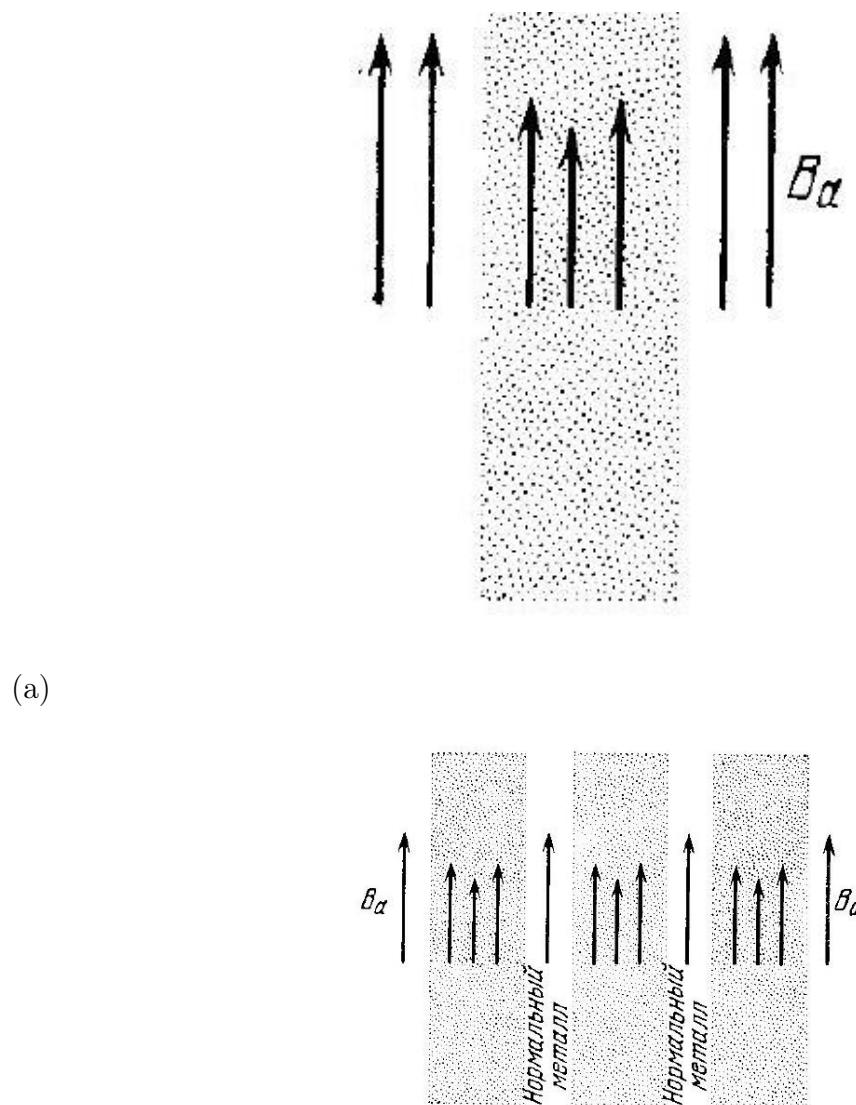
Вывод об отрицательной поверхностной энергии потребовал для понимания значительное время. Полная энергия тем меньше, чем большее число поверхностей раздела имеется в образце (разумеется, до тех пор, пока эти поверхности не начинают соприкасаться). Нормальные области представляют собой нити, окруженные сверхпроводящей фазой, в которой текут вихревые токи; эти нити образуют достаточно регулярную решетку. Это состояние сверхпроводника называется вихревым состоянием. Оно не имеет ничего общего с промежуточным состоянием, существующим в образцах конечных размеров.

Нетрудно представить себе структуру сверхпроводника I рода при существовании сверхпроводящего и нормального состояний. Слои одного состояния чередуются со слоями другого. Так как поверхностная энергия положительна, то энергия электронов уменьшалась бы при удалении поверхностей раздела. Однако в ограниченных объемах, например в сфере, магнитная энергия системы больше, когда весь образец становится сверхпроводящим, т.е. когда поверхности раздела исчезают. Существует область напряженностей полей, где энергия меньше при наличии поверхностей раздела, чем без них. Это могло бы ввести нас в заблуждение при анализе явления, но экспериментально и теоретически показано, что чисто сверхпроводящее состояние в материалах I рода существует при полях, меньших $2/3H_c$, нормальное состояние при полях, больших H_c , и слон двух состояний существуют в промежуточном состоянии, когда напряженность приложенного поля лежит в интервале между $2/3H_c$ и H_c . Понятие промежуточного состояния применимо только для сверхпроводников с положительной поверхностной энергией; более подробно это обсуждалось во втором издании настоящей книги. (См. Киттель, Введение в физику твердого тела, М., 1962, стр. 523-526. - Прим. перев.) Ситуация здесь аналогична ситуации с ферромагнитными доменами (см. гл. 16).

Энергия массивного сверхпроводника в магнитном поле увеличивается при условии, что поле не проникает в образец. Проникновение поля в пленки рассматривается в конце главы в задачах 12.1 и 12.4. Поле, направленное параллельно поверхности очень тонкой пленки, проникает в нее, оставаясь практически однородным (рис. 12.32, a); при этом энергия сверхпроводящей пленки будет слабо возрастать с увеличением магнитного поля, что приводит к увеличению напряженности поля, необходимого для разрушения сверхпроводимости (рис. 12.21 и 12.33). В сверхпроводящей тонкой пленке величина кажущейся магнитной восприимчивости может быть намного меньше, чем $1/4\pi$ (или 1 в СИ), так как выталкивается только часть потока, но при этом пленка имеет обычную величину энергетической щели и не обладает сопротивлением. В пленках устойчивая сверхпроводимость наблюдается в полях, напряженность которых более чем в 100 раз превышает критическое поле H_c для массивного сверхпроводника того же материала. Тонкие пленки не относят к сверхпроводникам II рода, но их поведение показывает, что сверхпроводимость при наличии соответствующих условий может существовать и в высоких магнитных полях.

Вихревое состояние. При изучении тонких пленок возникает важный вопрос: существует ли в однородном массивном сверхпроводнике, находящемся в магнитном поле, устойчивая

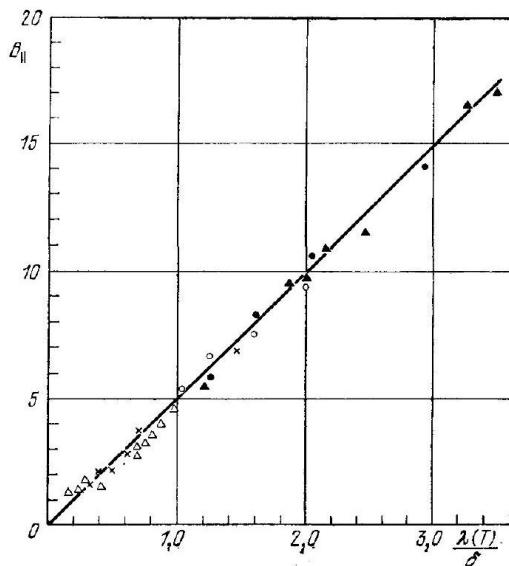
1. Оно называется также фазой Шубникова. - Прим. перев.



d)

Рис. 12.32. а) Проникновение магнитного поля в тонкую пленку толщиной λ . Длина стрелок характеризует напряженность магнитного поля. б) Магнитное поле проникает в однородный массивный образец, находящийся в смешанном или вихревом состоянии, которое представляет собой чередующиеся слои металла в нормальном и сверхпроводящем состояниях. Толщина сверхпроводящих слоев сравнима с λ . Для удобства показана слоистая структура; реальная структура смешанного состояния представляет собой нити в нормальном состоянии, окруженные материалом в сверхпроводящем состоянии. Области N (Normal) в вихревом состоянии не являются чисто нормальными, им можно приписать небольшую величину Δ (см. рис. 12.38).

Рис. 12.33. Значения критического поля, параллельного поверхности тонкой пленки олова, в единицах критического поля для массивного образца. Представлены результаты для различных пленок толщиной от 850 Å до 4500 Å. Для каждой пленки глубина проникновения изменяется с изменением температуры. По горизонтали отложено отношение глубины проникновения λ к толщине пленки δ . (По Б. К. Севастьянову [41].)



конфигурация нормальных областей в форме тонких нитей (или' слоев), окруженных сверхпроводящей фазой? В таком смешанном состоянии внешнее магнитное поле будет пронизывать тонкие нормальные области, оставаясь однородным, проникая при этом в окружающий сверхпроводящий материал, как это показано на рис. 12.32, б. Понятие «вихревое состояние» используют для описания ситуации, когда в массивном образце текут вихревые сверхпроводящие токи (см. ниже рис. 12.37). Нормальные и сверхпроводящие области в вихревом состоянии не отличаются ни химически, ни кристаллографически. Вихревое состояние устойчиво потому, что проникновение приложенного поля делает поверхность энергию отрицательной. Сверхпроводник II рода характеризуется тем, что в определенном интервале полей (между H_{c1} и H_{c2}) в нем существует вихревое состояние.

Оценка H_{c1} . В сверхпроводниках II рода вихревое состояние начинает формироваться в поле H_{c1} . Величина H_{c1} меньше, чем термодинамическое критическое поле, определяемое из равенства $H_c^2/8\pi$ разности свободной энергии в нормальном и сверхпроводящем состояниях в нулевом магнитном поле. Эта разность определяется калориметрическими измерениями, так как теперь скачка магнитных свойств при H_c нет (см. рис. 12.6б). Для оценки H_{c1} рассмотрим устойчивое вихревое состояние при абсолютном нуле, когда длина когерентности меньше глубины проникновения, $\xi < \lambda$. Оценим энергию флюксоида (нити нормального металла в вихревом состоянии) при среднем поле в нити B_a . Остов флюксоида находится в нормальном состоянии и имеет радиус порядка длины когерентности; толщина границы между нормальной и сверхпроводящей фазами также порядка длины когерентности. Для энергии нормального остова f_{core} , которую определим как произведение равновесной энергии на площадь сечения остова, имеем (на единицу длины):

$$(\text{СГС}) \quad f_{\text{core}} \approx \frac{1}{8\pi} H_c^2 \cdot \pi \xi^2$$

Однако эта энергия уменьшается из-за проникновения внешнего поля в сверхпроводящий материал, окружающий остов. (рис. 12.34), на величину

$$f_{\text{mag}} \approx -\frac{1}{8\pi} B_a^2 \cdot \pi \lambda^2$$

Таким образом, для одного флюксоида, объединяя вклады (12.36) и (12.37), получим:

$$(\text{СГС}) \quad f = f_{\text{core}} + f_{\text{mag}} \approx \frac{1}{8} (H_c^2 \xi^2 - B_a^2 \lambda^2)$$

Остов устойчив при $f < 0$, причем утверждение относительно знака f эквивалентно утверждению о знаке поверхностной энергии. Критическое поле H_{c1} , при котором флюксоид становится устойчивым, определяется из равенства $f = 0$ при замене B_a на H_{c1} :

$$\frac{H_{ic}}{H_c} \approx \frac{\xi}{\lambda}$$

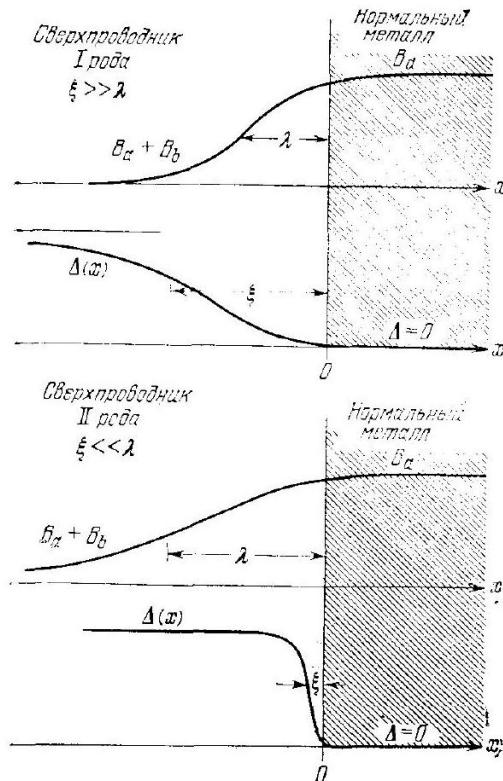
Это поле отделяет область полей, при которых поверхностная энергия положительна ($B_a < H_{c1}$), от области, где поверхностная энергия отрицательна ($B_a > H_{c1}$). Эти энергетические соотношения показаны на рис. 12.35. Более точное определение H_{c1} было проведено Абрикосовым [42].

Вблизи верхнего критического поля флюксоиды плотно упакованы и внешнее поле заполняет почти весь образец, оставляя лишь небольшие участки между флюксоидами. Разрушение сверхпроводимости массивных образцов начинается с поля, равного верхнему критическому. Вычисление величины верхнего критического поля H_{c2} дает:

$$(H_{c1}H_{c2})^{1/2} \approx H_c$$

т. с. среднее геометрическое верхнего и нижнего критических полей равно термодинамическому критическому полю.

Рис. 12.34. Зависимость магнитного поля и параметра энергетической щели $\Delta(x)$ вблизи поверхности раздела нормальной и сверхпроводящей областей для сверхпроводников I и II рода.



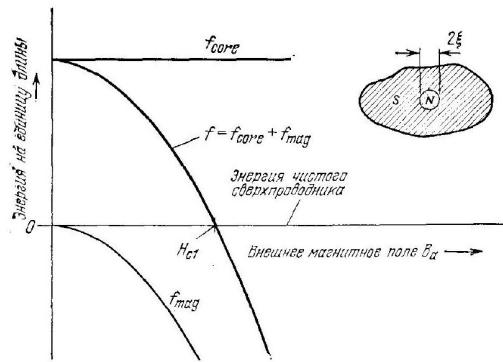


Рис. 12.35. Определение нижнего критического поля H_{c1} для образования вихревого состояния. f - энергия на единицу длины нити радиуса ξ , находящейся в нормальном состоянии (N) и окруженной сверхпроводящей фазой (S), как функция приложенного магнитного поля B_a ; f - сумма f_{core}^{it} f_{mag} . Кривые построены для $\lambda = 3\xi$. Начало отсчета соответствует энергии образца в чисто сверхпроводящем состоянии. Вихревое состояние устойчиво, когда $B_a > H_{c1}$ и f отрицательна.

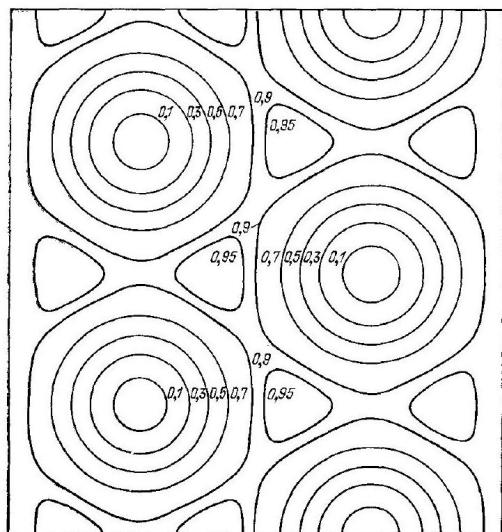
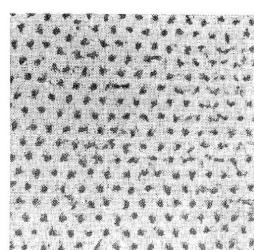


Рис. 12.30. Контуриальная диаграмма локальных пространственных вариаций ширины энергетической щели в сверхпроводнике II рода при поле, несколько меньшем верхнего критического поля H_{c2} . (Из работы Клейнера и др. [43].) В центре каждого флюксоида ширина энергетической щели равна нулю. Подобный вид треугольной решетки был обнаружен экспериментально на Рис. 12.37. Треугольная решетка вихревых нитей на торце сверхпроводящего цилиндра. Выход нитей (темные пятна) отмечен магнитным порошком. Фотография сделана с помощью электронного микроскопа с увеличением 8300. (Фотография Эсмана и Трейбле.)



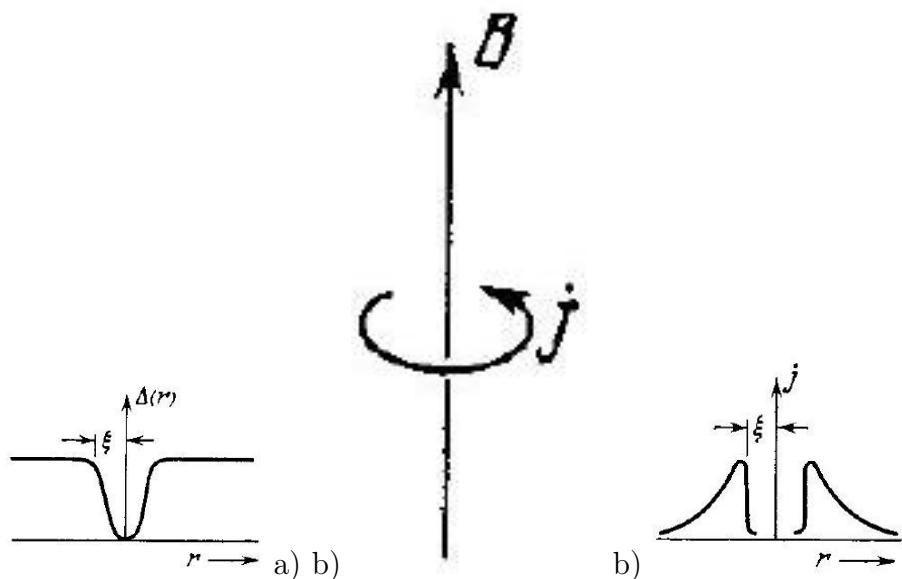


Рис. 12.38.

В смешанном состоянии флюкоид существует благодаря вихревому сверхпроводящему току. Остов нити магнитного потока, имеющий размеры $\approx \xi$, находится в нормальном состоянии и заключает в себе почти весь поток, однако поле проникает в сверхпроводящую область на расстояние $\approx \lambda$; j - плотность тока, $\Delta(r)$ - параметр энергетической щели. каждая нить магнитного потока содержит один квант потока $hc/2e = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. (Из [47].)

Теоретическое пространственное распределение величины энергетической щели в сверхпроводнике II рода приводится на рис. 12.36. Постоянная решетки флюкоидов определяется длиной когерентности и может быть порядка 10^{-5} см. Решетка флюкоидов наблюдалась экспериментально с помощью дифракции нейтронов [44], а также с помощью метода магнитных порошков [45], как это показано на рис. 12.37 (сам метод описан: в [46]). Структура самого флюкоида показана на рис. 12.38.

РЕЗЮМЕ

- Сверхпроводник имеет бесконечную проводимость.
- Массивный металлический образец в сверхпроводящем состоянии ведет себя как идеальный диамагнетик с магнитной индукцией $B = 0$. Это называется эффектом Мейснера. Внешнее-
- Все выражения приводятся в единицах системы СГС. магнитное поле проникает в образец на расстояние, определяемое глубиной проникновения λ .
- Существуют сверхпроводники I и II рода. В массивном образце сверхпроводника I рода сверхпроводимость разрушается при полях, больших критического поля H_c . В сверхпроводнике II рода имеются два критических поля, $H_{c1} < H_c < H_{c2}$; в области между H_{c1} и H_{c2} существует вихревое состояние. Для сверхпроводников I и II рода плотность равновесной энергии чистого сверхпроводящего состояния одинакова и равна $H/8\pi$.
- В сверхпроводящем состоянии сверхпроводящие электроны отделены от нормальных энергетической щелью $E_g \approx 4k_B T_c$, причем нормальные электроны находятся над щелью. Щирину щели можно определить из экспериментов по определению теплоемкости, инфракрасному поглощению, туннелированию.

5. Из уравнения Лондонов

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_r^2} \mathbf{A}, \text{ или } \operatorname{rot} \mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \mathbf{B},$$

следует уравнение проникновения поля: $\nabla^2 B = B/\lambda_L^2$, где $\lambda_L \approx \sqrt{(mc^2/4\pi ne^2)^{1/2}}$ - лондоновская глубина проникновения; это уравнение описывает и эффект Мейснера.

6. В уравнении Лондонов в качестве \mathbf{A} и \mathbf{B} длины быть взяты взвешенные средние на протяжении длины когерентности ξ . Собственная длина когерентности $\xi_0 = 2\hbar v_F/\pi E_g$.
7. Теория БКП объясняет сверхпроводящее состояние образованием пар электронов с волновыми векторами $\uparrow\downarrow -\mathbf{k} \downarrow$.
8. В теории сверхпроводимости вводятся три характерные длины: лондоновская глубина проникновения λ_L , собственная длина когерентности ξ_0 , средняя длина свободного пробега электронов в нормальном состоянии l .
9. В сверхпроводниках II рода $\xi < \lambda$. Соотношения между критическими полями следующие: $H_{c1} \approx (\xi/\lambda)H_c$ и $H_{c2} \approx (\lambda/\xi)H_c$. Величина H_{c2} достигает 400 кГц.

ЗАДАИ

12.1. Проникновение магнитного поля в пластину. Уравнение Лондонов может быть записано в виде $\lambda^2 \nabla^2 B = B$, где λ -лондоновская глубина проникновения.

а) Показать, что внутри сверхпроводящей пластины толщиной δ поле $B(x)$ определяется выражением

$$B(x) = B_a \frac{\operatorname{ch}(x/\lambda)}{\operatorname{ch}(\delta/2\lambda)}$$

где B_a - поле вне пластины, начало отсчета координаты $x = 0$ взято в центр пластины, ось x перпендикулярна к ее плоскости. Предполагается, что поле \mathbf{B}_a параллельно поверхности пластины. б) Эффективная намагниченность $M(x)$ пластины определяется соотношением $B(x) - B_a = 4\pi M(x)$. Показать, что при $\delta \ll \lambda$

$$(\text{СГС}) \quad 4\pi M(x) = -B_a \frac{1}{8\lambda^2} (\delta^2 - 4x^2).$$

В системе единиц СИ вместо 4π надо написать μ_0 .

12.2. Критическая скорость. а) Определить критическую скорость v_c , пользуясь (12.35), если спектр элементарных возбуждений задан в виде

$$E_k = [\Delta^2 + \varepsilon_k]^{1/2}$$

для ширины $\Delta = 1 \cdot 10^{-16}$ эрг и массы m , равной массе свободного электрона. здесь ε_k - энергия свободного электрона, отсчитываемая от уровня Ферми. Взять $k_F = 0,56 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$.

6. Оценить критическую плотность тока, используя величину v_c , найденную выше, и считая, что концентрация электронов $n = 1 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Выразить результат в единицах A/cm^2 .

12.3. Парамагры сверхпроводника. Рассмотрим металл с концентрацией электронов проводимости $n = 1 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, температурой Дебая $\theta = 300^\circ\text{K}$ и температурой перехода $T_c = 0,3^\circ\text{K}$.

а) из соотношения теории БКШ (12.32) определить потенциал U электрон-электронного взаимодействия в образце.

б) Теория БКП дает для ширины энергетической щели значение $E_g \approx 3,5k_B T_c$ и для равновесной плотности энергии сверхпроводящего состояния величину $\mathcal{D}(\varepsilon_F) E_\xi^2$. Найти значение критического поля H_c при $T = 0$.

в) Определить собственную длину когерентности λ .

12.4. Критическое поле тонких пленок. а) используя результат задачи 12.16, показать, что плотность энергии сверхпроводящей пленки толщиной δ во внешнем магнитном поле B_a для $T = 0^\circ\text{K}$ определяется выражением ($\delta \ll \lambda$):

$$(\text{CrC}) \quad U_S(x, B_a) = U_S(0) + \frac{1}{64\pi\lambda^2} (\delta^2 - 4x^2) B_a^2.$$

В системе единиц СИ λ заменяется на $\mu_0/4$. Мы не учитываем в этой задаче кинетическую энергию.

б) Показать, что магнитный вклад в U_S , усредненный по толщине пленки, равен

$$\frac{1}{96\pi} B_a^2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2$$

в) Показать, что критическое поле тонкой пленки пропорционально $(\lambda/\delta) H_c$, где H_c - критическое поле для массивного сверхпроводника, если мы рассматриваем только магнитный вклад в U_s . Экспериментальные результаты представлены на рис. 12.33.

12.5. Двухжидкостная модель сверхпроводимости. В этой модели предполагается, что при $0 < T < T_c$ плотность тока может быть записана в виде суммы токов нормальных и сверхпроводящих электронов: $\mathbf{j} = \mathbf{i}_N + \mathbf{j}_s$, где $\mathbf{j}_N = \sigma_0 \mathbf{E}$, а \mathbf{j}_s определяется из уравнения Лондонов. Здесь σ_0 – обычная проводимость, уменьшенная по сравнению с проводимостью нормального состояния из-за сокращения числа нормальных электронов при температуре T . Пренебрегая инерциальными эффектами для j_N и j_s ,

а) показать, пользуясь уравнениями Максвелла, что заион дисперсия (связь между волновым вектором k и частотой ω) для электромагнитной волны в сверхпроводнике выражается в виде

$$(\text{СГС}) \quad k^2 c^2 = 4\pi\sigma_0\omega i - c^2\lambda_L^{-2} + \omega^2$$

$$(\text{СН}) \quad k^2 = \mu_0\sigma_0\omega i - \lambda_L^{-2} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0,$$

где λ_L^2 определяется из (12.23) при замене n на n_5 . Учесть, что $\text{rot rot } \mathbf{B} = -V^2 \mathbf{B}$.

б) Показать, используя соотношение $\sigma_0 = n_N e^2 \tau / m$, где τ – время релаксации электронов в нормальном состоянии, n_N – их концентрация, что при частотах $\omega < 1/\tau$ в законе дисперсии не учитывается вклад нормальных электронов, так что движение электронов описывается только уравнением Лондонов. Происходит «закорачивание»: все определяет ток сверхпроводящих электронов. Само уравнение Лондонов справедливо, если энергия ω малая по сравнению с шириной энергетической щели. Замечание: Определенный интерес представляет область частот $\omega \ll \omega_p$, где ω_p – плазменная частота (см. гл. 8). Поляризация (467).

10.1.5 Качественно о сверхпроводимости

знакомство со сверхпроводимостью

(потом запишу выводы всего, что будет ниже, пока введение ужасное)

Самым интересным явлением в физике твердого тела является сверхпроводимость.

Сверхпроводимость - это сверхтекучесть электронной ферми-жидкости, наблюдаемая при низких температурах в некоторых металлах и соединениях.

Сверхпроводимость была открыта Камерлинг-Оннесом в 1911 г.

При изучении электросопротивления ртути Камерлинг-Оннес обнаружил, что при температуре около $4K$ сопротивление внезапно исчезало.

Существенно, что это происходило скачком. Это явление было названо сверхпроводимостью.

Современная техника позволяет установить, что в этом состоянии сопротивление отсутствует по крайней мере с точностью до 10^{-24} Ом·см. Для сравнения укажем, что сопротивление очень чистой меди при температуре $4.2K$ имеет порядок 10^{-9} Ом·см.

разрушение сверхпроводимости магнитным полем

Позднее было установлено, что сверхпроводимость можно разрушить не только нагреванием, но и при помещении образца в сравнительно слабое магнитное поле.

Пусть T_c - температура, при которой массивный образец переходит в сверхпроводящее состояние в нулевом магнитном поле, $aH_{cm}(0)$ - критическое магнитное поле, которое разрушает сверхпроводимость при температуре $T = 0$.

Экспериментально было установлено, что зависимость критического магнитного поля от температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_c(T) = H_c(0) [1 - (T/T_c)^2]$$

переход в сверхпроводимость подробно

Рассмотрим переход в сверхпроводимость.

Пусть образец находится в состоянии с конечным сопротивлением, то есть при температуре выше T_c в магнитном поле.

Тогда магнитное поле в проводнике не равно нулю: $\mathbf{B} \neq 0$. При охлаждении образца ниже температуры T_c в идеальном проводнике становится $\rho = 0$. Поэтому электрическое поле $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} = 0$, поскольку ток \mathbf{j} - конечен. Тогда из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ казалось бы, что магнитная индукция в идеальном проводнике $\mathbf{B} = \text{const} \neq 0$, ведь $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$.

Более 20 лет считалось, что сверхпроводник - это просто идеальный проводник, металл с нулевым сопротивлением.

В 1933 году Мейсснер и Оксенфельд экспериментально показали, что при $T < T_c$ в магнитных полях, удовлетворяющих условию $H < H_c(T)$, всегда в образце магнитная индукция $\mathbf{B} = 0$.

Это есть основное отличие идеального проводника от сверхпроводника: при охлаждении сверхпроводника, находящегося в магнитном поле, до температуры T_c магнитное поле из него выталкивается. Итак, ниже T_c сверхпроводник это не только идеальный проводник, но и идеальный диамагнетик и сверхпроводящее состояние удовлетворяет условиям

$$\rho = 0, \quad \mathbf{B} = 0$$

10.1.6 The BCS theory of superconductivity by De Roeck

The main source for this part are the notes by Michael Cross

Bound state of two fermions: Cooper pair

We will look for a bound state of two electrons. To find such a bound state, we need some attractive interaction. The origin of this attractive interaction in conventional superconductors

is due to phonons. This goes roughly as follows. As the electrons travel through the crystal, they polarize the ions (as well as the fermi liquid, which leads to the dramatic effect of screening). However, the velocity of the electrons, i.e. v_F is way larger than the velocity of phonons, and therefore, the polarization induced in the ions decays on a timescale that is larger than the time the electrons need to leave the polarized spot. This means that an electron leaves in its wake a positively charged cloud that can attract other electrons. Hence the attractive interaction. A more careful analysis reveals that this interaction can dominate the direct repulsive interaction, but only for momenta close to the FS. This is taken as an input in what follows.

We consider two particles interacting via a potential $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. In the center of mass frame, the Schroedinger equation is

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_{\text{red}}} \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

where $m_{\text{red}} = m/2$ is the reduced mass. We suppress quantum statistics that will be later incorporated by the spin. The physically relevant question is whether this system has a solution with lower energy E than two free fermions at the Fermi surface, i.e. than energy $2\epsilon_F$. If so, we call the difference $E_B := 2\epsilon_F - E > 0$ the binding energy. We rewrite the SE in Fourier transform:

$$\left(\frac{\hbar k^2}{2m_{\text{red}}} - E \right) \hat{\psi}(\mathbf{k}) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{\psi}(\mathbf{k}') = (2\xi_{\mathbf{k}} + E_B) \hat{\psi}(\mathbf{k}) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{\psi}(\mathbf{k}') = 0$$

We look for a solution to this problem close to the Fermi surface. First, we model with pair potential $\hat{V}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ by the toy interaction

$$u(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = - \begin{cases} g & k_F \leq k_1, k_2 \leq k_F + k_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

with the cutoff momentum $k_c \ll k_F$. This interaction is not translation-invariant, but it allows us to simplify the above SE: since only states in a narrow momentum range are relevant (because $k_c \ll k_F$), we can approximate the SE by

$$2\xi_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k_F \leq k' \leq k_F + k_c} u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \psi(\mathbf{k}') = -E_B \hat{\psi}(\mathbf{k}), \quad k_F \leq k \leq k_F + k_c$$

and hence

$$(E_B + 2\xi_{\mathbf{k}}) \psi(\mathbf{k}) - \frac{g}{|\Lambda|} \sum_{k_F \leq k' \leq k_F + k_c} \psi(\mathbf{k}') = 0, \quad k_F \leq k \leq k_F + k_c$$

which has the solution

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{\text{const.}}{E_B + 2\xi_{\mathbf{k}}}$$

provided that

$$\frac{g}{|\Lambda|} \sum_{k_F \leq k' \leq k_F + k_c} \frac{1}{E_B + 2\xi_{\mathbf{k}'}} = 1$$

Taking the continuum approximation and using that $\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$ (narrow band), we can replace the integral over momenta by an integral over energies, multiplied with $N(0)$, the density of states at the FS. This yields

$$1 = gN(0) \int_0^{\hbar\omega_c} d\xi \frac{1}{E_B + 2\xi} = \frac{gN(0)}{2} \log \frac{E_B + 2\hbar\omega_c}{E_B}$$

hence

$$E_B = \frac{2\hbar\omega_c}{e^{2/(gN(0))} - 1} \approx 2\hbar\omega_c e^{-2/(gN(0))}$$

where we also made a weak coupling approximation $gN(0) \ll 1$. The conclusion is that, at least for this simplified interaction, a bound state does exist. This means that the Fermi liquid is unstable with respect to attractive interactions.

Note that this is an effect that can never truly be described in perturbation theory, because the bounding energy is non-analytic in g at $g = 0$ and hence it cannot be obtained as a sum of Feynman diagrams.

Another important observation is that the bound state that we found is very extensive at weak coupling $gN(0) \ll 1$. Indeed the momentum space wavefunction (we linearize $\xi_{\mathbf{k}}$ around the Fermi surface)

$$\psi(\mathbf{k}) = \frac{\text{const.}}{E_B + 2\xi_{\mathbf{k}}} = \frac{\text{const.}}{1 + \frac{\hbar v_F(k - k_F)}{E_B}}$$

defines a length scale r by $r = \frac{\hbar v_F}{E_B} = 2k_F^{-1} \frac{\epsilon_F}{E_B}$. Since $E_B \ll \epsilon_F$ in general (clearly, this is true in the weak coupling limit $g \rightarrow 0$), we have $r k_F \gg 1$, which means that r is much bigger than the distance between ions.

Finally, since we have assumed here in fact that $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$, Pauli exclusion is brought in via the spin degrees of freedom, giving for the genuine two-fermion wavefunction

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}_1, \sigma_1; \mathbf{r}_2, \sigma_2) = \psi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

i.e. we have chosen the spin part of the wavefunction to be fully assymetric., i.e. a singlet state. For obvious reasons, superconductors with this type of bound states, are called *s*-state superconductors, but there are also *p*, *d*-wave superconductors.

BCS-theory

Start again from the interaction Hamiltonian

$$V = \frac{1}{2|\Lambda|} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \hat{V}(\mathbf{q}) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}, \sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} c_{\mathbf{k}', \sigma'}$$

One way to motivate BCS theory, that emphasizes the neglect of fluctuations, is by calling

$$\hat{F}_{\mathbf{k}} := \langle c_{\mathbf{k}, \downarrow} c_{-\mathbf{k}, \uparrow} \rangle$$

(the hat is because later we will consider this quantity in real space, and that one will be called F) and neglecting all terms higher than linear in $\hat{F}_{\mathbf{k}} - c_{\mathbf{k}, \downarrow} c_{\mathbf{k}, \uparrow}$, and all other terms in the Hamiltonian. Note that this is very similar to the way we got the Bogoliubov approximation. Indeed, both are mean field theories. This reduces the Hamiltonian to a quadratic expression

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(\xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}, \uparrow} + \xi_{-\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \downarrow} \right) + \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \left(c_{\mathbf{k}', \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}', \uparrow}^\dagger \hat{F}_{\mathbf{k}} + c_{\mathbf{k}', \downarrow} c_{-\mathbf{k}', \uparrow} \hat{F}_{\mathbf{k}}^* \right) + \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{F}_{\mathbf{k}'}^* \hat{F}_{\mathbf{k}}$$

where we assumed that $\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{-\mathbf{k}}$ (to rewrite the first term) which will turn out to be important for our analysis. This is often rewritten by introducing the gap (this name will be motivated later)

$$\Delta_k = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mathbf{k}'} V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{F}_{\mathbf{k}'}$$

Let us now again simplify the potential $\hat{V}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ to $u(\mathbf{k}, k')$ as in the analysis of Cooper pairs;

$$\hat{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \begin{cases} -g & |k - k_F| \leq k_c, |k - k_F| \leq k_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

restricting the momenta to a band of width $2k_c$ around the FS (note that this is a slightly different convention from the one in the Cooper pair calculation) Then

$$\Delta := \Delta_k = -g \frac{1}{\Lambda} \sum_{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}_f| \leq k_c} \hat{F}_{\mathbf{k}'}$$

becomes constant for \mathbf{k} such that $|k - k_f| \leq k_c$ (and $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ for \mathbf{k} outside this band). From now on, we simply denote this domain in \mathbf{k} -space by 'band'. We can now rewrite our quadratic Hamiltonian as the De-Gennes Hamiltonian (aka Gorkov Hamiltonian)

$$H = \Delta E + \sum_{\mathbf{k} \text{ band}} \xi_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k}, \uparrow} + c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \downarrow}) + \Delta c_{\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}, \uparrow}^\dagger + \Delta c_{\mathbf{k}, \downarrow} c_{-\mathbf{k}, \uparrow}$$

where we abbreviated the constant energy shift

$$\Delta E = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \text{ band}} V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \hat{F}_{\mathbf{k}'}^* \hat{F}_{\mathbf{k}} = -(1/g) |\Delta|^2$$

Note also that we used $\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{-\mathbf{k}}$: If this were not true than the eigenvalues in the absence of Δ would not be degenerate and Δ would not have any dramatic effects. As is already clear from the analogy with the Bogoliubov treatment of the interacting Bose gas, the expectation value Δ has a phase that can be chosen a priori arbitrarily, so let us for the moment, for simplicity, take Δ real. Then, we can diagonalize H_{dG} by a Bogoliubov transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} \\ \beta_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}, \uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}, \downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

where we can choose $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ real (this is how Δ real has helped). By the general theory of canonical transformations, we know that the operators $\alpha_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}$ are independent fermion operators, i.e. they satisfy the canonical anticommutation relations. By a standard calculation, we obtain

$$u_{\mathbf{k}} = \cos \theta_{\mathbf{k}}, \quad v_{\mathbf{k}} = \sin \theta_{\mathbf{k}}$$

so that the Hamiltonian in diagonalised form is

$$H_{dG} = \sum_{\mathbf{k} \text{ band}} E_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}}) - (1/g) \Delta^2 + (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}})$$

with

$$\sin(2\theta_{\mathbf{k}}) = -\Delta/E_{\mathbf{k}}, \quad \cos(2\theta_{\mathbf{k}}) = \xi_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}, \quad \tan(2\theta_{\mathbf{k}}) = -\Delta/\xi_{\mathbf{k}}$$

hence

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}$$

We can now determine the ground state of the Hamiltonian; the vacuum $\Omega_{\alpha,\beta}$ for the operators $\alpha_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}$, characterized by

$$\alpha_{\mathbf{k}} \Omega_{\alpha,\beta} = \beta_{\mathbf{k}} \Omega_{\alpha,\beta} = 0$$

However, we remember that up to this point, there is still a free parameter in the formalism, namely Δ , that is related to an expectation value (in the ground state $\Omega_{\alpha,\beta}$) by

$$\begin{aligned} \Delta &= -g \frac{1}{\Lambda} \sum_{\text{band}} \langle c_{\mathbf{k},\uparrow} c_{-\mathbf{k},\downarrow} \rangle \\ &= -g \frac{1}{\Lambda} \sum_{\text{band}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = -g \Delta \frac{1}{\Lambda} \sum_{\text{band}} 1/(2E_{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

where we used the inverse transform

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k},\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} \\ \beta_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}$$

to get the first equality. Hence, by the same calculation as for the Cooper pairs, we obtain the gap equation

$$1 = \frac{gN(0)}{2} \int_{|\xi| \leq \hbar\omega_c} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = gN(0) \sinh^{-1}(\hbar\omega_c/\Delta)$$

with $N(0)$ the density of states at the FS, and the last equality follows from explicit integration. As before, we assume weak coupling $gN(0) \ll 1$, so that we solve

$$\frac{e^{1/(gN(0))}}{2} = \frac{\hbar\omega_c}{\Delta} \Rightarrow \Delta = 2\hbar\omega_c e^{-1/(gN(0))}$$

Note that Δ plays the same role as the binding energy E_B in the Cooper problem. (the factor 2 in the exponent is because the energy width is now $2\hbar\omega_c$ instead of $\hbar\omega_c$.) Hence we have now found a self-consistent ground state for the BCS Hamiltonian.

Properties of the solution

Limit $\Delta \rightarrow 0$

From the BdG Hamiltonian, it is immediately clear that $\theta_{\mathbf{k}} = 0$ for $\xi_{\mathbf{k}} > 0$ and $\theta_{\mathbf{k}} = \pi/2$ for $\xi_{\mathbf{k}} < 0$ in the limit $\Delta \rightarrow 0$. This means that above the FS, the canonical transformation reduces to identity: indeed, for those momenta the ground state is the vacuum state. Below the FS, the canonical transformation reduces to

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}} \\ \beta_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k},\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}$$

which means that the role of creation and annihilation operators has been exchanged. This is also logical since at these momenta the ground state is not the vacuum but the anti-vacuum characterized by

$$\langle c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle = 0$$

Stability

First of all, we need to show that the assumption that $\Delta \neq 0$ is consistent, i.e. that the ground state energy with $\Delta \neq 0$ is lower than that at $\Delta = 0$. This turns out to be the case and we find (by a calculation from the formulas above)

$$\frac{1}{\Lambda} (E_{GS}(\Delta) - E_{GS}(0)) = -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2 < 0$$

Gap

First note that the excitations above the GS are gapped as soon as $\Delta > 0$. This is obvious from the quadratic Hamiltonian and the gap is Δ , hence the name gap equation. More precisely, the function $E_{\mathbf{k}}$ is bounded below by Δ , whereas the free fermion function $\xi_{\mathbf{k}}$ vanishes at $k = k_F$.

Occupation numbers

We calculate

$$\langle n_{k,\sigma} \rangle = \left\langle c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} \right\rangle = \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2} \right)$$

Note that for $\Delta \rightarrow 0$, this converges to the function $\theta(-\xi_k)$, as it should, and that Δ sets the energy scale on which the occupation numbers change.

Two-particle density matrix

Next two paragraphs can be skipped in the first reading

As in the case of BEC, it is instructive to consider the (in this case) two-particle density matrix $\rho^{(2)}$, whose kernel in momentum space is

$$\hat{\rho}^{(2)}(\mathbf{k}'_1, \sigma'_1, \mathbf{k}'_2, \sigma'_2; \mathbf{k}_1, \sigma_1, \mathbf{k}_2, \sigma_2) := \left\langle c_{\mathbf{k}'_2}^\dagger c_{\mathbf{k}'_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_1} c_{\mathbf{k}_2} \right\rangle$$

Note that $\hat{\rho}^{(2)}$ is a self-adjoint operator on $P_a(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$, where $\mathcal{H} = L^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^2$ is the one-particle Hilbert space and P_a projects to antisymmetric functions. Just as in BEC, BCS is marked by the appearance of a macroscopic eigenvalue of this operator. We are interested only in the case $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, \sigma_1 = -\sigma_2$ and analogously for the primes, so in the kernel

$$\hat{\rho}^{(\text{pair})}(\mathbf{k}', \sigma', \mathbf{k}, \sigma) = \hat{\rho}^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma', -\mathbf{k}', -\sigma'; \mathbf{k}, \sigma, -\mathbf{k}, -\sigma) = \left\langle c_{\mathbf{k}', \sigma'}^\dagger c_{-\mathbf{k}', -\sigma'}^\dagger c_{\mathbf{k}, \sigma} c_{-\mathbf{k}, -\sigma} \right\rangle$$

The reason that it is legitimate to make the reduction form $\hat{\rho}^{(2)}$ to $\hat{\rho}^{(\text{pair})}$ is that the system is assumed to be translation and rotation invariant and does not contain spin-orbit coupling. Therefore, the operator $\rho^{(2)}$ commutes with the total momentum (of two particles) and with the total spin, therefore, the space spanned by the base states $|\mathbf{k}, \sigma, -\mathbf{k}, -\sigma\rangle$ is mapped into itself. It follows that any eigenvalue of the restriction of $\rho^{(\text{pair})}$ to this space is also an eigenvalue of $\rho^{(2)}$.

If we neglect fluctuations (in the spirit of BCS), then $\hat{\rho}^{(\text{pair})}$ equals $\hat{F}_{\mathbf{k}'}^* \hat{F}_{\mathbf{k}}$, up to signs that are irrelevant since all different choices for σ, σ' are related by antisymmetry and the symmetry under $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Fourier-transforming $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{r}, \mathbf{k}' \leftrightarrow \mathbf{r}'$, we get

$$\rho^{(\text{pair})}(\mathbf{r}', \uparrow, \mathbf{r}, \uparrow) \approx F^*(\mathbf{r}') F(\mathbf{r})$$

Hence $F(\mathbf{r})$ is an eigenfunction with eigenvalue $N_0 = \int d\mathbf{r} |F(\mathbf{r})|^2$. However, note that \mathbf{r} is a relative coordinate! The condensate is uniform in space, corresponding to the fact that we assumed pairing with center of mass momentum 0.

Macroscopic wavefunction

Recall that $F_{\mathbf{k}}$ has the meaning of a 'condensate wavefunction' (apart from normalization)

$$\frac{N_0}{|\Lambda|} := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\text{band}} |F_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\text{band}} \Delta^2 / (2E_{\mathbf{k}})^2 = \frac{N(0)}{4} \int_{\text{band}} d\xi \frac{\Delta^2}{\xi^2 + \Delta^2}$$

For obvious reasons, N_0 is identified with the number of particles in the condensate. In the limit $\Delta \ll \omega_c$, the integral can be extended to the full line and this yields

$$\frac{N_0}{|\Lambda|} = \frac{\pi}{4} \Delta N(0)$$

In the free-electron approximation, we have

$$N(0) \sim (3\epsilon_F)^{-1} N/\Lambda$$

where N/Λ is the total density, then

$$N_0/N = \pi\Delta / (12\epsilon_F)$$

what is in particular clear from this relation, is that the condensate density vanishes with Δ . This is logical because only the electrons near the FS participate in the condensate.

Positive temperature theory We start from the BdG Hamiltonian, and we build the finite-temperature density matrix

$$\rho = e^{-\beta H_{dG}}/Z$$

The difference is that now, the expectation values $\hat{F}_{\mathbf{k}} = \langle c_{\mathbf{k},\downarrow} c_{-\mathbf{k},\uparrow} \rangle$ have to be determined in a thermal state as well. In fact, all we need to know to start the calculation is

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/k_B T} + 1}, \quad \langle \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = 0$$

So we calculate

$$F_{\mathbf{k}} = \langle c_{\mathbf{k},\downarrow} c_{-\mathbf{k},\uparrow} \rangle = u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}/k_B T} + 1} \right) = \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh(E_{\mathbf{k}}/2k_B T)$$

which leads to a new gap equation

$$1 = gN(0) \int_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_c} d\xi \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh(E_{\mathbf{k}}/2k_B T)$$

The transition temperature T_c is defined as the temperature at which $\Delta \rightarrow 0$, hence this means that $E_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}}$ and hence $\beta_c = 1/T_c$ is determined from

$$1 = gN(0) \int_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_c} d\xi \frac{1}{2\xi_{\mathbf{k}}} \tanh(\beta_c \xi_{\mathbf{k}}/2)$$

By invoking Gamma-functions, this integral can be done exactly in the limit $\hbar\omega_c \ll \beta_c$ (another form of the weak coupling assumption since $T_c \rightarrow 0$ as $gN_0 \rightarrow 0$) yielding

$$k_B T_c = 1,13 \hbar\omega_c e^{-1/(gN(0))}$$

This is similar to the expression for the zero-temperature gap, and one can indeed combine them such that the ill-defined (because it was somehow arbitrary) energy scale $\hbar\omega_c$ drops out, obtaining

$$\frac{\Delta_0}{k_B T_c} \approx 1.76$$

10.1.7 Ginzburg-Landau Theory by De Roeck

Main source for this part are the notes by Cross.

Spatially varying order parameter

Just as we did in the context of the Gross-Pitaevskii equation, we will now define an order parameter which is not necessarily constant in space. This should allow to describe inhomogeneous states. Let us consider the two-particle density matrix $\rho^{(2)}$ and assume that it has an eigenvalue of order N , i.e.

$$\rho^{(2)} = |F\rangle\langle F| + \rho^{(\text{rest})}$$

with $\|F\|$ of order N and $\rho^{(\text{rest})}$ has eigenvalues of order 1. In position space, we write $F = F(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2)$. Note that this is another definition of F than previously where $F = F(\mathbf{r})$ depended on the relative coordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. This was because we had restricted $\rho^{(2)}$ to the center of mass system. As already mentioned, the alternative definition of F is as an expectation value;

$$F(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = \langle c_{\mathbf{r}_1, \sigma_1} c_{\mathbf{r}_2, \sigma_2} \rangle$$

Because of the absence of spin-orbit coupling, this function is zero unless $\sigma_1 = -\sigma_2$, and this is always used below to simplify. Let us define the change of variables

$$\mathbf{R} = 1/2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \nu = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

then we are primarily interested in the dependence on \mathbf{R} and we want to disregard the dependence on ν . To do this, we could integrate over ν or set $\nu = 0$ (we choose the latter). By changing also variables in momentum space $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2, \mathbf{q} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, we get

$$\psi(\mathbf{R}) := F(\mathbf{R}/2, \sigma, -\mathbf{R}/2, -\sigma) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \hat{F}(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \sigma, \mathbf{k} - \mathbf{q}/2, -\sigma) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}$$

This means that up to now $\psi(R)$ was constant and given by $F(\mathbf{r} = 0) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{k}} \hat{F}_{\mathbf{k}}$. The alternative definition via the expectation value is

$$\psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \left\langle_{\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{q}, \uparrow}^c \left\langle_{-\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{q}, \downarrow} \right. \right\rangle$$

Phenomenological setup of Ginzburg-Landau theory

We take the point of view of the phenomenological Ginzburg-Landau theory and we write a Landau functional $\mathcal{F} = \int d\mathbf{r} \mathcal{F}_{\mathbf{r}}$ with

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\psi(\mathbf{r}), \nabla_i \psi(\mathbf{r}), \nabla_i \nabla_j \psi(\mathbf{r}), \dots)$$

by demanding

$\mathcal{F}(\psi)$ has all the symmetries that the original Hamiltonian has. In particular it is invariant under rotations, translations, time-reversal invariance $\psi \rightarrow \psi^*$ and under global gauge transformations $\psi \rightarrow \psi e^{i\gamma}$.

\mathcal{F}_r is analytic in $\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r})$ and their spatial derivatives.

Moreover, in practice one keeps only lowest-order terms in the field and its spatial derivatives because higher order terms do not matter anyhow for what follows. Then, once one has chosen the Landau functional $\mathcal{F}(\psi)$, one minimizes it over ψ . The minimizing ψ_{\min} is interpreted as the one that is realized in the system and the minimizer $\mathcal{F}(\psi_{\min})$ is then the free energy. Sometimes, one erroneously calls $\mathcal{F}(\psi)$ the free energy which does strictly speaking not make sense because a free energy is a quantity associated to an equilibrium state. However, one can imagine a nonequilibrium state that is locally, at \mathbf{r} , in equilibrium, parametrized by $\psi(\mathbf{r})$, and then one could loosely associate to this non-equilibrium state a free energy profile \mathcal{F}_r .

We write then (more honest, a posteriori it turned out that we can write)

$$\mathcal{F}_r(\psi) = \mathcal{F}_0 + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + \gamma(T)|\nabla\psi|^2$$

Then one assumes

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= \alpha_0(T - T_c) \\ \beta(T) &= \beta(T_c) = \beta \\ \gamma(T) &= \gamma(T_c) = \gamma\end{aligned}$$

with α_0, β, γ positive, so that there can be a phase transition as $T = T_c$. Indeed, you recognize the Mexican hat potential in $|\psi|^2$, with minimum at $-\beta/|\alpha|$ for $\alpha < 0$ and at 0 for $\alpha > 0$. Note that this is exactly the energy functional of the Gross-Pitaevskii theory, and we can recycle our analysis of the latter. In particular, we remember that the functional defines a length scale (correlation length or 'healing' length)

$$\xi^2 = \gamma/\alpha = \gamma/\alpha_0(T_c - T)^{-1}$$

so the correlation length diverges at phase transition. How to incorporate a vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$? Demand local gauge invariance of the GL functional so that the correct form must be

$$|\nabla\psi|^2 \rightarrow \left| \left(\nabla + \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2$$

where we also inserted the charge $2e$ of a Cooper pair. We recall below, in Section 4, the connection to gauge invariance.

If one hears this procedure for the first time, it is hard to appreciate what is the predictive power of this 'theory'. The point is that the theory predicts correctly (at least above the upper critical dimension, which is 4 for the systems that we study here ¹⁾) critical exponents at the phase transition and the type of phase transitions that occur. This is remarkable given that we did not put in any details of the physical system beside its symmetry class. This observation is called 'universality' and it is the main reason why statistical mechanics is a powerful theory.

Analysis of the GL functional

One can now formally study the minimizers of the GL functional, but we prefer to do this in an intuitive way.

In analogy to the treatment of the Gross-Pitaevskii eq, we assume that that the density $|\psi|^2$ takes its equilibrium value and we hence omit for the moment the term $|\psi|^2, |\psi|^4$ from the action functional, leaving only the kinetic term. This was previously called the Thomas-Fermi approximation and it makes sense on length scales larger than the length ξ (recall that variations in $|\psi|$ happen on this length scale). We will describe the interplay with the magnetic field, which means that, if we would really proceed by minimizing the GL functional, we should

include the EM field energy in the functional by adding a term proportional to $\int |\nabla \times \mathbf{A}|^2$, but since, as said, we proceed in a different way, it will suffice to use a Maxwell equation.

The charge current We first recast the GL functional by giving α, β, γ more suggestive names. However, we only need to consider γ explicitly (anyhow, the other terms are discarded in the Thomas-Fermi approximation, as said above)

Let us first set again $\mathbf{A} = 0$ for simplicity.

We will write

$$\gamma |\nabla \psi|^2 = \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \psi|^2$$

The unfamiliar factor 2 in the denominator anticipates the fact that the mass of a Cooper pair is twice that of the electron (m).

If ψ were literally the order parameter that we defined above, then its normalization would somehow be arbitrary. Indeed, recall that it was a choice to define it by setting $\nu = 0$. If we had summed over ν , then the correct normalization would be that $\int |\psi|^2 \propto N_0$ (the number of condensed

¹ For lower-dimensional systems, one needs renormalization group to describe the vicinity of the phase transitions correctly. However, it turns out that this vicinity of the critical point that is inaccessible to Landau theory is small for the systems that we consider here (pairs). However, it is customary to choose the normalization differently, namely such that

$$n_s := \frac{2}{|\Lambda|} \int |\psi|^2, \quad \text{with } n_s = n \quad \text{at } T = 0$$

where n is the total density $N/|\Lambda|$.

With this in mind, let us now identify the charge current \mathbf{j} . Remark first that we could argue by analogy with the Gross-Pitaevskii equation, where we found the current to be (multiplying by $2e$ and replacing m by $2m$)

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar|\psi|^2}{m} \nabla \phi = \frac{e\hbar n_s}{2m} \nabla \phi$$

where $\psi = |\psi| e^{i\phi}$. Let us now try to give an explanation of why this is indeed the case, at least at zero temperature, by doing a Galilei transformation.

Let us assume that we are in the equilibrium state $\psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ and we boost this equilibrium state by a total momentum $N\hbar\mathbf{a}/2$, corresponding to momentum $\hbar\mathbf{a}/2$ per particle ². The total current density is now given by

$$j = -en \frac{\hbar\mathbf{a}}{2m}$$

For the ground state Ψ this corresponds to the transformation

$$\Psi \longrightarrow e^{-\sum_j \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_j / 2} \Psi$$

Alternatively, we can consider this transformation on the creation/annihilation operators

$$c_{\mathbf{k},\sigma} \longrightarrow c_{\mathbf{k}-\mathbf{a}/2,\sigma}$$

Using the definition (7.5), this yields that the order parameter ψ transforms as

$$\psi(\mathbf{R}) \longrightarrow e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{R})$$

and, since we assumed that the original ψ is constant, and we see that (for the function on the right hand side) $\nabla\phi = \mathbf{a}$, this means that the total current can be written as

$$\mathbf{j} = -en\frac{\hbar\mathbf{a}}{2m} = -e\frac{\hbar n_s}{2m}\nabla\phi$$

where we used also that $n_s = n$. Hence we have justified why the right hand side is indeed a current. Reinstating now the vector potential \mathbf{A} in a gauge-invariant way, we get

$$j = -\frac{e\hbar n_s}{2m} \left(\nabla\phi + \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c} \right)$$

² This is close to nonsense. We are imagining that there is an underlying lattice with positive ions. This is completely disregarded in the present reasoning. However, one can to some extent save the day by adopting the so-called jellium model, where the charge of the positive ions is uniformly spread out

London equation and Meissner effect From (7.20), we can immediately deduce the London equation by taking $\nabla \times$ of both sides

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{e\hbar n_s}{2m} \left(\nabla \times \nabla\phi + \frac{2e\nabla \times \mathbf{A}}{\hbar c} \right) = -\frac{e^2 n_s}{mc} \mathbf{B}$$

where we used that $\nabla \times \nabla\phi = 0$, even though $\nabla\phi$ is not the gradient of a function. However, it is locally a gradient of a function and that suffices for this relation (obviously so, since ∇ is a local operator).

Let us now combine this with the Maxwell equation

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Then we obtain

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (\lambda_L)^{-2} \mathbf{B},$$

where we defined the London penetration length

$$\lambda_L^{-2} = \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2}.$$

We see that all components of the magnetic field \mathbf{B} satisfy a Helmholtz equation. As argued repeatedly, this means that this field 'acquires a mass' and the force mediated by it becomes short-ranged. In particular, if we force the field \mathbf{B} to have a nonzero value (for example, outside the superconductor), then in the superconductor, the field will relax to 0 on the scale set by the London length λ_L . This is the famous Meissner effect, stating that magnetic fields are expelled from the superconductor.

Flux quantization One striking consequence of the Meissner effect is the quantization of magnetic flux passing through any loop that lies inside the superconductor. If the interior of the loop is also within the superconductor, then we already know that this flux has to be zero, but we can have situations where the loop lies within the SC, but its interior does not; namely if we consider a superconducting ring. Taking C the loop along the ring, we then get that from $\mathbf{j} = 0$ along C that

$$\int_C d\mathbf{l} \cdot \nabla\phi = \frac{2e}{\hbar c} \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}$$

By the fact that ϕ has to go to $\phi + 2\pi z$ with $z \in \mathbb{Z}$ upon completing the loop, and writing the flux through the loop as Φ we get

$$\Phi = z\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{hc}{2e}$$

where Φ_0 is called the superconducting unit of flux. As it is with many instances of quantization in condensed matter, this one is experimentally important, for example because it allows precise measurements of a quantity that depends only on the fundamental constants e, h, c .

The field A is expelled This part is not very precise and it can be safely skipped. The standard treatment on the subject does not have this.

Of course, all physics of the magnetic field is in \mathbf{B} , but nevertheless, it is worthwhile to remark what happens to the field \mathbf{A} and why it is tempting to adapt a description that is not gaugeinvariant: Since for loops inside the SC, ϕ goes to ϕ upon completing the loop, and if these are all possible loops, i.e. if the SC has no holes, then it is tempting to set $\nabla\phi = 0$, which implies immediately that

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \mathbf{A}$$

hence a simple relation between current and EM potential, that is sometimes also called 'London equation'. Of course, this is not gauge-invariant, but under the gauge trafo $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$, we get a current that still vanishes along loops. Even though this is not gauge invariant, the result is consistent; we have in fact only assumed that the circulation of \mathbf{j} vanishes along any loop. By a gauge transformation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$, we do not change $\nabla \times \mathbf{j}$.

Imposing moreover that the current satisfies $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (physically equivalent to stationarity because of the continuity equation. Recall indeed that we are by definition describing a stationary situation), we get that $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, i.e the Coulomb gauge is imposed and $\Delta\chi = 0$. Combining (7.26) with the Maxwell equation used above, we see that now the vector potential is expelled from the superconductor:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\lambda_L)^{-2} \mathbf{A},$$

In contrast to the relation for \mathbf{B} , this one is only valid for a SC without holes, but for one with holes we can do another trick. For example, let us assume again that the SC is a ring. Now, we cannot always put $\phi = \text{const.}$ since there are loops along which the line integral of $\nabla\phi$ need not vanish, namely those going around the ring. For those loops

$$\int_C d\mathbf{l} \cdot \nabla\phi = 2\pi z, \quad z = \Phi/\Phi_0$$

for Φ the flux through the ring. Instead of $\phi = \text{const.}$, we can still put $\phi = \tilde{\phi}$ for some multivalued function $\tilde{\phi}$ with winding number z around the ring. Then it makes sense to change variables, putting

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{2e} \nabla \tilde{\phi}$$

(which is a gauge transformation locally, but not globally since $\tilde{\phi}$ is multiplevalued) Then we get again

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \mathbf{A}'$$

whereas the Maxwell equation for \mathbf{A}' and \mathbf{A} is of course the same, and we get

$$\nabla^2 \mathbf{A}' = (\lambda_L)^{-2} \mathbf{A}'$$

and hence we now find that the field \mathbf{A}' is expelled!

Stability Just as in the case of neutral superfluids (GP), we see that the system has a certain topological stability because of the quantization of flux passing through a superconducting ring. It is this property that makes a SC resist a change in flux and this leads to the remarkable properties of superconductors. For example: superconductors that jump out of solenoids when one switches on a magnetic field inside them, and superconductors levitating on magnetic fields.

Of course, all of this has been derived under the assumption that $|\psi|$ remains close to its equilibrium value. As we know from the GP theory, when $|\psi| = 0$ locally, the manipulations above lose their validity because the phase ϕ becomes ill-defined when $|\psi| = 0$. In the GP theory, we have seen that superfluids can rotate by having a vortex line. In the vortex core, $|\psi| = 0$ and so there is nothing that prevents a nonzero winding number of the phase. Vortices play a big role in SC as well, and we briefly discuss them now.

Vortices and their role Vortices are defined as in GP theory. They are regions where the superconductivity is broken and \mathbf{v}_s becomes ill-defined.

In contrast to superfluids, where there is a Goldstone mode, here the energy of a vortex is finite, and provided that $\lambda_L \gg \xi$ (type 2 superconductor), we can accommodate vortices. As in the superfluid, the vortex core is essentially of size ξ , and there are energy contributions up to λ_L .

To understand this, recall that the divergent energy density (per unit length of vortex line) of a superfluid originated from the fact that $\int d\mathbf{l} \cdot \nabla \phi = 2\pi$ (we take the vortex with lowest angular momentum so that $2\pi z = 2\pi$) hence $|\nabla \phi| = 1/r$ with r the distance to the vortex center. Hence, the energy along the loop is $2\pi r r^{-2} \sim r^{-1}$ and integrating this up to the boundary of the material yields $\log R$ with R say, the radius of the cylinder.

The situation here is different in the following way, we still have the requirement that $\int d\mathbf{l} \cdot \nabla \phi = 2\pi$ but now $\nabla \phi$ is not an observable quantity and it does not figure in the expression for the energy. Rather it is $(\nabla \phi - \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c})$ which determines the velocity and the energy. Hence, we have the possibility to make $(\nabla \phi - \frac{2e\mathbf{A}}{\hbar c})$ zero while both $\nabla \phi$ and \mathbf{A} have a nonzero circulation. This turns out to be the correct scenario; the vortex has a finite radius of the order of λ_L , i.e. for $r \gg \lambda_L$, the disturbance in the order parameter decays exponentially and the energy density of a vortex E_{vortex} (density per unit length of vortex line) is hence finite, i.e. independent of the sample size. (see also exercises)

This has the following consequence. Recall the field energy associated to a magnetic field is $\int d\mathbf{r} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2$. If \mathbf{B} points everywhere along the z -axis and if we assume the field configuration to be independent of z we can also write the field energy per unit of length (along the z -axis) as $\int d\Phi \cdot \mathbf{B}$. Then it is clear that the energy needed to expel a flux Φe_z from a region where the field is $B_2 e_z$ to a region where it is $B_1 e_z$, equals $\Phi(B_1 - B_2)$. Therefore, in an external magnetic field \mathbf{B} , the magnetic field energy is lowered by $B\Phi_0$ if we create a vortex with one flux quantum Φ . This will happen at the so-called first critical field strength $B_{1,c}$ determined by

$$B_{1,c}\Phi_0 = E_{\text{vortex}}$$

(Recall that for neutral superfluids, there was a critical angular velocity, but it was depending on the sample size).

For fields below the critical field $B_{1,c}$, there will be no vortices. Above the critical field, vortices appear, their density increases with increasing field. In that regime, the material is still superconducting. At the second critical field $B_{2,c}$, the the distance between vortices becomes comparable to the coherence length ξ , i.e. the vortex cores start overlapping, and then superconductivity is destroyed.

A lattice of these vortices can form, leading to the so-called Abrikosov lattice.

10.1.8 Anderson-Higgs mechanics by De Roeck

This Section is related to the Chapter on symmetry breaking. The idea is to put the Meissner effect into a wider perspective (????? чёро?????). Therefore, we will also use somewhat simpler notation in this Section and we will assume a relativistically invariant model, so that the expressions are more familiar. Apart from this, the Lagrangian that we write below is very much related to the functional \mathcal{F} above.

Matter field Assume a matter field $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ with Lagrangian

$$\mathcal{L}_M = \partial^\mu \psi^* \partial_\mu \psi - r_0 \psi^* \psi - \frac{u_0}{2} (\psi^* \psi)^2$$

where we use the signature $(1, -1, -1, -1)$ for the metric, so that the first term corresponds to $|\partial_t \psi|^2 - |\nabla \psi|^2$.

This is of course (apart from the temporal dependence) exactly the Gross-Pitaevskii functional. The extremal points of this Lagrangian (with uniform ψ) are

$$\begin{aligned} r_0 > 0 &\Rightarrow \text{symmetric phase } \psi = 0 \\ r_0 < 0 &\Rightarrow \text{symmetry broken phase } |\psi|^2 = -r_0/u_0 \end{aligned}$$

In the symmetry broken phase, it is instructive to choose new coordinates

$$\begin{aligned} \psi &= e^{i\phi} (\psi_0 + \eta) \\ \psi^* &= e^{-i\phi} (\psi_0 + \eta) \end{aligned}$$

Expanding the Lagrangian to second order gives

$$\mathcal{L} = -\frac{r_0}{u_0} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + 2r_0 \eta^2$$

and ones sees that ϕ is massless whereas η has mass $-2r_0$. Again, this calculation was already done in the section on superfluids. We recall that the appearance of a massless field ϕ is a consequence of the Goldstone theorem.

EM field Consider now also the EM Lagrangian, with gauge field $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}(A) = -\frac{1}{4} F^{\mu,\nu} F_{\mu,\nu}, \quad F^{\mu,\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

As one knows very well, this theory is free (quadratic) and has two massless modes (two physical polarizations)

Let us know couple the two fields

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} + (D^\mu \psi)^* D_\mu \psi - (u_0/2) (\psi^* \psi)^2, \quad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

note the gauge invariance

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi e^{i\chi(\mathbf{r})} \\ \psi^* &\rightarrow \psi^* e^{-i\chi(\mathbf{r})} \\ A^\mu &\rightarrow A^\mu + \frac{1}{q} \partial^\mu \chi\end{aligned}$$

(we chose units here such that \hbar, c do not appear)

Symmetry broken phase We start by again expanding around the solution $\psi = \psi_0$. We assume that the phase ϕ is small and in particular a univalued function (winding number 0). For the moment we do not yet expand the A field (anticipating the fact that instead of expanding around $A = 0$, we might as well expand around a pure gauge $A = \nabla\chi$). By performing the expansion in η , we get

$$\mathcal{L} = (D^\mu \eta)^* D_\mu \eta + |\psi_0|^2 (D^\mu e^{i\phi})^* (D_\mu e^{i\phi}) + 2r_0 \eta^2 + \mathcal{L}_{EM}$$

Now we do the crucial step by choosing a gauge: Perform the gauge transformation with $\chi := \phi$ (gauge away the field ϕ , which is possible because of the assumption that it has vanishing winding number), then

$$|\psi_0|^2 (D^\mu e^{i\phi})^* (D_\mu e^{i\phi}) \rightarrow |\psi_0|^2 A^\mu A_\mu$$

Moreover, we will now also drop terms higher than of second order in the fields, including the field A (which can still be assumed small because χ was small as well.) This allows to simplify

$$(D^\mu \eta)^* D_\mu \eta \rightarrow \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta$$

Finally, we use that \mathcal{L}_{EM} is gauge invariant, so that $\mathcal{L}_{EM}(A - (i/q)\phi) = \mathcal{L}_{EM}(A)$. Then we end up with the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + |\psi_0|^2 A^\mu A_\mu + 2r_0 \eta^2 + \mathcal{L}_{EM}(A)$$

The big deal about this Lagrangian is that there is now a mass term for the A -field, whereas the Goldstone mode ϕ has disappeared. As one says, the gauge particle (photon) has eaten the Goldstone boson (ϕ) and it has become massive. The symmetry breaking of ϕ has been traded for a breaking of gauge invariance. Indeed, if you interpret the resulting Lagrangian, with variables η, A as given, it does not have gauge-invariance. This should of course not be taken seriously, the gauge invariance is not really a symmetry but a redundancy in the description, so it cannot be broken. It is just that in the gauge where $\phi = 0$, the result is most transparent.

How did the 'Goldstone Theorem' get violated? The Goldstone theorem, as stated in Section 3.2, relied on the intuition that, if one has continuous symmetry breaking, than one can form spin waves as excitations. The energy of such a spin wave then vanishes when the momentum goes to 0. However, this intuition relies crucially on the fact that the interaction is local, i.e. merely a function of the difference between nearby spins. If we allow long-range interactions, than the calculation of the energy of a smooth domain wall (and hence of a spin wave) would break down. In fact, this was explicitly demonstrated for the case of a discrete domain wall in Section??.

Hence, the Goldstone theorem should not be expected to hold for long-range interactions. This is why the Higgs-Anderson mechanism is possible, because electromagnetism is a long-range interaction.

10.1.9 Джозефсон, Мейсснер, вихри, критические поля на вводном уровне по Михеенкову и др.

10.1.9 Джозефсон, Мейсснер, вихри, критические поля на вводном уровне по Михеенкову и др.

эффект Мейсснера с точки зрения теории Гинзбурга-Ландау

Вихри Абрикосова

Выше мы установили, что для них энергия границы между нормальной и сверхпроводящей фазами $\sigma_{ns} < 0$.

Это означает, что становится энергетически выгодным расслоение образца на области нормальной и сверхпроводящей фаз.

Вначале этой части пособия мы описали, каким образом магнитное поле проникает в сверхпроводник второго рода.

Так, внутри цилиндрического образца образуются вихри.

Каждый вихрь представляет собой цилиндр с нормальной сердцевиной, радиус которого порядка длины когерентности ξ .

В сердцевине параметр порядка $\psi = 0$.

Вокруг этой нормальной сердцевины течет незатухающий сверхток.

Создаваемое им магнитное поле направлено вдоль сердцевины.

Вихревой ток захватывает область радиуса порядка λ - глубины проникновения. Эта область может быть достаточно большой, поскольку для сверхпроводников второго рода $\lambda \gg \xi$.

Один вихрь несет один квант магнитного потока.

Образование вихрей становится энергетически выгодным при внешнем поле $H_0 > H_{c1}$.

Вихри, образовавшись в сверхпроводнике, располагаются на расстоянии порядка λ и образуют в поперечном сечении правильную треугольную решетку.

Возникающее состояние называется смешанным. Это состояние существует при повышении величины внешнего поля до значения H_{c2} , называемого вторым критическим полем.

В этом случае период решетки становится порядка ξ .

Это означает, что вихри соприкасаются своими нормальными сердцевинами и параметр порядка ψ обращается в нуль во всем объеме образца.

Близи верхнего поля есть область, где решетка плавится.

Кривая намагниченности для сверхпроводника второго рода ведет себя как показано на рисунке..

(хз как, нет рисунка)

одиночный вихрь Рассмотрим сверхпроводник второго рода, то есть случай $\lambda \gg \xi$.

Мы хотим показать, что существует область магнитных полей, при которых выгодно образование в толпе сверхпроводника нормальных тонких цилиндрических областей радиуса ξ - вихрей.

Параметр порядка внутри этой области изменяется от 0 до 1.

Вне сердцевины $|\psi|^2 = 1$. Поэтому для больших расстояний $\rho \gg \xi$.

уравнение ГЛ (58) перепишется

$$\text{rotrot } \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right), \quad \rho \gg \xi$$

Проинтегрируем его по замкнутому контуру охватывающему нормальную сердцевину вихря.

$$\oint dl (\lambda^2 \text{rotrot } \mathbf{A} + \mathbf{A}) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint dl \nabla \theta$$

Если бы не магнитная сердцевина, то фаза волновой функции была бы однозначной аналитической функцией и интеграл в правой части равнялся бы нулю.

Наличие нормальной сердцевины делает сверхпроводящий образец многосвязным.

В то же время остается требование однозначности волновой функции.

Это означает, что при обходе по замкнутому контуру фаза может измениться на $2\pi n$ - значение интеграла в правой части (68).

Преобразуем левую часть (68) к поверхностному интегралу, учитывая, что $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$\int d\mathbf{S} (\lambda^2 \text{rot} \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B}) = n\Phi_0$$

Поскольку интеграл в левой части не зависит от контура (главное, что он охватывает сердцевину!), то формально можно считать, что подынтегральная функция есть δ -функция. Поэтому

$$\lambda^2 \text{rot} \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} = n\Phi_0 \delta(\rho)$$

Всюду вне сердцевины при $\rho \gg \xi$ имеем

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}$$

Раскроем левую часть этого выражения по известной формуле, получим

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}$$

В цилиндрических координатах имеется только одна z -компоненты h_z . Поэтому для нее имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} h_z = \frac{\rho}{\lambda^2}$$

$\Pi_{\text{вСТb}} h_z = f(x), x = \rho/\lambda$. Тогда

$$x f'' + f' - x f = 0$$

Это - уравнение Бесселя. Нас интересует его решение в окрестности вихря, то есть при $\rho < \lambda$. При малых значениях аргумента $f = \ln x$. (Это легко проверить непосредственной подстановкой). Поэтому магнитное поле в окрестности оси вихря имеет вид

$$h \sim \ln \left(\frac{\lambda}{\rho} \right), \xi < \rho < \lambda$$

Точное решение уравнения (69) при условии $h(\infty) = 0$ имеет вид

$$h = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(\rho/\lambda)$$

K_0 - функция Макдональда, асимптотика которой $K_0(z) \propto \ln(1/z)$ при $z \ll 1$ приводит к (72). Это позволяет оценить поле в центре вихря с логарифмической точностью

$$h(0) \simeq h(\xi) \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln(\xi/\lambda)$$

(???????)

Первое критическое поле

Исходим из функционала Гинзбурга-Ландау для свободной энергии

$$\mathcal{F}_{sH} = \mathcal{F}_n + \int dV \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} \right]$$

Напомним выражения для длины когерентности и глубины проникновения магнитного поля

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|} \\ \lambda^2 &= \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2 \beta}{8\pi e^2 |\alpha|} \end{aligned}$$

Если вихря нет, то поскольку внутри сверхпроводника микроскопическое поле $\mathbf{B} = 0$, то вклал в свободнут энегриго (74) дает только верхняя строка.

Энергией вихря будем называть свободную энегриго, определяемую нижней строкой в, то есть будем ее отсчиты вать от свободной энегрии состояния без вихрей. Нас интересует случай $\lambda \gg \xi$.

Поэтому можно пренебречь свободной энегрией, сосредоточенной в объеме нормальной сердцевины.

Кроме того, поскольку мы интересуемся расстояниями $\rho > \xi$, где параметр порядка практически не изменяется, можно считать $|\Psi|^2 = |\Psi_0|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}$. По этой причине в (39) можно пренебречь квантовым членом $-i\hbar \nabla \Psi$. Поэтому из (39) для вычисления энегрии вихря остается только выражение

$$\varepsilon = \int dV \left(\frac{e^2}{mc^2} \mathbf{A}^2 \frac{|\alpha|}{\beta} + \frac{\hbar^2}{8\pi} \right)$$

Во втором уравнении ГЛ (58)

$$\text{rotrot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

опустим квантовый градиентный член. Тогда

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\lambda}{|\psi|} \right)^2 \text{rotrot } A = \left(\frac{\lambda}{|\psi|} \right)^2 \text{rot } \mathbf{B}$$

Подставляя (77) в (78), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int dV (\lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2 + \mathbf{B}^2)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать при $\lambda \gg \xi$, это есть Лондоновское выражение, (20),

$$\text{rotrot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

опустим квантовый градиентный член. Тогда

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\lambda}{|\psi|} \right)^2 \text{rotrot } A = \left(\frac{\lambda}{|\psi|} \right)^2 \text{rot } \mathbf{B}$$

Подставляя (77) в (78), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int dV (\lambda^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2 + \mathbf{B}^2)$$

Заметим, что, как и следовало ожидать при $\lambda \gg \xi$, это есть Лондоновское выражение, (20),

Применим к выражению $(\text{rot } \mathbf{B})^2 = \text{rot } \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ формулу

$$\text{arot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{ rota} - \text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

Tor/a

$$(\text{rot } \mathbf{B})^2 = \mathbf{B} \text{ rotrot } \mathbf{B} - \text{div}[\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]$$

По теореме Гаусса

$$\int \text{div}[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}] = \oint d\mathbf{S}[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]$$

Напомним, что нас интересует цилиндрическая геометрия, когда вектор \mathbf{B} направлен по оси z . Вычислим энергию вихря единичной длины, ограниченного плоскостями $z = 0, z = 1$. Интеграл по торцевым окружностям равен нулю, так как вектор $[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]$ лежит в плоскости этих торцов. Поскольку поле вихря $\mathbf{B} \rightarrow 0$, при $\rho \rightarrow \infty$, то интеграл и по бесконечно удаленной цилиндрической поверхности в (81) обращается в нуль. Итак,

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int dV [\mathbf{B} (\lambda^2 \text{rotrot } \mathbf{B} + \mathbf{B})]$$

В силу уравнения (69), выражение в круглых скобках есть δ -функция. Поэтому, используя (73), получим

$$\varepsilon = \frac{\Phi_0 \mathbf{B}(0)}{8\pi} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln(\xi/\lambda)$$

Во внешнем поле минимум должна иметь энергия Гиббса

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \int \frac{B H_0}{4\pi} dV$$

H_0 можно вынести за знак интеграла. Если считать, что вихрь несет один квант

$$\int \frac{B}{4\pi} dV = \int_0^1 dz \int \frac{B}{4\pi} dS = \frac{\Phi_0}{4\pi}$$

Итак

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln(\xi/\lambda) - \frac{\Phi_0 H_0}{4\pi}$$

Отсюда следует, что в слабом магнитном поле $\varepsilon_1 > 0$ и образование вихря невыгодно. Из (86) следует, что минимальное поле при котором $\varepsilon_1 < 0$ есть

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\xi/\lambda) = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(x)$$

Это поле называется первым критическим полем, при котором внешнее магнитное поле начинает проникать в сверхпроводник. Вспоминая оценку (66), получим

$$H_{c1}(T \rightarrow T_c) \sim H_{c1}(0)(T_c - T)$$

второе критическое поле

Найдем теперь второе критическое поле, при котором почти весь образец находится в нормальном состоянии, то есть параметр порядка Ψ — мал. Из первого уравнения Гинзбурга-Ландау имеем

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi = a\psi, a = 1 - |\psi|^2$$

В сильном поле сверхпроводящая фаза слаба, и в уравнении (89) нелинейность проявляется только в том смысле, что собственное значение линейного уравнения

$$a < 1$$

Подставим в уравнение (89) потенциал $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$:

$$-\xi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \xi^2/\hbar^2 \left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c} Bx \right)^2 \psi - \xi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = a\psi$$

Похожее уравнение решалось в разделе о магнетизме электронного газа. Если установить соответствие

$$m' = \frac{\hbar^2}{2\xi^2}, e' = 2e$$

то получим уравнение движения электрона в магнитном поле

$$-\frac{\hbar^2}{2m'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m'} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e'}{c} Bx \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = a\psi$$

Минимальное собственное значение уравнения (91) есть $a = \frac{\hbar e' B}{2m' c} = \frac{2eB\xi^2}{\hbar c}$. Нас интересует решение этого уравнения, когда $a < 1$. Итак, решение уравнения (90) сумеет существовать (*при* $a < 1$), если

$$\frac{2eB\xi^2}{\hbar c} < 1$$

Тогда верхнее критическое поле определится критерием

$$H_{c2} = \frac{\hbar c}{2e\xi^2}$$

Это условие имеет простой физический смысл. Во внешнем поле $H \sim H_{c2}$ поле почти полностью проникает в образец. Это означает, что расстояние между вихрями становится порядка толщины сердцевины вихря и поле внутри сверхпроводника $h \sim H_{c2}$. Следовательно один вихрь несет магнитный поток по порядку величины равный $\xi^2 H_{c2}$. С другой стороны, этот поток равен Φ_0 , что и отражает критерий (92).

Заметим, что при приближении H_0 к H_{c2} параметр порядка $|\Psi|^2 = 1 - H_0/H_c$. Строгий анализ, основанный на уравнениях Гинзбурга-Ландау, показывает, что в сверхпроводниках второго рода, для которых $x > 1/\sqrt{2}$, в интервале $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$ образуются вихри. Эти вихри отталкиваются друг от друга и образуют двумерную решетку, составленную из равносторонних треугольников. При наличии гралиента внешнего магнитного поля вихри могут двигаться, но примеси их останавливают (пиннинг). Это явление аналогично движению и пиннингу дислокаций в реальных кристаллах.

Эффекты Джозефсона

Теория Рассмотрим два сверхпроводника, разделенных диэлектрическим промежутком.

Если этот промежуток достаточно толстый, то ток через него между сверхпроводниками течь не может.

Это условие формально соответствует граничному условию к уравнениям Гинзбурга-Ланлау (45).

Итак, для обоих сверхпроводников условие обращения тока в нуль есть

$$\begin{cases} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2e}{c} A_x \right) \Psi_1 = 0 \\ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2e}{c} A_x \right) \Psi_2 = 0 \end{cases}$$

Если сделать диэлектрический слой достаточно тонким, то проницаемость барьера, обусловленная этим слоем, становится конечной и через диэлектрический контакт может течь сверхток. Ток, вытекающий, например, из первого сверхпроводника зависит от как от Ψ_1 , так и от Ψ_2 . Если интересоваться свойствами перехода вблизи температуры перехода, когда параметр порядка мал, то это влияние достаточно учесть в первом порядке. Тогда из (93), (94) следует, что в наиболее общем виде

$$\begin{cases} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2e}{c} A_x \right) \Psi_1 = f(\Psi_1, \Psi_2) \approx \frac{\Psi_2}{\lambda} + \frac{\Psi_1}{\lambda'} \\ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2e}{c} A_x \right) \Psi_2 = f(\Psi_1, \Psi_2) \approx \frac{\Psi_1}{\lambda} + \frac{\Psi_2}{\lambda'} \end{cases}$$

коэффициенты $1/\lambda$ и $1/\lambda'$ пропорциональны проницаемости барьера. Эти уравнения должны удовлетворять требованиям симметрии по отношению к обращению времени $t \rightarrow -t$. Соответствующее преобразование получается, если сделать замену $\psi \rightarrow \psi^*, A \rightarrow -A$.

Легко убедиться, что это имеет место, если λ, λ' вещественны. Вычислим ток, втекающий в контакт, со стороны первого сверхпроводника, используя (51):

$$j = -2e \operatorname{Re} \left(\Psi_1^* \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla_x - \frac{2e}{c} A_x \right) \Psi_1 \right)$$

Подставляя стада граничное условие (95), получим

$$j = -\frac{i\hbar e}{2m\lambda} (\Psi_1^* \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2^*)$$

(Обратим внимание, что константа λ выпала из окончательного выражения.) Это ток вытекающий из первого сверхпроводника и втекающий во второй. Как и следовало ожидать, при взаимной замене индексов 1 и 2, это выражение меняет знак, поскольку понятия вытекающих и втекающих взаимозаменяются. Если сверхпроводники одинаковы, то Ψ_1 и Ψ_2 могут отличаться только фазой. Если эти фазы есть φ_1 и φ_2 , то

$$j = j_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1), j_c = \frac{\hbar e |\psi|^2}{m\lambda}$$

Напомним, что при приближении к точке перехода $|\psi|^2$ стремится к нулю, как $T_c - T$. По этому же закону убывает максимальный сверхпроводящий ток через Контакт.

Приложим теперь к контакту разность потенциалов V . Пусть в первом сверхпроводнике волновая функция стационарного состояния есть

$$\psi = \psi_1 e^{i\varphi_1(t)} = \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar}$$

Tor/a

$$-\hbar \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = E_1$$

Аналогично для второго сверхпроводника

$$-\hbar \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = E_2$$

Если на мостике установилась разность потенциалов V , то разность потенциальных энергий куперовских пар, имеющих заряд $2e$, равна

$$E_2 - E_1 = 2eV$$

То

$$2eV = \hbar \frac{\partial (\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial t}$$

Тогда

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1)_0 - 2eVt$$

Подставляя (101) в (99), получим

$$j = j_c \sin [(\varphi_2 - \varphi_1)_0 - 2eVt]$$

Получили интересный результат: наложение на туннельный контакт постоянной разности потенциалов, приводит к появлению сверхпроводящего переменного тока с частотой

$$\omega_f = \frac{2}{\hbar} |eV|$$

Выделяемая в контакте мощность пропорциональна Vj . Среднее за период значение этого произведения равно нулю, как это и должно быть для сверхпроводящего тока.

другие явления

(просто список мелких явлений, потом раскидаю туда, где этому место)

изменение фазы вдоль контура Во многих квантово-механических задачах (квантование потока в полости сверхпроводника, эффект Ааронова-Бома, монополь Дирака) возникает необходимость вычислить изменение фазы ϕ волновой функции $\exp(i\phi)$ вдоль некоторого контура. По определению для контура, связывающего начальную 1 и конечную 2 точки имеем

$$\int_1^2 \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi_2 - \phi_1$$

Для замкнутого контура $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ из (25.1) казалось бы получаем ноль.

Этот же вывод дает применение теоремы Стокса:

$$\oint \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int \nabla \times \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Однако это верно не для всех функций $\phi(\mathbf{r})$.

Если речь идет о фазе волновой функции $\exp(i\phi(\mathbf{r}))$, то величина (25.1) определяется топологией области, охватываемой замкнутым контуром.

Это связано с требованиями однозначности и гладкости волновой функции $\exp(i\phi(\mathbf{r}))$, которые вытекают из экспериментов по интерференции волновой функции.

Если область односвязна, то контур можно стянуть в точку.

В процессе такого стягивания волновая функция на контуре должна оставаться однозначной и гладкой.

Это можно обеспечить только при обращении интеграла (25.1) в ноль.

Если же контур охватывает неодносвязную область, например, в образце имеется полость (дырка), то при обходе такой дырки изменение фазы может быть ненулевым:

$$\oint \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n$$

где n целое число, возможно, и ноль. Конкретное значение n определяется физическими условиями в полости.

Например, в сверхпроводнике ве личина n определяется числом квантов магнитного потока, введенного в полость внешним источником.

10.1.10 Магнитные свойства сверхпроводников, ур Лондонов по Михеенкову

В зависимости от того, как откликаются сверхпроводники на приложенное магнитное поле, они делятся на два класса: сверхпроводники первого и второго рода.

К сверхпроводникам первого рода относятся все металлы кроме ниобия. Для них имеет место эффект Мейсснера-Оксенфельда.

Магнитные свойства сверхпроводников первого рода

(структура ужасная, потом распишу)

Магнитные свойства вещества зависят не только от материала, но и от формы образца.

Мы будем рассматривать только цилиндрический образец в продольном магнитном поле.

Это позволит выявить практически все особенности поведения сверхпроводника в магнитном поле, и в то же время существенно упростить выкладки.

Посмотрим на длинный массивный цилиндр из сверхпроводника первого рода во внешнем однородном магнитном поле.

Внутри сверхпроводника магнитная индукция $B = 0$.

Во внешнем поле единица объема цилиндра обладает намагниченностью M . Поэтому магнитное поле \mathbf{H} внутри сверхпроводника находится из условия $B = H + 4\pi M = 0$.

Известно, что касательная составляющая магнитного поля непрерывна. Поэтому в рассматриваемой геометрии магнитное поле внутри сверхпроводника совпадает с внешним магнитным полем.

Следовательно, намагниченность связана с внешним магнитным полем H соотношением

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H}/4\pi$$

Появление ненулевого магнитного момента \mathbf{M} означает, что в сверхпроводнике текут замкнутые незатухающие токи, ответственные за эффект Мейсснера-Оксенфельда.

Поскольку внутри сверхпроводника $B = 0$, то из уравнения Максвелларот $B = (4\pi/c)j$ следует, что внутри сверхпроводника нет объемного тока, $j = 0$. Поэтому упомянутые незатухающие токи текут только по поверхности сверхпроводника.

Строго говоря, как эксперимент, так и теория обнаруживают, что магнитное поле фактически проникает в сверхпроводник первого рода на глубину λ по закону $\exp(-x/\lambda)$. Это же касается упомянутых выше незатухающих токов, ответственных за диамагнетизм сверхпроводника - они текут в поверхностном слое толщиной λ .

Ну то есть в принципе ничего интересного, обычные свойства вроде бы...

Магнитные свойства сверхпроводников второго рода

(структура ужасная, потом распишу)

В отличие от сверхпроводников первого рода, сверхпроводники второго рода не обнаруживают полного эффекта Мейсснера-Оксенфельда. Возьмем линиальный массивный цилиндр из сверхпроводника второго рода и поместим его в продольное внешнее магнитное поле. При увеличении этого поля от нуля до некоторого значения H_{c1} , называемого первым критическим, индукция внутри цилиндра равна нулю, т.е. поле выталкивается из сверхпроводника. При дальнейшем увеличении магнитного поля оно начинает проникать в сверхпроводник, но весьма своеобразным образом. Вначале образуются так называемые квантовые вихревые нити или, просто, вихри. Каждая из них представляет собой очень тонкую цилиндрическую сердцевину, находящуюся в нормальном состоянии. Радиус этой сердцевины ξ по порядку величины равен размеру волнового пакета электронов, несущих сверхток (физический смысл этого параметра, подробнее будет обсуждаться в последующих разделах). Ось цилиндра параллельна внешнему полю. Вокруг нормальной сердцевины циркулирует незатухающий ток. Создаваемое им магнитное поле направлено так же, как и внешнее магнитное поле. С увеличением внешнего магнитного поля H от H_{c1} до H_{c2} , называемого вторым критическим полем, плотность вихрей увеличивается. (два рисунка, на первом в поле $H_{c1} \xi \ll a$, на втором – в поле $H_{c2}, \xi \sim a, a$ – постоянная треугольной решетки). Когда внешнее магнитное поле достигает значения H_{c2} , плотность вихрей такова, что размер вихря по порядку величины сравнивается с расстоянием между вихрями. При этом весь образец переходит в нормальное состояние.

Состояние сверхпроводника второго рода при $H_{c1} < H < H_{c2}$ называется смешанным или вихревым. Однако и при $H > H_{c2}$ сверхпроводимость сохраняется в тонком поверхностном слое вплоть до достижения внешним полем значения $H_{c3} = 1.69H_{c2}$.

Термодинамика сверхпроводников

Критическое поле для сверхпроводника первого рода Логика:

- Сначала 1) напомнить термодинамику в поле-
- 2) слабое поле,
- 3) потом о родах и сильное поле и крит. поля

Рассмотрим металлический цилиндр в однородном продольном магнитном поле. Свободная энергия системы есть свободная энергия цилиндра в отсутствие магнитного поля + энергия поля (в отсутствие цилиндра) + энергия взаимодействия цилиндра с полем. Свободную энергию системы будем отсчитывать от состояния в котором имеется только поле. Тогда плотность энергии нормального цилиндра есть F_n . Будем охлаждать систему до тех пор, пока цилиндр не перейдет в сверхпроводящее состояние. Тогда его магнитный момент станет равным $M = -H/4\pi$.

Для энергии этого цилиндра в магнитном поле

$$dE_m = -MdH = \frac{HdH}{4\pi}$$

поэтому

$$E_m = H^2/8\pi = \frac{MH}{2}$$

Пусть F_{s0} – свободная энергия сверхпроводника в нулевом магнитном поле. Тогда $F_{sH} = F_{s0} + H^2/8\pi$ – свободная энергия сверхпроводника в магнитном поле. Очевидно, что в равновесии

$$F_n = F_{sH}$$

Это имеет место при критическом поле H_c :

$$F_n - F_{s0} = H_c^2/8\pi$$

Итак, в иулевом внешнем магнитном поле внутренняя энергия сверхпроводника меньше энергии нормального состояния (при той же температуре и объеме) на величину $H_c^2/8\pi$. При включении внешнего магнитного поля, появление магнитного момента у сверхпроводящего металла приводит к увеличению его энергии на величину (5). Но тех пор, пока $H_0 < H_c$, сверхпроводнику выгодно оставаться в сверхпроводящем состоянии. Поле H_c назы вагот критическим термодинамическим магитным полем. Обратим внимание, что конечно же, это поле есть свойство только материала. 13.3.2 Энтропия и теплоемкость сверхпроводника Из термодинамики известно, что энтропия

$$S = -(\partial F / \partial T)_V$$

Из (6) и (7) слелует, что

$$S_s - S_n = \frac{H_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_V$$

состояние является чем-то более упорядоченным, чем нормальное. Это наталкивает на мысль описы вать переход в сверхпроводящее состояние как фазовый переход в духе теории Ландау. (см. соответствующую главу).

При $T = T_c$ магнитное поле $H_c = 0$. Тогда $S_s - S_n = 0$. Следовательно, переход в сверхпроводящее состояние в этом случае является фазовым переходом второго рода. При $T < T_c$, имеет место скачок энтропии, то есть при переходе в сверхпроводянцее состояние из нормального скрытая теплота выделяется, и наоборот, при переходе из сверхпроводящего в нормальное - поглощается. Это переход первого рода. Удельная теплоемкость $C = T(\partial S / \partial T)$. Из выражения (8) следует, что

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]$$

$$S_s - S_n = \frac{H_c}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_V$$

состояние является чем-то более упорядоченным, чем нормальное. Это наталкивает на мысль описы вать переход в сверхпроводящее состояние как фазовый переход в духе теории Ландау. (см. соответствующую главу).

При $T = T_c$ магнитное поле $H_c = 0$. Тогда $S_s - S_n = 0$. Следовательно, переход в сверхпроводящее состояние в этом случае является фазовым переходом второго рода. При $T < T_c$, имеет место скачок энтропии, то есть при переходе в сверхпроводянцее состояние из нормального скрытая теплота выделяется, и наоборот, при переходе из сверхпроводящего в нормальное - поглощается. Это переход первого рода. Удельная теплоемкость $C = T(\partial S / \partial T)$. Из выражения (8) следует, что

$$C_s - C_n = \frac{T}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]$$

Термодинамические потенциалы

Макроскопическая электродинамика Макроскопическая электродинамика описывает электромагнитные поля в веществе, усредненные по временам, много большим времени изменения молекулярных полей τ_a и по расстояниям, много большим межатомных расстояний a . то есть макроскопическая электродинамика описывает низкочастотные и длинноволновые поля, удовлетворяющие условиям

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_a}, a \ll \lambda$$

Магнитной индукцией в веществе называется усредненная по достаточно большим временам и размерам полная напряженность магнитного поля - сумма внешнего магнитного поля и молекулярного поля. При изменении внешнего магнитного поля происходит изменение магнитной индукции внутри тела $\delta\mathbf{B}$. При этом изменение энергии системы "магнитное поле + тело":

$$\delta R = \frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{H} \delta \mathbf{B}$$

Входящий в это выражение параметр \mathbf{H} называется напряженностью магнитного поля в веществе. Он не обязательно совпадает с внешним магнитным полем.

Совпадение, например, имеет место в случае длинного цилиндра в продольном внешнем магнитном поле. В соответствии с теоремой о малых добавках, в равновесии для свободной энергии \mathcal{F} имеем внешнем магнитном поле. В соответствии с теоремой о малых добавках, в равновесии для свободной энергии \mathcal{F} имеем

$$\delta\mathcal{F} = -S\delta T - pdV + \frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{H} \delta \mathbf{B}$$

мыи поле+тело. Определенный таким образом термодинамический потенциал $\mathcal{F}(T, V, \mathbf{B})$ в равновесии имеет минимум. Предположим, что мы хотим измерять теплоемкость при заданных значениях T, V, \mathbf{B} . На эксперименте контролировать значение магнитной индукции \mathbf{B} внутри тела неудобно, а в случае тел с нецилиндрической геометрией попросту невозможно. Фактически эксперимент проводится в заланном виенине магнитном поле.

Для исследования термодинамики сверхпроводника в таких условиях введем термодинамический потенциал

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \int dV \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{4\pi}$$

Этот прием в теоретической механике назывался преобразованием. Лежандра.

Тогда

$$\delta\mathcal{G} = -S\delta T - \frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{B} \delta \mathbf{H}$$

В соответствии с общими принципами термодинамики именно этот потенциал имеет минимум при заданных температуре T , объеме и магнитном поле \mathbf{H} . Напомним лишний раз, что в формуле (13) \mathbf{H} - магнитное поле внутри образца. В случае цилиндрической геометрии в продольном магнитном поле напряженность магнитного поля в веществе совпадает с напряженностью внешнего магнитного поля. Полезно также ввести плотность потенциала \mathcal{G} :

$$G = F - \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{4\pi}$$

В случае других геометрий для описания термодинамики вещества во внешнем магнитном поле вводят другие термодинамические потенциалы. Например

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{F} - \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{M}}{2}$$

где \mathbf{H}_0 - внешнее магнитное поле, а \mathbf{M} - полный магнитный момент образца. Использование этой формулы выходит за рамки данного курса. В разделе термодинамика доказать следующее Для простоты считаем тело однородным. Рассмотрим некоторый термодинамический потенциал, например свободную энергию F . Она является функцией объема, энтропии, и магнитной индукции внутри тела B . Если поле B постоянно, то свободная энергия F имеет минимум.

В равновесии, при малом изменении B для изменения свободной энергии имеем

$$dF = SdT - pdV + HdB/4\pi$$

Если равновесия нет, то

$$\delta F \leq S\delta T - p\delta V + H\delta B/4\pi$$

Пусть процессы в теле происходят таким образом, что постоянны H, T и V . Из последнего соотношения следует, что

$$d(F - HB/4\pi) \leq .0$$

Поэтому в теле могут происходить только такие процессы, что потенциал $F - HB$ может только уменьшаться и в состоянии равновесия он имеет минимум

Как правило теоретики вы водят (либо постулируют) вид свободной энергии F , как функции магнитной индукции B . В тоже время, экспериментаторы работают с системами, помещенными во внешнем поле, которым они и управляют. Если образец - длинный цилиндр, то магнитное поле внутри образца численно равно внешнему магнитному полю. Тогда в условиях эксперимента минимум имеет потенциал \mathcal{G} .

схема вычислений Поэтому схема вычислений такова:

Берется потенциал \mathcal{F} .

Преобразованием Лежандра он приводится к виду $\mathcal{F} - \int dV \frac{HB}{4\pi}$.

Температура, напряженность (внешнего) магнитного поля, объем (давление) считаются заданными.

Далее ищется экстремум \mathcal{G} .

В результате получается распределение магнитной индукции в образце, что и требуется. (чe????)

уравнение Лондонов

Опишем простейшую физическую модель, объясняющую эффект Мейсснера.

вывод уравнения Лондонов из минимума свободной энергии просто посчитаем свободную энергию и найдем ее минимум.

Запишем полную свободную энергию сверхпроводника в виде

$$\mathcal{F} = \int F_s dV + E_{kin} + E_{mag}$$

здесь F_s - плотность свободной энергии сверхпроводящих электронов в отсутствие тока, E_{kin} - кинетическая энергия электронов, ответственных за сверхпроводящий ток:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int n_s m v^2 dV$$

В рамках макроскопической электродинамики имеем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Запишем \mathbf{j}_s по определению и через магнитное поле:

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = n_s e \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}$$

Тогда

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int n_s m \left(\frac{c}{4\pi n_s e} \text{rot } \mathbf{B} \right)^2 dV$$

Магнитная энергия

$$E_{mag} = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} dV$$

связана с энергией магнитного поля, индуцированного сверхпроводящими токами.

Здесь m, e - соответственно масса и заряд электрона, n_s – концентрация сверхпроводящих электронов.

Из (17),(18),(19) следует, что

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\mathcal{F}_s + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}^2 + \lambda_L^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2) \right]$$

где

$$\lambda_L = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{1/2}$$

Проварьируем свободную энергию по магнитному полю \mathbf{h} :

$$\delta \mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{B} \delta \mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot } \mathbf{B} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{B}) dr$$

Попробуем вытащить $\delta \mathbf{B}$.

Второе слагаемое преобразуется:

$$\text{rot } \mathbf{B} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{B} = \delta \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \text{div}[\text{rot } \mathbf{B} \times \delta \mathbf{B}]$$

потому что

$$\text{arot } \mathbf{b} = \text{brot } \mathbf{a} - \text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \quad \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{b} = \delta \mathbf{B}$$

Учтем, что член с дивергенцией преобразуется в поверхностный интеграл, равный нулю (так как на поверхности равна нулю вариация $\delta \mathbf{B}$). (?????? пока не запаривался, потом досмотрю, почему?)

Тогда оставшийся объемный интеграл должен равняться нулю при произвольном $\delta \mathbf{B}$ внутри тела.

Поэтому

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = 0$$

Это уравнение называется уравнением Лондонов и является следствием существования незатухающих токов.

границы применимости уравнения Лодонов При выводе уравнения Лондонов мы неявно использовали тот факт, что размер сверхпроводящих электронов много меньше глубины проникновения λ .

Если это не так, и размер электрона $\xi > \lambda$, то в зоне действия магнитного поля находится только "часть электрона" и поэтому уравнение Лондонов несправедливо.

Приведем простейшие физические соображения, как можно прийти к рассмотрению задачи на этом уровне.

Очевидно, что при температуре T_c за сверхпроводимость должны отвечать электроны с энергией порядка T_c .

В соответствии с основными положениями теории ферми-жидкости характерный импульс сверхпроводящих электронов таков, что (????)

$$\begin{aligned} E_F - T_c &< \frac{p^2}{2m} < E_F + T_c \\ T_c &\ll E_F \end{aligned}$$

где E_F – энергия Ферми.

Элементарные возбуждения в такой системе представляют собой волновые пакеты шириной $\delta p \sim T_c/v_F$, где $v_F = p_F/m$. Тогда характерная протяженность волнового пакета равна

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{T_c}$$

При вы воде уравнения Лондонов неявно предполагалось, что этот волновой пакет целиком подвержен влиянию внешнего магнитного поля.

При этом мы получили, что магнитное поле изменяется на масштабе лондоновской глубины проникновения λ_L .

Если $\xi_0 \gg \lambda_L$, то лишь малая часть волнового пакета подвержена влиянию магнитного поля. Таким образом, уравнение Лондонов справедливо если $\lambda_L \gg \xi_0$. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками второго рода.

Парадоксально, но после открытия эффекта Мейсснера, главным образом, исследовались сверхпроводники первого рода, когда $\lambda_L \ll \xi_0$, для которых уравнение Лондонов не работает.

Оценим глубину проникновения магнитного поля λ в другом предельном случае, когда $\lambda \ll \xi_0$.

В этом случае, только λ/ξ_0 часть волнового пакета подвержена влиянию магнитного поля, то есть участвует в формировании незатухающего тока. Для оценки можно считать, что это эквивалентно уменьшению концентрации n . Тогда вычисление λ можно провести тем же способом, каким получалась лондоновская глубина проникновения, но с концентрацией $n_s \lambda / \xi_0$. В результате получаем самосогласованное уравнение

$$\lambda = \left(\frac{mc^2 \xi_0}{4\pi n_s e^2 \lambda} \right)^{1/2}$$

Отсюда слеует, что

$$\lambda = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^{1/3} \gg \lambda_L$$

Мы видим, что квантовомеханические соображения позволяют чисто феноменологически ввести параметр ξ_0 .

Пойдем немного дальше.

Пусть сверхпроводящие электроны описы ваются некоторой эффективной волновой функцией Ψ . Квадрат модуля этой функции определяет плотность сверхпроводящих электронов. Это плотность обранцается в нуль в нормальном металле и увеличиваясь на NS гра- нице достигает своего максимального значения в толще сверхпроводника. Таким образом на границе $|\nabla \Psi|^2 \neq 0$.

Из квантовой механики известно, что эта величина пропорциональна плотности кинетической энергии.

Кинетическая энергия - положительна и дает положительный вклад в поверхностную энергию.

Таким образом, можно ожидать, что последовательный учет неоднородности позволит изменить знак результирующего поверхностного натяжения на $\sigma > 0$ и расслоение станет невыгодным.

эффект Мейсснера из уравнения Лондонов Покажем, как из уравнения Лондонов следует эффект Мейсснера.

простейший случай уравнения лондонов - это когда два ротора становятся тупо второй производной. (Как???)

ну и в таком случае понятно, что решение - это затухающая экспонента, то есть простейшее явление проникновения поля в тело можно описать.

поэтому оно и сойдет для эффекта Мейсснера.

Ограничевшись рассмотрением цилиндра большого радиуса, его границу можно считать полоской. Пусть продольное внешнее магнитное поле B_0 направлено по оси z , а нормаль к поверхности сверхпроводника направлена по оси x .

Тогда уравнение Лондонов (???) перепишется в виде:

$$B_z - \lambda_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z = 0$$

Магнитная индукция, конечная внутри сверхпроводника, имеет вид

$$B_x = B(0) e^{-\frac{x}{\lambda_L}} = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$$

что описывает эффект Мейсснера.

Во избежание недоразумений напомним, что в макроскопической электродинамике непрерывными являются тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля и нормальная составляющая магнитной индукции.

При этом тангенциальная составляющая магнитной индукции может, вообще говоря иметь скачок, связанный с существованием поверхностных токов.

Если интересоваться масштабами, много большими глубины проникновения, масштаб λ следует считать бесконечно малым.

Это приводит к тому, что плотность сверхпроводящих токов обращается в бесконечность и их следует рассматривать как поверхностные.

Наличие поверхностных токов приводит к скачку тангенциальной составляющей магнитной индукции.

Заметим попутно, что при таком рассмотрении не определена напряженность магнитного поля внутри сверхпроводника.

В самом деле, магнитное поле определяется как вариация энергии по магнитной индукции. В сверхпроводнике $B \equiv 0$. (??)

Поэтому вариационная производная не определена.

Из уравнений (24), (21) и (15) имеем

$$\text{rot } \mathbf{j}_s = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{B}$$

Введем потенциал A

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

Этот потенциал определен неоднозначно, с точностью до градиента некоторой функции $\nabla\phi$. Тогда

$$\mathbf{j}_s = -\frac{ne^2}{mc} (\mathbf{A}' - \nabla\phi)$$

\mathbf{A}' - один из возможных потенциалов.

Если потребовать, чтобы $\text{div } \mathbf{j}_s = 0$, то $\text{div}(\mathbf{A}' - \nabla\phi) = 0$.

Поэтому можно вектор-потенциал выбрать так, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0$$

Такой выбор потенциала A называется лондоновской калибровкой.

В этой калибровке получаем

$$\mathbf{j}_s = -\frac{ne^2}{mc} \mathbf{A}$$

Из уравнения Максвелла следует, что

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Подставляя это выражение в уравнение Лондонов получим еще одну форму уравнения Лондонов

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{A}, \quad \lambda_L = \frac{4\pi n e^2}{c m c}$$

Итак, характерный масштаб затухания магнитного поля и токов в глубь сверхпроводника определяется параметром λ_L , называемым лондоновской глубиной проникновения.

(по факту тупое преобразование уравнения и все, и что тут такого? перепишу наверное с позиции, что это очевидно)

недостатки теории Лондонов Обсудим теперь основные недостатки теории Лондонов. В первую очередь, обратим внимание, что оно не является калибровочно инвариантным. Это основной, так сказать, "фундаментальный" недостаток теории Лондонов.

Но из теории Лондонов следует, что во внешнем магнитном поле сверхпроводнику всегда термодинамически выгодно расслоиться на максимально мелкую сеть чередующихся нормальных и сверхпроводящих областей, так называемое промежуточное состояние.

Это означает, что на границе поверхностное натяжение $\sigma_{ns} < 0$.

Докажем это, используя уравнение Лондонов.

Пусть образец находится во внешнем магнитном поле.

Для простоты рассмотрим плоскую NS -границу между нормальной и сверхпроводящей частями образца.

Граница расположена перпендикулярно оси x . В левом полупространстве $x < 0$ имеем сверхпроводник, справа при $x > 0$ - нормальный металл.

Металл считаем немагнитным.

Поэтому в нем магнитная индукция равна магнитному полю.

Из условия существования нормальной и сверхпроводящей фаз следует, что в нормальной фазе автоматически устанавливается магнитное поле $H = H_c$.

Поэтому можно считать, что мы имеем дело с образцом находящимся в заданном внешнем поле напряженностью H_c .

Тогда минимум должен иметь термо динамический потенциал G :

$$G = F - \frac{BH_c}{4\pi}$$

Вдали от границы (где $B = 0$!) в сверхпроводящей части имеем

$$G_s = F_s(\mathbf{B}) - \frac{BH_c}{4\pi} \Big|_{\mathbf{B}=0} = F_{s0}$$

Вдали от границы в нормальной фазе $H = B = H_c$.

Поэтому

$$G_n = F_n + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH_c}{4\pi} = F_n - \frac{H_c^2}{8\pi}$$

Учитывая (6), получаем, что, как и следовало ожидать в равновесии

$$G_s = G_n$$

Магнитное поле проникает в сверхпроводник на глубину λ и изменяет свободную энергию сверхпроводящей области.

Для анализа рассмотрим плоскую границу между нормальной и сверхпроводящей фазами.

Напомним, что если нормальная и сверхпроводящая фазы сосуществуют только если магнитное поле в нормальной фазе равно H_c .

Термодинамический потенциал Гиббса сверхпроводящего полупространства ($x > 0$) имеет вид

$$\mathcal{G} = \int_{x>0} dV \left[F_{s0} + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{H_c B}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} \left(\frac{dB}{dx} \right)^2 \right]$$

Здесь первый член - плотность свободной энергии Гиббса $G_s = F_{s0}$ в отсутствие магнитного поля, второй - энергия магнитного поля в сверхпроводнике, третий - аналог члена НВ в (14), последний - кинетическая энергия сверхпроводящих токов.

Если бы магнитное поле не проникало в сверхпроводник, то последние три члена обращались бы в нуль.

Из решения уравнения Лондонов следует, что $B = H_c \exp(-x/\lambda)$ (см.(25)).

Подставляя это выражение в потенциал Гиббса, вычислим поправку к свободной энергии за счет частичного проникновения магнитного поля в сверхпроводник:

$$\Delta\mathcal{G} = \gamma S$$

где S - площадь поверхности, σ - поверхностное натяжение

$$\sigma = \int_{x>0} dx \left[\frac{B^2}{8\pi} - \frac{H_c B}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} \left(\frac{dB}{dx} \right)^2 \right] = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda$$

Отсюда следует, что образование поверхности энергетически выгодно и упомянутое расслоение должно происходить всегда!

(????)

Такое расслоение действительно наблюдается, но далеко не для всех сверхпроводников и скорее является исключением, чем правилом.

Если с отсутствием калибровочной инвариантности в теории Лондонов экспериментаторы еще могли смириться, то с необходимостью расслоения - нет.

Пришлось теоретикам искать причину, по которой в большинстве сверхпроводников образование поверхности между сверхпроводящим и нормальным состоянием невыгодно.

Во введении мы определили сверхпроводники первого рода как вещества, в которых имеет место полный эффект Мейсснера - магнитное поле в них не проникает.

Как будет показано ниже для них $\sigma > 0$ и уравнение Лондонов несправедливо.

В противоположном случае $\sigma < 0$ мы имеем дело со сверхпроводниками второго рода, для которых имеет место смешанное (вихревое) состояние.

Связь между В и Н в промежуточном состоянии

Рассмотрим сверхпроводник первого рода.

Казалось бы, поскольку в нем, $\sigma > 0$, то он должен находиться в одиородном состоянии. Несложный анализ показывает, что в этом случае форма образца существенно определяет распределение магнитного поля внутри сверхпроводника.

В сверхпроводниках первого рода глубина проникновения $\lambda = 0$, если он находится во внешнем магнитном поле $H < H_c$. Рассмотрим сверхпроводящий шар, помещенный в изначально однородное магнитное поле.

Применим уравнение Максвелла $\text{div}B = 0$ к области, вблизи одного из полюсов. В силу симметрии задачи, в этом месте магнитное поле может быть направлено только по

нормали к поверхности. Но поскольку в сверхпроводнике $B = 0$ то и снаружи вблизи полюса магнитное поле $H = 0$.

Рассмотрим теперь область вблизи экватора. В силу симметрии залачи магнитная индукция как внутри, так и вне шара по-прежнему может быть направлена параллельно оси, соединяющей полюса. Внутри пара $B = 0$. А вне шара может существовать ненулевая тангенциальная составляющая магнитного поля. В этом случае условие $\text{div}B = 0$ не накладывает на внешнее тангениальное поле никаких ограничений. Поэтому экваториальный участок находится в ненулевом магнитном поле. Итак, при движении вдоль меридиана, магнитное поле вблизи поверхности шара изменяется от нуля до некоторого максимального, пропорционального исходному внешнему полю.

Будем постепенно увеличивать внешнее поле. Тогда в тот момент, когда на экваторе поле достигло значение H_c в оствльных точках поверхности шара поле меньше H_c . Это означает, что экваториальная часть шара должна перейти в нормальное состояние (магнитное поле разрушило сверхпроводимость), в то время как часть шара ближе к полюсам может сохранять сверхпроводимость. То есть мы имеем сосуществование двух фаз - нормальной и сверхпроводящей. Из теории фазовых переходов следует, что это в этом случае имеет место фазовый переход первого рода.

Можно поставить залачу, какая часть образца находится в сверхпроводящей фазе в магнитном поле. Рассмотрим, для простоты плоскую пластинку в нормальном внешнем поле. В этом случае, сколь угодно слабое магнитное поле переводит пластину в промежуточное состояние. В самом деле, если пластина находится в однородном сверхпроводящем состоянии, то в ней $B = 0$.

Очевидно, что, поскольку вне пластины $B \neq 0$, то это несовместимо с условием $\text{div}B = 0$.

В то же время пластина не может находиться полностью в нормальном состоянии, так как проникшее в нее поле слабо, чтобы разрушить сверхпроводимость.

Таким образом пластина находится в промежуточном состоянии.

Очевидно, что в нормальной фазе в равновесии напряженность магнитного поля есть H_c и совпадает в ней с магнитной индукцией.

В сверхпроводящей фазе магнитная индукция равна нулю.

Пусть вне образца магнитное поле, равное магнитной индукции, есть H .

Тогда, в силу сохранения магнитного потока через поверхность ($\text{div} B = 0!$) имеем

$$H = H_c(1 - \rho)$$

где ρ - доля пластиинки, находящейся в сверхпроводящем состоянии. Переход из промежуточного в нормальное состояние имеет место, если $\rho = 0$, что происходит при $H = H_c$. Несложно показать, что длинный цилиндр из сверхпроводника первого рода в продольном магнитном поле в промежуточное состояние не переходит никогда. То есть магнитное поле в него не проникает.

(???? тупой параграф с тупыми примерами)

10.1.11 Теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау по Михеенкову или Пухову

мотивация (объясняю, насколько это круто)

про саму теорию...

Из уравнений Гинзбурга-Ландау следуют важнейшие проявления сверхпроводимости: эффект Мейсснера, квантование потока и существование вихрей Абрикосова.

общие соображения о подходе Гинзбурга-Ландау (пока просто пара соображений)

Вспомним, что нам известно.

В сверхпроводящем состоянии энтропия меньше, чем в нормальном. (?? откуда)

Кроме того, скачок испытывает теплоемкость при переходе из нормального в сверхпроводящее состояние.

Налицо - признаки фазового перехода второго рода.

Поэтому естественно попытаться описать переход в сверхпроводящее состояние в рамках подхода Ландау.

Исследуя область применимости уравнения Лондонов, нам понадобилось искусственно ввести параметр ξ_0 – размер волнового пакета, носителя сверхтока.

Учет изменения свойств сверхпроводника на масштабах ξ_0 натолкнул нас возможную причину того, что $\sigma > 0$.

???? И наконец, выражение (26) не является калибровочно инвариантным.

Эти соображения дают ключ к построению последовательной теории сверхпроводимости. (?????)

В теории фазовых переходов Ландау понятие параметра порядка является определяющим.

Для описания перехода в сверхпроводящее состояние Гинзбург и Ландау в качестве параметра порядка ввели макроскопическую волновую функцию сверхпроводящих электронов Ψ , причем $n_s = 2|\Psi|^2$ имеет смысл плотности сверхпроводящих электронов, равной нулю в нормальной фазе.

Происхождение множителя 2 следующее. Из микроскопической теории следует, что за сверхпроводимость ответственны так называемые куперовские пары - пары электронов с противоположными импульсами.

Внутри пары электроны ведут себя сильно коррелировано и фактически сверхпроводящей частицей является куперовская пара.

Поэтому плотность сверхпроводящих электронов n_s в два раза больше плотности куперовских пар $|\Psi|^2$.

Пусть вблизи температуры перехода T_c , когда плотность сверхпроводящих электронов мала, то есть мало $|\Psi|$.

основы теории Гинзбурга-Ландау

алгоритм работы с теорией Гинзбурга-Ландау что тут дальше будем делать и в какой последовательности?

Задача состоит в том, чтобы найти такое пространственное распределение Ψ и A внутри сверхпроводника, что потенциал Гиббса имеет минимум.

итоговая теория в конце вкратце суть впишу сюда

уравнение гинзбурга-ландау

(тут только уравнения и свойства)

вывод уравнений из функционала Гинзбурга-Ландау Потенциал Гиббса во внешнем магнитном поле H_0 вблизи T_c можно представить в виде разложения по малому параметру Ψ :

$$G_{sh} = G_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

G_n – плотность свободной энергии в нормальном состоянии.

Два первых члена в правой части описывают переход части электронов в сверхпроводящее состояние.

Остальные члены – новые и в теории ферромагнетизма они не возникали.

Член $\frac{1}{4m} \left| (\hat{\mathbf{p}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}) \Psi \right|^2$ описывает пространственную неоднородность функции Ψ и взаимодействие с магнитным полем, имеющим вектор потенциал \mathbf{A} .

Этот член аналогичен выражению для кинетической энергии хорошо известному из квантовой механики. Он описывает кинетическую энергию сверхпроводящих пар электронов в магнитном поле. Имея в виду дальнейшее сравнение с экспериментом, мы с самого начала учитываем, что сверхток переносится парами электронов, что объясняет появление удвоенных масс электрона и заряда в (33).

Предпоследний член – энергия магнитного поля B .

И, наконец, последний член характерен для потенциала Гиббса в магнитном поле.

Поэтому ищем минимумы

минимум в случае отсутствия магнитного поля В однородном случае в отсутствие внешнего поля минимум потенциала (33) достигается при условии

$$\frac{\partial G_{s0}}{\partial \Psi} = \alpha \Psi^* + \beta \Psi (\Psi^*)^2 = 0$$

Откуда следует, что решение этого уравнения

$$|\Psi_0|^2 = -\alpha/\beta$$

Таким образом,

$$G_{s0} = G_n - \frac{\alpha^2}{2\beta}.$$

Сравнивая это выражение с (6), получаем связь параметров, определяющих функционал Гинзбурга-Ландау (33) с критическим термодинамическим полем.

$$H_c^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}$$

Чтобы теория была калибровочно инвариантной, нужно потребовать, чтобы при преобразовании вектор-потенциала определенным образом преобразовывалась и волновая функция Ψ .

Сделаем одновременное преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \nabla \varphi \\ \Psi &= \Psi' \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \varphi \right], \quad \Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e} \end{aligned}$$

Это преобразование не меняет величины микроскопического магнитного поля

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$$

Легко также убедиться, что при преобразовании (37) – (38) имеем

$$\left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right| = \left| -i\hbar \nabla \Psi' - \frac{2e}{c} \mathbf{A}' \Psi' \right|$$

Не изменяются также и остальные члены в функционале Гинзбурга-ландау (33).

Говорят, что выражение для энергии Гиббса (33) является градиентно (или калибровочно) инвариантным.

минимум в случае присутствия магнитного поля Найдем, при каких значениях Ψ и \mathbf{A} свободная энергия Гиббса

$$\mathcal{G}_{sH} = \mathcal{G}_n + \int dV \left[\alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{4m} \left| -i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right|^2 + \frac{(\text{rot } \mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_0}{4\pi} \right]$$

имеет минимум?

Первое условие минимума

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = 0$$

Вычислим его:

$$\delta_{\Psi^*} \mathcal{G}_{sH} = \int dV \left[\alpha \Psi \delta \Psi^* + \beta \Psi |\Psi|^2 \delta \Psi^* + \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \right]$$

Подчеркнем, что действие оператора ∇ ограничено соответствующими круглыми скобками.

Введем обозначение

$$\mathbf{p} = \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)$$

Тогда последнее слагаемое перепишется в виде

$$\int dV \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) (\mathbf{p} \Psi)$$

Преобразуем выражение:

$$\int dV (\nabla \delta \Psi^*) (\mathbf{p} \Psi) = \int dV (\nabla \delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi)) - \int dV \delta \Psi^* \nabla (\mathbf{p} \Psi)$$

Первый интеграл преобразуем в интеграл по поверхности сверхпроводника

$$\int dV \nabla (\delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi)) = \oint d\mathbf{S} \delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi)$$

Поэтому в вариации с точностью до поверхностного члена выше можно сделать замену

$$(\nabla \delta \Psi^*) (\mathbf{p} \Psi) \rightarrow -\delta \Psi^* \nabla (\mathbf{p} \Psi)$$

Тогда последний член будет иметь вид:

$$\int dV \frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \delta \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \delta \Psi^* \right) (\mathbf{p} \Psi) = \int dV \frac{1}{4m} \delta \Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi$$

И в итоге вариация запишется как:

$$\delta_{\Psi^*} g_{sH} = \int dV \left[\alpha |\Psi|^2 + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \right] \delta \Psi^* + \oint d\mathbf{S} \delta \Psi^* (\mathbf{p} \Psi) = 0$$

Последнее равенство должно быть справедливым при произвольном $\delta \Psi^*$.

Получаем первое уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = 0$$

и граничное условие

$$\left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \mathbf{n} = 0$$

Проварьируем теперь энергию Гиббса по вектор-потенциалу \mathbf{A} :

$$\delta_A g_{sH} = \int dV \delta_A \left[\frac{1}{4m} \left(i\hbar \nabla \Psi^* - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi^* \right) \left(-i\hbar \nabla \Psi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) + \frac{\text{rot } \mathbf{A} \text{ rot } \delta \mathbf{A}}{4\pi} - \frac{\mathbf{H}_0}{4\pi} \text{ rot } \delta \mathbf{A} \right]$$

$$\delta_A g_{sH} = \int dV \frac{1}{4m} [] = 0 \quad (10.1)$$

Последний член преобразуем с помощью тождества

$$\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

В результате, преобразуя член с дивергенцией в поверхностный интеграл, получим

$$\int dV \frac{\text{rot } \mathbf{A} \text{ rot } \delta \mathbf{A}}{4\pi} = \int dV \delta \mathbf{A} \frac{\text{rotrot } \mathbf{A}}{4\pi} - \oint d\mathbf{S} [\text{rot } \mathbf{A} \times \delta \mathbf{A}]$$

На поверхности сверхпроводника магнитное поле считается заданным, где, следовательно $\delta \mathbf{A} = 0$.

Подставляя это, внутри сверхпроводника получим

$$\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{\text{rotrot } \mathbf{A}}{4\pi} = 0$$

Вспомним теперь, что

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Уравнение Максвелла гласит

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Тогда можем получить выражение для сверхпроводящего тока:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2$$

Физически этот результат интерпретируется следующим образом.

В квантовой механике электрический ток, связанный с одной частицей с зарядом $2e$ и массой $2m$ выражается через оператор скорости следующим образом:

$$\mathbf{j} = 2e\psi^* \mathbf{v} \psi = \frac{2e}{2m} \psi^* \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi$$

Если $|\Psi|^2$ имеет смысл плотности электронных пар, то полную плотность сверхпроводящего тока имеет смысл представить в виде

$$\mathbf{j}_s = 2e\Psi^* \mathbf{v} \Psi = \frac{e}{m} \Psi^* \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi$$

что фактически совпадает с (51).

Перейдем к безразмерной функции ψ , обозначив

$$\psi = \Psi / \Psi_0, \quad |\Psi_0|^2 = \frac{n_s}{2} = |\alpha|/\beta$$

Введем также обозначения

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|\alpha|}$$

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} = \frac{mc^2\beta}{8\pi e^2 |\alpha|}$$

Тогда уравнения Гинзбурга-Ландау перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0 \\ \text{rotrot } \mathbf{A} &= -i \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Напомним, что $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}$

Пренебрежем неоднородностью n_s и представим волновую функцию ψ в виде $\psi = |\psi| e^{i\theta}$.

Тогда второе уравнение ГЛ перепишется в виde

$$\text{rotrot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

Уравнение (58), в отличие от уравнения Лондонов (27), является калибровочно инвариантным.

Член $\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta$, обеспечивающий эту инвариантность, является существенно квантовым.

уравнения Их два.

Первое:

$$\xi^2 \left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0$$

Второе:

$$\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\Psi|^2 + \frac{\text{rotrot } \mathbf{A}}{4\pi} = 0$$

Обсудим их свойства.

Первое.

...

Второе.

похоже на уравнение Максвелла...

Связь a, b и c с микроскопическими параметрами сверхпроводника Коэффициенты a и b уже оценивались в параграфе 3.

Проделаем это еще раз, другим способом. Соотношения $a \approx T_c/\varepsilon_F$ и $b \approx T_c^2/n\varepsilon_F$ получаются, если воспользоваться формулами (13.4) и (13.15) при $T = 0$. В последнюю нужно подставить размер куперовской пары ξ_0 , полученный из соотношения неопределенностей $\xi_0 \cdot \delta p \sim \hbar$, связывающего его с неопределенностью импульса $v_F \cdot \delta p \sim \Delta_0$.

При этом следует учесть, что $\Delta_0 \approx T_c$ и $\varepsilon_F \sim mv_F^2 \sim \hbar^2 n_s^{2/3}/m$. Соотношение $c = \hbar^2/4m$ следует из сравнения функционалов (10.31) и (13.2). Сделанные оценки a, b и c позволяют определить область применимости теории Гинзбурга-Ландау.

критерий применимости теории Гинзбурга-Ландау (уже про это есть, известное число Г-Л, но тут на языке сверхпроводимости удобнее получается.)

Теория Гинзбурга-Ландау является типичной теорией среднего поля.

Учет флюктуаций ограничивает пределы применимости таких теорий.

Критерием применимости является малость числа Гинзбурга-Леванюка $Gi = T_c b^2 / ac^3$.

Подставляя $a = T_c / \varepsilon_F$, $b = T_c^2 / n \varepsilon_F$ и c , для числа Гинзбурга-Леванюка получаем оценку $Gi \approx (T_c / \varepsilon_F)^4$.

Таким образом, область применимости теории среднего поля в сверхпроводниках определяется критерием

$$Gi = \left(\frac{T_c}{\varepsilon_F} \right)^4 \ll 1$$

Для реальных сверхпроводников число, стоящее в (13.33), как минимум на десять порядков меньше единицы.

Это значит, что флюктуационная область на много порядков меньше тех вариаций температуры, которые можно контролировать в эксперименте.

Таким образом, теория Гинзбурга-Ландау для сверхпроводников применима с огромной точностью.

Флюктуационная теплоемкость сверхпроводника Используя уравнения Гинзбурга-Ландау, можно определить флюктуационную поправку к Ω -потенциалу, энтропии и теплоемкости. Это позволяет еще раз независимым образом установить область применимости уравнений Гинзбурга-Ландау.

Решение этой задачи основывается на ранее (см. лекцию 10) полученной формуле для флюктуационной поправки к теплоемкости:

$$\Delta C_\phi = \frac{T_c^2 V a^{3/2}}{16 c^{3/2} \pi \sqrt{T - T_c}}$$

Следует только правильно выразить величины a и c через микроскопические параметры сверхпроводника. Выше мы видели, что в функционале (13.2) $c = \hbar^2 / 4m$ и $a = T_c m \pi^2 / p_F^2$. Сравнивая флюктуационную теплоемкость (13.38) со скачком теплоемкости $\Delta C \sim C(T_c) \approx g_F T_c / \varepsilon_F$, снова получаем критерий (13.37).

Граница между нормальной и сверхпроводящей фазами

Рассмотрим границу между нормальной и сверхпроводящей фазой в сверхпроводнике второго рода.

Если бы граница была резкой, то, поскольку $G_n = G_s$, наличие границы не вносило бы вклада в свободную энергию.

Фактически всегда имеется переходный слой от нормального состояния к сверхпроводящему.

Мы уже знаем, что сверхпроводник характеризуется двумя масштабами длин ξ_0 – характерный квантовый масштаб – размер куперовских пар, λ – глубина проникновения магнитного поля в образец.

В переходном слое свободная энергия изменяется (по сравнению с $G_s = G_n$) по двум причинам.

Во первых, магнитное поле частично, на глубину λ , проникло в сверхпроводник.

Во вторых, слой толщиной ξ_0 подвержен влиянию нормальной части образца, из-за чего в этом объеме не происходит "полная" конденсация куперовских пар.

Характерное значение плотности магнитной энергии в нормальной фазе и характерная энергия конденсации в сверхпроводящей фазе $\frac{H_c^2}{8\pi}$

Рассмотрим вначале сверхпроводник первого рода.

Выше в случае сверхпроводников второго рода с помощью уравнения Лондонов было вычислено поверхностное натяжение (32).

Аналогично, уравнения Гинзбурга-ландау могут быть использованы для вычисления поверхностного натяжения в случае сверхпроводников первого рода.

Вместо этой, относительно простой, но громоздкой процедуры, получим ответ качественным образом.

В сверхпроводнике первого рода $\xi_0 \gg \lambda$. (Уравнение Лондонов при этом не работает).

В большей части переходного слоя толщиной $\xi_0 - \lambda \approx \xi_0$ магнитное поле отсутствует, а плотность сконденсировавшихся электронов меньше, чем в истинно сверхпроводящей фазе, так как в переходной области происходит плавное изменение параметра порядка ψ от 1 до 0.

Поэтому в переходном слое энергия больше по сравнению с $G_n = G_s$ на величину

$$\sigma_{ns} = \frac{H_c^2}{8\pi} \xi_0 > 0$$

Фактически это есть превышение энергии Гиббса на единицу поверхности и поэтому называется поверхностным натяжением.

Итак в сверхпроводниках первого рода образование границы энергетически невыгодно.

Аналогичные соображения позволяют установить знак поверхностного натяжения и в случае сверхпроводника второго рода, когда $\xi_0 \ll \lambda$.

В этом случае в большей части переходного слоя $\lambda - \xi_0 \approx \lambda$ параметр порядка равен нулю.

В то же время магнитное поле в нем меняется от $\frac{H_c^2}{8\pi}$ до нуля. То есть в среднем в песчанико нормальным металлом мы имеем выигрыш в энергии и, следовательно

$$\sigma_{ns} = \frac{H_c^2}{8\pi} \lambda < 0$$

Подчеркнем лишний раз, что описанные выше соображения о знаке поверхностного натяжения существенно основаны на равенстве (30).

Итак, возможность образования границы между нормальной и сверхпроводящей фазами качественно определяется выражением

$$\sigma \approx \frac{H_c^2}{8\pi} (\xi_0 - \lambda)$$

Если $\sigma > 0$, то образование поверхности невыгодно, в противном случае - образование поверхности энергетически выгодно. Строгий анализ, выполненный на основе уравнений Гинзбурга-Ландау, показывает, что если параметр

$$x = \lambda/\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

то образование поверхности энергетически выгодно.

(???????)

Квантование магнитного потока

Из уравнения

$$\text{rotrot } \mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)$$

следует интересный эффект - квантование магнитного потока.

Пусть в массивном сверхпроводнике имеется полость.

Поскольку он не является односвязным, то в сверхпроводнике могут существовать поверхностные сверхпроводящие токи, приводящие к наличию магнитного потока в полости.

Выберем в толще сверхпроводника замкнутый контур, охватывающий эту полость. В толще сверхпроводника магнитное поле $B = \operatorname{rot} A = 0$.

Следовательно, интеграл по этому контуру от левой части уравнения (58) равен нулю. Таким образом,

$$\oint \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta - \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = \mathbf{0}$$

По своему физическому смыслу θ , фаза волновой функции, должна обеспечивать однозначность последней.

Это возможно, если изменение θ при обходе по замкнутому контуру кратно 2π . Интеграл от вектора потенциала A , преобразованный к интегралу от $\operatorname{rot} A$ по поверхности, определяет магнитный поток через полость

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi$$

Таким образом, получаем

$$\Phi = \oint \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \theta d\mathbf{l} = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}, n - \text{целое.}$$

Таким образом, магнитный поток в полости квантуется, а квантом является параметр Φ_0 .
(я хз?????)

О важности топологии сверхпроводника (????) (не был бы он тором - не было бы квантования. раскрою это, там про это есть типичный вопрос.)

характерные масштабы длин в сверхпроводнике

Выясним физический смысл ξ Нанесем, на чистую плоскую поверхность сверхпроводника тонкий слой нормального металла.

Вблизи границы в сверхпроводнике из-за контакта с металлом плотность сверхпроводящих электронов немножко понизится, то есть параметр $|\psi|$ отличается от единицы, которой он равен в толще сверхпроводника. Поскольку мы рассматриваем односвязный сверхпроводник, то фаза волновой функции однозначна.

Соответствующим калибровочным преобразованием ее можно "загнать" в вектор-потенциал, сделав саму волновую функцию вещественной.

Пусть ось x перпендикулярна к поверхности. Тогда первое уравнение ГЛ в отсутствие магнитного поля запишется

$$-\xi^2 \psi'' - \psi + \psi^3 = 0$$

Будем считать, что слой нормального металла столь тонок, что ψ вблизи границы мало отличается от единицы и решение уравнения (64) будем искать в виде

$$\psi = 1 - \varepsilon(x), \varepsilon(x) \ll 1$$

В линейном по ε приближении получим

$$\xi^2 \varepsilon'' - 2\varepsilon = 0$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(0) e^{-\frac{\sqrt{2}x}{\xi}}$$

Таким образом, параметр ξ есть та характерная длина, на которой происходит изменение параметра порядка ψ .

Физический смысл второго параметра λ , фигурирующего в теории Г.Л, следует из уравнения (58).

Как и в теории Лондонов, он определяет глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Из теории фазовых переходов Ландау следует, что вблизи температуры перехода параметр $|\alpha| \propto (T_c - T)$. Таким образом, вблизи T_c

$$\xi \propto (T_c - T)^{-1/2}, \lambda \propto (T_c - T)^{-1/2}$$

Параметр $\kappa = \lambda/\xi$ В теории Г-Л важную роль играет параметр

$$\kappa = \lambda/\xi = \frac{mc}{\hbar e} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2}$$

не зависящий от температуры.

В разделе 13.7 было показано (????), что если этот параметр $\kappa \gg 1$, то сверхпроводник хорошо описывается уравнением Лондонов и квантовые эффекты несущественны.

В этом случае поверхностное натяжение на границе сверхпроводящей и нормальной фаз отрицательное и образование границы невыгодно.

Анализ уравнений ГЛ приводит к такому же выводу, при этом пороговое значение для κ для возникновения сверхпроводимости второго рода есть $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$.

10.1.12 Микроскопическая теория БКШ по Михеенкову

(михеенков лекции)

Основы

введение До сих пор мы только описывали явление сверхпроводимости феноменологически.

Сейчас мы переходим к микроскопическому описанию, которое было предложено в 1957г удостоенными Нобелевской премии Бардиным, Купером, Шрифером (теория БКШ) почти полвека спустя после открытия явления.

Боголюбов также внес большой вклад в микроскопическую теорию сверхпроводимости.

Сделаем предварительные оценки. Энергия конденсации куперовских пар на 1см^3 , равна $H_c^2/8\pi \sim 10^5 \text{ erg/cm}^3$, если принять $H_c \sim 10^3$. Число электронов в 1 см^3 по порядку величины равно 10^{22} . Таким образом, за сверхпроводимость отвечает энергия примерно равная $10^5/10^{22} = 10^{-17}$ эрг / электрон = 10^{-5} эВ электрон. Заметим, что современная квантовая теория металлов прекрасно описывает многие их свойства даже в пренебрежении кулоновской энергией, имеющей порядок 1эВ электрон. Таким образом, предстояло объяснить природу явления, которой соответствует энергия на много порядков меньше энергии других взаимодействий, которыми обычно пренебрегают.

Ключом к построению микроскопической теории явилось то обстоятельство, что изотопы одного и того же сверхпроводящего металла имеют разные критические температуры T_c , при этом

$$T_c M^\alpha = \text{const}$$

и для большинства элементов $\alpha \approx 0.5$.

Это наталкивает на мысль, что колебания решетки, фононы, ответственны за сверхпроводимость, поскольку характерная энергия фононов - температура Дебая $-\Theta_D \sim M^{-1/2}$

ХМ.....

коротко о теории БКШ какой гамильтониан, как к чему приходим?

В модели БКШ гамильтониан имеет вид:

$$H = H_0 - g \sum_{kq} a_{k+q,\sigma}^+ a_{-k+q,-\sigma}^+ a_{-k,-\sigma} a_{k,\sigma}, \quad g > 0$$

как из БКШ следует сверхпроводимость хз.

важно.

Гамильтониан и уравнение движения

Теория (?) Полный гамильтониан подсистемы электронов в представлении вторичного квантования для большого канонического ансамбля запишем в форме суммы кинетической энергии электронов и эффективного парного взаимодействия

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\Psi}_\sigma^+(t, \mathbf{r}) \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi - \mu \right) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 \hat{\Psi}_{\sigma'}^+(t, \mathbf{r}_1) \hat{\Psi}_{\sigma'}^+(t, \mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}_{\sigma'}(t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}_1)$$

где $\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})$ – оператор уничтожения электрона в (r, t) представлении, $\hat{\mathbf{p}}$ – оператор импульса электрона, \mathbf{A} , φ – потенциалы электромагнитного поля. В (2) мы пренебрегаем кристаллической структурой тела, $\sigma = \pm 1$ есть удвоенная проекция спина на одну из осей, постоянная μ есть химический потенциал электронов. Вы пишем также оператор полного числа частиц

$$\hat{N} = \int d^3r \hat{\Psi}_\sigma^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})$$

Квантовое поле ферми-частичи удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}_1), \hat{\Psi}_{\sigma'}^+(t, \mathbf{r}_2) \end{cases} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \begin{cases} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}_1), \hat{\Psi}_{\sigma'}(t, \mathbf{r}_2) \end{cases} = 0$$

где $\{\dots\}$ – антикоммутатор. Обратим внимание, что в (2) операторы ферми-поля стоят в иординационном порядке – слева операторы рождения фермионов, справа операторы поглощения.

Потенциал $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ равен сумме кулоновского отталкивания электронов и притяжения, которое возникает как результат взаимодействия летящих навстречу друг другу электронов благодаря обмену фононом или магноном. Обмен фононами – процесс второго порядка, и, согласно теории возмущений, приводит к понижению энергии, т. е. к притяжению (см. раздел****). В металлах кулоновское взаимодействие заэкранировано и сильно ослаблено. Если притяжение превалирует, то металл при достаточно низких температурах переходит в сверхпроводящее состояние. В таких металлах как Cu преобладает отталкивание, и перехода в сверхпроводящее состояния нет. Интересно, что в соединениях, которые называются купратами, причиной сверхпроводимости является сильное взаимодействие электронов проводимости с подсистемой спинов ионов меди во внутрикристаллических плоскостях CuO_2 .

Короткодействующий парный потенциал эффективного притяжения электронов можно заменить на локальны й

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Параметр U_0 имеет размерность энергия хобъем и записывается в виде

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

Величина a называется длиной рассеяния. В случае притяжения величины U_0 и a отрицательны. Итак, гамильтониан (2) принимает вид

$$\hat{H} = \int d^3r \left[\hat{\Psi}_\sigma^+(t, \mathbf{r}) \left(\frac{(\hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi - \mu \right) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} U_0 \hat{\Psi}_\sigma^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \right]$$

Потенциал (6) подразумевает, что взаимодействуют электроны находящиеся в одном месте. В силу принципа Паули, для этого они должны иметь разные проекции спина, что и отражено в (8). Производная по времени от гайзенберговских операторов равна

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) = [\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}), \hat{H}]$$

Вычисляя коммутатор с помощью (4), (5), приходим к "нелинейному уравнению Шредингера":

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{(\hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi - \mu \right) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) + U_0 \hat{\Psi}_{-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})$$

В отсутствие внешнего электромагнитного поля имеем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) + U_0 \hat{\Psi}_{-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})$$

Современная наука не может решить это уравнение точно. Но в случае слабого взаимодействия ($nU_0 \ll \mu$), чтобы найти элементарные возбуждения достаточно нелинейный член учесть приближенно. Рассмотрение его в рамках теории возмущений дает только перенормировку массы электрона и слабое затухание возбужлений. Чтобы увидеть в (10) сверхпроводимость, необходимо в решение задачи ввести илего, которая бы отражала физическую причину качественной перестройки электронной подсистемы, аналогичную той, которая привела к микроскопическому объяснению сверхтекучести бозе-газа. В бозе-газе - это конденсация Бозе-Эйнштейна. Явления конденсации в ферми-газе не может существовать из-за принципа Паули. Но на уровне коллективных бозе-возбуждений конденсация становится возможной. Такими коллективными возбуждениями в ферми-газе являются куперовские пары.

феномен Купера

Теория (?) Прежде, чем заниматься многочастичной проблемой, рассмотрим поведение двух выделенных электронов с локальным взаимодействием, которые двигаются на фоне остальных электронов, заполняющих сферу Ферми.

Это движение описывается стационарным уравнение Шредингера:

$$\left[\left(\frac{\hat{p}_1^2}{2m} - \mu \right) + \left(\frac{\hat{p}_2^2}{2m} - \mu \right) + U_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi(r_1, r_2) = E \psi(r_1, r_2)$$

Роль заполненной ферми-сферы сводится к тому, что из фазового пространства, доступного этим электронам, в силу принципа Паули исключены состояния, находящиеся внутри этой сферы. Тогда волновая функция основного состояния есть функция покоющейся пары

электронов. Эта функция зависит только от расстояния между электронами $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ и может быть представлена в форме

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{k>k_F} \psi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

При суммировании по импульсам учтено, что все состояния внутри поверхности Ферми заняты. Для краткости здесь и далее мы полагаем $\hbar = 1$. Подставляя в(12), получим

$$\sum_{k'>k_F} \left[2 \left(\frac{k'^2}{2m} - \mu \right) - E \right] \psi_{k'} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} + U_0 \sum_{k'>k_F} \psi_{k'} \delta(\mathbf{r}) = 0$$

Умножая это уравнение на $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и интегрируя по объему V , находим

$$V \left[2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) - E \right] \psi_k + U_0 \sum_{k'>k_F} \psi_{k'} = 0$$

отсюда

$$\psi_k = - \frac{U_0/V}{2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) - E} \sum_{k'>k_F} \psi_{k'}$$

Суммируя по импульсам и сокращая на $\sum_{k'>k_F} \psi_{k'}$, получаем интегральное уравнение

$$1 = - \sum_{k>k_F} \frac{U_0/V}{2 \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right) - E}$$

которое сводится к интегралу по $\xi = \frac{k^2}{2m} - \mu$.

Напомним, что

$$\sum_{k>k_F} = \frac{1}{2} V \int_0^{\omega_D} d\xi \nu(\xi), \nu(\xi) — п.лотность состояний.$$

Тор/а

$$-\frac{1}{2} g \int_0^{\omega_D} d\xi \frac{\nu(\xi)}{2\xi - E} = 1$$

Верхний предел интегрирования мы формально обозначили через ω_D , имея в виду, что впоследствии будет установлено (**), что в металле притягиваются электроны вблизи энергии Ферми в корочке толщиной порядка энергии Дебая ω_D . При $g < 0$ существует решение этого уравнения с отрицательным собственное значением $E = -|E|$. Пренебрегая зависимостью плотности $\nu(\xi)$ электронных состояний от энергии возбуждения, получаем

$$\frac{1}{2} |U_0| \nu(0) \ln \frac{2\omega_D}{|E|} = 1$$

Откуда следует, что

$$|E| = \omega_D \exp \left[-\frac{2}{|U_0| \nu(0)} \right]$$

уравнение Боголюбова-де Жена

Теория (?) Двухчастичная задача Купера поучительна в том смысле, что она демонстрирует, что при $U_0 < 0$ электроны вблизи поверхности Ферми связываются в покоящиеся пары - бозе-частицы с нулевым суммарным импульсом.

Этот результат подсказывает, в каком направлении нужно двигаться.

Если таких пар много, то, по аналогии с бозе-газом, можно говорить о конденсате покоящихся пар.

Основной недостаток задачи Купера заключается в том, что она не учитывает тождественности электронов внутри сферы Ферми и двух выделенных электронов.

Из теории атома водорода и теории позитрония (связанного состояния электрон-позитрон) мы знаем, что волновая функция связанного состояния двух частиц есть произведение волновых функций этих частиц.

Поэтому произведение $\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})$ в (11) можно интерпретировать как оператор уничтоженной функции куперовской пары.

Поскольку число куперовских пар есть макроскопическое число, то это произведение можно заменить на с-число.

$$\hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \rightarrow \langle \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{Sp} \rho_N \left\langle N \left| \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \right| N + 2 \right\rangle \right)$$

В отличие от сверхтекучести, здесь мы хотим рассмотреть свойства сверхпроводника при всех температурах вплоть до критической температуры перехода в нормальное состояние.

Поэтому в (16) справа символ усреднения $\langle \dots \rangle$ означает двойное усреднение по когерентному состоянию конденсата куперовских пар и по распределению Гиббса с N -частичной матрицей плотности ρ_N .

В однородном случае среднее (16) не зависит ни от времени, ни от координаты, но, как следует из (5), меняет знак при изменении знака σ . В приближении (16) уравнение (11) формально становится линейным

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) + U_0 \hat{\Psi}_{-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \langle \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \rangle$$

Введем обозначения

$$\xi_k = \frac{k^2}{2m} - \mu, \sigma \Delta = U_0 \langle \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r})\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \rangle$$

Аномальное среднее Δ , вообще говоря, есть комплексная величина. Разложим поле $\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r})$ по плоским волнам $|\mathbf{k}\sigma\rangle = |\mathbf{k}\rangle|\sigma\rangle$ ($|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{ikr}$, $|\sigma\rangle$ - спиновая волновая функция):

$$\hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) = \sum_{k\sigma'} \langle \mathbf{k}\sigma' | r\sigma \rangle \hat{a}_{k\sigma'} = \sum_{k\sigma'} \langle \sigma' | \sigma \rangle \langle k | r \rangle \hat{a}_{k\sigma'} = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikr} \hat{a}_{k\sigma}$$

Тогда из (17) имеем уравнение для $\hat{a}_{k\sigma}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_{k\sigma} = \xi_k \hat{a}_{k\sigma} + \sigma \Delta \hat{a}_{-k-\sigma}^+$$

Диагонализуем это уравнение с помощью преобразования Боголюбова

$$\hat{a}_{k\sigma} = u_k \hat{b}_{k\sigma} - \sigma v_k^* \hat{b}_{-k-\sigma}^+$$

Операторы поглощения и рождения квазичастиц $\hat{b}_{k\sigma}, \hat{b}_{-k-\sigma}^+$ должны быть собственными функциями оператора энергии $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_{k\sigma} = \varepsilon_k \hat{b}_{k\sigma}, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_{-k-\sigma}^+ = -\varepsilon_k \hat{b}_{-k-\sigma}^+$$

Кроме того,.операторы частиц и квазичастиц должны удовлетворять одинаковым правилам антисимметрии

$$\{\hat{a}_{k\sigma}, \hat{a}_{k'\sigma'}^+\} = u_k^2 \left\{ \hat{b}_{k\sigma}, \hat{b}_{k'\sigma'}^+ \right\} + v_k^2 \left\{ \hat{b}_{-k-\sigma}^+, \hat{b}_{-k'-\sigma'} \right\} = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

и, следовательно:

$$u_k^2 + v_k^2 = 1$$

Подстановка (21) в (20) дает

$$(\varepsilon_k - \xi_k) u_k \hat{b}_{k\sigma} + (\varepsilon_k + \xi_k) \sigma v_k^* \hat{b}_{-k-\sigma}^+ = \sigma \Delta \left(u_k^* \hat{b}_{-k-\sigma}^+ + \sigma v_k \hat{b}_{k\sigma} \right)$$

Orciola

$$\begin{aligned} (\varepsilon_k - \xi_k) u_k &= \Delta v_k \\ (\varepsilon_k + \xi_k) v_k &= \Delta^* u_k \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений находим энергию квазичастиц

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$$

и коэффициенты преобразования ⁹

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right)}, v_k = \frac{\Delta^*}{|\Delta|} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right)}, 2u_k v_k^* = \frac{\Delta}{\varepsilon_k}, |u_k|^2 - |v_k|^2 = \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}$$

Преобразование от операторов поглощения и рождения электронов к операторам квазичастиц диагонализует гамильтониан (8), и он равен сумме энергии основного состояния и энергии квазичастиц

$$H_s = E_0 + \sum \varepsilon_k \hat{b}_{k\sigma}^+ \hat{b}_{k\sigma}$$

Итак, конденсация куперовских пар привела к тому, что спектр квазичастиц имеет нулевую энергию. Критерий сверхтекучести Ландау гласит, что вещество является сверхтекучим, если минимальное значение отношения

$$v_c = \min \frac{\varepsilon_k}{k}$$

отлично от нуля. В данном случае

$$v_c = \frac{|\Delta|}{k_F}$$

Следовательно, состояние с конденсатом куперовских пар является сверхтекучим, и максимальная плотность сверхтекущего тока равна

$$j_c = e n \frac{|\Delta|}{k_F}$$

Это заключение, существенно опирается на то обстоятельство, что $|\Delta| \neq 0$. Выясним, при каких условиях это имеет место

Соотношения (24) самосогласованным образом определяют величину нуля в спектре возбуждений квазичастиц Δ . Вычислим правую часть (18)), используя разложение (19) и преобразования Боголюбова (21), (24):

$$\begin{aligned} \Delta &= \sigma U_0 \left\langle \hat{\Psi}_{-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_\sigma(t, \mathbf{r}) \right\rangle = \sigma U_0 \left\langle \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik'r} \hat{a}_{k'-\sigma} \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikr} \hat{a}_{k\sigma} \right\rangle \\ &= \frac{\sigma U_0}{V} \sum_{kk'} e^{ik'r} e^{ikr} \left\langle \left(u_{k'} \hat{b}_{k'-\sigma} + \sigma v_{k'}^* \hat{b}_{-k'\sigma}^+ \right) \left(u_k \hat{b}_{k\sigma} - \sigma v_k^* \hat{b}_{-k-\sigma}^+ \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Средние значения для произведений операторов квазичастиц равны

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_{k'-\sigma} \hat{b}_{k\sigma} \rangle &= \langle \hat{b}_{-k'\sigma}^+ \hat{b}_{-k-\sigma}^+ \rangle = 0, \langle \hat{b}_{-k'\sigma}^+ \hat{b}_{k\sigma} \rangle = n_{bk} \delta_{-k'k}, \langle \hat{b}_{k'-\sigma} \hat{b}_{-k-\sigma}^+ \rangle \\ &= (1 - n_{bk}) \delta_{-k'k}\end{aligned}$$

Выражение (29) принимает вид

$$\Delta = -\frac{U_0}{2V} \sum_k \frac{\Delta}{\varepsilon_k} (1 - 2n_{bk})$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $\Delta = 0$. Сокращая на пшель, получаем неявное интегральное уравнение на $|\Delta|$

$$1 = -\frac{U_0}{2V} \sum_k \frac{1}{\varepsilon_k} (1 - 2n_{bk})$$

Поскольку число введенных ферми-квазичастиц не сохраняется, то их хипотенциал равен нулю то

$$n_{bk} = (1 + \exp(\varepsilon_k/T))^{-1} < 1/2$$

Поэтому $(1 - 2n_{bk}) > 0$. Следовательно, уравнения (30) имеет решение только, если $U_0 < 0$. Заменяя в (30) сумму на интеграл $\left(\sum_k = \frac{1}{2} V \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi \nu(\xi) \right)$ (определение $\nu(\xi)$ входит суммирование по спину) и пренебрегая зависимостью плотности состояний от энергии, получаем интегральное уравнение

$$1 = \frac{|U_0|}{2} \nu(0) \int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon_k \frac{1}{\varepsilon_k} (1 - 2n_{bk})$$

Это есть неявное уравнение для нахождения энергетической пели. Строго говоря, нужно еще показать, что возникшее новое осионое сверхпроводящее состояние с $\Delta \neq 0$ имеет энергию ниже, чем осионное нормальное состояние, что будет сделано ниже.

теория БКШ

итоговые методы теории БКШ (постепенно будем собирать это всё)
гамильтониан в импульсном представлении имеет вид

$$H = \sum_{p\sigma} \frac{p^2}{2m} a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'+}^+ a_{-\mathbf{p}'-}^+ a_{-\mathbf{p}-} a_{\mathbf{p}+}$$

g - амплитуда рассеяния двух ферми частиц друг на друге. Здесь первый член есть кинетическая энергия электронов. Второй член описывает рассеяние друг на друге электронов с противоположными импульсами и спинами.

иной вывод уравнений Боголюбова Ввиду важности и нетривиальности результатов полученных в предыдущем разделе, приведем несколько иной их вывод

Это позволит лучше почувствовать структуру элементарных возбуждений и природу возникновения энергетической петли в спектре элементарных возбуждений. Кроме того, мы аккуратно покажем, что перестроенное основное сверхпроводящее состояние обладает меньшей энергией по сравнению с основным нормальным состоянием.

Напомним, как классифицируются элементарные возбуждения в невзаимодействующем ферми-газе. При температуре, равной нулю, электроны заполняют в импульсном пространстве сферу радиуса, равного импульсу Ферми p_F .

Обозначим это многочастичное состояние через $|0\rangle$. Переведем частицу с уровня Ферми в состояние с некоторым импульсом $p > p_F$. Тогда это состояние можно представить как $a_p^+|0\rangle$. Энергия такого возбуждения равна $\xi = p^2/2m - p_F^2/2m$. Переведем теперь электрон из состояния с импульсом $p < p_F$ на поверхность Ферми.

Полученное состояние есть ферми-сфера с "дыркой".

Оно имеет энергию $\xi = p_F^2/2m - p^2/2m$. Это возбужденное состояние можно записать в виде $a_p|0\rangle$. Если формально ввести новые операторы рождения и уничтожения

$$b_p = a_p, p > p_F, \quad b_p^+ = a_p, p < p_F$$

то для всех p операторы b_p^+ описывают рождение возбуждения, а b_p описывают уничтожение возбуждения.

Рассмотрим как изменится эта картина во взаимодействующем ферми-газе.

Если взаимодействуют электроны в узкой корочке $|p - p_F| \leq \hbar\omega_D$, то для таких импульсов описанный сценарий построения элементарных возбуждений (32) становится несправедливым.

Элементарные возбуждения, соответствующие операторам b_p , должны быть суперпозиций и a^+ (преобразование Боголюбова)

$$b_{p+} = u_p a_{p+} - v_p a_{-p-}^+, \quad b_{p-} = u_p a_{-p-} + v_p a_{-p+}^+$$

Для дальнейшего важно, что при $p \gg p_F$ и $p \ll p_F$ сценарий, отвечающий (33) должен переходить в (32). Это означает, что

$$\begin{aligned} u_p &\rightarrow 1, v_p \rightarrow 0, \text{ если } p \gg p_F \\ u_p &\rightarrow 0, v_p \rightarrow 1, \text{ если } p \ll p_F \end{aligned}$$

Преобразование, обратное (33), имеет вид

$$a_{p+} = u_p b_{p+} + v_p b_{-p-}^+, \quad a_{p-} = u_p b_{p-} - v_p b_{-p+}^+$$

$$a_{p+}^+ = u_p b_{p+}^+ + v_p b_{-p-}, \quad a_{p-}^+ = u_p b_{p-}^+ - v_p b_{-p+}$$

Вычислим антикоммутатор

$$\begin{aligned} \{a_{p+}, a_{p+}^+\} &= u_p^2 \{b_{p+}, b_{p+}^+\} + v_p^2 \{b_{-p-}, b_{-p-}^+\} + \\ &+ u_p v_p \{b_{p+} b_{-p-}\} + u_p v_p \{b_{p+} b_{-p-}\} = 1 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы новые операторы подчинялись тем же фермиевским коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{b_{p\sigma}, b_{p\sigma}^+\} &= 1 \\ \{b_{ps}, b_{p\sigma}\} &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы условие (36) было при этом непротиворечивым, необходимо, чтобы

$$u_p^2 + v_p^2 = 1$$

Исходный гамильтониан в импульсном представлении имеет вид

$$H = \sum_{p\sigma} \frac{p^2}{2m} a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'+}^+ a_{-\mathbf{p}'-}^+ a_{-\mathbf{p}-} a_{\mathbf{p}+}$$

g - амплитуда рассеяния двух ферми частиц друг на друге. Здесь первый член есть кинетическая энергия электронов. Второй член описывает рассеяние друг на друге электронов с противоположными импульсами и спинами.

Этот гамильтониан называется гамильтонианом Бардина-Купера-Шрифера (БКШ).

При выводе уравнений Гинзбурга-ланлау исследовался минимум свободной энергии. В данном разделе, чтобы не учить вть явным образом сохранение частиц, введем химический потенциал системы электронов $\mu = p_F^2/2m$ и будем решать задачу в рамках большого канонического ансамбля. Вместо свободной энергии минимум должен иметь потенциал $\Omega = F - \mu N = E - TS - \mu N = (E - \mu N) - TS$, где оператор числа частиц $N = \sum_{p\sigma} a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}$. Формально это отвечает рассмотрению свободной энергии с гамильтонианом $H' = H - \mu N$. Итак, гамильтониан задачи имеет вид (в этом разделе мы для простоты полагаем объем $V = 1$)

$$H' = H_0 + H_{int}$$

$$H_0 = \sum_{p\sigma} \xi_p a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} \dots H_{int} = -g \sum_{p \neq p'} a_{p'+}^+ a_{-p'-}^+ a_{-p-} a_{p+}$$

где $\xi_p = p^2/2m - \mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_p &> 0, & \text{при } p > p_F \\ \xi_p &< 0, & \text{при } p < p_F \end{aligned}$$

Сейчас мы хотим, используя преобразование (35), найти энергию основного состояния и энергию элементарных возбуждений. Сделаем подстановку (35) в выражение (39). Для вычисления энергии системы необходимо вычислить диагональный матричный элемент гамильтониана в базисе собственных функций оператора $b_p^+ b_p$. Введем обозначение $n_p = \langle b_p^+ b_p \rangle$. Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначают статистическое усреднение - квантово-механическое вычисление диагонального матричного элемента с последующим усреднением по Гиббсу. С учетом условия (38) и коммутационных соотношений (37) преобразуем $\langle H_0 \rangle$ к виду

$$E_0 = 2 \left(\sum_p \xi_p v_p^2 + \sum_p \xi_p (1 - 2v_p^2) n_p \right)$$

В отсутствие магнитного поля заселенность не зависит от проекции спина. Поэтому в последнем выражении учтено, что $n_{p+} = n_{p-} = n_p$. Вычисляя $\langle H_{int} \rangle$,

учтем, что диагональные матричные элементы получатся, только от независимого взятия диагональных членов от $a_{p'}^+ a_{-p'}^+$ и $a_{-p} a_p$, соответственно, поскольку в H_{int} имеется условие $p \neq p'$. В результате находим

$$E_{int} = -g \left[\sum_p u_p v_p (1 - 2n_p) \right]^2$$

Свободная энергия системы $F = E - TS = (E_0 + E_{int}) - TS$ зависит от параметров u_p, v_p, n_p . Выбор этих параметров осуществим, исходя из условия минимума F . Поскольку энтропия системы зависит только от чисел заполнения n_p , то минимум свободной энергии по отношению к параметрам u_p, v_p достигается минимизацией $E_0 + E_{int}$ по v_p при фиксированном наборе чисел заполнения, чему соответствует заданная энтропия.

Приравняем к нулю вариації $E_0 + E_{int}$ по v_p . Учтем, что из $u_p^2 + v_p^2 = 1$ следует

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{v}{u}$$

Тогда

$$4\xi_p v_p (1 - 2n_p) + 2\Delta \frac{(v_p^2 - u_p^2)}{u_p} (1 - 2n_p) = 0$$

причем мы ввели обозначение

$$\Delta = g \sum_p u_p v_p (1 - 2n_p)$$

Лля ферми-частиц с нулевым химпотенциалом

$$1 - 2n_p > 0$$

Сокранцая уравнение (45) на $1 - 2n_p > 0$ (см. преды дущий раздел), получим

$$2\xi_p u_p v_p = (u_p^2 - v_p^2) \Delta$$

Решим совместно систему уравнений(38) и (48). Лля решения удобно возвести в квадрат уравнение (48) и воспользоваться тождеством $(u_p^2 - v_p^2)^2 = 1 - 4u_p^2 v_p^2$ Тогда получим

$$4\xi_p^2 u_p^2 v_p^2 = (1 - 4u_p^2 v_p^2) \Delta$$

откуда

$$u_p v_p = \pm \frac{\Delta}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}$$

Рассмотрим случай, когда правая часть взята со знаком плюс. Подставляя (49) в (48) и учитывая (38), получим

$$\begin{pmatrix} u_p^2 \\ v_p^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right)$$

Рассмотрим поведение функций u_p и v_p , например, при $p > p_F$. Легко убедиться, что при $|\Delta| \ll |\xi_p|$, благодаря тому, что $\xi_p > 0$ (см.(42)) из (50) следует, что $u_p \rightarrow 1$ и $v_p \rightarrow 0$, как это и должно быть в соответствии с требованием (34). Если бы в (49) был взят другой знак, то критерий (34) не имел бы места. Полставляя выражение (49) со знаком плюс в (46), получим уравнение

$$\Delta \left(\frac{g}{2} \sum_p \frac{(1 - 2n_p)}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} - 1 \right) = 0$$

Это уравнение имеет неинтересное нетривиальное решение $\Delta = 0$, но может иметь и нетривиальное решение, удовлетворяющее условию

$$\frac{g}{2} \sum_p \frac{(1 - 2n_p)}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} = 1$$

В силу условия (??) находим, что уравнение (51) имеет решение только если $g > 0$
Используя полученные значения u_p и v_p , находим выражение для энергии

$$E = \sum_p \xi_p \left(1 - \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right) + \frac{2n_p \xi_p^2}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} - \Delta^2 \sum_p \frac{(1 - 2n_p)}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}$$

Здесь, при вычислении последнего члена в (52) мы воспользовались (51).

Энергия основного состояния

Теория (?) Энергия основного состояния есть значение E при нулевой температуре. Температура $T = 0$ отвечают числа заполнения $n_p = 0$. Поэтому в основном состоянии для перестроенного спектра энергия равна:

$$\begin{aligned}
 E_g(\Delta) &= \sum_p \xi_p \left(1 - \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right) - \Delta^2 \sum_p \frac{1}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} = \\
 &= \sum_p \left[\left(\xi_p - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \right) + \frac{\Delta^2}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right]
 \end{aligned}$$

Если бы взаимодействия не было, то энергия основного нормального состояния равнялась бы энергии ферми-сферы

$$E_g = 2 \sum_{p < p_F} \xi_p$$

Запишем изменение энергии основного состояния:

$$\begin{aligned}
 E_g(\Delta) - E_g &= \sum_{p > p_f} \left[\left(\xi_p - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \right) + \frac{\Delta^2}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right] + \\
 &\quad + \sum_{p < p_f} \left[\left(-\xi_p - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \right) + \frac{\Delta^2}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right] = \\
 &= \sum_p \left[\left(|\xi_p| - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \right) + \frac{\Delta^2}{2\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right] = \\
 &= 2 \sum_{p > p_f} \left[\left(\xi_p - \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right]
 \end{aligned}$$

Локажем, что для перестроенного состояния $E_g(\Delta) < E_g$. Ниеем:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2 \sum_{p > p_f} \xi_p = 2 \frac{\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} \xi_p d\xi_p = \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D)^2 \\
 I_2 &= 2 \sum_{p > p_F} \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} = 2 \frac{\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} d\xi = \Delta^2 \nu_F \int_0^{\hbar\omega_D/\Delta} \sqrt{x^2 + 1} dx
 \end{aligned}$$

Поскольку (полстановка $x = \sinh y$)

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int dy \cosh^2 y = \frac{1}{4} \sinh(2y) + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{Arsh} x \right)$$

ТО

$$I_2 = \Delta^2 \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D/\Delta) \left[1 + (\hbar\omega_D/\Delta)^2 \right]^{1/2} + \Delta^2 \frac{\nu_F}{2} \operatorname{Arsh} (\hbar\omega_D/\Delta)$$

$H_3(51)$ следует, что

$$\sum_{p > p_f} \frac{\Delta^2}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} = \frac{\Delta^2}{g}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 E_g(\Delta) - E_g &= \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D)^2 - \Delta^2 \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D/\Delta) \left[1 + (\hbar\omega_D/\Delta)^2 \right]^{1/2} - \\
 &\quad - \Delta^2 \frac{\nu_F}{2} \operatorname{Arsh} (\hbar\omega_D/\Delta) + \frac{\Delta^2}{g}
 \end{aligned}$$

В силу (??) последняя строка в (58) обращается в нуль. Из выражения (58) немелленно следует, что $E_g(\Delta) - E_g < 0$. При $\hbar\omega_D/\Delta \gg 1$

$$E_g(\Delta) - E_g = \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D)^2 - \Delta^2 \frac{\nu_F}{2} (\hbar\omega_D/\Delta) \left[1 + (\hbar\omega_D/\Delta)^2 \right]^{1/2} \approx -\frac{\nu_F \Delta^2}{4}$$

Таким образом, энергия основного состояния сверхпроводящего состояния ($\Delta \neq 0$) ниже энергии нормального состояния.

температурная зависимость энергетической щели

Теория (?) Вычислим теперь Δ при $T = 0$. Из (51) имеем

$$1 = \frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} d\xi$$

Следовательно

$$\frac{g\nu_F}{2} \operatorname{Arsh}(\hbar\omega_D/\Delta_0) = 1$$

Откуда

$$\Delta_0 = \hbar\omega_D / \operatorname{sh}\left(\frac{2}{g\nu_F}\right)$$

Поэтому, если взаимодействие мало, т.е. $\frac{g\nu_F}{2} \ll 1$, то

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{2}{g\nu_F}\right)$$

Таким образом, поскольку $\Delta_0 \neq 0$, то сколь угодно слабое притяжение приводит к уменьшению энергии основного состояния, отделенного от невозмущенного состояния шелью (60). Этот результат есть многочастичное обобщение залачи Купера. Обратим внимание, что этот результат не может быть получен в рамках теории возмущений по взаимодействию. Найдем, при какой температуре шель Δ обращается в нуль. Имеем из (51)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D \tanh\left(\frac{\xi}{T_c}\right)} \xi d\xi \simeq \\ &\simeq \frac{g\nu_F}{2} \left[\int_0^1 th(z)/z + \int_1^{\hbar\omega_D/T_c} \frac{dz}{z} \right] \simeq \\ &\simeq \frac{g\nu_F}{2} \ln(\omega_D/T_c) \end{aligned}$$

Точное значение интеграла (65)

$$\frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D \tanh\left(\frac{\xi}{T_c}\right)} \xi d\xi = \frac{g\nu_F}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D\gamma}{\pi T_c} = 1$$

где $\gamma = 1,78$. Поэтому

$$T_c = 1.14\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{2}{g\nu_F}\right)$$

Сравнивим (64) с (67):

$$\Delta_0 \approx 1.76T_c$$

Заметим, что поскольку $\omega_D \sim M^{-1/2}$, то (67) объясняет изотоп-эффект (1). Установим закон, по которому вблизи T_c шель обращается в нуль. Из (51) и (??) имеем

$$1 = \frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{\tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$

Из подынтегрального выражения (68) выделим его значение с нулевой шелью

$$1 = \frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{\tanh \frac{\xi}{2T}}{\xi} + \frac{g\nu_F}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \left[\frac{\tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - \frac{\tanh \left(\frac{\xi}{2T} \right)}{\xi} \right]$$

Первый член справа определяется (65), а второй член на верхнем прелеле сходится, и этот прелел можно заменить на бесконечность:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty d\xi \left[\frac{\tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - \frac{\tanh \left(\frac{\xi}{2T} \right)}{\xi} \right] \\ &= \int_0^\infty dx \left[\frac{\tanh \frac{\sqrt{x^2 + (\Delta/T)^2}}{2}}{\sqrt{x^2 + (\Delta/T)^2}} - \frac{\tanh \frac{x}{2}}{x} \right] \simeq -A(\Delta/T)^2 \end{aligned}$$

где $A \simeq 0.1$. Уравнение (69) принимает вид

$$1 \equiv \frac{g\nu_F}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D\gamma}{\pi T_c} = \frac{g\nu_F}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D\gamma}{\pi T} - A(\Delta/T)^2$$

Тогда

$$0 = \left(\ln \frac{T_c}{T} - A(\Delta/T)^2 \right)$$

Поэтому вблизи T_c

$$\Delta = \sqrt{T_c \frac{T_c - T}{A}}$$

Элементарные возбуждения и сверхпроводимость

Теория (?) В духе феноменологической теории ферми-жидкости Ландау определим энегрию возбуждений в системе ε_p как вариационную производиую

$$\varepsilon_{p\sigma} = \frac{\delta E}{\delta n_{p\sigma}} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} > 0$$

($E = ?$) Итак, если существует нетривиальное решение (51), то, во-первых, имеет место перестройка основного состояния в состояние с меньшей энергией (60). Во вторых, из (71) следует, что элементарные возбуждения имеют минимальное значение Δ . Таким образом, на языке квазичастиц энергия системы равна

$$E = E_{sg} + \sum_{p\sigma} \varepsilon_p n_{p\sigma}$$

Напомним, как из полученных результатов следует сверхпроводимость. Закон дисперсии возбуждений (71) обнаруживает, что $\min \left(\frac{\varepsilon_p}{p} \right) = \frac{\Delta}{p_F} > 0$. Это свойство, в соответствии с критерием сверхтекучести Ландау, означает, что система, ферми-газ с притяжением, обладает свойствами сверхтекучести - возможно бездиссипативное течение электронной жидкости, то есть сверхпроводимость.

незатухающий электрический ток

Теория (?) Уравнение Шредингера для одного электрона в ЭМ поле имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi \right) \psi$$

Введем фазовое преобразование $\chi = \chi(r, t)$

$$\psi = \psi_0 e^{i\chi}$$

Тогда

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= e^{i\chi} \left(i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} - \hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \psi_0 \right) \\ \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi &= e^{i\chi} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} A + (\hbar \nabla \chi) \right) \psi_0 \\ \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} A \right)^2 \psi &= e^{i\chi} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} A + (\hbar \nabla \chi) \right)^2 \psi_0 \end{aligned}$$

Одновременно рассмотрим градиентное преобразование

$$-\frac{e}{c} A_0 = -\frac{e}{c} A + (\hbar \nabla \chi), e\varphi_0 = e\varphi + \hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Выбираем фазу преобразования, так, чтобы в представлении с индексом нуль отсутствовал электрический потенциал

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{e}{\hbar} \varphi$$

Уравнение (73) преобразуется к виду

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0 \right)^2 \right] \psi_0$$

Переход от (73) к (76) называется калибровочным преобразованием. При этом преобразовании меняются и потенциалы поля, и фаза волновой функции. Это формальное преобразование, и оба уравнения описывают одно и то же движение электрона.

В такой калибровке во вторичном квантовании гамильтониан системы электронов (8) имеет вид:

$$\hat{H} = \int d^3r \left[\hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \left(\frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0)^2}{2m} - \mu \right) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} g \hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) \right]$$

Введем обозначение $-\frac{e}{c} \mathbf{A}_0 = \mathbf{v}_s m$, и ограничимся линейным приближением по магнитному полю (квадратичный член содержит скорость света c в знаменателе). Тогда

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \int d^3r \left[\hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \mu \right) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} g \hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0-\sigma}^+(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0-\sigma}(t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) \right] \\ \hat{H}_2 &= \int d^3r \hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{v}_s) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что, если дополнительно потребовать, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то операторы $\hat{\mathbf{p}}$ и \mathbf{A} коммутируют.) Первый член H_1 – гамильтониан сверхпроводника без поля, который в импульсном представлении имеет вид (39), а второй член равен

$$\hat{H}_2 = \int d^3r \hat{\Psi}_{0\sigma}^+(t, \mathbf{r}) (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{v}_s) \hat{\Psi}_{0\sigma}(t, \mathbf{r}) = \int d^3r \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ (\hat{\mathbf{p}} \mathbf{v}_s) \sum_{\mathbf{k}'\sigma} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}'} = \mathbf{v}_s \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

В основном состоянии без поля система электронов находится в состоянии покоя. Поэтому импульс системы в поле равен импульсу квазичастиц. Это легко доказать с помощью преобразования Боголюбова, оставив только диагональные члены

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{k} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$$

В результате гамильтониан сверхпроводника в поле принимает вид

$$H = E_0 + \sum \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} + \mathbf{v}_s \sum \mathbf{k} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} = E_0 + \sum \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$$

Мы видим, что энергия квазичастицы в поле деформируется

$$H = E_0 + \sum \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}, \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_s \mathbf{k}, \mathbf{v}_s = -\frac{e}{mc} \mathbf{A}_0$$

Поскольку для спаренных электронов характерное значение импульса есть p_F то минимальная энергия возбуждения

$$\min \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = |\Delta| - v_s p_F$$

В соответствии с критерием Ландау (27) сверхпроводяное состояние разрушается если $\min \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} \leq 0$. Значит, сильное магнитное поле разрушает сверхпроводник, если

$$v_s = \frac{e}{mc} \mathbf{A}_0 > v_c = \frac{|\Delta|}{p_F}$$

Связем величину v_s с электрическим током, который в сверхпроводнике генерируется не электрическим, а магнитным полем. Согласно квантовой механике, плотность электрического тока, создаваемого электронами в присутствии магнитного потенциала, равна (вспомним, что скорость заряженной частицы есть отношение кинематического импульса $(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0)$ к массе)

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v} n = e \left\langle \operatorname{Re} \hat{\Psi}_0^+ \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0)}{m} \hat{\Psi}_0 \right\rangle = e \sum \left(\frac{\mathbf{k}}{m} + \mathbf{v}_s \right) \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle$$

Внесем знак суммы под знак статистического усреднения

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v}_s \left\langle \sum \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \right\rangle + \frac{e}{m} \left\langle \sum \mathbf{k} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \right\rangle$$

Тогда в первом члене получаем полное число электронов N_e , а во втором - с учетом (79) - ток квазичастиц

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v}_s N_e + \frac{e}{m} \left\langle \sum \mathbf{k} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \right\rangle$$

(Заметим, что в силу (83) ток обрандается в нуль, когда $P = \left\langle \sum \mathbf{k} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \right\rangle = -m \mathbf{v}_s N_e$ т.е. когда импульс квазичастиц полностью компенсирует суммарный импульс электронов, двигающихся как целое со скоростью \mathbf{v}_s)

При нулевой температуре квазичастиц нет, и в системе существует незатухающий ток

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v}_s N_e$$

Из этой формулы следует, что в образовании сверхтекущего электрического тока принимают участие все электроны. Это удивительно, поскольку при переходе в сверхпроводящее состояние по Боголюбову перестраиваются только электроны в узкой корочке около поверхности Ферми.

При $T \neq 0$ в термодинамическом равновесии число квазичастиц в заданном состоянии равно

$$n_{bk} = \left\langle \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \right\rangle = \frac{1}{e^{\beta \tilde{\varepsilon}_k} + 1}$$

Энергия квазичастиц зависит от направления. Если скорость мала, то $\tilde{\varepsilon}_k \approx \varepsilon_k + \mathbf{v}_s \mathbf{k}$ и

$$n_{bk} (\tilde{\varepsilon}_k) \approx n_{bk} (\varepsilon_k) + (\mathbf{v}_s \mathbf{k}) \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k}$$

Только поправка в (85) дает вклад квазичастиц в электрический ток при подстановке (85) в (84):

$$\tilde{\mathbf{j}} = \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\mathbf{v}_s \mathbf{k}) \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} = -\frac{e}{3m} \mathbf{v}_s \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left| \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} \right|$$

Здесь мы воспользовались тем, что, если перейти от суммирования к интегрированию по k , то

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (\mathbf{v}_s \mathbf{k}) \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} \int \mathbf{k} (\mathbf{v}_s \mathbf{k}) d\Omega_k = \\ \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} (4\pi/3) \mathbf{v}_s k^2 &= \mathbf{v}_s / 3 \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} (4\pi/3) k^2 = \mathbf{v}_s / 3 \sum_{\mathbf{k}} k^2 \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} \end{aligned}$$

Возникающий(87) здесь интеграл по углам считается так:

$$\int d\Omega \mathbf{k} (\mathbf{v}_s \mathbf{k}) = a \mathbf{v}_s$$

Домножив обе части скалярно на \mathbf{v}_s , получим

$$av_s^2 = \int d\Omega (\mathbf{v}_s \mathbf{k})^2 = 2\pi v_s^2 \int_0^\pi d(-\cos \theta) \cos^2(\theta) = v_s^2 4\pi/3$$

То $ecrb a = 4\pi/3$. Обратим внимание, что квазичастицы создают электрический ток (86), противоположный скорости \mathbf{v}_s , в направлении которой течет электрический ток электронов в основном состоянии. Таким образом, при фиксированном значении v_s с увеличением температуры сверхтекучий ток падает

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v}_s N_s(T)$$

где плотность сверхтекущих электронов равна

$$N_s(T) = N_e + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k}$$

Когда

$$N_s(T) = 0$$

сверхтекучесть пропадает. Это происходит при $T = T_c$

$$\frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left(\frac{\partial n_{bk}}{\partial \varepsilon_k} \right)_{T_c} = \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \left(\frac{\partial n_{bk}}{\partial |\xi_k|} \right)_{\Delta=0} = -N_e$$

Используя (82), напишем максимальный (критический) ток

$$\mathbf{j} = e \frac{\Delta}{p_F} N_s$$

С помощью формул (74) вернемся в исходное представление

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} N_s \left(-\frac{e}{c} \mathbf{A} + (\hbar \nabla \chi) \right)$$

Это есть калибровочно-инвариантная формула для плотности тока сверхпроводящик электронов в электромагнитном поле. При калибровочном преобразовании меняется векторный потенциал и фаза волновой функции, но вил выражения в скобках остается неизменным. Этот ток существует в состоянии термодинамического равновесия, в отличие от тока электронов в нормальном состоянии, который есть проявление необратимого процесса с выделением тепла.

теплоемкость сверхпроводника

Теория (?) Термические свойства сверхпроводника определяются его возбуждениями - квазичастицами, которые можно рассматривать как ферми-газ с нулевым химическим потенциалом. Энтропия этого газа равна

$$S = - \sum [n \ln n + (1-n) \ln(1-n)]$$

здесь $n = (e^{\beta\varepsilon} + 1)^{-1}$, $\varepsilon = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$

Теплоемкость дается формулой из термодинамики:

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = \sum T \frac{\partial S}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial T} = - \sum T [\ln n - \ln(1-n)] \frac{\partial n}{\partial T}$$

$$\ln n - \ln(1-n) = \ln \frac{n}{1-n} = -\ln \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -\beta\varepsilon$$

Таким образом

$$C = \sum \varepsilon \frac{\partial n}{\partial T}$$

При низких температурах теплоемкость экспоненциально мала.

Вблизи критической температуры самое сложное - найти производную от распределения квазичастиц

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial n}{\partial \beta\varepsilon} \frac{\partial \beta\varepsilon}{\partial T} = T \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left(-\frac{\varepsilon}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \right)$$

Квадрат пели линейно зависит от температуры

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} T_c \frac{T_c - T}{A} = -\frac{T_c}{A}$$

Тогда теплоемкость

$$C_s = \sum \left| \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right| \left(\frac{\varepsilon^2}{T} + \frac{T_c}{2A} \right) = C_n + \frac{T_c}{2A} \sum \left| \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right| = C_n + \frac{T_c}{2A} \nu(0)$$

Так как $C_n = \frac{\pi^2}{3} \nu(0) T$, то скачок теплоемкости в точке фазового перехода равен

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = \frac{T_c \nu(0)}{2A \frac{\pi^2}{3} \nu(0) T} = \frac{3}{2A \pi^2} = 1,43$$

электрон-фононное взаимодействие

(сравнив потом с Левитовым Шитовым)

Теория (?) Покажем, каким образом электрон-фононное взаимодействие может привести к эффективному притяжению электронов.

В отсутствие взаимодействия между электронами и решеткой гамильтониан системы имеет вид

$$H_0 = \sum_q \hbar \omega_q c_q^+ c_q + \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k$$

Когда атомы решетки колеблются возникает локальная деформация решетки и возникает локальная поляризация, описываемая дипольным моментом $\mathbf{P}(r)$.

Возникающее при этом изменение плотности связанного заряда выражается через дипольный момент соотношением $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$. Взаимодействие электрона, находящегося в точке \mathbf{r} , с этой поляризацией лается выражением

$$e \int Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \operatorname{div} \mathbf{P}$$

Если бы не было дебаевской экранировки (см. наши Лекции по физической ки-экранировки), кулоновское взаимодействие обрезается на межатомном расстоянии $a \sim \hbar/p_F$. Поэтому можно считать, что

$$Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = a^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Дипольный момент $P \sim neu$, где n - концентрация атомов, по порядку величины равная концентрации электронов, u - смещение узла решетки из положения равновесия. Рассмотрим вклад в $\operatorname{div} \mathbf{P}$ от некоторой фурье-компоненты флюктуаций $\operatorname{div} \mathbf{P}_k \sim V^{-1/2} iku_k$. Поэтому

$$V_k \sim V^{-1/2} ie^2 a^2 n (\omega/s) u_k$$

Оператор смещения есть линейная комбинация операторов рождения и уничтожения фононов c^+ и это разложение операторы рождения и уничтожения входят в комбинации $i\sqrt{\frac{\hbar}{2nM\omega_k}} (c_k + c_k^+)$. Поэтому процесс, при котором происходит поглощение или испускание фонона описывается оператором

$$\begin{aligned} V_k &\sim V^{-1/2} ie^2 a^2 n (\omega_k/s)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{2nM\omega_k}} (c_k + c_k^+) \sim \\ &iV^{-1/2} \frac{ne^2 a^2}{s} \sqrt{\frac{\omega_k \hbar}{2nM}} = iV^{-1/2} (na^3) \frac{e^2}{as} \sqrt{\frac{\omega_k \hbar}{2nM}} (c_k + c_k^+) \end{aligned}$$

Типичный масштаб энергий в металле есть e^2/a . Приравнивая эту величину кинетической части энергии колебаний $Ms^2/2$, получим для скорость звука оценку $s \sim a\omega_D \sim \sqrt{e^2/aM} \sim \sqrt{p_F^2/mM}$. Кроме того $na^3 \sim 1$. Подставляя эти оценки в (94), получим

$$V_k \sim iV^{-1/2} p_F \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2nm}} (c_k + c_k^+)$$

Поглощение или испускание фонона, происходит при рассеянии электрона. Полный гамильтониан системы электронов и фононов с учетом взаимодействия между ними может, таким образом, быть представлен в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= \sum_q \hbar\omega_q c_q^+ c_q + \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k; V = D \sum_{kq} \sqrt{\hbar\omega_q} a_{k+q}^+ a_k (c_q + c_{-q}^+) \end{aligned}$$

Здесь c_q^+, c_q - операторы рождения и уничтожения фононов с импульсом и энергией q и ω_q соответственно; a_k^+, a_k - операторы рождения и уничтожения электронов с импульсом k и энергией ε_k , соответственно. Последний член в (95) описывает рассеяние электронов на колебаниях решетки с испусканием (поглощением)

фонона, причем D - матричный элемент перехода. Гамильтониан V описывает рассеяние электрона с испусканием или поглощением электрона. Гамильтониан рассеяния (БКП) возникает как процесс второго порядка теории возмущений. Вместо стандартной теории возмущений удобно применить каноническое преобразование, предложенное Фрелихом,

$$\tilde{H} \equiv e^{-S} H e^S = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] \dots$$

Переход от H к \tilde{H} с помонцо унитарного канонического преобразования означает просто переход к другому базису, в котором гамильтониан может выглядеть проще.

Будем считать V малым возмущением по параметру D . Тогда S также мало по этому параметру. Выберем S из условия обращения в нуль в \tilde{H} линейных по D членов:

$$V + [H_0, S] = 0$$

Во втором порядке теории возмущений

$$\begin{aligned}\tilde{H} \equiv e^{-S} H e^S &= H_0 + [V, S] + \frac{1}{2} [[H_0, S], S] + O(D^3) = \\ &= H_0 + \frac{1}{2}[V, S] + O(D^3)\end{aligned}$$

Перепишем (97) в базисе собственных функций гамильтониана H_0 с собственными значениями E_m . Тогда

$$S_{mn} = \frac{V_{mn}}{E_n - E_m}$$

и эффективный гамильтониан рассеяния электронов через обмен виртуальным фононам равен

$$H_2 = \frac{1}{2}[V, S]$$

Для простоты ограничимся случаем нулевых температур (когда фононы возникают лишь виртуальным образом). Для вычисления энергии \tilde{H} нас интересует матричный элемент $\langle 0 | \tilde{H} | 0 \rangle$ (являющийся оператором по отношению к электронному гильбертову пространству). Здесь $|0\rangle$ – фононная компонента полной волновой функции электрон-фононной системы при отсутствии фононов. При вычислении энергии во втором порядке теории возмущений нас интересуют матричные элементы

$$\begin{aligned}\langle 1_q | S | 0 \rangle &= D \sum_k \frac{\sqrt{\hbar\omega_q} a_{k-q}^+ a_k}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - \hbar\omega_q} \\ \langle 0 | S | 1_q \rangle &= D \sum_k \frac{\sqrt{\hbar\omega_q} a_{k+q}^+ a_k}{\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k+q}}\end{aligned}$$

здесь $|1\rangle$ – фононная компонента волновой функции электрон-фононной системы с одним фононом в состоянии q . Очевидно, что

$$\begin{aligned}\langle 0 | V | 1_q \rangle &= D \sqrt{\hbar\omega_q} \sum_k a_{k+q}^+ a_k \\ \langle 1_q | V | 0 \rangle &= D \sqrt{\hbar\omega_q} \sum_k a_{k-q}^+ a_k\end{aligned}$$

Используя (100) – (102), получим

$$\frac{1}{2}[V, S] = \frac{1}{2}D^2 \sum_{kqk'} a_{k'+q}^+ a_{k'} \frac{\hbar\omega_q a_{k-q}^+ a_k}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - \hbar\omega_q} - \frac{\hbar\omega_q a_{k+q}^+ a_k}{\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k+q}} a_{k'-q}^+ a_{k'}$$

Учитывая, что $\omega_q = \omega_{-q}$, во втором слагаемом делаем замену $q \rightarrow -q$ и переставим пары операторов $a_{k+q}^+ a_k$ и $a_{k'-q}^+ a_{k'}$. (Коммутатор этих операторов есть квадратичная форма по операторам и может быть включен в перенормировку ε_k .)

$$\frac{1}{2}D^2 \sum_{kqk'} \hbar\omega_q a_{k'+q}^+ a_{k'} a_{k-q}^+ a_k \left(\frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - \hbar\omega_q} - \frac{1}{\varepsilon_k + \hbar\omega_q - \varepsilon_{k-q}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= D^2 \sum_{kqk'} a_{k'+q}^+ a_{k'} a_{k-q}^+ a_k \frac{(\hbar\omega_q)^2}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} = \\
 &= D^2 \sum_{kqk'} a_{k-q}^+ a_{k'+q}^+ a_{k'} a_k \frac{(\hbar\omega_q)^2}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2}
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если

$$|\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}| < \hbar\omega_q$$

то амплитуда рассеяния двух электронов имеет отрицательный знак. Итак, после канонического преобразования гамильтониана электрон-фононной системы имеет вид

$$H = H_0 + D^2 \sum_{kqk'} \frac{(\hbar\omega_q)^2}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - (\hbar\omega_q)^2} a_{k-q}^+ a_{k'+q}^+ a_{k'} a_k$$

Наиболыпий фазовый объем $\sim q^2$ отвечает процессам, в которых импульс q достигает своего максимального значения $q \sim \hbar/a$. Этому импульсу отвечает дебаевская энергия $\hbar\omega_D$. Поэтому в (106) можно заменить $\hbar\omega_q$ на $\hbar\omega_D$. Рассмотрим теперь только состояния, для которых $|\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}| \ll \hbar\omega_D$. Тогда

$$H = H_0 - D^2 \sum_{kqk'} a_{k-q}^+ a_{k'+q}^+ a_{k'} a_k$$

Если перейти в этом выражении в координатное представление то мы получим для взаимодействия выражение типа (11). Это означает, обмен фононами во втором порядке теории возмущений, эквивалентен точечному притяжению. В силу принципа Паули это может иметь место, только если взаимодействуют электроны с противоположными спинами.

Очевидно, что если рассеиваются электроны с противоположными импульсами $k = -k'$, то в результате рассеяния должны получиться два электрона также с противоположными импульсами, причем это может быть любой импульс из этой корочки корочки. Если же рассеиваются электроны с одинаковыми импульсами (близкими к импульсу Ферми) то фазовый объем, доступный рассеянным электронам исчезающе мал. Поэтому основной вклад в рассеяние дают процессы в которых электроны имеют практически противоположные импульсы.

мы рассматриваем модель, в которой только такое рассеяние и учитывается. Соображения, описанные выше обосновывают модель БКШ, описываемую гамильтонианом

$$H = H_0 - g \sum_{kq} a_{k+q,\sigma}^+ a_{-k+q,-\sigma}^+ a_{-k,-\sigma} a_{k,\sigma}, \quad g > 0$$

10.2 Unconventional Superconductivity by Mineev, V.P. Samokhin, K.

10.2.1 ЧАСТЬ I

10.2.2 1. Куперовское спаривание

Сверхпроводимость - полное исчезновение электрического сопротивления постоянному току - наблюдается во многих металлах при достаточно низких температурах. О сверхпроводимости можно говорить как о сверхтекучести, то есть полном исчезновении вязкости в жидкости,

состоящей из электронов проводимости. Подобное явление имеет место и в ряде других квантовых жидкостей: сверхтекущих ^4He и ^3He , атомных ядрах и нейтронных звездах.

Теоретическое изучение сверхтекущих ферми-систем началось со времени создания в 1957 г. Дж. Бардином, Л. Купером и Дж. Приффером [1] теории сверхпроводимости (здесь и далее - теории БКШ). В основе этой теории лежит утверждение Л. Купера о неустойчивости основного состояния электронного газа со сколь угодно слабым притяжением между частицами по отношению к образованию связанных состояний - пар электронов. Межэлектронное

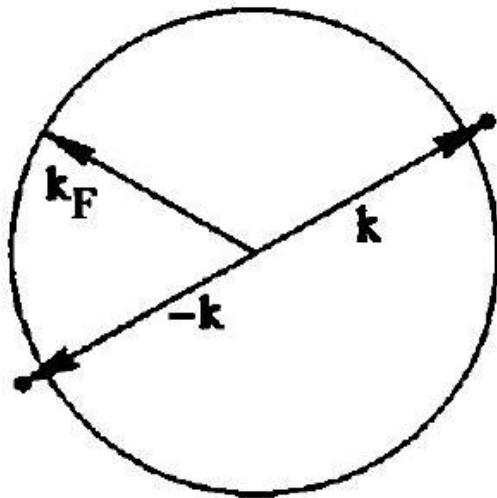


Рис. 1. Два электрона с противоположными импульсами над сферой Ферми притяжение, превосходящее кулоновское отталкивание, в большинстве сверхпроводников обязано своим происхождением взаимодействию электронов с колебаниями кристаллической решетки (фононами), приводящему к образованию области избыточного положительного заряда, окружающего данный электрон. Такое взаимодействие практически изотропно, поэтому куперовские пары образуются в состоянии с нулевым орбитальным моментом (*s*-спаривание). Иначе дело обстоит в сверхтекущем ^3He , где куперовское спаривание возникает благодаря взаимодействию ядерных спинов атомов гелия-3 с флуктуациями намагниченности жидкости (парамагнонами). Парамагнонное взаимодействие существенно анизотропно и приводит к образованию куперовских пар с орбитальным моментом $L = 1$ (*p*-спаривание).

Несмотря на значительную разницу в природе притяжения между частицами, куперовское спаривание является общим механизмом, ответственным за формирование сверхтекущего состояния в различных ферми-системах. Следуя работе [2], рассмотрим квантово-механическую задачу о двух электронах в нормальном металле при нулевой температуре. Будем считать, что пара электронов взаимодействует между собой посредством потенциала $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, не зависящего от их спинов, а наличие остальных электронов, заполняющих все состояния ниже уровня Ферми, проявляется только через принцип Паули (рис. 1). Для определения уровней энергии и волновых функций $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ электронной пары необходимо решить уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \dot{\psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (1.1)$$

где Δ - энергия электронной пары, отсчитанная от энергии двух свободных электронов, т. е. удвоенной энергии Ферми $\hbar^2 k_F^2 / m$.

От координат электронов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 можно перейти к координатам центра инерции $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) / 2$ и относительного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Если считать, что центр инерции пары поконится, иными словами, что импульсы электронов противоположны (\mathbf{k} и $-\mathbf{k}$), то зависимость ψ от \mathbf{R} можно опустить, и уравнение Шредингера перепишется в виде

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) \psi(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

Переходя к импульсному представлению

$$g(\mathbf{k}) = \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

получаем:

$$\frac{\hbar^2}{m} h^2 g(\mathbf{k}) + \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g(\mathbf{k}') = \left(\Delta + \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} \right) g(\mathbf{k}) \quad (1.4)$$

Взаимодействие

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \int d^3 r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

зависящее от направлений импульсов

$$V(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(k, k') \sum_{m=-1}^1 Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') \quad (1.6)$$

будем считать притяжением в узком слое толщиной $\varepsilon_l \ll \varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / (2 m)$ над поверхностью Ферми

$$V_l(k, k') = \begin{cases} -V_l, & \text{при } \varepsilon_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < \varepsilon_F + \varepsilon_l \\ 0, & \text{вне интервала } (\varepsilon_F, \varepsilon_F + \varepsilon_l) \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$ - сферические функции с орбитальным моментом l и его проекцией m на ось z , а $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k_F$.

Осуществим в (1.4) обычный переход от интегрирования по волновому вектору к интегрированию по энергии $\xi = \hbar^2 k^2 / 2m - \varepsilon_E$ и направлениям \mathbf{k}

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \rightarrow N_0 \int d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1.8)$$

где

$$N_0 = \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2} \quad (1.9)$$

- плотность состояний на поверхности Ферми на одну проекцию спина электрона.
- Имеем:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - k_F^2) - \Delta \right]_{\varepsilon_l} g(\mathbf{k}) - \\ & - N_0 \int_0^d d\xi' \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} V_i \sum_{m=-1}^1 Y_{im}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{im}^*(\hat{\mathbf{k}}') g(\mathbf{k}') = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Нетрудно убедиться, что каждому значению орбитального момента l соответствует определенное собственное состояние $\{g_l(\mathbf{k}), \Delta_l\}$ уравнения (1.10). Действительно, подставляя разложение

$$g(\mathbf{k}) = g_{l'}(\mathbf{k}) = \sum_{m'=-l'}^{l'} a_{l'm'}(k) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}})$$

в (1.10) и пользуясь ортонормированностью сферических функций

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}') Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}') = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.11)$$

получим:

$$\left[\frac{\hbar^2}{m} (k^2 - k_\Gamma^2) - \Delta_l \right] g_l(\mathbf{k}) - N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi g_l(\mathbf{k}) = 0$$

Следовательно,

$$g_l(\mathbf{k}) = \frac{N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} d\xi g_l(\mathbf{k})}{2\xi - \Delta_l} \quad (1.12)$$

Интегрируя по ξ левую и правую части этого уравнения, получим

$$1 = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_l} \frac{d\xi}{2\xi - \Delta_l} = \frac{N_0 V_l}{2} \ln \frac{\varepsilon_l - \frac{\Delta_l}{2}}{-\frac{\Delta_l}{2}}$$

Отсюда, полагая взаимодействие слабым $N_0 V_l \ll 1$, находим

$$\Delta_l = -2\varepsilon_l \exp \left(-\frac{2}{N_0 V_l} \right) \quad (1.13)$$

Итак, при сколь угодно слабом притяжении между двумя электронами возникает связанное состояние, энергия которого зависит от орбитального момента.

Данное утверждение, доказанное для двух электронов, сохраняет свою силу и в многоэлектронной задаче (см. 6). Именно, сверхпроводящие состояния, соответствующие куперовскому спариванию с различными значениями орбитального момента, имеют различную критическую температуру. Сверхпроводящие состояния

$$g_l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^1 a_{lm}(k) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (1.14)$$

с данным l , отличающиеся наборами коэффициентов $\{a_{3m}(k)\}$, имеют одинаковую критическую температуру. Из всех таких состояний при определенной температуре и определенном давлении реализуется наиболее энергетически выгодное.

Размер куперовской пары. Характерный интервал δk , на котором изменяются коэффициенты $a_{lm}(k)$, связан соотношением неопределенности $\xi_0 \delta k \geq 1$ с характерным размером ξ_0 волновой функции в координатном пространстве - размером куперовской пары¹. Неопределенность волнового вектора δk можно оценить через энтропию связи пары:

$$\Delta \sim \delta \varepsilon \sim \frac{\hbar^2}{m} k_F \delta k \sim \hbar v_F \delta k$$

Следовательно,

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta} \quad (1.15)$$

Неустойчивость нормального ферми-газа по отношению к куперовскому спариванию, очевидно, должна проявляться при температуре $T_c \sim \Delta$. Фермиевская скорость оценивается

терез среднее расстояние между фермионами $n^{-1/3}$ (n - концентрация) как $v_F \sim \hbar n^{1/3} / m$. Для обычных сверхпроводников T_c порядка нескольких градусов, а масса электронов проводимости, грубо говоря, совпадает с массой электронов в вакууме, и $\xi_0 \approx 10^{-5}$ см. В ^3He критическая температура на три порядка, но и масса атомов ^3He в несколько тысяч раз больше массы электронов, поэтому $\xi_0 \approx 10^{-6}$ см. В тяжелофермионных соединениях эффективная масса электронов в 10 – 100 раз больше массы электронов в вакууме, а в высокотемпературных сверхпроводниках T_c достигает десятков и сотен градусов. Поэтому в этих соединениях $\xi_0 \approx 10^{-6} - 10^{-7}$ см.

Во всех персчислениых случаях $\xi_0 \gg n^{-1/3}$, то есть изолированных куперовских пар не существует, и задача о возникновении сверхпроводящего состояния является существенно многочастичной.

10.2.3 2. Спиновая структура спаренных состояний

Во всех известных к настоящему моменту сверхтекущих ферми-жидкостях куперовские пары состоят из частиц со спином 1/2. Спиновое состояние пары может характеризоваться значением полного спина $S = 0$ (синглет) или $S = 1$ (триплет), либо же представлять суперпозицию этих двух состояний. Для сверхпроводящих систем, обладающих определенной пространственной четностью, последняя возможность исключается. Удобно рассмотреть этот вопрос для сверхпроводящих состояний с определенным орбитальным моментом.

Орбитальная волновая функция (1.14) является четной для четных значений орбитального момента l и нечетной для нечетных l :

$$g_l(-\mathbf{k}) = (-1)^l g_l(\mathbf{k}) \quad (2.1)$$

В то же время, согласно принципу Паули, полная волновая функция пары, состоящая из произведений вида $g(\mathbf{k})\chi_{12}$, где χ_{12} – спиновая волновая функция частиц 1 и 2, должна менять знак при их перестановке:

$$g(-\mathbf{k})\chi_{21} = -g(\mathbf{k})\chi_{12} \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что спиновое состояние пары с четным (нечетным) орбитальным моментом / должно быть антисимметричным (симметричным) по отношению к перестановке частиц.

Спиновые состояния двух частиц со спином 1/2 строятся из спиновых состояний

$$\alpha_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \quad \text{и} \quad \beta_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

одной частицы, являющихся собственными для операторов квадрата спина s^2 и проекции спина s_z на ось z :

$$s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_z \alpha_\lambda = \frac{\hbar}{2} \alpha_\lambda, \quad s_z \beta_\lambda = -\frac{\hbar}{2} \beta_\lambda$$

Собственная функция спин-синглетного состояния пары, для которого $S = 0$, $S_z = 0$ (где $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$), антисимметричная по отношению к перестановке частиц, имеет вид

$$\alpha_{1\lambda}\beta_{2\mu} - \beta_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle i\sigma_{\psi_{i\mu}}$$

¹ Точное выражение $\xi_0 = \hbar v_F / (2\pi T_c)$ для размера куперовской пары будет получено в §18.

то есть выражается через матрицу Паули σ_y^1 . Полная волновая функция пары с $S = 0$ выглядит при этом следующим образом:

$$\Psi_{\text{pair}}^l = g(\mathbf{k})i\sigma_y = \sum_{m=-l}^1 a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})i\sigma_y \quad (2.3)$$

где l может принимать значения $0, 2, 4, \dots$. Соответствующие парные состояния, как это принято в атомной физике, носят названия s, d, g, \dots состояний.

Комплексные коэффициенты a_{im} , входящие в формулу (2.3), одинаковые для всех куперовских пар данного сверхпроводящего состояния, представляют собой параметр порядка сверхпроводника. В слабо неоднородных состояниях параметр порядка зависит от координат, то есть коэффициенты a_{lm} являются функциями \mathbf{r} . Так, параметром порядка для сверхпроводника с s -спариванием служит одна комплексная функция

$$a_{00}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) = |\dot{\psi}|e^{i\varphi} \quad (2.4)$$

а, например, для сверхпроводника с d -спариванием ($l = 2$) таких функций пять.

Для спин-триплетного состояния пары ($S = 1$) волновые функции, соответствующие трем различным проекциям спина пары на ось квантования и симметричные по отношению к перестановке частиц, имеют вид

$$S_z = \begin{cases} 1, & \alpha_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0, & \alpha_{1\lambda}\beta_{2\mu} + \beta_{1\lambda}\alpha_{2\mu} = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ -1, & \beta_{1\lambda}\beta_{2\mu} = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

то есть являются симметричными матрицами. Полная волновая функция пары представляет собой линейную комбинацию этих состояний:

$$\Psi_{\text{pair}}^l = g_1(\mathbf{k})|\uparrow\uparrow\rangle + g_2(\mathbf{k})(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + g_3(\mathbf{k})|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{k}) & g_2(\mathbf{k}) \\ g_2(\mathbf{k}) & g_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Здесь

$$g_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^1 a_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (2.6)$$

- амплитуды состояний с $S_z = 1, 0$ и -1 , соответственно.

Квантовое число $/$ в формуле (2.6) может принимать значения $1, 3, \dots$. Соответствующие состояния называют сверхпроводящими состояниями с p, f, \dots спариванием. Другая форма записи выражения (2.5) связана с использованием базиса симметричных матриц $i\sigma\sigma_y = (i\sigma_x\sigma_y, i\sigma_y\sigma_y, i\sigma_z\sigma_y)$. Имеем:

¹ Напомним определение матриц Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Psi'_{\text{pair}} &= i(\mathbf{d}(\mathbf{k})\sigma)\sigma_y = (d_x(\mathbf{k})\sigma_x + d_y(\mathbf{k})\sigma_y + d_z(\mathbf{k})\sigma_z) i\sigma_y = \\ &= \begin{pmatrix} -d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) & d_z(\mathbf{k}) \\ d_z(\mathbf{k}) & d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (2.7)\end{aligned}$$

Компоненты вектора $\mathbf{d}(\mathbf{k})$, линейно выражаются через амплитуды $g_\alpha(\mathbf{k})$:

$$g_1 = -d_x + id_y, \quad g_2 = d_z, \quad g_3 = d_x + id_y$$

могут быть разложены по сферическим гармоникам:

$$d_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^1 b_{lm}^\alpha Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (2.8)$$

Коэффициенты b_{lm}^α играют роль параметра порядка сверхпроводника с данным типом спаривания, то есть с данным значением квантового числа l . Так, в простейшем случае p -спаривания параметром порядка является набор девяти комплексных функций $b_{lm}^\alpha (m = -1, 0, 1)$.

Упражнение. Используя выражение (2.7) для спиновой волновой функции триплетного состояния, доказать формулы для

a) среднего значения спина пары:

$$\mathbf{S} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \times \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (2.9)$$

б) среднего значения орбитального момента пары:

$$\mathbf{L} = i\hbar \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \left[\mathbf{k} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right] \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (2.10)$$

10.2.4 3. Фазы сверхтекучего гелия-3

Сферические гармоники $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$ с $l = 1$

$$\begin{aligned}Y_{11}(\hat{\mathbf{k}}) &\propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \\ Y_{1-1}(\hat{\mathbf{k}}) &\propto (\hat{k}_x - i\hat{k}_y), \quad Y_{10}(\hat{\mathbf{k}}) \propto \hat{k}_x\end{aligned}$$

линейно выражаются через компоненты вектора $\hat{\mathbf{k}}$, что порождает еще одну форму записи вектора \mathbf{d} :

$$d_\alpha(\mathbf{k}) = A_{\alpha i} \hat{k}_i \quad (3.1)$$

Комплексная 3×3 матрица $A_{\alpha i}$ суть параметр порядка в сверхтекущих фермижидкостях с p -спариванием. Именно такой тип спаривания осуществляется в сверхтекучем ${}^3\text{He}$ [3-6], фазовая диаграмма которого изображена на рис. 2.

Вектор \mathbf{d} в выражении (3.1) зависит от компонент вектора k в некоторой фиксированной системе координат. Пользуясь тем, что при трехмерных по-

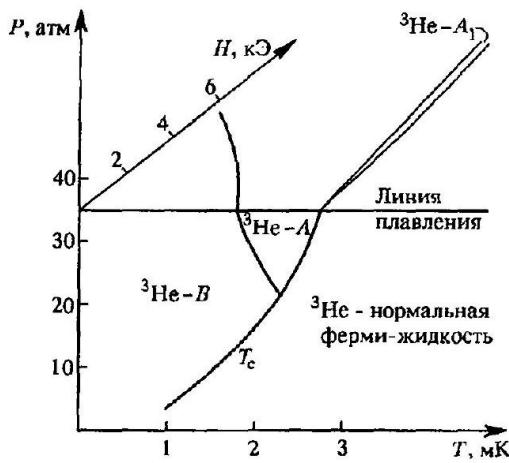


Рис. 2. Фазовая диаграмма жидкого гелия-3 в координатах: температура $-T$ (мК), давление P (атм), магнитное поле $-H$ (коЗ)

воротах \hat{R}^S и \hat{R}^O в спиновом и орбитальном (координатном) пространствах, соответственно, компоненты векторов \mathbf{d} и \mathbf{k} линейно прособираются через самих себя, то есть

$$\begin{aligned} d_\alpha &\rightarrow \tilde{d}_i = R_{\alpha\beta}^S d_\beta \\ k_i &\rightarrow \tilde{k}_i = R_{ij}^O k_j \end{aligned}$$

мы можем записать параметр порядка в произвольной системе координат.

Перечислим возможные фазы сверхтекучей жидкости с p -спариванием, различающиеся видом спинового вектора d (или матрицы $A_{\alpha i}$).

B -фаза:

$$d(\mathbf{k}) \propto \hat{\mathbf{k}} \quad (3.2)$$

то есть $A_{\alpha i} \propto \delta_{\alpha i}$ (в произвольной системе координат $A_{\alpha i} \propto R_{\alpha i}$, где \hat{R} матрица трехмерных вращений). Волновая функция пары (см. (2.7)) имеет в ХХД

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{pair}}^B &\propto \begin{pmatrix} -\hat{k}_x + i\hat{k}_y & \hat{k}_z \\ \hat{k}_z & \hat{k}_x + i\hat{k}_y \end{pmatrix} = \\ &= (-\hat{k}_x + i\hat{k}_y) |\Pi\rangle + \hat{k}_z \left(\left| \prod \downarrow \right\rangle + \left| \uparrow \right\rangle \right) + (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) |\Downarrow\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, B -фаза представляет собой линейную комбинацию трех равновероятных состояний $|S_z = +1, m = -1\rangle, |S_z = 0, m = 0\rangle$ и $|S_z = -1, m = +1\rangle$.

Имеются еще две фазы, в которых реализуется часть состояний, из которых состоит B -фаза.

Планарная фаза:

$$d(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x, \hat{k}_y, 0) \quad (3.4)$$

Отсюда

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{pl}} \propto \left(-\hat{k}_x + i\hat{k}_y \right) |\uparrow\rangle + \left(\hat{k}_x + i\hat{k}_y \right) |U\rangle. \quad (3.5)$$

Планарная фаза является смесью двух состояний: $|S_z = +1, m = -1\rangle$ и $|S_z = -1, m = +1\rangle$.

Полярная фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (0, 0, \hat{k}_z) \quad (3.6)$$

Отсюда

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{pol}} \propto \hat{k}_z (| \uparrow\downarrow \rangle + | \downarrow\uparrow \rangle) \quad (3.7)$$

Полярная фаза состоит из пар с $S_z = 0$ и $m = 0$.

Имеются также фазы с ненулевыми орбитальным и спиновым моментами.

A -фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0) \quad (3.8)$$

то есть $A_{\alpha i}^A \propto V_\alpha (\Delta'_i + i\Delta''_i)$, где $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$, $\Delta' = (1, 0, 0)$, $\Delta'' = (0, 1, 0)$. В произвольной системе координат: V - единичные векторы в спиновом пространстве, а Δ' и Δ'' - единичные взаимно перпендикулярные векторы в координатном пространстве. Парная волновая функция имеет вид

$$\Psi_{\text{pair}}^A \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) (| \uparrow\rangle\langle \uparrow | - | \downarrow\rangle\langle \downarrow |) \quad (3.9)$$

Таким образом, A -фаза представляет собой линейную комбинацию двух равновероятных состояний $|S_z = +1, m = 1\rangle$ и $|S_z = -1, m = 1\rangle$. Спиновый момент в этой фазе отсутствует. Орбитальный момент сосуда с A -фазой в основном состоянии должен быть порядка $N\hbar$, где N - число куперовских пар.

A_1 -фаза:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, i(\hat{k}_x + i\hat{k}_y), 0) \quad (3.10)$$

Отсюда $A_{\alpha i}^{A_1} \propto (V'_\alpha + iV''_\alpha) (\Delta'_i + i\Delta''_i)$, причем в произвольной системе координат \mathbf{V}' и \mathbf{V}'' - единичные взаимно перпендикулярные спиновые векторы, а Δ' и Δ'' определяются аналогично A -фазе. Парная волновая функция имеет вид

$$\Psi_{\text{pair}}^{A_2} \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) |\Pi\rangle \quad (3.11)$$

Следовательно, A_1 -фаза состоит из пар с $S_z = 1$ и $m = 1$. Эта фаза обладает как орбитальным, так и спиновым магнитным моментом.

$\beta - \phi aa$:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x, i\hat{k}_x, 0) \quad (3.12)$$

Отсюда $A_{\alpha i}^\beta \propto (V'_\alpha + iV''_\alpha) \Delta_i$, и

$$\Psi_{\text{pair}}^\beta \propto \hat{k}_x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ((\hat{k}_x + i\hat{k}_y) + (\hat{k}_x - i\hat{k}_y)) |\Pi\rangle \quad (3.13)$$

то есть β -фаза состоит из пар с $S_z = 1, m = +1$ и $S_z = 1, m = -1$ и обладает ненулевым спиновым моментом.

10.2.5 4. Сверхпроводящие состояния в кристаллах

Из рассмотрения 2 следует, что сверхпроводящие состояния, обладающие определением пространственной четностью, могут быть либо спинсинглетными, либо спин-триплетными. Именно, парная волновая функция для пространственно-четных состояний

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{s}} \propto g(\mathbf{k}) i\sigma_y \quad (4.1)$$

$$g(\mathbf{k}) = g(-\mathbf{k}) \quad (4.2)$$

соответствует $S = 0$, а для пространственно-нечетных состояний $S = 1$, то есть

$$\Psi_{\text{pair}}^{\text{t}} \propto (\mathbf{d}(\mathbf{k})\sigma) i\sigma_y \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = -\mathbf{d}(-\mathbf{k}) \quad (4.4)$$

Симметрия системы в сверхпроводящем состоянии включает в себя пространственную инверсию, если парная волновая функция Ψ_{pair} под действием оператора инверсии I не меняется:

$$I\Psi_{\text{pair}} = \Psi_{\text{pair}} \quad (4.5)$$

что соответствует синглетному спариванию, или меняет знак:

$$I\Psi_{\text{pair}} = -\Psi_{\text{pair}} \quad (4.6)$$

при триплетном спаривании. Смешанные сверхпроводящие состояния вида

$$a\Psi^{\text{s}} + b\Psi^{\text{t}} \quad (4.7)$$

в этом случае запрещены.

Если же симметрия нормального состояния не включает пространственную инверсию (кристалл без центра инверсии), или симметрия по отношению к инверсии нарушается при переходе в сверхпроводящее состояние (специальный вид спаривающего взаимодействия), то состояния типа (4.7) в

принципе могут реализовываться [7]. Мы будем предполагать наличие пространственной инверсии и работать со сверхпроводящими состояниями вида (4.1) либо (4.3).

Как было показано в 1, в изотропном веществе температуры перехода в сверхпроводящие состояния с разными значениями орбитального момента куперовских пар различны, то есть $T_c = T_c(l)$. Функции $g(\mathbf{k})$ и $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ для синглетного и триплетного состояний, соответственно, имеют вид линейных комбинаций сферических функций с данным l :

$$g^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad \text{при } l = 0, 2, 4, \dots \quad (4.8)$$

$$\mathbf{d}^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}), \quad \text{при } l = 1, 3, 5, \dots \quad (4.9)$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, выбор системы координат, в которой записываются функции $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})$, роли не играет, поскольку при переходе от одного базиса $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ к другому $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, то есть при пространственных вращениях системы координат, функции $Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}'})$ линейно выражаются через сферические гармоники с тем же значением l :

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}'}) = \sum_{m'=-1}^i \Gamma_{mm'} Y_{lm'}(\hat{\mathbf{k}})$$

В общем случае говорят, что набор функций $\{\psi_i(\mathbf{r})\}$ образует базис неприводимого представления некоторой группы пространственной симметрии G , если функции данного набора при любом преобразовании симметрии g из этой группы линейно выражаются только через самих себя [8]:

$$\psi_i(g \cdot) = \psi_i(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^d c_{ij} \psi_j(\mathbf{r})$$

В изотропной системе, инвариантной относительно любых пространственных вращений, то есть преобразований из группы SO_3 , неприводимые представления нумеруются значением орбитального момента l , а набор из $2l+1$ сферических гармоник с данным l образует базис представления. Типы куперовского спаривания при этом находятся во взаимнооднозначном соответствии с неприводимыми представлениями группы трехмерных вращений.

Принцип классификации сверхпроводящих состояний согласно различным представлениям группы симметрии системы в нормальном состоянии полностью сохраняется и в присутствии кристаллической анизотропии [9-14]. Именно, сверхпроводящие состояния с различными критическими температурами описываются базисными функциями различных неприводимых представлений Γ группы G точечной симметрии кристалла¹, причем $T_c = T_c(\Gamma)$.

Разложения (4.8), (4.9) в этом случае принимают вид:

$$g(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_s}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (4.11)$$

где $\psi_i^{\Gamma_s}(\hat{\mathbf{k}})$ и $\psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}})$ - базисные функции (g - четные, au - нечетные по $\hat{\mathbf{k}}$) неприводимых представлений Γ размерности d_Γ группы G .

Для пренебрежимо малого спин-орбитального взаимодействия имеется вырождение состояний по отношению к вращениям спиновых векторов:

$$\eta_i^\alpha \rightarrow \tilde{\eta}_i^\alpha = R_{\alpha\beta}^S \eta_i^\beta.$$

В случае сильного спин-орбитального взаимодействия, которое имеет место в соединениях, содержащих элементы с большими атомными номерами, удобно представить (4.11) в виде разложения

$$\mathbf{d}^I(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \eta_i \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (4.12)$$

по векторным базисным функциям

$$\begin{aligned} \psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) &= \psi_i^x(\hat{\mathbf{k}})\hat{x} + \psi_i^y(\hat{\mathbf{k}})\hat{y} + \psi_i^z(\hat{\mathbf{k}})\hat{z} \\ \psi_i^{\Gamma_u}(-\hat{\mathbf{k}}) &= -\psi_i^{\Gamma_u}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

неприводимого представления Γ . Базис в спиновом пространстве задается единичными аксиальными векторами $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, жестко связанными с кристаллическими осями. Здесь

¹ Пространственная группа симметрии кристалла включает комбинации операций точечной симметрии и трансляций. Постепенно можно не принимать во внимание, так как никакой дополнительной пространственной модуляции при переходе в сверхпроводящее состояние не возникает.

необходимо сделать следующее замечание. Несмотря на то, что в кристаллах с сильным спин-орбитальным взаимодействием спин $\vec{\ell}$ электрона становится «плохим» квантовым числом, электронные состояния тем не менее остаются двукратно вырожденными (крамерсовское вырождение - следствие симметрии по отношению к обращению времени), что позволяет характеризовать их «псевдоспином». В этом же смысле следует понимать термин «спин-синглетное» или «спин-триплетное» сверхпроводящие состояния.

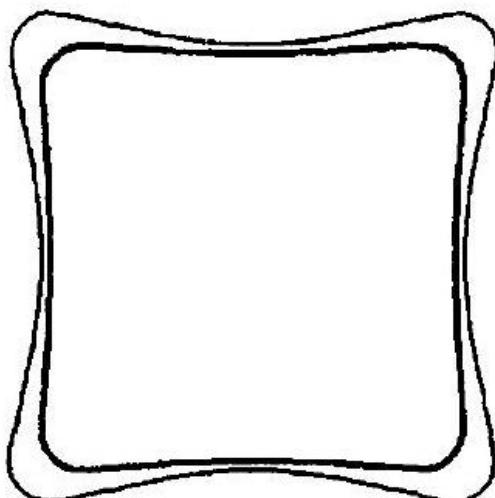
Совокупность комплексных коэффициентов η_i (или η_i) в разложениях (4.10), (4.11) или (4.12) представляет собой параметр порядка в кристаллических сверхпроводниках. Таким образом, возможны как сверхпроводящие состояния с однокомпонентными параметрами порядка $\eta = |\eta|e^{i\varphi}$, так и с многокомпонентными параметрами порядка.

Помимо точечных преобразований, группа симметрии нормального состояния \mathcal{G} включает операцию обращения времени R и калибровочные преобразования $U(1)^2$:

$$\mathcal{G} = U(1) \times R \times G$$

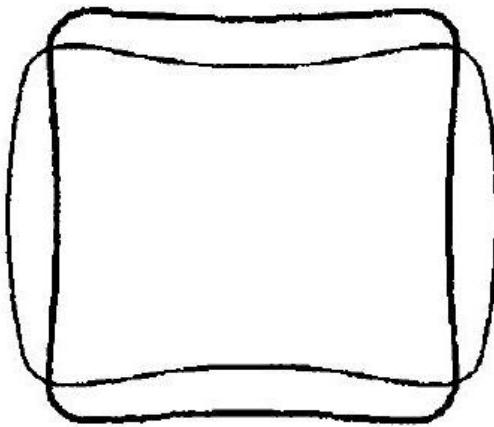
Переход в сверхтекучее или сверхпроводящее состояние означает появление фазовой когерентности, то есть различия между состояниями с различными фазами φ параметра порядка $|\eta|e^{i\varphi}$, о чем говорят как о спонтанном нарушении калибровочной симметрии $U(1)$. При переходе в данное сверхтекучее состояние могут нарушаться также и другие симметрии из \mathcal{G} (необычная сверхтекучесть или сверхпроводимость). В результате сохраняется инвариантность лишь по отношению к преобразованиям, образующим подгруппу H (сверхпроводящих класс) группы \mathcal{G} . Таким образом, задача перечисления всех возможных сверхпроводящих (или сверхтекущих) фаз сводится к нахождению сверхпроводящих классов, соответствующих различным нарушенным симметриям нормальной фазы [9].

Среди допустимых по симметрии сверхпроводящих состояний следует выделять те, которые могут возникнуть непосредственно из нормальной фазы³. Согласно общей теории фазовых переходов Ландау, параметры порядка таких состояний должны преобразовываться по одному из неприводимых представлений точечной группы симметрии G нормальной фазы [9]. Обычное сверхпроводящее состояние обладает полной точечной симметрией кристалла, то есть относится к единичному представлению A_{1g} и описывается тривиальным сверхпроводящим классом $H = R \times G$. Точечная симметрия всех остальных сверхпроводящих состояний, относящихся к неединичным представлениям



a

² В отсутствие спин-орбитального взаимодействия в группу \mathcal{G} необходимо включать также преобразования свободных трехмерных вращений спинов, образующих группу SO_3^S .



6

Рис.3. Сечение ферми-поверхности (жирная линия) в базисной плоскости тетрагонального кристалла (группа симметрии D_{4h}). Тонкой линией изображены: а) амплитуда параметра порялка обычного сверхпроводящего состояния (представление Λ_{1g}), б) амплитуда параметра порядка одного из необычных сверхпроводящих состояний (представление B_{1g}), понжающего точечную симметрию кристалла до D_{2h}

(или нечетному единичному представлению A_{1u}), нарушена, и они пазываются нетривиальными или необычными сверхпроводящими состояниями (рис. 3).

В случае однокомпонентного параметра порядка имеется взаимооднозначное соответствие между одномерными представлениями группы G и сверхпроводящими классами. Напротив, неодномерные представления порождают несколько сверхпроводящих состояний, относящихся к различным сверхпроводящим классам и имеющих одинаковую критическую температуру, но разную свободную энергию (подробнее об этом см. 11). Это имеет место, например, для фаз с p -спариванием, персисленных в 3.

Сверхпроводящие классы в гексагональном кристалле. В качестве примера, важного с точки зрения приложений к сверхпроводящему соединению с гяжельми фермionами LPt_3 , обсудим сверхпроводящие состояния в кристалле с гексагональной симметрией, для которого $G = D_{6h} = D_6 \times I$, где I - преобразование инверсии. Здесь имеется 6 неприводимых представлений: 4 одномерных (A_1, A_2, B_1, B_2) и 2 двумерных (E_1, E_2). Симметрия каждого сверхпроводящего состояния должна описываться подгруппой группы $\mathcal{G} = U(1) \times R \times D_{6h}$.

Группа $D_6 = \{C_n, U_n\}$ состоит из шести операций поворота C_n вокруг оси \hat{z} на угол $\pi n / 3$ ($n = 0, 1, \dots, 5$; $C_0 = E$ - единичный элемент группы) и вращений U_n на угол π вокруг шести осей

$$- - \hat{x} \sin \frac{\pi n}{3} + \hat{y} \cos \frac{\pi n}{3}$$

Среди подгрупп группы \mathcal{G} имеются четыре подгруппы H , которые соответствуют сверхпроводящим состояниям, описываемым функциями четырех одномерных представлений D_6 . Это подгруппы $D_6 \times R$, $D_6(C_6) \times R$, $D_6(D_3) \times R$, и $D_6(D'_3) \times R$. Подгруппа, указанная в скобках, объединяет те элементы группы D_{6h} , которые не умножаются на фазовый множитель из $U(1)$, то есть

$$\begin{aligned} D_6(C_6) &= \{C_n, e^{i\pi} U_n\} \\ D_6(D_3) &= \{C_{2k}, U_{2k}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k+1}\} \\ D_6(D'_3) &= \{C_{2k}, U_{2k+1}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k}\} \end{aligned}$$

³ Сверхпроводящие классы, не относящиеся к данной категории, соответствуют состояниям, которые могут возникнуть при дополнительных фазовых переходах внутри сверхпроводящей фазы.

где $k = 0, 1, 2$. Легко видеть, что подгруппа D_6 соответствует единичному представлению A_1 . Ровно половина элементов подгруппы $D_6(C_6)$ (или $D_6(D_3), D_5(D'_3)$) есть элементы группы D_6 , другая половина - комбинации операций точечной симметрии и калибровочного преобразования $c^{i\pi}$. Так, точечные преобразования U_n меняют знак параметра порядка сверхпроводящего состояния с симметрией $D_6(C_6)$, которое, тем самым, соответствует неединичному представлению A_2 групп D_6 (аналогично, $D_6(D_3)$ соответствует B_1 , а $D_6(D'_3)$ соответствует B_2).

Высокотемпературные сверхпроводники. Еще одним примером необимной сверхпроводимости являются высокотемпературные сверхпроводники, к которым относятся металлооксидные материалы с T_c в пределах от 7 К до 100 К. Наиболее изученные представители этого класса - соединения $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, - обладают тетрагональной симметрией кристаллической решетки, то есть $G = D_{4h} = D_4 \times I$. В иттрий-бариевых соединениях имеются небольшие (порядка одного процента) орторомбические искажения кристаллической решетки, влияние которых мы рассмотрим несколько ниже.

Группа D_4 , включающая операции поворотов C_n вокруг оси \hat{z} на угол $\pi n/2$ и поворотов U_n на угол π вокруг осей

$$\hat{x} \cos \frac{\pi n}{2} + \hat{y} \sin \frac{\pi n}{2}$$

где $n = 0, 1, 2, 3$, имеет 5 неприводимых представлений: четыре одномерных (A_1, A_2, B_1, B_2) и одно двумерное (E).

Совокупность данных о низкотемпературном поведении термодинамических характеристик [15, 16], а также измерения угловой зависимости амплитуды фотоэмиссии (ARPES) [17] и фазочувствительные SQUID-эксперименты [18-20] (см. 16) позволяют сделать вывод о том, что сверхпроводящее состояние в этих соединениях описывается однокомпонентным нетривиальным параметром порядка, отвечающим синглетному спариванию и преобразующимся в соответствии с представлением B_{1g} , то есть

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2 \quad (4.14)$$

В устоявшейся терминологии такая импульсная зависимость называется «дспариванием», что, однако, не совсем точно, поскольку в кристаллах нет классификации состояний по орбитальному моменту. В соответствующем сверхпроводящем классе

$$\therefore D_4(D_2) \times R = \{C_{2k}, U_{2k}, e^{i\pi} C_{2k+1}, e^{i\pi} U_{2k+1}\} \times R \quad (k = 0, 1)$$

фазовые множители $e^{i\pi} = -1$ компенсируют смену знака базисной функции при действии операций точечной симметрии.

Орторомбические кристаллы характеризуются группой симметрии $G = D_{2h}$, имеющей четыре одномерных неприводимых представления. Простейшее из них - единичное A_{1g} , соответствующее обычной сверхпроводимости, описывается параметром порядка, инвариантным относительно вращений на угол π вокруг направлений $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Для синглетного спаривания такими свойствами, в частности, обладает функция

$$g(\mathbf{k}) \propto a + b (\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2)$$

представляющая собой смесь s и d -состояний - параметр порядка сверхпроводимости с так называемым « $s+d$ -спариванием». Интересно отметить, что это вполне обычное сверхпроводящее состояние в орторомбическом кристалле может оказаться довольно «близким» к необычному сверхпроводящему состоянию B_{1g} в тетрагональном кристалле. Так будет, когда небольшие орторомбические искажения в тетрагональном кристалле вызывают примешивание

s -компоненты к исходной d -компоненте параметра порядка (4.14). Другое, часто фигурирующее в литературе « $s+id$ -состояние», мы обсудим в следующем подразделе.

Магнитные сверхпроводящие классы. Приведенные выше примеры сверхпроводящих классов явно содержат операцию R , то есть соответствующие состояния инвариантны по отношению к обращению времени. Это, в свою очередь, означает отсутствие спонтанного магнетизма куперовских пар. Однако действие операций точечной группы на параметр порядка может быть скомпенсировано умножением не толкко на фазовый множитель из калибровочной группы $U(1)$, но и на операцию R , которая сводится к комплексному сопряжению: $g(\mathbf{k}) \rightarrow g^*(\mathbf{k})$ или $\mathbf{d}(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{d}^*(\mathbf{k})$. Тем самым инвариантность по отношению к обращению времени оказывается нарушенной, и симметрия таких сверхпроводящих состояний описывается магнитными сверхпроводящими классами [9].

Легко видеть, что непосредственный переход из нормальной фазы в сверхпроводящую с однокомпонентным параметром порядка и нарушенной симметрией по отношению к обращению времени невозможен. В самом деле, вблизи критической температуры сверхпроводящие классы находятся во взаимнооднозначном соответствии с представлениями точечной группы G , а операция R переводит базисную функцию представления в комплексно-сопряженную и поэтому требует, чтобы размерность представления d_G была не меньше двух.

Детальное обсуждение вопроса о магнетизме сверхпроводящих фаз с многокомпонентными параметрами порядка мы отложим до 15, а здесь приведем лишь один пример магнитного сверхпроводящего класса для тетрагонального кристалла. Нетрудно убедиться в том, что у группы $\mathcal{G} = U(1) \times R \times D_{4h}$ имеется подгруппа:

$$D_4(D_2) = \{C_{2k}, U_{2k}, RC_{2k+1}, RU_{2k+1}\} \quad (k = 0, 1)$$

содержащая операцию обращения времени лишь в комбинации с поворотами вокруг осей симметрии тетрагональной решетки. Указанной симметрией обладает, например, сверхпроводящая фаза синглетного спаривания с параметром порядка $g(\mathbf{k}) = (\Delta_s + i\Delta_d (\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2)) e^{i\varphi}$, где Δ_s и Δ_d - произвольные константы. Такое состояние (часто называемое $s+id$ -спариванием) может возникнуть в результате двух последовательных фазовых переходов: сначала из нормальной фазы в сверхпроводящую с однокомпонентным параметром порядка $g_1(\mathbf{k}) = \Delta_s e^{i\varphi}$, соответствующим представлению A_{1g} , а затем, при более низкой температуре - в другую сверхпроводящую фазу, в которой к $g_1(\mathbf{k})$ примешивается параметр порядка $g_2(\mathbf{k}) = \Delta_d (\hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2) e^{i\varphi}$, соответствующий представлению B_{1g} .

Нули в спектре элементарных возбуждений. Наличие нетривиальных элементов симметрии, включающих калибровочное преобразование, приводит к важному следствию - существование нулей параметра порядка. Обсудим это свойство для спин-синглетного параметра порядка $g(\mathbf{k})$ с симметрией $D_6(C_6) \times R$:

$$C_n g(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \quad (4.15)$$

$$e^{i\pi} U_n g(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \quad (4.16)$$

$$g(-\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \quad (4.17)$$

В частности, значений параметра порядка на плоскости (k_x, k_z) , перпендикулярной оси \hat{y} , вокруг которой осуществляется поворот U_0 , из (4.16) имеем:

$$U_0 g(k_x, k_z) = -g(k_x, k_z) \quad (4.18)$$

С другой стороны, $U_0 k_x = -k_x$, $U_0 k_z = -k_z$, и

$$U_0 g(k_x, k_z) = g(-k_x, -k_z)$$

Используя свойство (4.17), получаем:

$$U_0 g(k_x, k_z) = g(k_x, k_z) \quad (4.19)$$

Равенства (4.18) и (4.19) могут быть выполнены одновременно лишь при условии

$$g(k_x, k_z) = 0 \quad (4.20)$$

Таким образом, параметр порядка обращается в нуль на плоскости (k_x, k_x) , более того, он меняет знак при се пересечении. То же самое верно для всех плоскостей, перпендикулярных к осям поворотов U_n .

Т а.б ли и а 1. Базисные функции четных ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спинорбitalное взаимодействие) представлений группы D_{6h}

d	Γ	$\psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}}), \dot{\psi}_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}})$	H
1	A_{1g}	$ak_x^2 + b(k_x^2 + k_y^2) + c(k_x^6 - 15k_x^4k_y^2 + 15k_x^2k_y^4 - k_y^6)$	$D_6 \times R$
1	A_{1u}	$ak_z\hat{z} + b(k_x\hat{x} + k_y\hat{y})$	$D_6(C_6) \times R$
1	A_{2g}	$(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	
1	A_{2u}	$a\hat{z}k_x(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2) + b(\hat{x}k_y - \hat{y}k_x)$	$D_6(D_3) \times R$
1	B_{1g}	$k_x(k_x^3 - 3k_xk_y^2)$	
1	B_{1u}	$a\hat{z}(k_x^3 - 3k_xk_y^2) + bk_x[\hat{x}(k_x^2 - k_y^2) - 2\hat{y}k_xk_y]$	$D_6(D'_3) \times R$
1	B_{2g}	$k_z(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	
1	B_{2u}	$a\hat{z}(k_y^3 - 3k_yk_x^2) + bk_x[\hat{y}(k_x^2 - k_y^2) - 2\hat{x}k_xk_y]$	
2	E_{1g}	k_zk_x, k_zk_y	
2	E_{1u}	$\hat{z}k_x, \hat{z}k_y$ или $k_z\hat{x}, k_z\hat{y}$	
2	E_{2g}	$k_x^2 - k_y^2, 2k_xk_y$	
2	E_{2u}	$k_x\hat{x} - k_y\hat{y}, k_x\hat{y} + k_y\hat{x}$ или $\hat{z}k_x(k_x^2 - k_y^2), 2\hat{z}k_xk_yk_z$	

Таблица 2. Базисные функции нечетных ($S = 1$, слабое спиро-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{6h}

d	Γ	$\dot{\psi}_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}})$	H
1	A_{1u}	$k_z(k_x^3 - 3k_xk_y^2)(k_y^3 - 3k_yk_x^2)$	$D_6 \times R \times SO_3^S$
1	A_{2u}	k_z	$D_6(C_6) \times R \times SO_3^S$
1	B_{1u}	$k_y^3 - 3k_yk_x^2$	$D_5(D_3) \times R \times SO_3^3$
1	B_{2u}	$k_x^3 - 3k_xk_y^2$	$D_6(D'_3) \times R \times SO_3^S$
2	E_{1u}	k_x, k_y	
2	E_{2u}	$k_z(k_x^2 - k_y^2), 2k_xk_yk_z$	

Щель в спектре элементарных возбуждений сверхпроводника пропорциональна модулю параметра порядка ⁴:

$$\Delta_{\mathbf{k}} \sim |g(\mathbf{k})| \quad \text{при } S = 0, \quad \Delta_{\mathbf{k}} \sim |\mathbf{d}(\mathbf{k})| \quad \text{при } S = 1$$

(см. ниже 5). Поэтому энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводящем состоянии с симметрией $D_6(C_6) \times R$ является бесшовевым на линиях пересечения поверхности Ферми и плоскостей, перпендикулярных к осям поворотов U_n .

Для спин-триплетного параметра порядка $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ с симметрией $D_6(C_6) \times R$ имеем:

$$C_n \mathbf{d}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (4.21)$$

$$e^{i\pi} U_n \mathbf{d}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{d}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{d}(\mathbf{k}) \quad (4.23)$$

Таблица 3. Базисные функции четных ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спинорбитальное взаимодействие) представлений группы $D_{4\text{d}}$

d	Γ	$\psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}}), \psi_1^\Gamma(\hat{\mathbf{k}})$	H
1	A_{1g}	$ak_z^2 + b(k_x^2 + k_y^2)$	$D_4 \times R$
1	A_{1u}	$a\hat{z}k_x + \hat{b}(\hat{x}k_x + \hat{y}k_y)$	$D_4(C_4) \times R$
1	A_{2g}	$k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4(D_2) \times R$
1	A_{2u}	$u(\hat{x}k_y + \hat{y}k_x)(k_x^2 - k_y^2) + b(\hat{x}k_y - \hat{y}k_x)$	$D_4(D'_2) \times R$
1	B_{1g}	$k_x^2 - k_y^2$	
1	B_{1u}	$a(\hat{x}k_x - \hat{y}k_y) + b\hat{z}k_x(k_x^2 - k_y^2)$	
1	B_{2g}	$k_x k_y$	
1	B_{2u}	$u(\hat{x}k_y + \hat{y}k_x) + b\hat{z}k_x k_y k_z$	
2	E_g	$k_z k_x, k_z k_y$	
2	E_u	$\hat{z}k_x, \hat{z}k_y$	

Таблица 4. Базисные функции нечетных ($S = 1$. слабое спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы D_{4h}

d	Γ	$\psi_i^{V_s}(\hat{\mathbf{k}})$	H
1	A_{1u}	$k_x k_y k_x (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4 \times R \times SO_3^s$
1	A_{2u}	k_x	$D_4(C_4) \times R \times SO_3^s$
1	B_{1u}	$k_x k_3 k_z$	$D_4(D_2) \times R \times SO_3^5$
1	B_{2u}	$k_z (k_x^2 - k_y^2)$	$D_4(D'_2) \times R \times SO_3^5$
2	E_u	k_x, k_y	

Инвариантность параметра порядка по отношению к вращениям C_n означает, что для импульсов, направленных вдоль оси \hat{z} , отлична от нуля только z -компоненты вектора $\mathbf{d}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{d}(k_z) = \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z) \quad (4.24)$$

Из (4.22)

$$U_0 \mathbf{d}(k_z) = -\mathbf{d}(k_z) \quad (4.25)$$

но в то же время из (4.23) и (4.24) получаем:

$$U_0 \mathbf{d}(k_z) = U_0 \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z) = -\hat{z}\psi^z(-\hat{k}_z) = \hat{z}\psi^z(\hat{k}_z) = \mathbf{d}(k_z) \quad (4.26)$$

Из сравнения соотношений (4.25) и (4.26) следует, что

$$\mathbf{d}(k_z) = 0 \quad (4.27)$$

⁴ Данное утверждение справедливо для унитарных сверхпроводящих состояний в отсутствие примесей (см. сноску 6 в 5 и 17).

то есть параметр порядка равен нулю на оси \hat{z} , и поэтому спектр квазичастиц является бесщелевым на северном и южном полюсах ферми-поверхности.

Таким образом, имеется общая особенность сверхпроводящих состояний, симметрия которых включает комбинации точечных и калибровочных преобразований (или точечных преобразований и операции обращения времени). А именно, спектр элементарных возбуждений в таких сверхпроводниках является бесщелевым. Нули параметра порядка расположены на

таблица S. Базисные функции четных ($S = 0$) и нечетных ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы O_h ($\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$). $O(T) = (E, 8C_3, 3C_2, 6e^{i\pi}U_2, 6e^{i\pi}C_4)$

d	Γ	$\psi_i^\Gamma \varepsilon(\hat{k}), \psi_i^Y(\hat{k})$	H
1	A_{1s}	$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$	$O \times R$ $O(T) \times R$
	A_{1u}	$\hat{x}k_x + \hat{y}k_y + zk_z$	
	A_{2s}	$(k_x^2 - k_y^2)(k_y^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_x^2)$	
	A_{2u}	$\hat{x}k_x(k_z^2 - k_y^2) + \hat{y}k_y(k_x^2 - k_z^2) + \hat{z}k_z(k_y^2 - k_x^2)$	
2	E_k	$k_x^2 + \varepsilon k_y^2 + \varepsilon^2 k_z^2, k_x^2 + \varepsilon^2 k_y^2 + \varepsilon k_z^2$	
	E_u	$\hat{x}k_x + \varepsilon \hat{y}k_y + \varepsilon^2 \hat{z}k_z, \hat{x}k_x + \varepsilon^2 \hat{y}k_y + \varepsilon \hat{z}k_z$	
3	F_{1s}	$k_y k_z (k_y^2 - k_z^2), k_z k_x (k_z^2 - k_x^2), k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	
	F_{1u}^2	$\hat{y}k_z - zk_y, \hat{k}k_x - \hat{z}k_z, \hat{x}k_y - \hat{y}k_x$	
	F_{2s}	$k_y k_z, k_z k_x, k_x k_y$	
	F_{3u}	$\hat{y}k_z + \hat{z}k_y, \hat{z}k_x + \hat{x}k_z, \hat{x}k_y + \hat{y}k_x$	

Таблица 6. Базисные функции нечетных ($S = 1$, слабое спин-орбитальное взаимодействие) представлений группы O_h

d	Γ	$\psi_i^\Gamma s(\hat{k})$	H
1	A_{1u}	$k_x k_y k_z (k_x^2 - k_y^2)(k_y^2 - k_z^2)(k_z^2 - k_x^2)$	$O \times R \times SO_3^s$ $O(T) \times R \times SO_3^s$
	A_{2u}	$k_x k_y k_z$	
2	E_u	$k_x k_y k_x (k_x^2 + \varepsilon k_y^2 + \varepsilon^2 k_z^2)$ $k_x k_y k_z (k_x^2 + \varepsilon^2 k_y^2 + \varepsilon k_x^2)$	
	F_{1u}	k_x, k_y, k_z	
3	F_{2u}	$k_x (k_y^2 - k_z^2), k_y (k_z^2 - k_x^2), k_z (k_x^2 - k_y^2)$	

ферми-поверхности на линиях и в изолированных точках для $S = 0$ и в точках для $S = 1$. Последнее утверждение верно лишь для случая сильного спин-орбитального взаимодействия (контрпример - параметр порядка для полярной фазы с p -спариванием).

Непременное наличие нулей в спектре возбуждений есть прямое следствие определенной симметрии сверхпроводящего состояния. Поэтому нули этого типа называются симметрийными нулями. Среди симметрийных нулей можно выделить особый подкласс топологических нулей. К последним относятся те симметрийные нули, которые не исчезают при непрерывных деформациях, нарушающих симметрию кристалла. Не утлубляясь особо в сей предмет, укажем без доказательства, что симметрийные точки нулей являются в то же время топологическими линиями - нст.

Симметрийный подход предоставляет значительную свободу в выборе базисных функций неприводимых представлений. Конкретный выбор базисных функций данного представления Γ может быть сделан только в рамках какой-либо микроскопической модели и определяется топностью, с которой мы хотим описать параметр порядка данного сверхпроводящего состояния. Наличие и положение симметрийных нулей в спектре элементарных возбуждений определяется не видом базисных функций, а симметрией сверхпроводящего состояния. Определенный же выбор базисных функций может искусственно породить дополнительные нефизические («случайные») нули в спектре элементарных возбуждений.

Примеры базисных функций для представлений группы D_{6h} собраны в табл. 1 и 2. Для илюстрации высказанных утверждений базисные функции исчезающих представлений в табл. 1 представлены в виде линейных комбинаций функций двух типов. При произвольных значениях коэффициентов a и b базисные функции $\psi_i^{\Gamma'}(\hat{\mathbf{k}})$ обращаются в нуль только в изолированных точках на ферми-поверхности, лежащих па осах вращений, соответствующих комбинированным симметриям данного сверхпроводящего состояния (симметрийныс нули). С другой стороны, при $a = 0$ (или $b = 0$) в каждой из перечисленных сверхпроводящих фаз к симметрийным погудя добавляются случайные (в том числе и лежащие на линиях) нули параметра порядка.

Базисные функции представлений для кристаллов с тетрагональной (группа D_{4h}) и кубической (группа O_h) симметрией приведены в табл. 3-6. Для одномерных представлений указаны также соответствующие сверхпроводящие классы H . Классы сверхпроводящих состояний, описываемых неодномерными представлениями, будут введены в II, посвященном теории Ландау для анизотропных сверхпроводников.

10.2.6 5. Энергия элементарных возбуждений сверхпроводника

Задача о нахождении спектра элементарных возбуждений сверхпроводника решается путем диагонализации гамильтониана системы ферми-частиц¹, в котором из всех видов взаимодействий оставлено только существенное для сверхпроводимости парное притяжение частиц, имеющих противоположные импульсы (гамильтониан Бардина-Купера-Шиффера):

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \lambda\mu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} \quad (5.1)$$

Здесь и ниже по повторяющимся спиновым индексам подразумевается суммирование, $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m^*) - \varepsilon_F$ – энергия возбуждений в нормальном металле, отсчитанная от энергии Ферми, m^* – эффективная масса. $V_{\alpha\beta, \lambda\mu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ потенциал парного притяжения, обладающий симметрийными свойствами:

$$V_{\alpha\beta, \lambda\mu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -V_{\beta\alpha, \lambda\mu} (-\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -V_{\alpha\beta, \mu\lambda} (\mathbf{k}, -\mathbf{k}') = V_{\mu\lambda, \beta\alpha} (\mathbf{k}', \mathbf{k}) \quad (5.2)$$

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия потенциал факторизуется:

$$V_{\alpha\beta, \lambda\mu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Gamma_{\alpha\beta, \lambda\mu} \quad (5.3)$$

Функцию $V (\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ будем считать опличной от пуля, когда концы векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' лежат в узком слое вблизи ферми-поверхности:

$$V (\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V_l (k, k') \sum_{m=-1}^l Y_{lm} (\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^* (\hat{\mathbf{k}}') \quad (5.4)$$

$$V_l (k, k') = \begin{cases} -V_l, & \text{при } \varepsilon_F - \varepsilon_l \leq k^2 / (2m^*), k^2 / (2m^*) \leq \varepsilon_F + \varepsilon_l \\ 0, & \text{вне указанного интервала.} \end{cases}$$

¹ Для простоты мы будем рассматривать ферми-газ со сферической ферми-поверхностью, ие иримая во внимание влияние кристаллической решетки на энергетический спектр.

² Здесь и виже мы испажьзусм шолновыс функции, нормированыс на единичный объем, поэтому $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = N_0 \int d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi}$, где $N_0 = \frac{m^* k_F}{2\pi^2 \hbar^2}$ – плотность состояний на поверхности Ферми на одгу проекцию спина.

Здесь в разложении функции $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ по сферическим гармоникам с разными l оставлено лишь взаимодействие V_7 , приводящее к максимальной критической температуре (см. 1).

Что касается спиновой зависимости потенциала, то для четных l она записывается через антисимметричные по индексам $\alpha\beta(\lambda\mu)$ матрицы

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta\beta} g_{\lambda\mu}^+ \quad (5.5)$$

$g_{\alpha\beta} = (i\sigma_y)_{\alpha\beta}$, а для нечетных l - через симметричные:

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda,\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{b}_{\lambda\mu}^+ \quad (5.6)$$

где $\mathbf{g}_{\alpha\beta} = (i\sigma\sigma_y)_{\alpha\beta}$, а \mathbf{g}^+ и \mathbf{g}^+ обозначают эрмитово-сопряженные матрицы.

В кристаллах, где существует инвариантность относительно преобразований точечной группы симметрии, парное взаимодействие имеет вид

$$V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V_\Gamma(k, k') \Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu}^2 \sum_{i=1}^{d_r} \psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}}) \psi_i^{\Gamma^\top}(\hat{\mathbf{k}}') \quad (5.7)$$

Здесь оставлено лишь взаимодействие V_Γ , относящееся к неприводимому представлению Г с базисными функциями $\psi_i^\Gamma(\hat{\mathbf{k}})$, которое приводит к спариванию с максимальной критической температурой. Функции $\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ для четных и нечетных представлений задаются формулами (5.5) и (5.6), соответственно.

Выражение (5.7) справедливо для синглетного спаривания и триплетного спаривания со слабым спин-орбитальным взаимодействием. В случае $S = 1$ и сильного спин-орбитального взаимодействия (см. 4) парное взаимодействие имеет вид

$$V_{\alpha\beta,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} V_\Gamma(k, k') \sum_{i=1}^{d_\Gamma} \left(\psi_i(\hat{\mathbf{k}}) g_{\alpha\beta} \right) \left(\psi_i^*(\hat{\mathbf{k}}') g_{\lambda\mu}^+ \right) \quad (5.8)$$

Неустойчивость электронного газа, описываемого гамильтонианом (5.1), по отношению к образованию куперовских пар можно учесть [1], записывая волновую функцию основного состояния в виде произведения

$$\Psi = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{-\mathbf{k}\downarrow}^+) |vac\rangle \quad (5.9)$$

Здесь $v_{\mathbf{k}}$ - амплитуда вероятности заполнения пары опночастичных состояний ($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$) (для простоты мы имеем в виду синглетное спаривание), u_k - амплитуда вероятности обнаружить состояние ($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$) незаполненным, а $\langle vac \rangle$ - волновая функция вакуумного состояния, причем выполняется условие

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$$

В нормальном металле

$$\begin{aligned} v_k &= 1 : u_k = 0, & \text{при } |\mathbf{k}| < k_F, \\ u_k &= 0, u_k = 1, & \text{при } |\mathbf{k}| > k_F, \end{aligned} \quad (5.10)$$

то есть все состояния ниже ферми-уровня заполнены, выше него - пусты.

В сверхпроводнике при любом \mathbf{k} имеется ненулевая вероятность обнаружить данное парное состояние пустым, и волновая функция основного состояния (5.9) состоит из большого числа слагаемых, в каждом из которых с различной вероятностью заполнено $0, 2, \dots, N, N \pm 2, \dots$ парных одночастичных состояний. Иными словами, основное состояние

сверхпроводника предстазляет собой суперпозицию состояний с разлжчным пислом куперовских пар³. Стедствием этого фундаментального факта служит опличие от нуля так называемых аномальных средних [21]:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},T\downarrow} &= \langle \Psi | a_{\mathbf{k}\uparrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow} | \Psi \rangle \\ F_{\mathbf{k},T\downarrow}^+ &= \langle \Psi | a_{-\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\downarrow}^+ | \Psi \rangle \end{aligned}$$

Такие среднис можно определить и при произволыной температуре⁴:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= \langle a_{\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\beta} \rangle \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ &= \langle a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.11)$$

Функция $F_{\mathbf{k},\alpha\beta}$, имеющая смысл волевой функции пары, антисимметрична относительно перестановки частиг:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta} \rightarrow P_{-\mathbf{k},\beta\alpha} = -F_{\mathbf{k},\alpha\beta\beta} \quad (5.12)$$

Для пространственно-четных функций F равенство (5.12) означает антисимметрию по спиновым индексам:

$$F_{\mathbf{k}_1\alpha\beta}^g = -F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^g$$

то есть для спаривания в синглетном состояии имеем:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^g &= F_{\mathbf{k}} g_{\alpha\beta} \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^g &= F_{\mathbf{k}}^* g_{\alpha\beta}^+ \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $F_{-\mathbf{k}} = F_{\mathbf{k}}$. Для пространственно-нечетных функций F равенство (5.12) справедливо лишь в слугае симметрии по спиновым индексам:

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^u = F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^u$$

³ Гтавныд вклад в эту суперпозицию вносят состояния с тислом пар $N_{\text{pairs}} \approx N_{\text{particles}} / 2$.

⁴ Среднее в формулах (5.11) понимается как

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_n A_{nn} - E_n/T}{\sum_n e^{-E_n/T}}$$

то есть для спаривания в триплетном состоянии:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^u &= \mathbf{F}_{\mathbf{k}} \mathbf{g}_{\alpha\beta} \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^{u+} &= \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^* \mathbf{g}_{\alpha\beta}^+ \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $\mathbf{F}_{-\mathbf{k}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$.

Для диагонализации гамильтониана в приближении самосогласованного поля [21] предположим, что отклонения произведений пар операторов, входящих в (5.1), от их средних значений (5.11) малы. Воспользовавшись тождественными преобразованиями:

$$\begin{aligned} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ &= F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ + (a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+ - F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+) \\ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} &= F_{\mathbf{k}',\lambda\mu} + (a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} - F_{\mathbf{k}',\lambda\mu}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

перепишем гамильтониан (5.1) в линейном приближении по указанным отклонениям:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (-F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+ F_{\mathbf{k}', \lambda\mu} + F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}^+ a_{\mathbf{k}'\lambda} a_{-\mathbf{k}'\mu} + F_{\mathbf{k}', \lambda\mu} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\beta}^+) \quad (5.16)$$

Введем теперь функции

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}', \lambda, k} \\ \Delta_{\mathbf{k}, \lambda, k}^+ &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\alpha\beta, \mu\lambda}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}', \alpha\beta}^+ \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из (5.2) и (5.12) получаем:

$$\Delta_{k, \alpha\beta} = -\Delta_{-k, \beta\alpha\alpha}.$$

Очевидно, что для четного по импульсам потенциала взаимодействия функции $\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ и $F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ также должны быть четными, что соответствует спариванию в синглетном состоянии:

$$\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} = \Delta g(\mathbf{k}) (i\sigma_y)_{\alpha\beta} \quad (5.18)$$

Здесь

$$g(\mathbf{k}) = g'(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^l a_{lm}(k) Y_{lm}(\mathbf{k})$$

а нормировка выбрана следующим образом:

$$\int \frac{dS}{4\pi} |g'(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (5.19)$$

Заметим, что

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} g^l(\mathbf{k}) = 0$$

для всех значений l , кроме s -спаривания ($l = 0$).

В случае нечетного потенциала взаимодействия функции $\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ и $F_{\mathbf{k}, \alpha\beta}$ также нечетны и описывают триплетное спаривание:

$$\Delta_{\mathbf{k}, \alpha\beta} = \Delta d(\mathbf{k}) (i\sigma\sigma_y)_{\alpha\beta k} \quad (5.20)$$

Здесь

$$d(\mathbf{k}) = d^l(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^1 b_{lm}(k) Y_{lm}(\mathbf{k})$$

и

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |d(\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (5.21)$$

Коэффициенты $a_{lm}(k)$ и $b_{lm}(k)$ отличны от нуля лишь в узком слое толщиной $\delta k = \varepsilon_l/v_F$ вблизи поверхности Ферми.

Используя (5.17), для гамильтониана (5.16) получаем ⁵:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} - a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{-\mathbf{k}\alpha}^+) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{-\mathbf{k}\beta}^+ + \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ a_{-\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\beta} + \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+) \quad (5.22)$$

Это выражение можно переписать в более компактном виде, определив векторные операторы [22]

$$A_{k,i}^+ \equiv (a_{k\alpha}^+, a_{-k\alpha}) \equiv (a_{k\uparrow}^+, a_{k\downarrow}^+, a_{-k\uparrow}, a_{-k\downarrow}) \\ A_{k,i} \equiv \begin{pmatrix} a_{k\alpha} \\ a_{-k\alpha}^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{k\uparrow} \\ a_{k\downarrow} \\ a_{-k\uparrow}^+ \\ a_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Имеем:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k},i}^+ \varepsilon_{\mathbf{k},ij} A_{\mathbf{k},j} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\beta\alpha}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}}$$

где мы ввели матрицу 4×4 :

$$\varepsilon_{k,ij} = \begin{pmatrix} \xi_k \delta_{\alpha\beta} & \Delta_{k,\alpha\beta} \\ \Delta_{k,\alpha\beta}^+ & -\xi_k \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Гамильтониан (5.24) приводится к диагональному виду с помощью сохраняющего антисимметрические соотношения унитарного преобразования Боголюбома ⁶, преобразующего фермиевские операторы a_k в фермиевские операторы $b_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$A_{k,i} = U_{ij} B_{k,j} \quad (5.25)$$

где

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} u_{k,\alpha\beta} & v_{k,\alpha\beta} \\ v_{-k,\alpha\beta}^* & u_{-k,\alpha\beta}^* \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

$$B_{k,i} = \begin{pmatrix} b_{k\beta} \\ b_{-k\beta}^+ \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Элементы матрицы преобразования являются, в свою очередь, матрицами 2×2 в спиновом пространстве и определяются следующими формулами:

⁵ Суммировано по спиновым индексам от функции ξ_k , не зависящей от спинов, означает $\sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}} = 2 \sum_k \xi_k$

⁶ Все формулы, приводимые ниже, справедливы для произвольного типа синглетного спаривания, а в случае триплетного спаривания - лишь пять таких называемых унитарных фаз, удовлетворяющих условию: $(\Delta\Delta^+)^2 \sim \delta_{\alpha\beta}$. Среди перечисленных в §3 фаз с р-спариванием к унитарным фазам относятся все, кроме A_1 - и β -фазы. В неунитарном случае диагонализация гамильтониана выглядит несколько сложнее (см. [13], а также 17), и мы не будем здесь на этом останавливаться.

$$u_{k,\alpha\beta} = \frac{(E_k + \xi_k) \delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{(E_k + \xi_k)^2 + \Delta_k^2}} = u_k \delta_{\alpha\beta} \quad (5.28)$$

$$v_{k,\alpha\beta} = -\frac{\Delta_{k,\alpha\beta}}{\sqrt{(E_k + \xi_k)^2 + \Delta_k^2}}$$

где

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \quad (5.29)$$

и введено обозначение (см. (5.18) и (5.20))

$$\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \text{Sp } \Delta_{\mathbf{k}}^+ \Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2, & \text{при } S = 0 \\ \Delta^2 \mathbf{d}(\mathbf{k}) \mathbf{d}^*(\mathbf{k}), & \text{при } S = 1 \end{cases} \quad (5.30)$$

В результате получаем:

$$\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k},i}^+ \varepsilon_{\mathbf{k},ij} A_{\mathbf{k},j} = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k},i}^+ E_{\mathbf{k},ij} B_{\mathbf{k},j}$$

где

$$E_{\mathbf{k},ij} = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

Перепишем последнее выражение в терминах операторов рождения и уничтожения квазичастиц $b_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k},i}^+ \hat{E}_{\mathbf{k},ij} B_{\mathbf{k},j} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}\alpha}^- b_{-\mathbf{k}\alpha}^+ = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Таким образом, гамильтониан сверхпроводника окончательно приобретает следующий вид:

$$H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} \quad (5.31)$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} H_{\mathbf{k},3\alpha}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\xi_k - E_{\mathbf{k}}) \quad (5.32)$$

есть энергия основного состояния, а величины $E_{\mathbf{k}}$ представляют собой энергии элементарных возбуждений сверхпроводника.

Для сверхпроводника с синглетным спариванием имеем:

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2} \quad (5.33)$$

то есть в спектре элементарных возбуждений имеется щель. В полностью изотропном случае (s -спаривание) $g(\mathbf{k}) = |\Delta| e^{i\varphi}$, и щель отлична от нуля на всей ферми-поверхности. Как было показано в §4, s -спаривание в кристалле соответствует сверхпроводящее состояние, преобразующееся согласно

единичному представлению точечной группы симметрии кристалла. В этом случае $g(k)$ может обращаться в нуль при некоторых значениях k (случайные нули). Для анизотропных типов спаривания с $l \neq 0$, таких, что сверхпроводящее состояние обладает комбинированной (например, поворотной и калибровочной) симметрией, обращение щели в нуль при некоторых \mathbf{k} обязательно (симметрийные нули).

Для сверхпроводника с триплетным спариванием:

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k})|^2} \quad (5.34)$$

В B -фазе $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{k}}$ (см. (3.2) и (5.21)), и

$$E_k^B = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} \quad (5.35)$$

то есть, как и в случае s -спаривания, на всей ферми-поверхности имеется щель, не зависящая от направления \mathbf{k} .

В A -фазе $\mathbf{d} = \sqrt{3/2} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0)$ (см. (3.8) с учетом нормировочного множителя), и

$$E_{\mathbf{k}}^A = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2}\Delta^2 (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)} = \sqrt{\xi_k^2 + \frac{3}{2}\Delta^2 \sin^2 \theta} \quad (5.36)$$

то есть щель в спектре обращается в нуль на северном и южном полюсах ($\theta = 0, \pi$) ферми-сферы (рис. 4). Наличие нулей в спектре A -фазы следует из

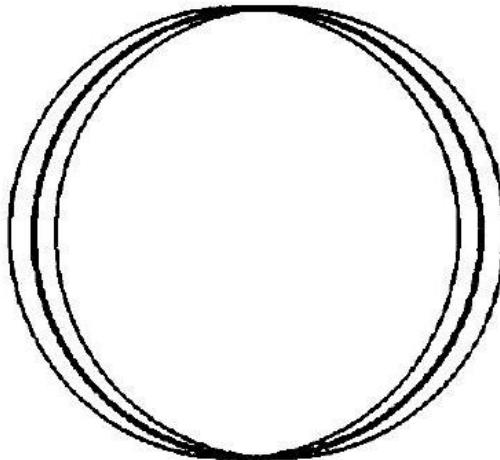


Рис. 4. Щель в спектре A -фазы. Границы щели - тонкие линии, ферми-сфера - жирная линия комбинированной инвариантности состояния (3.8) относительно поворотов на угол α вокруг оси z и одновременного калибровочного преобразования домножения на $e^{-i\alpha}$ (более подробно см. 4).

Упражнение. Показать, что энергия основного состояния сверхпроводника (5.32) определяется следующими выражениями:

$$E_{0s} = E_{0n} - \frac{1}{2}N_0\Delta^2 \quad (5.37)$$

для синглетного изотропного спаривания, и

$$E_{0s} = E_{0n} - \frac{1}{4}N_0 \text{Sp} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Delta_{\mathbf{k}}^+ \Delta_{\mathbf{k}} \quad (5.38)$$

для произвольного типа спаривания, где E_{0n} есть энергия основного состояния нормального металла.

10.2.7 6. Щель в спектре возбуждений и критическая температура

Для определения температурной зависимости щели в спектре элементарных возбуждений обратимся к формуле (5.17):

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\mathbf{k}',\lambda\mu} \quad (6.1)$$

Подставляя сюда аномальное среднее (5.11) и применяя преобразование Богодобова (5.25), имеем:

$$F_{\mathbf{k},\lambda\mu} = \langle a_{\mathbf{k}\lambda} a_{-\mathbf{k}\mu} \rangle = \langle (u_{\mathbf{k},\lambda\gamma} b_{\mathbf{k}\gamma} + v_{\mathbf{k},\lambda\gamma} b_{-\mathbf{k}\gamma}^+) (u_{-\mathbf{k},\mu\delta} b_{-\mathbf{k}\delta} + v_{-\mathbf{k},\mu\delta} b_{\mathbf{k}\delta}^+) \rangle$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= u_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta}, & v_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= -v_{-\mathbf{k},\beta\alpha} \\ \langle b_{-\mathbf{k}\alpha} b_{\mathbf{k}\beta} \rangle &= \langle b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{-\mathbf{k}\beta}^+ \rangle = 0 \\ \langle b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\beta} \rangle &= \delta_{\alpha\beta} - \langle b_{\mathbf{k}\beta} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ \rangle = f_{\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

где

$$f_{\mathbf{k}} = f(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\exp(E_{\mathbf{k}}/T) + 1} \quad (6.2)$$

есть фермиевская функция распределения возбуждений с энергией $E_{\mathbf{k}}$, определяемой формулой (5.29), получасм:

$$F_{\mathbf{k},\lambda\mu} = -u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k},\lambda\mu} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) = \frac{\Delta_{\mathbf{k},\lambda\mu}}{2E_{\mathbf{k}}} (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \quad (6.3)$$

После подстановки в (6.1) окончательно приходим к следующему условию самосогласования:

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{1 - 2f_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \Delta_{\mathbf{k}',\lambda\mu} \quad (6.4)$$

называемому также «уравнением на щель». Вспоминая выражения (5.33) и (5.34), имеем:

$$g(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (1 - 2f_{\mathbf{k}'})}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k}')|^2}} g(\mathbf{k}') \quad (6.5)$$

для синглетного спаривания и

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (1 - 2f_{\mathbf{k}'})}{2\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k}')|^2}} \mathbf{d}(\mathbf{k}') \quad (6.6)$$

для триплетного спаривания.

При $T \rightarrow T_c$ щель в спектре обращается в нуль, и уравнения (6.5) и (6.6) становятся линейными. Это означает, что любая комбинация сферических гармоник с данным l (в общем случае - функций данного неприводимого представления группы симметрии нормальной фазы), имеющая вид

$$g(\mathbf{k}) = \sum_{m=-1}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (6.7)$$

ИИИ

$$d(\mathbf{k}) = \sum_{m=-l}^l b_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (6.8)$$

является решением уравнений (6.5) и (6.6), соответственно. Мы вновь пришли к утверждению, что все сверхпроводящие состояния, относящиеся к данному неприводимому представлению группы симметрии нормальной фазы, имеют одинаковую критическую температуру. Она определяется уравнением

$$1 = N_0 V_i \int_0^{\varepsilon_i} d\xi \frac{\operatorname{th}(|\xi|/2T_c)}{|\xi|} \quad (6.9)$$

которое получается при подстановке в уравнение на щель разложений (6.7) (или (6.8)). Интегрируя по частям правую часть (6.9) и заменяя на бесконечность верхний предел быстро сходящегося интеграла, получаем:

$$1 = N_0 V_l \left(\ln \frac{\varepsilon_l}{2T_c} - \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x} \right)$$

Следовательно,

$$T_C = \frac{2\gamma}{\pi} \varepsilon_l \exp \left(-\frac{1}{N_0 V_l} \right) \quad (6.10)$$

Здесь $2\gamma/\pi \approx 1.14$, где

$$\ln \gamma = C \approx 0.577$$

носит название постоянной Эннера.

Подставляя в (6.5) и (6.6) разложения (5.4), (5.7) или (5.8) потенциала парного притяжения и используя ортогональность базисных функций неприводимого представления, получаем, что параметр порядка при всех $T < T_c$ имеет вид (6.7) или (6.8). Зависимость модуля параметра порядка и коэффициентов a_{lm} и b_{lm} от температуры при этом определяется нелинейными уравнениями вида¹:

$$a_{lm}(T) = N_0 V_i \int_0^{\varepsilon_1} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\operatorname{lh} \left(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)} |g(\mathbf{k})|^2 / 2T \right)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T') |g(\mathbf{k})|^2}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) g(\mathbf{k}) \quad (6.11)$$

для синглстного спаривания, и

$$b_{lm}(T) = N_0 V_l \int_0^{\varepsilon_1} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\operatorname{th} \left(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)} |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2 / 2T \right)}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T) |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2}} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) d(\mathbf{k}) \quad (6.12)$$

для триплетного спаривания, дополненными условиями нормировки (5.19) и (5.21).

В общем случае необходимо решать аналогичные нелинейные уравнения для коэффициентов разложения параметра порядка по базисным функциям неприводимого представления группы симметрии кристалла. Ввиду ачитетного произвола в выборе этих функций (см. 4), а также анизотропии ферми-поверхности, задача количественного описания температурного

¹ Если в разложении потенциала парного притяжения присутствуют сферические гармоники с другими значениями орбитального момента (в общем случае - базисные функции других неприводимых представлений), соответствующие меньшим критическим температурам, то при $T < T_c$ сверхпроводящее состояние будет представлять собой суперпозицию гармоник с разными l . При этом допустимо, разумеется, лишь примешивание гармоник, не имеющих симметрии данного сверхпроводящего состояния. В противном случае происходит фазовый переход из одной сверхпроводящей фазы в другую.

поведения параметра порядка, а, следовательно, термодинамических и кинетических свойств анизотропных сверхпроводников, является весьма неопределенной.

В некоторых случаях величину щели в спектре при $T = 0$ можно найти аналитически. Так, для s -спаривания из (6.11) получаем:

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta_0^2}} \approx \ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} \quad (6.13)$$

Следовательно,

$$\Delta_0 = \Delta(T = 0) = 2\varepsilon_0 \exp \left(-\frac{1}{N_0 V_0} \right) \quad (6.14)$$

и, сравнивая с (6.10), имеем:

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{\gamma} T_c \approx 1,75 T_c \quad (6.15)$$

Температурное поведение щели в спектре для s -спаривания определяется уравнением, следующим из (6.4):

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - 2 \int_0^{\varepsilon_0} \frac{f(E)d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$

Отсюда, воспользовавшись (6.13), получаем:

$$\ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta_0} = \ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta} - 2 \int_0^{\varepsilon_0} \frac{f(E)d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}$$

или

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \int_0^{\varepsilon_0} \frac{d\xi}{\left(\exp \left(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T \right) + 1 \right) \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \quad (6.16)$$

Ввиду быстрой сходимости верхней предел интегрирования в этом уравнении можно заменить на бесконечность.

При $T \rightarrow 0$ имеем $\Delta/T \rightarrow \infty$, и

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Delta_0}{\Delta} &\approx \frac{2}{\Delta_1} e^{-\Delta_0/T} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2\Delta T)} d\xi = \sqrt{2\pi \frac{T}{\Delta}} e^{-\Delta_0/T} \\ \Delta &= \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta}} e^{-\Delta_0/T} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

При $T \rightarrow T_c$ имеем $\Delta/T \rightarrow 0$, и

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 + \dots$$

Здесь $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ – дзета-функция Римана.

Поскольку $\Delta_0 = \pi T_c / \gamma$, то

$$\ln \frac{T_c}{T} \approx \frac{T\zeta(3)}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2$$

Отсюда

$$\Delta(T) \approx \left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} T_c \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2} \quad (6.18)$$

Ввиду условий нормировки (5.19) и (5.21) температурное поведение амплитуды энергетической щели в анизотропных сверхпроводниках при $T \rightarrow T_c$ также определяется формулой (6.18).

Упражнения. 1. Найти распределение электронов в сверхпроводнике по импульсам: $n_{k,\alpha\theta} = \langle a_{k\alpha}^+ a_{k\beta}^- \rangle$;

2. Найти флуктуацию числа частиц при $J = 0$: $\delta N = \frac{\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}}{\langle N \rangle}$, где $N = \sum_k a_{k\alpha}^+ a_{k\alpha}^-$.

10.2.8 7. Температурное поведение термодинамических величин при $T \rightarrow 0$

Наличие щели в спектре сверхпроводников с s -спариванием обуславливает термоактивационное ($\sim e^{-\Delta_u/T}$) поведение всех термодинамических и кинетических величин при низких температурах.

Так, электронная теплоемкость сверхпроводника ¹

$$C_s = \sum_{ka} E_k \frac{\partial f_k}{\partial T} \quad (7.1)$$

в случае s -спаривания равна

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T) + 1} \right) \quad (7.2)$$

где

$$S = - \sum_{ka} \{(1 - f_k) \ln(1 - f_k) + f_k \ln f_k\}$$

в пределе $T \rightarrow 0$ принимает вид

$$C_s \approx \frac{2N_0 \Delta^2}{T^2} e^{-\Delta/T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2/(2\Delta T)} \approx N_0 \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^2 \sqrt{2\pi T \Delta_0} e^{-\Delta_0/T} \quad (7.3)$$

В необычных сверхпроводниках с симметрийными нудями в спектре возбуждений естественно ожидать степенное поведение термодинамических величин при низких температурах. Формула, обобщающая (7.2) на случай анизотропного спаривания, имеет вид

$$C_s = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi} E_k \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{e^{E_k/T} + 1} \quad (7.4)$$

где спектр возбуждений E_k определяется формулами (5.33) или (5.34).

Рассмотрим в качестве примера теплоемкость в A -фазе ³. Спектр элементарных возбуждений имеет вид (5.36), то есть щель обращается в нуль на северном и южном полюсах фермисферы ($\theta = 0, \pi$), и главный вклад в теплоемкость дают окрестности этих точек ²:

¹ Является, что формуле (7.1) иначе всего получить. дифференцируя комбинаторно выражение для энтропии ферми-газа

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

$$\theta < \frac{\xi}{\Delta}, \quad \pi - \theta < \frac{\xi}{\Delta}.$$

Отсюда в пределе $T \rightarrow 0$ получаем:

$$C_s = \frac{N_0}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{E^2 e^{E/T}}{(e^{E/T} + 1)^2} \approx \frac{N_0}{2T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi \xi^2}{\operatorname{ch}^2(\xi/2T)} \int_0^{\xi/\Delta} \theta d\theta + \\ + O\left(\exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right)\right) \approx \frac{N_0}{4T^2 \Delta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi \xi^4}{\operatorname{ch}^2(\xi/2T)} = N_0 \frac{T^3}{\Delta_0^2} I \quad (7.5)$$

где

$$I = 8 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz z^4}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{7\pi^4}{15}$$

Таким образом, электронная теплоемкость сверхпроводника, щель в спектре которого обращается в нуль в изолированных точках на ферми-поверхности, при $\bar{T} \rightarrow 0$ пропорциональна T^3 . Аналогичное вычисление лия сверхпроводника с нулями щели на линиях на ферми-поверхности дает $C_s \sim T^2$ при $T \rightarrow 0$.

Возможны также сверхпроводящие состояния, в которых щель в спектре возбуждений имеет изолированные точки нулей более высокого порядка. Например, для аксиальной фазы в случае d -спаривания:

$$g(\mathbf{k}) \propto (\hat{k}_x + i\hat{k}_y)^2 \quad (7.6)$$

имеются два нуля второго порядка на полюсах ферми-поверхности. Для этой фазы вычисления, подобные приведенным выше, дают $C_s \sim T^2$.

Полученные результаты можно сформулировать так:

$$\left. \frac{C_s}{C_n} \right|_{T=0} \sim \begin{cases} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{5/2} e^{-\Delta_0/T}, & \text{щель в спектре не обращается в нуль,} \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^2, & \text{щель в спектре имеет нули первого порядка в изолированных точках,} \\ \frac{T}{T_c}, & \text{щель в спектре равна нулю на линиях или имеет пули второго порядка в изолированных точках.} \end{cases}$$

Здесь C_n - теплоемкость нормальной фазы.

Довольно просто установить степенное температурное поведение при $T \rightarrow 0$ и для других термодинамических величин, например, лондоновскую глубину проникновения, сдвига Найта (парамагнитной восприимчивости), а также кинетических величин, таких как коэффициент электронной теплопроводности или коэффициент поглощения ультразвука.

Степенное поведение перечисленных величин при низких температурах служит прямым указанием на необычный характер сверхпроводимости. Более того, поскольку в случае сильного спин-орбитального взаимодействия для тройного спаривания симметричные нули в спектре могут реализовываться лишь в изолированных точках на ферми-поверхности (см. §4), то различие показателей в степенных законах для линий и точек нулей даст принципиальную возможность сделать выбор между спин-синглетной и спин-триплетной сверхпроводимостью.

На практике, применение этих простых результатов усложняется тем, что наличие угодно малого количества примесей превращает линии нулей в полоски конечной

² В этом параграфе для более компактной записи мы используем в A -фазе спектр вида $E_k^A = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta}$, отличающийся от (5.36) переопределением модуля Δ .

ширины, что дает линейное поведение теплопроводности в области низких температур. Изолированные точки нулей под действием примесей также превращаются в пятна конечного диаметра, окружающие исходные точки [23]. Эти процессы влияют на низкотемпературное поведение всех величин, усложняя интерпретацию экспериментальных данных. Мы вернемся к этому вопросу в 2I, посвященном влиянию примесей на свойства необычных сверхпроводников.

10.2.9 8. Эффекты четности числа электронов в сверхпроводниках

Согласно теории БКШ, основное состояние сверхпроводника (5.9) представляет собой суперпозицию состояний с различным числом куперовских пар. Энергия сверхпроводника при $T \rightarrow 0$ ниже энергии нормального металла на величину $\delta E_s \sim N\Delta^2/\varepsilon_F$ (см. упражнение к §), где N - полное число электронов. Возбужденные, то есть неспаренные, состояния в обычном сверхпроводнике отделены от основного состояния энергетической щелью Δ . Поэтому при изменении числа электронов на единицу: $N \rightarrow N \pm 1$ величина δE_s должна измениться на $\pm\Delta$. Знак плюс или минус здесь зависит от того, было исходное число N четным или нечетным. Поскольку величина Δ порядка нескольких гигаэлектронвольт (напомним, что $\Delta \sim T_c$), то измерение δE_s при изменении огромного числа N на единицу является, казалось бы, нереальной задачей. Тем не менее это удалось сделать [24, 25] после создания так называемых транзисторов с кулоновской блокадой.

В этом параграфе мы опишем действие этого прибора, дающего возможность непосредственно продемонстрировать существование куперовских пар, а также вычислим изменение термодинамического потенциала газа элементарных возбуждений сверхпроводника для различных сверхпроводящих состояний при изменении полного числа электронов на единицу [26-28].

Транзистор (электрометр) с кулоновской блокадой представляет собой прямоугольную алюминиевую пленку (островок), занимающую участок электрической цепи между двумя туннельными контактами с емкостями C_1 и C_2 . Размеры пленки в эксперименте, выполненной

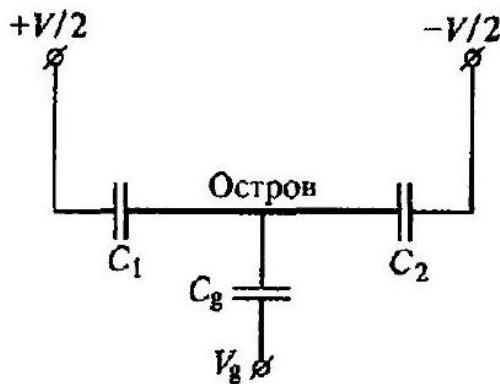


Рис. 5. Электрическая схема электрометра с кулоновской блокадой в Гарвардском университете [24], были такие: толщина -200\AA , ширина -600\AA , длина $-2 \cdot 10^4\text{\AA}$. Островок связан емкостью C_g с затвором, позволяющим менять электростатический потенциал островка, прикладывая напряжение V_g (см. рис. 5). При достаточно слабой связи островка с внешней цепью, когда сопротивление каждого из контактов подчиняется условию $R > h/e^2$, квантовомеханические состояния островка характеризуются определенным числом электронов¹. Если полная емкость всех контактов $C = C_1 + C_2 + C_g$ достаточно мала, элементарная

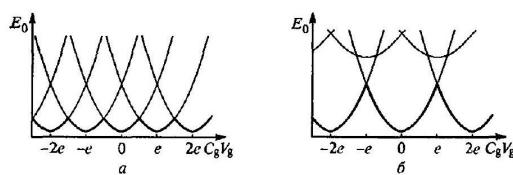


Рис.6. Качественное поведение энергии островка как функции заряда $C_g V_g$ на затворе:

а) при $e^2/(2C) > T, \delta\Omega$; б) при $\delta\Omega > e^2/(2C) > 7$

электростатическая энергия $E_c = e^2/2C$ превышает температуру, и можно пренебречь тепловыми флуктуациями. В этих условиях полная электростатическая энергия островка

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \min_n \frac{(en + C_g V_g)^2}{2C} \quad (8.1)$$

является периодической функцией напряжения на затворе (рис. 6а), поэтому ток через островок при заданном напряжении во внешней цепи V будет также периодической функцией от $C_g V_g$ с периодом e .

Так обстоит дело, пока алюминиевый островок находится в нормальном состоянии. В сверхпроводящем состоянии было обнаружено, что при температурах ниже 0,3 К (что соответствует $0.4T_c$) пики тока, соответствующие нечетному количеству электронов на островке, начинают подавляться, и зависимость $j(C_g V_g)$ становится $2e$ -периодической. Естественное объяснение этого явления состоит в том, что свободные энергии (более точно, термодинамические потенциалы Ω) островка в сверхпроводящем состоянии с четным и нечетным числами электронов $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ при $T \rightarrow 0$ отличаются на величину порядка щели Δ в спектре элементарных возбуждений. Поэтому при выполнении условия $\Delta > E_c$ плавающие участки, отвечающие нечетным значениям n в зависимости $U(C_g V_g)$, поднимутся на высоту $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ и станут ненаблюдаемыми (см. рис. 60). Соответственно, ток $j = j(C_g V_g)$ станет $2e$ -периодической функцией $C_g V_g$.

Островок представляет собой два последовательно включенных ложефсоновских контакта. Нас интересует зависимость тока через островок от энергии островка. Проще всего она выглядит для нулевой внешней разности потенциалов ²:

$$j = \frac{2e}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \frac{K^2 \sin \Phi}{E_0} \quad (8.2)$$

Здесь - джозефсонская энергия (матричный элемент перехода) каждого из контактов, которые для простоты мы полагаем одинаковыми; n_{s1} и n_{s2} плотности сверхпроводящих электронов в подводящих проводах по обе стороны островка; Φ - «внешняя» разность фаз (разность фаз между контактами, к которым подключен островок). E_0 - энергия островка, включающая как электростатическую часть (8.1), так и слагаемое, величина которого меняется на $\delta\Omega = \Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ при изменениях $C_g V_g$, сопровождающихся сменой четности числа электронов на островке:

$$E_0 = U + \begin{cases} \delta\Omega, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Для вычисления $\delta\Omega$ заметим, что термодинамический потенциал сверхпроводника складывается из энергии конденсата куперовских пар и термодинамического потенциала газа элементарных возбуждений. Конденсат пар состоит из четного числа частиц, поэтому разность термодинамических потенциалов сверхпроводника с нечетным и четным числом электронов совпадает с разностью Ω -потенциалов ансамблей с нечетным и четным числом квазичастиц. Термодинамический потенциал для газа квазичастиц записывается как сумма потенциалов всех состояний, нумеруемых квантовым числом $i = (\mathbf{k}, \alpha)$, в каждом из которых может быть $n_i = 0, 1$ квазичастиц с энергией E'_i :

¹ чтобы не прерывать связности изложения, вывод указанного неравенства отнесен в конец параграфа.

$$\Omega = -T \sum_i \ln \left(\sum_{n_i=0,1} e^{-\beta E_i n_i} \right) \quad (8.4)$$

здесь $\beta = 1/T$. Этую формулу можно переписать иначе:

$$\Omega = -T \ln \prod_i (1 + e^{-\beta E_i}) = -T \ln \left(1 + \sum_i e^{-\beta E_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} e^{-\beta E_1 - \beta E_j} + \frac{1}{6} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} e^{-\beta E_1 - \beta E_j - \beta E_k} + \dots \right) = -T \ln (Z_{\text{odd}} + Z_{\text{even}})$$

где

$$Z_{\text{odd}} = \sum_i e^{-\beta E_i} + \frac{1}{6} \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} e^{-\beta E_1 - \beta E_j - \beta E_k} + \dots \quad (8.5)$$

$$Z_{\text{even}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} e^{-\beta E_i - \beta E_1} + \dots \quad (8.6)$$

представляют собой большие статистические суммы для ансамблей систем с нечетным и четным числом квазинастич. Соответствующие термодинамические потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{odd/even}} &= -T \ln Z_{\text{odd/even}} = -T \ln \frac{\prod_i (1 + e^{-\beta E_i}) \mp \prod_i (1 - e^{-\beta E_i})}{2} = \\ &= \Omega_{\text{BCS}} - T \ln \frac{1}{2} \left(1 \mp \prod_i \ln \frac{\beta E_i}{2} \right) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta \Omega = \Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = -T \ln \frac{1 - f(T)}{1 + \rho(T)} \quad (8.8)$$

где

$$f(T) = \prod_{k\alpha} \operatorname{th} \frac{\beta E_k}{2} \quad (8.9)$$

Рассмотрим теперь, как проявляются эффекты четности числа частиц в нормальном металле и различных сверхпроводниках. Для нормального металла

$$f(T) = \prod_{k\alpha} \operatorname{th} \frac{\beta |\xi_k|}{2} = \exp \left(4N_0 V \int_0^\infty d\xi \ln \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} \right) = \exp (-2\pi^2 N_0 V T) \quad (8.10)$$

Здесь N_0 - плотность состояний на одну просканирую спину, а V - объем образца. Эффекты четности, таким образом, пренебрежимо малы:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} \approx 2T' \exp (-2\pi^2 N_0 V T) \quad (8.11)$$

если температура велика по сравнению с расстоянием между энергетическими уровнями электронов в островке $\delta E = (N_0 V)^{-1}$ или точнее, если

² Вывод формулы для тока приведен в конце параграфа.

$$T > T^* \approx \frac{\delta E}{2\pi^2} \quad (8.12)$$

Для микроостровков, использованных в Гарвардских экспериментах, $\delta E \sim 2 \cdot 10^{-4}$ К.

В обычных сверхпроводниках щель в спектре элементарных возбуждений нигде не обращается в гуль, и

$$f_s(T) = \prod_{\mathbf{k}\alpha} \operatorname{th} \frac{\beta E}{2} = \exp \left(4N_0 V \int_{\Delta}^{\infty} \frac{EdE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \ln \frac{1 - e^{-E/T}}{1 + e^{-E/T}} \right) \quad (8.13)$$

Последнее выражение при низких температурах $T < \Delta$ можно представить в виде

$$f_s(T) = \left(\operatorname{th} \frac{\Delta}{2T} \right)^{N_{\text{eff}}} \quad (8.14)$$

где

$$N_{\text{eff}} = 4N_0 V \int_{\Delta}^{\infty} \frac{EdE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} e^{-(E-\Delta)/T} \approx 2\sqrt{2\pi\Delta T} N_0 V \quad (8.15)$$

что, в свою очередь, позволяет записать $\delta\Omega$ в виде

$$\delta\Omega \approx \Delta - T \ln N_{\text{off}} \quad (8.16)$$

Эта формула имеет ясный физический смысл: свободная энергия, связанная с появлением неспаренного электрона, есть вежмична щели в спектре возбуждений минус температура, умноженная на логарифм эффективного числа состояний, в которых размещаются тепловые возбуждения. В отличие от нормального металла, проявление эффектов четности (подавление нечетных пиков в токе через островок) начинается с температуры

$$T_s^{**} \approx \frac{\Delta}{\ln N_{\text{eff}}} \quad (8.17)$$

При этой температуре на островке будет порядка одной квазичастицы:

$$N_{\text{qp}} \approx e^{-\delta\Omega/T} = N_{\text{eff}} e^{-\Delta/T} \quad (8.18)$$

Для Гарвардских экспериментов $T_s^* \approx 0,3$ К.

Обратимся теперь к сверхпроводникам, щель в спектре которых обращается в нуль в изолированных точках, как в A -фазе ${}^3\text{He}$, или на изолированных линиях на ферми-поверхности, как это имеет место в полярной фазе. Вычисления, аналогичные тем, что были проделаны для теплоемкости необычных сверхпроводников (см. 7), дают:

$$f_A(T) \approx \exp \left(-\frac{\pi^4}{18} N_0 V \frac{T^3}{\Delta^2} \right) \quad (8.19)$$

$$f_{\text{POL}}(T) \approx \exp \left(-CN_0 V \frac{T^2}{\Delta} \right) \quad (8.20)$$

где C - постоянная порядка единицы. Следовательно, для сверхпроводников с нулями в изолированных точках имеем:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = \begin{cases} 2T \exp [-(T)T_A^*]^3, & \text{при } T > T_A^* \\ \delta E, & \text{при } T \ll T_A^* \end{cases} \quad (8.21)$$

Здесь

$$T_A^* = \left(\frac{18}{\pi^4} \Delta^2 \delta E \right)^{1/3} \quad (8.22)$$

Мы видим, что значение $\delta\Omega$ в этом случае не достигает величины щели Δ . С понижением температуры $\delta\Omega$ возрастает, а затем начинает падать. В точке максимума $\delta\Omega(T_A^*) \approx T_A^*$, T_A^* - температура, при которой число уровней в

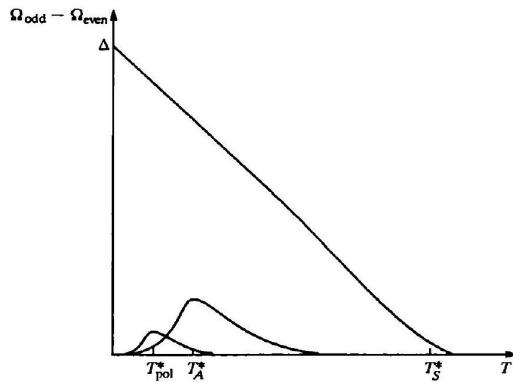


Рис.7. Качественная зависимость от температуры разности термодинамических потенциалов с нечетным и четным числом электронов для обычного сверхпроводника (верхняя линия) и для сверхпроводников, щель в спектре которых обращается в ноль в изолированных точках или на линиях

энергетическом интервале $E < T_A^*$ становится порядка единицы (сравните с (8.12)). При температурах $T < T_A^*$ пренебрежение дискретностью спектра неоправдано, и в этой области $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} \approx \delta E$.

Для сверхпроводников с нулями параметра порядка на линиях имеем:

$$\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}} = \begin{cases} 2T \exp \left[- (T/T_{\text{pol}}^*)^2 \right], & \text{при } T > T_{\text{pol}}^* \\ \delta E, & \text{при } T \ll T_{\text{pol}}^* \end{cases} \quad (8.23)$$

где

$$T_{\text{pol}}^* = \left(\frac{\Delta \delta E}{C} \right)^{1/2} \quad (8.24)$$

Как и в предыдущем случае, имеет место немонотонное поведение $\delta\Omega(T)$. В точке максимума $\delta\Omega(T_{\text{pol}}^*) \approx T_{\text{pol}}^*$. В условиях эксперимента [24]: $T_A^* \approx 0,1T_c$, $T_{\text{pol}}^* \approx 10^{-2}T_c$.

Качественное поведение $\delta\Omega$ в различных типах сверхпроводников изображено на рис. 7. Эффект четности числа электронов в микроостровках къ необычных сверхпроводников выражен заметно слабее. Он имеет место при существенно более низких температурах и существенно меньше, чем в микроостровках из обычных сверхпроводников.

Имеется и другое ограничение возможности наблюдения 2e-периодичности тока через транзистор с кулоновской блокадой, изготовленный из сверхпроводника с пулями в спектре элементарных возбуждений. Сверхпроводящее состояние в таком транзисторе скорее всего будет подавлено в поверхностном слое толщиной ξ_0 . Плотность состояний в этом слое будет близка к плотности состояний нормального металла. Поэтому разность $\Omega_{\text{odd}} - \Omega_{\text{even}}$ может остаться экспоненциально малой.

Итак, удвоение периода тока через сверхпроводящий транзистор с кулоновской блокадой реализуемо, по-видимому, лишь в сверхпроводниках без нудей в спектре возбуждений.

В заключение обсудим два вопроса, рассмотренных которых мы оставили в стороне, чтобы не прерывать связности изложения.

Условие слабой связи островка с внешней цепью. Островок можно рассматривать как изолированный объект при условии отсутствия в контактах, связывающих островок с внешней цепью, делокализованных электронных состояний, распространенных на весь объем контакта. Электронные состояния в контакте не должны испытывать влияния границ, что количественно можно записать в виде неравенства $\delta E \gg \Delta E$ (условие локализации). Здесь δE – расстояние между энергетическими уровнями, ΔE – сдвиг уровней за счет влияния границы. В плоских контактах толщиной L и площадью S , имеем $\delta E = 1/(SLN_0)$, где N_0 – плотность состояний, а $\Delta E \sim h/\tau \approx hD/L^2$, где τ – время диффузионного движения электрона до границы ($L \ll \sqrt{S}$), D коэффициент диффузии, связанный с проводимостью контакта σ соотношением Эйнштейна

$$e^2 DN_0 = \sigma$$

Подставляя все перечисленные выражения в исходное неравенство, окончательно получим условие локализации [29]:

$$R = \frac{L}{\sigma S} \gg \frac{h}{e^2} \approx 26 \text{kO}$$

Ток через два последовательно включенных джозефсоновых контакта. Джозефсоновский ток в схеме, изображенной на рис. 8, легко пайти с помо-

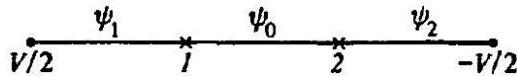


Рис. 8. Два последовательно включенных джозефсоновых контакта щью элементарного обобщения фейнмановского подхода [30] к контакту Джозефсона как к двухуровневой квантовомеханической системе. Вводя в двухуровневую систему с амплитудами состояний $\psi_1 = \sqrt{n_{s1}/2}e^{i\varphi_1}$, $\psi_2 = \sqrt{n_{s2}/2}e^{i\varphi_2}$ промежуточное состояние – островок с волновой функцией ψ_0 , запишем уравнения Шредингера:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \frac{eV}{2} \psi_1 + K \psi_0 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} &= K \psi_1 + K \psi_2 + E_0 \psi_0 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= K \psi_0 - \frac{eV}{2} \psi_2 \end{aligned}$$

Здесь V – внешняя разность потенциалов, K – джозефсоновская энергия (матричный элемент перехода) каждого из контактов, E_0 – энергия островка. При нулевой внешней разности потенциалов через контакты течет постоянный ток. В этих условиях волновая функция островка, также как и разность фаз $0 - \varphi_1$ не зависят от времени. Требование стационарности состояния ψ_0 приводит к условию

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{K(\psi_1 + \psi_2)}{E_0}$$

с учетом которого система уравнений переписывается в виде:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -\frac{K^{-2}}{E_0} (\psi_1 + \psi_2) \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{K^2}{E_0} (\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

Подставляя в первое уравнение выражения для ψ_1 и ψ_2 и выделяя минимую часть, получаем:

$$\hbar \frac{\partial \sqrt{n_{s1}}}{\partial t} = - \frac{K^2}{E_0} \sqrt{n_{s2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Поскольку ток пропорционален \dot{n}_{s1} , то окончательное выражение для постоянного тока через два последовательно включенных джозефсоновских контакта при нулевой внешней разности потенциалов принимает вид

$$j = \frac{2e}{\hbar} \sqrt{n_{s1} n_{s2}} \frac{K^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_0}.$$

10.2.10 9. Парамагнитная восприимчивость и сдвиг Найта

Измерение парамагнитной восприимчивости электронного газа в сверхпроводнике является еще одним способом тестирования сверхпроводящего состояния. Хотя слабое магнитное поле, экранируемое незатухающими токами, не проникает в толиу сверхпроводника, тем не менее спиновый (паулиевский) парамагнетизм в сверхпроводниках (а тем более в нейтральной сверхтекучей ферми-жидкости ${}^3\text{He}$) - наблюдаемое явление. В этом параграфе мы найдем температурную зависимость парамагнитной восприимчивости электронного газа в различных сверхпроводящих состояниях.

Для сверхпроводника с синглетным спариванием купровские пары не дают вклада в спиновый парамагнетизм, и спиновый магнитный момент электронного газа определяется только вкладом элементарных возбуждений:

$$M = \mu_B \sum_{\mathbf{k}} [f(E_{\mathbf{k},-}) - f(E_{\mathbf{k},+})] \quad (9.1)$$

Здесь $f(E)$ - фермиевская функция распределения (6.2),

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2} \pm \mu_B H \quad (9.2)$$

- энергии возбуждений с ориентацией спинов соответственно по и против направления поля H , μ_B - магнетон Бора (в случае ${}^3\text{He}$ - магнитный момент ядра). Из (9.1) имеем:

$$M = -2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{\partial f(E_{\mathbf{k}})}{\partial E} = 2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{\mathbf{k}}, T) \quad (9.3)$$

где

$$Y(\hat{\mathbf{k}}, T) = \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\text{ch}^2(E_{\mathbf{k}}/2T)} \quad (9.4)$$

а $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$. Отсюда получаем выражение для магнитной восприимчивости:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \chi_n Y(T) \quad (9.5)$$

где $\chi_n = 2\mu_B^2 N_0$ – восприимчивость в нормальном состоянии ¹, а функция

$$Y(T) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{\mathbf{k}}, T) = \begin{cases} 1, & \text{при } T = T_c \\ 0, & \text{при } T = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

называется функцией Иосида и описывает долю нормальных электронов в сверхпроводнике (рис. 9).

При $0 < T < T_c$ температурное поведение $Y(T)$ для различных сверхпроводящих состояний различно. В пределе $T \rightarrow 0$ вычисления, аналогичные проделанным в 7 для теплоемкости, дают:

$$Y(T) \sim \begin{cases} e^{-\Delta_0/T}, & g(\mathbf{k}) \neq 0, \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^2, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль в изолирован-} \\ \frac{T}{T_c}, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль на линиях.} \end{cases} \quad (9.7)$$

Парамагнитная восприимчивость сверхпроводника с синглетным спариванием при $T \rightarrow 0$ обращается в нул, что обуславливает проигрыш в энергии $\chi_n H^2/2 = \mu_B^2 N_0 H^2$ сверхпроводника, находящегося в магнитном поле, по сравнению с нормальным металлом. В то же время, при $T = 0$ сверхпроводящее состояние энергетически выгоднее нормального на $N_0 \Delta_0^2/2$ (см. (5.37)). Сравнивая эти две энергии, получаем, что в полях, больших, чем

$$H_p = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2} \mu_B} \quad (9.8)$$

сверхпроводящее состояние заведомо невыгодно. В поле H_p , называемом парамагнитным пределом сверхпроводимости, происходит разрушение синглетного состояния куперовских пар. В обычных сверхпроводниках $H_p \approx 1$ Тесла. На практике сверхпроводимость разрушается в полях, превышающих верхнее критическое поле H_{c2} в сверхпроводниках второго рода (см. ниже 12) или поле абсолютной неустойчивости сверхпроводящего состояния H_{c1} в сверхпроводниках первого рода, значительно меньших парамагнитного предела H_p . Кроме парамагнитного предела в сверхпроводниках с ненулевым орбитальным моментом куперовских пар, как при синглетном $S = 0$, так и при триплетном $S = 1$ спаривании, имеется диамагнитный промежуток $^2 H_D \approx \frac{m^*}{m} H_p$. Поле H_D может как превосходить, так и быть меньше парамагнитного предела, в зависимости от отношения эффективной массы электрона к массе электрона в вакууме.

Температурная зависимость (9.5) измеряется следующим образом. Ядерные спины атомов вещества, из которого состоит сверхпроводник, прецессируют в магнитном поле H с частотой

$$\omega = \gamma H \quad (9.9)$$

На этой частоте наблюдается ядерный магнитный резонанс, то есть резонансное поглощение радиочастотного поля H_{rf} , перпендикулярного постоянному полю \mathbf{H}^3 . Из-за конечной вероятности попадания электронов проводимости в точку нахождения ядра R_n , пропорциональной $|\psi_e(\mathbf{R}_n)|^2$, имеется взаимодействие магнитных моментов ядер μ_n и магнитных моментов электронов проводимости μ_e (контактное взаимодействие):

$$H_{int} \sim \mu_n \mu_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \quad (9.10)$$

Среднее значение величины μ_e во внешнем поле дается выражением

$$\langle \mu_c \rangle = \frac{\chi_H}{n}$$

где χ есть парамагнитная восприимчи-

¹ Напомним, что N_0 - плотность состояний на одну проекцию спина.

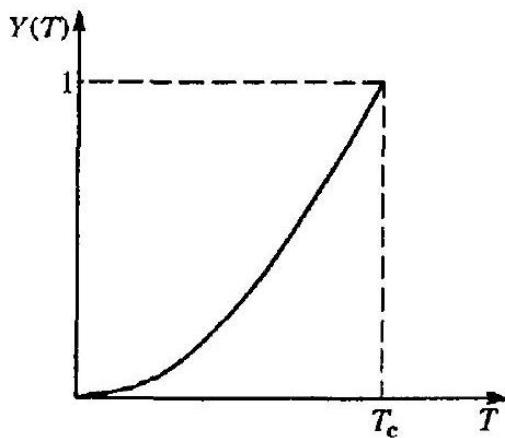


Рис. 9. Общий вид функции Иосида востъ, а n - плотность электронного газа.

Сдвиг уровней энергии ядерного спина вследствие взаимодействия (9.10):

$$\delta E \sim \mu_n \frac{\chi}{n} |\psi(\mathbf{R}_n)|^2 H$$

приводит к изменению резонансной частоты (9.9), то есть частоты переходов между уровнями в магнитном поле (сдвиг Найта) па величину:

$$\delta\omega \sim \frac{\mu_n \chi}{n \hbar} |\psi(\mathbf{R}_n)|^2 H \quad (9.11)$$

При переходе металла в сверхпроводящее состояние изменяется входящая в (9.11) парамагнитная восприимчивость χ , поэтому измерение отношения $\delta\omega_s/\delta\omega_n = \chi_s/\chi_n$ позволяет, согласно (9.5), определить плотность нормальных электронов. Из (9.6) следует, что сдвиг Найта в сверхпроводнике с синглетным спариванием должен исчезать по мере уменьшения температуры.

Посмотрим теперь, как обстоит дело в сверхпроводниках с триплетным спариванием. Спиновое состояние куперовских пар во всем объеме сверхпроводника задается вектором d , зависящим от направления импульса на ферми-поверхности. Вероятность найти пару в состоянии с нулевой проекцией спина на ось квантования \hat{z} пропорциональна $|d_z(\mathbf{k})|^2$ (см. (2.5) и (2.7)).

Очевидно, что если внешнее поле H (задающее ось квантования) направлено вдоль $d(\mathbf{k})$, то спин пар перпендикулярен H и не дает вклада в восприимчивость, которая, следовательно, определяется лишь вкладом возбуждений:

$$\chi_{\perp}(\mathbf{k}) = \chi_n Y(\hat{\mathbf{k}}, T') \quad (9.12)$$

где $Y(\hat{\mathbf{k}}, T)$ даётся формулой (9.4), а $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k})|^2}$.

Для направления поля (то есть оси \hat{z}) в плоскости, перпендикулярной вектору $d(\mathbf{k})$, будут отличны от нуля только x - и y -компоненты вектора $d(\mathbf{k})$, из которых составлены амплитуды вероятности $\pm d_x(\mathbf{k}) + i d_y(\mathbf{k})$ найти пары в состояниях с проекциями спина ± 1 на ось квантования. Очевидно, что для такого направления поля вклад в восприимчивость дают как пары, так и возбуждения, и она совпадает с восприимчивостью ферми-жипкости в нормальном состоянии:

$$\chi_{\parallel} = \chi_n. \quad (9.13)$$

² См. Н. А. Лјжњанчјж, В. Л. Мииесв // Письма в ЖЭТФ, 44, 183 (1986).

³ Для наблюдения этого эффекта поле в образце должно быть однородно, что имеет место при условии матости размера образца по сравнению с лоционовской глубиной проникновения.

Для произвольной ориентации под магнитный момент сверхтекучей жидкости определяется тензором восприимчивости:

$$M_\alpha = \chi_{\alpha\beta} H_\beta,$$

который получается путем комбинирования выражений (9.12) и (9.13):

$$\chi_{\alpha\beta} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left\{ \chi_\perp(\mathbf{k}) \frac{d_\alpha^*(\mathbf{k}) d_\beta(\mathbf{k})}{\mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \mathbf{d}(\mathbf{k})} + \chi_\parallel(\mathbf{k}) \left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{d_\alpha^*(\mathbf{k}) d_\beta(\mathbf{k})}{\mathbf{d}^*(\mathbf{k}) \mathbf{d}(\mathbf{k})} \right] \right\} \quad (9.14)$$

В качестве примера приведем выражения для тензоров восприимчивости в *A*- и *B*-фазах гелия-3, которые получаются из (9.14) после подстановки соответствующих параметров порядка ⁴ $d^A(\mathbf{k})$ и $d^B(\mathbf{k})$ (см. 3):

$$\chi_{\alpha,3}^A = \chi_n [\delta_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta (Y_A(T) - 1)] \quad (9.15)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^B = \chi_n \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} Y_B(T) \right) \quad (9.16)$$

Мы видим, что в *B*-фазе восприимчивость изоропна, и при $T \rightarrow 0$ сдвиг Найта в сверхпроводнике со структурой *B*-фазы исчезает лишь частично. В *A*-фазе восприимчивость является одионичным тензором. На практике, вдали от стенок сосуда с гелием-3, восприимчивость *A*-фазы всегда совпадает с χ_n , поскольку вектор V разворачивается перпендикулярно магнитному полю, чем достигается энергетически выгодное максимальное значение восприимчивости. Вблизи стенок из-за спин-орбитального взаимодействия вектор V перпендикулярен к поверхности, поэтому восприимчивость *A*-фазы зависит от направления.

Такой же эффект должен иметь место и в сверхпроводниках с триплетным спариванием и силы спин-орбитального взаимодействия, фиксирующим направление вектора d . Парамагнитные эффекты (в частности, сдвиг Найта) должны в этом случае сильно зависеть от направления внешнего магнитного поля [31-33]. Угловая зависимость восприимчивости любой из триплетных фаз, переписанных в табл. 1-6, устанавливается после подстановки в (9.14) соответствующих выражений для параметров порядка $d(\mathbf{k}) = \sum_i \eta_i \psi(\hat{\mathbf{k}})$. Следует, однако, иметь в виду, что результат вычислений зависит от конкретного вида базисных функций неприводимого представления. При этом температурная зависимость различных компонент восприимчивости должна определяться с учетом зависимости $\eta_i(T)$, диктуемой уравнениями типа (6.12). Парамагнитная восприимчивость в сверхпроводниках с триплетным спариванием и слабым спин-орбитальным взаимодействием совпадает с паулиевской восприимчивостью в нормальном состоянии.

Упражнение. 1. Доказать формулы (9.5) и (9.14) прямым вычислением спинового магнитного момента.

Указание. Найти преобразование Боголюбова, диагонализирующее гамильтониан

$$H = H_{BCS} - \mu_B \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^+ (\sigma_{\alpha\beta} H) a_{\mathbf{k}\beta}$$

где H_{BCS} - гамильтониан (5.1). Воспользовавшись этим преобразованием, найти линейный по пото вклад в среднее значение оператора спинового магнитного момента

$$\mathbf{M} = \mu_B \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}\alpha}^+ \sigma_{\alpha\beta} a_{\mathbf{k}\beta} \rangle$$

⁴ При вычислении восприимчивостей *A*- и *B*-фаз в реальном гелии-3 необходимо учитывать изменения внешнего поля за счет намагничивания самой жидкости (ферми-жидкостные поправки) [3, 6]. Этот количественно довольно значительный эффект не приводит, однако, к качественным изменениям, и здесь мы его учитывать не будем.

2. Найти поведение функций Иосида $Y_A(T)$ и $Y_B(T)$ для A - и B -фаз при $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow T_c$.

10.2.11 10. Разложение Ландау свободной энергии сверхпроводников

Образование сверхпроводящего состояния из нормального происходит посредством фазового перехода второго рода. Согласно теории Ландау, изменение плотности свободной энергии при таком переходе может быть разложено в ряд по степеням параметра порядка. В случае однокомпонентной сверхпроводимости, когда параметром порядка является комплексная скалярная функция $\eta = |\eta|e^{i\varphi} = \Delta e^{i\varphi}$ (см. 4), это разложение имеет вид

$$F_{\text{cond}} = F_s - F_n^2 = \alpha|\eta|^2 + \frac{\beta}{2}|\eta|^4 = \alpha\Delta^2 + \frac{\beta}{2}\Delta^4 \quad (10.1)$$

где $\alpha(T) = \alpha_0(T' - T_c)/T_c$ — меняет знак при $T = T_c$; α_0, β — постоянные положительные коэффициенты. Минимизация F_s по Δ дает следующие температурные зависимости щели (параметра порядка):

$$\Delta^2(T) = -\frac{\alpha_0}{\beta} \frac{T - T_c}{T_c} \quad (10.2)$$

и свободной энергии:

$$F_{\text{cond}} = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2 \quad (10.3)$$

вблизи критической температуры. Выражение (10.3) позволяет найти скачок теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состояние:

$$(C_s - C_n)|_{T=T_c} = -T_c \frac{\partial^2 F_{\text{cond}}}{\partial T^2} \Big|_{T=T_c} = \frac{\alpha_0^2}{T_c \beta} \quad (10.4)$$

Формула (10.1) и ее обобщение на пространственно-неоднородный случай играют важнейшую роль в теории сверхпроводимости. Она может быть получена из микроскопической теории Бардина-Купера-Шриффера. Такой вывод для произвольного типа спаривания и составляет предмет настоящего параграфа.

Свободная энергия сверхпроводника имеет вид

$$F_s = \langle H_{\text{BCS}} \rangle - TS \quad (10.5)$$

Здесь H_{BCS} — гамильтониан БКУУ (5.31):

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\alpha}^+ b_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha} (\xi_k - E_{\mathbf{k}}) \quad (10.6)$$

а S — энтропия электронного газа, определяемая формулой

$$S = - \sum_{\mathbf{k}\alpha} [f_{\mathbf{k}} \ln f_{\mathbf{k}} + (1 - f_{\mathbf{k}}) \ln (1 - f_{\mathbf{k}})] \quad (10.7)$$

где $f_{\mathbf{k}}$ — фермиевская функция распределения (6.2).

Для определенности мы будем рассматривать случай унитарных фаз с триплетным спариванием, когда параметр порядка и энергия элементарных возбуждений даются формулами

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2(T)d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k})}$$

$$\Delta_{\mathbf{k},\alpha\beta} = \Delta(T)d(\mathbf{k})\mathbf{g}_{\alpha\beta}$$

$$F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ = \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^*\mathbf{g}_{\alpha\beta}^+$$

(см. 5). Подставляя в (10.5) и выполняя статистическое усреднение, имеем:

$$\langle H_{\text{BCS}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left[E_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} (\Delta(T)\mathbf{d}(\mathbf{k})\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^* + \xi_k - E_{\mathbf{k}}) \right]$$

В то же время:

$$\begin{aligned} -TS &= T \sum_{\mathbf{k}\alpha} \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) + T \sum_{\mathbf{k}\alpha} f_{\mathbf{k}} \ln \frac{f_{\mathbf{k}}}{1 - f_{\mathbf{k}}} = \\ &= T \sum_{\mathbf{k}\alpha} \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}\alpha} E_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (10.8)$$

После подстановки в (10.5) получаем:

$$F_s = \sum_{\mathbf{k}} [\Delta(T)d(\mathbf{k})\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^* + \xi_k + 2T \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) - E_{\mathbf{k}}] \quad (11.9)$$

Первый член в этой формуле преобразуется с помощью уравнения (5.17):

$$\Delta d^*(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} V_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \mathbf{F}_{\mathbf{k}'}^*$$

Домножая здесь левую и правую части на $\Delta d(k)$ и интегрируя по углам с помощью условия нормировки и разложения (5.4) потенциала $V_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, имеем:

$$\frac{\Delta^2}{V_l} = \sum_{\mathbf{k}'} \Delta d(\mathbf{k}') \mathbf{F}_{\mathbf{k}'}^*$$

Отсюда, в свою очередь, учитывая выражение для критической температуры (6.10), получаем:

$$N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_c} = \sum_{\mathbf{k}'} \Delta d(\mathbf{k}') \mathbf{F}_{\mathbf{k}'}^*$$

Окончательно:

$$F_s = N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_k} + \sum_{\mathbf{k}} [\xi_k + 2T \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) - E_{\mathbf{k}}] \quad (10.10)$$

Поскольку нас интересует только энергия конденсации, то есть отклонение энергии сверхпроводника от энергии нормального металла, то, принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} [2T \ln(1 - f_{\mathbf{k}}) - E_{\mathbf{k}}] = -2 d(\mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^\nu$$

можно переписать (10.10) в виде

$$F_{\text{cond}} = N_0 \Delta^2 \ln \frac{2\gamma\epsilon_l}{\pi T_c} - 2 \sum_{\mathbf{k}} \int_0^\Delta d\Delta d(\mathbf{k}) \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^* \quad (10.11)$$

Интегрирование по волновым векторам выполняется в соответствии с правилом (1.8), при этом удобно сначала произвести интегрирование по энергии:

$$N_0 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{\mathbf{k}}^* d\xi = N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} d\xi \frac{1 - 2f_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}}$$

Это выражение при $\Delta \rightarrow 0$ приводится к виду (ср. с выводом формулы (6.18))

$$N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \left[\ln \frac{2\varepsilon_0}{\Delta} - \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}) \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \right] = \\ = N_0 \Delta d^*(\mathbf{k}) \left[\ln \frac{2\gamma\varepsilon_0}{\pi T} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}) \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \right] \quad (10.12)$$

Подставляя (10.12) в (10.11) и выведя интегрирование по Δ , имеем:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \Delta^2 \ln \frac{T}{T_c} + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T^2}$$

Учитывая близость T к T_c , получаем окончательно:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T_c^2} \quad (10.13)$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить разложение Ландау и для случая синглетного спаривания:

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} (g(\mathbf{k})g^*(\mathbf{k}))^2 \frac{\Delta^4}{T_c^2} \quad (10.14)$$

В частности, для обычного сверхпроводника с s -спариванием ($g(\mathbf{k}) = e^{i\varphi}$)

$$F_{\text{cond}} = N_0 \frac{T - T_i}{T_c} \Delta^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} N_0 \frac{\Delta^4}{T_c^2} \quad (10.15)$$

Итак, мы получили разложения Лаппау для сверхпроводников с триплетным¹ и синглетным спариванием, следующие из теории БКШ. Критическая температура, входящая в (10.13) и (10.14), одинакова для всех сверхпроводящих состояний с данным l (относившихся к данному неприводимому представлению группы симметрии нормального состояния). В то же время, энергии сверхпроводящих состояний с данным l , отличающихся парами коэффициентов в разложениях (4.8) или (4.9) параметра порядка по сферическим гармоникам (в общем случае - по функциям базиса неприводимого представления (4.10) или (4.11)), будут различными. В самом деле, равновесная энергия конденсации (10.3)

$$F_{\text{cond}} = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^2 \sim \left[\int \frac{d\Omega}{4\pi} (d(\mathbf{k})d^*(\mathbf{k}))^2 \right]^{-1} \quad (10.16)$$

существенно зависит от вида сверхпроводящего состояния. Так, например, для фаз с p -спариванием после подстановки в (10.16) параметров порядка из 3 мы получаем, что минимальной энергией среди фаз с p -спариванием будет обладать B -фаза ($d(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}}$). В частности, ее энергия оказывается ниже энергии A -фазы ($d(\mathbf{k}) = \sqrt{3/2} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y, 0, 0)$) в 6/5 раз [22].

Действительно, в жидком гелии-3 при низких давлениях фазовый переход из нормальной жидкости происходит в сверхтекучую B -фазу. Однако, в области высоких давлений (рис. 2) сначала происходит переход в A -фазу, которая затем сменяется на B -фазу посредством перехода первого рода. Это означает, что при высоких давлениях вблизи T_c именно A -фаза наиболее энергетически выгодна. Разрешение противоречия с наименшим результатом состоит в

том, что формула (10.13), на основании которой сделан вывод о минимальности энергии B -фазы, является на самом деле недостаточно общей. В процессе ее вывода использовалось, казалось бы, естественное предположение о том, что спаривание взаимодействие не изменяется в сверхпроводящем состоянии, в частности, является одинаковым во всех сверхпроводящих фазах с данным l (приближение слабой связи или приближение БКШ). На самом деле это не так, и $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит от конкретного вида параметра порядка (сильная связь). Хотя этот факт не сказывается на утверждении о том, что все фазы с данным l имеют одинаковую критическую температуру, вид члена четвертого порядка по Δ в разложении (10.13) при этом меняется, что делает, вообще говоря, неверным вывод об энергетической выгодности B -фазы при побочных температурах и давлениях. Учет влияния вида спаривания в $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ может быть произведен лишь в рамках конкретной микроскопической модели (см. [3, 6]) и мы не будем здесь этим заниматься, тем более что на практике нет возможности количественно проверить справедливость той или иной модели сильной связи.

10.2.12 11. Сверхпроводящие состояния с многокомпонентными параметрами порядка

Из рассмотрения в §4 и 10 следует, что возможные сверхпроводящие или сверхтекущие фазы, параметр порядка которых преобразуется в соответствии с определенным (неодномерным) представлением точечной группы симметрии G , имеют одинаковую критическую температуру, но различную свободную энергию. Вычисления с помощью той или иной микроскопической модели в принципе позволяют найти коэффициенты в разложении Ландау и ответить на вопрос, в каком именно состоянии происходит фазовый переход, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе в рамках теории БКШ. Однако к выводу о том, что минимальную свободную энергию могут иметь различные состояния, причем каждое - в своей области фазовой диаграммы (например, не только B -фаза, но и другие фазы p -спаривания на плоскости давление-температура), можно прийти не зависящим от конкретной микроскопической модели феноменологическим путем. При этом для получения разложения Ландау могут быть использованы лишь весьма общие симметрийные соображения [34].

Разложение свободной энергии Ландау для фаз с p -спариванием. Параметром порядка в сверхтекущей ферми-жидкости с p -спариванием является комплексная 3×3 матрица $A_{\alpha i}$ (см. 3), которая преобразуется при спиновых вращениях как вектор по индексу α , а при вращениях в координатном пространстве - как вектор по индексу i . Свободная энергия, будучи скалярной величиной, не зависит от выбора систем координат, в которых заданы эти векторы. Иными словами, разложение должно быть идентично относительно произвольных и независимых (в отсутствие спирально-орбитального взаимодействия) трехмерных вращений спинового и координатного пространств. Кроме этого, свободная энергия вещественна, то есть не должна меняться при комплексном сопряжении параметра порядка (симметрия по отношению к обращению времени), а также при домножении параметра порядка на произвольный фазовый множитель $e^{i\varphi}$ (калибровочная инвариантность).

Указанным свойствам инвариантности при преобразованиях параметра порядка вида

$$A_{\alpha i} \rightarrow \tilde{A}_{\alpha i} = R_{\alpha\beta}^S R_{ij}^\varrho e^{i\varphi} R A_{\beta j}$$

где $R_{\alpha\beta}^S$ и R_{ij}^ϱ - матрицы трехмерных вращений в спиновом и координатном (орбитальном) пространствах, соответственно, а $R A_{\alpha i} = A_{\alpha i}^*$ - операция обращения времени, удовлетворяет

¹ Помним, что разложение (10.13) справедливо лишь для так называемых унитарных фаз (см. 5). Вывод разложения Ландау из теории БКШ для произвольных сверхпроводящих фаз с триплетным спариванием проделан в 18.

выражение для плотности свободной энергии, содержащее всего пять инвариантных членов четвертого порядка:

$$\begin{aligned} F_{\text{cond}} = & \alpha A_{\alpha i} A_{\alpha i}^* + \beta_1 |A_{\alpha i} A_{\alpha i}|^2 + \beta_2 (A_{\alpha i}^* A_{\alpha i})^2 + \beta_3 A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + \\ & + \beta_4 A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + \beta_5 A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Здесь матрицы A и A^* встречаются попарно, и во всех слагаемых произведена попарная свертка спиновых индексов со спиновыми, а орбитальных - с орбитальными.

Плотность свободной энергии (11.1) имеет несколько экстремумов, определяемых уравнениями $\delta F_{\text{cond}} / \delta A_{\alpha i} = 0$. Какие из этих экстремумов есть минимумы, и какой из минимумов является абсолютным, зависит от соотношения между коэффициентами β_i , которые в свою очередь, зависят от температуры и давления¹. A - и B -фазы входят в число минимумов F_{cond} . Матрицы параметра порядка для них выглядят следующим образом (см. 3):

$$A_{\alpha i}^A = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta(T) V_\alpha (\Delta'_i + i \Delta''_i) \quad (11.2)$$

$$A_{\alpha i}^B = \Delta(T) R_{\alpha i} e^{i\varphi} \quad (11.3)$$

где $\mathbf{V}, \Delta', \Delta''$ - единичные векторы (причем $\Delta' \Delta'' = 0$), $R_{\alpha i}$ - матрица трехмерных вращений, а $\Delta(T)$ - модуль параметра порядка. Состояния A -фазы вырождены по ориентациям вектора V и пары векторов Δ' и Δ'' , а состояния B -фазы вырождены по отношению к трехмерным вращениям, задаваемым матрицей параметра порядка $R_{\alpha i}$, и к выбору фазы φ .

В отличие от (10.13), разложение (11.1) дает право на существование A -фазы. Действительно, подставляя (11.2) и (11.3) в (11.1), получаем:

$$\begin{aligned} F_{\text{cond}}^A &= 3\alpha\Delta^2 + 9\Delta^4 (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \\ F_{\text{cond}}^B &= 3\alpha\Delta^2 + 9\Delta^4 \left(\beta_1 + \beta_2 + \frac{\beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{3} \right) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что A -фаза энергетически выгоднее B -фазы, если значение β_1 (или β_5) достаточно велико.

Многокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Пусть сверхпроводящее состояние соответствует одному из неодномерных представлений группы точечной симметрии кристалла. В случае сильного спин-орбитального взаимодействия параметр порядка такого состояния имеет вид (см. 4)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{k}) &= \eta_1 \psi_1^g(\hat{\mathbf{k}}) + \eta_2 \psi_2^g(\hat{\mathbf{k}}) + \dots \quad \text{при } S = 0 \\ d(\mathbf{k}) &= \eta_1 \psi_1^u(\hat{\mathbf{k}}) + \eta_2 \psi_2^u(\hat{\mathbf{k}}) + \dots \quad \text{при } S = 1 \end{aligned} \quad (11.4)$$

Как для синглетного, так и для триплетного сверхпроводящего состояния плотность свободной энергии вблизи температуры перехода записывается в виде разложения по степеням комплексных коэффициентов η_i , которое должно быть инвариантно относительно преобразований группы симметрии нормального состояния $\mathcal{G} = U(1) \times R \times G$. При выводе такого разложения необходимо принять во внимание, что трансформационные свойства базисных функций $\psi_i^g(\hat{\mathbf{k}})$ и $\psi_i^u(\hat{\mathbf{k}})$ при преобразованиях симметрий можно отнести к коэффициентам η_i .

¹ Общая задача о нахождении всех экстремумов функционала (11.1) решена В. Березинским [35]. Тоже результаты независимо получены в работе [36]

Например, для представлений E_{1g} и E_{1u} группы D_{6h} базисные функции пропорциональны компонентам вектора, лежащего в Базисной плоскости (см. табл. 1), т.е.

$$\begin{aligned} \left(\psi_1^g(\hat{\mathbf{k}}), \psi_2^g(\hat{\mathbf{k}}) \right) &\sim (k_z k_x, k_z k_y) \\ \left(\psi_1^u(\hat{\mathbf{k}}), \psi_2^u(\hat{\mathbf{k}}) \right) &\sim (\hat{z} k_x, \hat{z} k_y) \end{aligned} \quad (11.5)$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты η_1, η_2 преобразуются под действием элементов группы D_{6h} как компоненты такого вектора². Скалярные произведения $\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*\boldsymbol{\eta}^*$ инвариантны относительно любых вращений из группы D_6 . Из них можно составить два вещественных инварианта четвертого порядка. Других инвариантов в случае гексагональной симметрии не существует, следовательно, разложение Ландау имеет вид:

$$F = \alpha\eta^2 + \frac{\beta_1}{2}(\eta^2)^2 + \frac{\beta_2}{2}|\eta|^2 \quad (11.6)$$

Минимуму свободной энергии (11.6) при $\beta_2 < 0$ соответствует параметр порядка

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0(\cos \lambda, \sin \lambda)e^{i\varphi} \\ \eta_0^2 &= -\frac{\alpha}{\beta_1 + \beta_2} \end{aligned} \quad (11.7)$$

где φ и λ - произвольные фазы. Снятие вырождения по отношению к λ происходит только при добавлении к разложению (11.6) инварианта шестого порядка:

$$\gamma \operatorname{Re}(\eta_1 + i\eta_2)^3 (\eta_1^* + i\eta_2^*)^3 \quad (11.8)$$

Если $\gamma < 0$, то минимум свободной энергии достигается при $\lambda = \lambda_n = \pi n/3$, $n = 0, 1, \dots, 5$, если $\gamma > 0$, то - при $\lambda_n = \pi n/3 + \pi/6$. Все сверхпроводящие состояния, описываемые параметром порядка (11.7) с указанными значениями λ формально принадлежат одному сверхпроводящему классу $D_2(C_2) \times R$, однако направление оси симметрии для разных λ_n различно. Так, например, при $\gamma < 0$ и $\lambda = 0$ сверхпроводящий класс выглядит следующим образом:

$$D_2(C_2) \times R = \{E, C_{2y}, e^{i\pi}C_{2x}, e^{i\pi}C_{2z}\} \times R$$

При $\beta_2 > 0$ минимум энергии (11.6) достигается при³

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0(1, \pm i)e^{i\varphi} \\ \eta_0^2 &= -\frac{\alpha}{2\beta_1} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Этому решению соответствует сверхпроводящий класс

$$D_6(E) = \left\{ \exp\left(\frac{i\pi n}{3}\right) C_n, \exp\left(\frac{i\pi n}{3}\right) RU_n \right\}$$

где $n = 0, 1, \dots, 5$. Аналогично А-фазе гелия-3, состояние (11.9) не инвариантно относительно обращения времени, что означает наличие спонтанного магнетизма купровских пар. К этому вопросу мы еще вернемся в 15 .

² Действие операций хатибровской группы сводится к умножению компонент параметра порядка на общий фазовый множитель: $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow e^{i\varphi}(\eta_1, \eta_2)$, а обращение времени эквивалентно комплексному сопряжению: $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\eta_1^*, \eta_2^*)$.

³ Пользуясь результатами предыдущего параграфа, нетрудно установить, что в теории БК (приближение слабой связи) выполняется соотношение $\beta_1 = 2\beta_2 > 0$.

Для сверхпроводящих состояний, соответствующих двумерным представлениям E_{2g} и E_{2u} группы D_{6h} , свободная энергия сохраняет вид (11.6). Ее минимумы определяются формулами (11.7) и (11.9) и формально относятся к тем же сверхпроводящим классам, включающим, однако, другие элементы симметрии в соответствии с трансформационными свойствами базисных функций представления E_2 .

В тетрагональном кристалле ($G = D_{4h}$) базисные функции единственного двумерного представления E тоже имеют вид (11.5), то есть преобразуются как

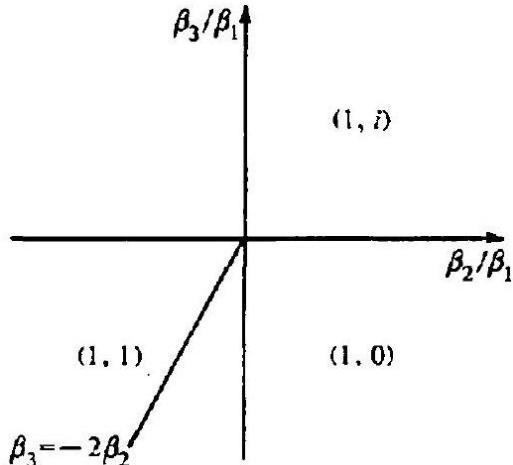


Рис. 10. Бласти существования двухкомпонентных сверхпроводящих состояний $(1,0)$, $(1,i)$ и $(1,1)$ в тетрагональном кристалле

компоненты вектора, лежащего в базисной плоскости. Однако, в этом случае симметрия допускает существование трех инвариантов четвертого порядка, и свободная энергия Лайда принимает вид

$$F = a\eta\eta^* + \frac{\beta_1}{2}(\eta\eta'')^2 + \frac{\beta_2}{2}|\eta\eta|^2 + \frac{\beta_3}{2}(|\eta_1|^4 + |\eta_2|^4) \quad (11.10)$$

В зависимости от отношения коэффициентов β_2 и β_3 (см. рис. 10) энергия достигает минимальных значений на решениях трех типов:

$$\eta \sim (1,0) \text{ (или } (0,1)) \text{, } (1, \pm 1), \text{ } (1, \pm i) \quad (11.11)$$

Вещественные фазы относятся к классам вида $D_2(C_2) \times R$, причем, как и в гексагональном кристалле, направления осей симметрии для различных фаз различны. Комплексные состояния принадлежат магнитному классу

$$D_4(E) = \left\{ \exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) C_n, \exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) RU_n \right\}$$

где $n = 0, 1, 2, 3$.

В кристаллах с кубической симметрией для сверхпроводящих состояний, параметры порядка $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ которых преобразуются согласно одному из двух трехмерных представлений группы O_h (см. табл. 5, 6), плотность свободной энергии записывается в виде, аналогичном (11.10):

$$F' = \alpha\eta\eta^* + \frac{\beta_1}{2}(\eta\eta^-)^2 + \frac{\beta_2}{2}|\eta\eta|^2 + \frac{\beta_3}{2}(|\eta_1|^4 + |\eta_2|^4 + |\eta_3|^4) \quad (11.12)$$

В случае же двухкомпонентного параметра порядка, соответствующего двумерному представлению, свободная энергия имеет вид

$$F = \alpha\eta\eta^* + \frac{\beta_1}{2}(\eta\eta^*)^2 + \frac{\beta_2}{2}|\eta\eta|^2 + \gamma(\eta_1^3\eta_2^{*3} + \eta_1^{*3}\eta_2^3) \quad (11.13)$$

где мы добавили инвариант шестого порядка, споматоющи выражениис вещественігдх состояний.

Мы не будем здсъ останавливаться на перечислении всех возможных минимумов (11.12) или (11.13) и соответствующих им сверхпроводящих классов. Это может быть сделано (см. [9]) аналогично рассмотренному выше простому случаю тетрагонального кристалла.

Упражнение. Найти разложение Ландау свободной энергии изотропного сверхпроводника с d -спариванием.

10.2.13 12. Уравнения Гинзбурга-Ландау и верхнее критическое поле

В этом и нескольких следующих параграфах будет изложена теория Гинзбурга-Ландау для анизотропных сверхпроводящих состояний. Предполагая, что читатель знаком с теорией Гинзбурга-Ландау для обычных сверхпроводников (см., например, [37]), мы сосредоточим внимание на вопросах, специфических для необычной сверхпроводимости. Напомним о построении функционалов Гинзбурга-Ландау и вычисления верхних критических полей в необычных сверхпроводниках второго рода.

Однокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Функционал Гинзбурга-Ландау, то есть разность энергий Гиббса ¹ сверхпроводника в неоднородном состоянии вблизи T_c и нормального металла, в случае однокомпонентного параметра порядка $\eta(\mathbf{r}) = |\eta(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ имеет вид

$$\mathcal{G} = \int d^3r G = \int d^3r \left(F - \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi} \right) \quad (12.1)$$

где плотность свободной энергии F отлидается от выражения (10.1) тем, что здесь добавлена градиентная энергия и энергия магнитного поля:

$$F = \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_\epsilon} \right) |\eta|^2 + \frac{3}{2} |\eta|^4 + K_{ij} (D_i \eta)^* (D_j \eta) + \frac{B^2}{8\pi} \quad (12.2)$$

Здесь

$$D_i = -i\nabla_i + \frac{2\pi}{\Phi_0} A_i \quad (i = x, y, z) \quad (12.3)$$

$\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ – квант магнитного потока ², а $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ – вектор магнитной индукции.

Тензор K_{ij} , называемый тензором эффективных масс, описывает анизотропию направлений в кристалле. Так, для одноосных кристаллов с гексагональной (или тетрагональной) симметрией:

$$K_{ij} = (\delta_{ij} - \hat{z}_i \hat{z}_j) K_1 + \hat{z}_i \hat{z}_j K_4 \quad (12.4)$$

В кристаллах с кубической симметрией $K_1 = K_4$, то есть $K_{ij} = K\delta_{ij}$. Вывод градиентных слагаемых в свободной энергии с помощью микроскопической теории проделан в параграфе 18.

Пространственные распределения параметра порядка η и векторпараметра \mathbf{A} должны обеспечивать минимальность функционала \mathcal{G} :

¹ В задавном внешнем мжаннтом поте 11 вместо свободной энергии $\mathcal{F}(T, B)$ удобно использовать энергию Гиббса $\mathcal{G}(T, IT)$.

² Здесь и ниже е обозначает абсолютную величину заряда электрона.

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \eta^*} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta A} = 0 \quad (12.5)$$

Варьируя (12.1) по η^* и отбрасывая интеграл по поверхности сверхпроводника (мы обсудим поверхностные эффекты в следующем параграфе), приходим к уравнению Гинзбурга-Ландау:

$$\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta + \beta |\eta|^2 \eta + K_{ij} D_i D_j \eta = 0 \quad (12.6)$$

Сравнивая первый и последний члены в уравнении (12.6), мы видим, что в теории имеется характерный пространственный масштаб - корреляционная длина $\xi(T)$, различная для различных кристаллографических направлений i :

$$\xi_i(T) \approx \hbar \left(\frac{K_{11}}{\alpha(T)} \right)^{1/2} \quad (12.7)$$

Буквенная оценка $\xi(T)$ для произвольного направления имеет вид

$$\xi(T) \sim \xi_0 \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{-1/2} \quad (12.8)$$

где $\xi_0 = \hbar v_F / (2\pi T_c)$ есть размер куперовской пары (см. 1).

Градиентная энергия сверхпроводника включает, разумеется, и члены более высоких порядков по градиентам, чем $K_{ij} (D_i \eta)^* (D_j \eta)$. Их игнорирование означает, что теория Гинзбурга-Ландау адекватно описывает достаточно медленные пространственные изменения параметра порядка с масштабом, превышающим ξ_0 .

Верхнее критическое поле. Верхнее критическое поле $H_{c2}(T)$, при котором в сверхпроводниках второго рода происходит фазовый переход в сверхпроводящее состояние, соответствует наименьшему собственному значению дифференциального оператора в линеаризованном уравнении Гинзбурга-Ландау. Перед изучением анизотропии верхнего критического поля, специфической для некоторых кристаллических сверхпроводников с многокомпонентным параметром порядка, посмотрим сначала, как обстоит дело для однокомпонентной сверхпроводимости в одноосных кристаллах. В этом случае линеаризованное уравнение Гинзбурга-Ландау имеет вид

$$\alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta + K_1 (D_x^2 + D_y^2) \eta + K_4 D_z^2 \eta = 0 \quad (12.9)$$

Выбирая магнитное поле лежащим в базисной плоскости:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\ \mathbf{A} &= Hz(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (12.10)$$

из (12.9) получаем:

$$-K_4 \frac{d^2 \eta}{dz^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta = 0 \quad (12.11)$$

Пользуясь тем, что данное уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера для заряженной частицы в магнитном поле, собственные функции и собственные значения которого (уровни Ландау) хорошо известны, находим:

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 K_4}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.12)$$

то есть величина верхнего критического поля, лежащего в базисной плоскости гексагонального (тетрагонального) кристалла, не зависит от направления.

Такая зависимость появляется лишь при выходе из базисной плоскости. Например, для поля, лежащего в плоскости (y, z) :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H(0, \sin \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{A} &= Hx(0, \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned} \quad (12.13)$$

решение уравнения (12.9) дает

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 (K_1 \cos^2 \theta + K_4 \sin^2 \theta)}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.14)$$

В кристаллах с кубической симметрией $K_1 = K_4$, и величина верхнего критического поля не зависит от его ориентации относительно осей кристаллической решетки.

Многокомпонентные сверхпроводящие состояния в кристаллах. Перейдем теперь к рассмотрению двухкомпонентной сверхпроводимости с векторным параметром порядка $\eta = (\eta_x, \eta_y)$, соответствующим либо представлению E_1 группы D_6 , либо представлению группы E группы D_4 (см. 4). Функционалы Гинзбурга-Ландау записываются в виде разложения по степеням двух комплексных функций η_1 и η_2 и их градиентов, которые должны быть вещественным и инвариантным относительно всех преобразований точечной группы D_{6h} (или D_{4h}). Последнее требование означает, что всякий член разложения имеет один и тот же вид во всех системах координат, связанных между собой преобразованиями из D_{6h} (или D_{4h}). Оставляя лишь квадратичные по параметру порядка слагаемые, существенные для вычисления верхнего критического поля, запишем функционалы Гинзбурга-Ландау для векторного представления в гексагональном:

$$\begin{aligned} F_{\text{hex}} &= \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta \eta^m + K_1 (D_i \eta_i)^* (D_i \eta_j) + K_2 (D_i \eta_i)^* (D_j \eta_j) + \\ &+ K_3 (D_i \eta_j)^* (D_j \eta_i) + K_4 (D_z \eta_i)^* (D_z \eta_i) + \frac{B^2}{8\pi} \end{aligned} \quad (12.15)$$

и тетрагональном:

$$F_{\text{tetr}} = F_{\text{hex}} + K_5 [(D_x \eta_x)^* (D_x \eta_x) + (D_y \eta_y)^* (D_y \eta_y)] \quad (12.16)$$

кристаллах, $i = x, y$.

Плотность свободной энергии F_{hex} содержит только скалярные произведения двух лежащих в базисной плоскости векторов η и $\mathbf{D}(\eta \eta^*, D\eta)$ и т. д.), и поэтому инвариантна относительно любых поворотов в базисной плоскости. Члены, соответствующие специфической гексагональной анизотропии, появляются только в более высоких порядках разложения по градиентам. Полная симметрия свободной энергии по отношению к вращениям на произвольный угол в базисной плоскости приводит к изотропии верхнего критического поля. В этом можно убедиться непосредственно, решая два уравнения, получающиеся варьированием (12.15) по η_j^* :

$$K_1 D_i^2 \eta_j + K_2 D_j D_i \eta_i + K_3 D_i D_j \eta_j + K_4 D_z^2 \eta_j + a_0 \left(\frac{T - T_c}{\tau_c} \right) \eta_j = 0 \quad (12.17)$$

в поле вида (12.10). Выбирая систему координат таким образом, чтобы ось \ddot{x} была параллельна магнитному полю, из (12.17) получаем систему двух независимых лифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \cdots K_4 \frac{d^2 \eta_x}{dz^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta_x + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_x = 0 \\ -K_4 \frac{d^2 \eta_y}{dz^2} + (K_1 + K_2 + K_3) \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 z^2 \eta_y + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_y = 0 \end{cases} \quad (12.18)$$

с собственными значениями, определяющими дзс возможны величины $H_{c2}(T)$:

$$H_{c2}^{(1)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 K_4}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.19)$$

$$H_{c2}^{(2)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_G}{2\pi \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3) K_4}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.20)$$

Большая из них соответствует верхнему критическому полю, при котором происходит фазовый переход в сверхпроводящее состояние. Таким образом, верхнее критическое поле оказывается изотропным в базисной плоскости гексагонального кристалла и в случае двухкомпонентной сверхпроводимости. Для состояния, преобразующегося согласно представлению E_2 , доказательство этого факта можно найти в работе [38].

Отмстим сще одно важное следствие из уравнений (12.18). Мы видим, что в магнитном поле фазовый переход из нормального состояния происходит в одну из двух сверхпроводящих фаз:

$$\boldsymbol{\eta}_x \propto (1, 0) f_0(z) \quad (12.21)$$

или

$$\eta_y \propto (0, 1) f_0(z) \quad (12.22)$$

где $f_0(z)$ - функция основного состояния Ландау для заряженной частицы в магнитном поле. С другой стороны, если переход в нулевом магнитном поле ляя векторного представления происходит в комплексную фазу (см. (11.9))

$$\eta \propto (1, \pm i) \quad (12.23)$$

то при уменьшении магнитного поля (при $T < T_c$) трансформация состояния с параметром порядка (12.21) в состояние (12.23) должна обязательно сопровождаться переходом, связанным с зарождением фазы с параметром порядка (12.22) (см. рис. 11). Аналогичное явление должно наблюдаться, если в нулевом поле переход происходит в вещественную фазу

$$\eta \propto (\cos \lambda_n, \sin \lambda_n) \quad (12.24)$$

где величины λ_n определяются кристаллической анизотропией (см. 11).

Свойство изотропии $H_{c2}(T)$ в базисной плоскости гексагонального кристалла, разумеется, утрачивается при введении любого внешнего воздействия, нарушающего гексагональную симметрию. Так например, слабое орторомбическое возмущение, характеризуемое вектором M , лежащим в базисной плоскости, приводит к появлению в функционале Гинзбурга-Ландау слагаемого с орторомбической симметрией, имеющего вид

$$\gamma(\mathbf{M}\boldsymbol{\eta})^*(\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}) \quad (12.25)$$

Учет такого вклада приводит как к расщеплению температуры перехода (компоненты η , параллельная и перпендикулярная M , будут появляться при разных температурах), так и к заметной анизотропии верхнего критиче-

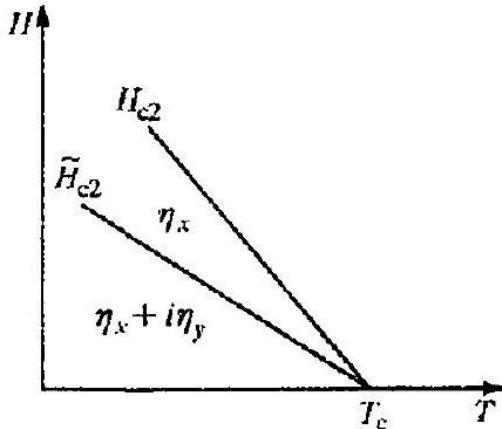


Рис. 11. Фазовые переходы в маагиитном поле для двухкомпонентных сверхпроводящих состояний в гексагональном кристалле ского поля [39]. Последнее свойство следует из того, что уравнения для компонент параметра порядка перестают быть независимыми (кроме выделенных направлений $H \parallel M$ и $H \perp M$).

Рассмотрим теперь кристалл с тетрагональной симметрией. Специфическим для него является дополнительный член в граничной энергии (12.16), обладающий симметрией четвертого порядка относительно поворотов вокруг оси \hat{z} . Линеаризованные уравнения Гинзбурга-Ландау в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} K_1 D_i^2 \eta_j + K_2 D_j D_i \eta_i + K_3 D_i D_j \eta_i + K_4 D_x^2 \eta_j + \\ + K_5 (\delta_{xj} D_x^2 \eta_x + \delta_{yj} D_y^2 \eta_y) + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) \eta_j = 0 \end{aligned} \quad (12.26)$$

Положим для простоты $K_2 = K_3 = 0$, тогда уравнения для компонент параметра порядка расщепляются, и, в случае поля вида (12.10), лежащего в базисной плоскости, получаем следующие значения H_{c2} для компонент η_x и η_y , соответственно:

$$I_{c2}^{(1)}(T') = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_4 (K_1 + K_s \sin^2 \rho)}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.27)$$

$$H_{c2}^{(2)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \sqrt{K_1 (K_1 + K_5 \cos^2 \varphi)}} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.28)$$

При каждом направлении поля $H(\varphi)$ нужно выбрать из этих двух значений большее. Таким образом, в тетрагональном кристалле возникает анизотропия верхнего критического поля, специфическая для двухкомпонентной сверхпроводимости [40] (рис. 12).

Анизотропия верхнего критического поля той же природы имеет место в кубических кристаллах в случае двух- или трехкомпонентных сверхпроводя-

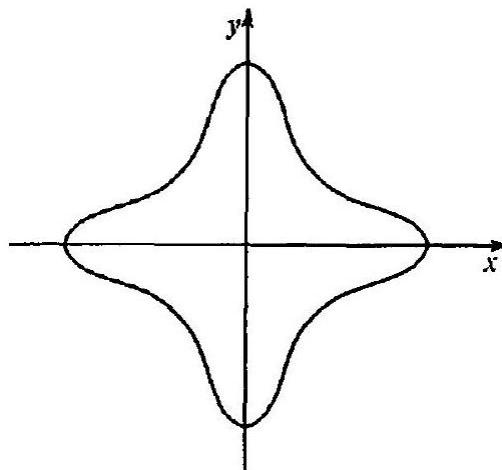


Рис. 12. Анизотропия верхнего критического поля в базисной плоскости тетрагонального кристалла для двухкомпонентного сверхпроводящего состояния щих состояний [38].

В общем случае, то есть при произвольной ориентации внешнего поля относительно осей кристаллической решетки, верхнее критическое поле для многокомпонентного параметра порядка в области применимости теории Гинзбурга-Ландау может быть найдено лишь путем численного анализа. Исключение составляет задача о вычислении $H_{c2}(T)$ для двухкомпонентного параметра порядка в гексагональном (или тетрагональном) кристалле при \mathbf{H} , направленном вдоль оси шестого (или четвертого) порядка, допускающая аналитическое решение [41].

В этом случае постедний член в (12.16) не приводит к качественным различиям, и мы будем решать задачу при $K_5 = 0$. Поскольку магнитное поле направлено вдоль оси шестого порядка \hat{z} (калибровка $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$), то можно считать, что параметр порядка от z не зависит, и из (12.17) мы имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} (K_{123}D_x^2 + K_1D_y^2)\eta_x + (K_2D_xD_y + K_3D_yD_x)\eta_y + \alpha_0\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)\eta_x = 0 \\ (K_{123}D_y^2 + K_1D_x^2)\eta_y + (K_3D_xD_y + K_2D_yD_x)\eta_x + \alpha_0\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)\eta_y = 0 \end{cases} \quad (12.29)$$

где $K_{123} = K_1 + K_2 + K_3$. Введем теперь новые функции $\eta_{\pm} = \eta_x \pm i\eta_y$ и операторы $D_{\pm} = D_x \pm iD_y$, а также учтем, что $[D_x, D_y] = -2\pi iH/\Phi_0$. Тогда уравнения переписываются в виде

$$\begin{cases} \left(\alpha_0\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right) + K_0(D_x^2 + D_y^2) - K_{-}\frac{2\pi H}{\Phi_0}\right)\eta_{+} + K_{+}D_{+}^2\eta_{-} = 0 \\ K_{+}D_{-}^2\eta_{+} + \left(\alpha_0\left(\frac{T-T_c}{T_c}\right) + K_0(D_x^2 + D_y^2) + K_{-}\frac{2\pi I}{\Phi_0}\right)\eta_{-} = 0 \end{cases} \quad (12.30)$$

где $K_0 = (K_{123} + K_1)/2$, $K_{\pm} = (K_2 \pm K_3)/2$.

Параметр порядка ищем в виде

$$\eta_{\pm} = \exp(-ipy)f_{\pm}(x) \quad (12.31)$$

Тогда уравнения Гинзбурга-Ландау имеют решения двух типов:

$$\begin{pmatrix} f_{+}(x) \\ f_{-}(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_{0.1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.32)$$

либо

$$\begin{pmatrix} f_{+}(x) \\ f_{-}(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} qF_{n+2}(x) \\ F_n(x) \end{pmatrix}, \quad (12.33)$$

где q - константа, а функция $F_n(x)$ связана с полиномами Эрмита $H_n(x)$ следующим соотношением:

$$F_n(x) = \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] H_n \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right) \right] \quad (12.34)$$

В том, что семейство (12.33) в самом деле является решением уравнений (12.30), легко убедиться, используя тождество [42]:

$$\begin{aligned} D_-^2 F_n &= -4n(n-1) \frac{2\pi H}{\Phi_0} F_{n-2} \\ D_+^2 F_n &= -\frac{2\pi H}{\Phi_0} F_{n+2} \\ (D_x^2 + D_y^2) F_n &= (2n+1) \frac{2\pi H}{\Phi_0} F_n \end{aligned}$$

Подставляя (12.34) в (12.31), получаем выражение для температур перехода, соответствующих этому семейству решений:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{T - T_c}{T_c} &= \\ &= \left[-(2n+3)K_0 + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(n+1)(n+2)K_+^2} \right] \frac{2\pi H}{\Phi_0} \end{aligned} \quad (12.35)$$

Максимальная величина верхнего критического поля соответствует либо решению

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} F_0(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.36)$$

при котором

$$H_{c2}^{(1)}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi (K_0 - K_-)} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.37)$$

либо решением

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} qF_2(x) \\ F_0(x) \end{pmatrix} \quad (12.38)$$

которому соответствует

$$H_{c2}^{(2)}(T') = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi \left(3K_0 - \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 8K_+^2} \right)} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (12.39)$$

Вид состояния, в котором происходит фазовый переход в магнитном поле, зависит от соотношения между коэффициентами K_i . В частности, в теории БКШ $K_1 = K_2 = K_3$ (см. 18), и большее значение верхнего критического поля имеет состояние (12.38).

При уменьшении внешнего поля ниже $H_{c2}(T)$ сверхпроводящие зародыши, отвечающие различным значениям параметра вырождения p , формируют периодическую решетку вихрей Абрикосова, вид которой может существенно отличаться от обычной треугольной (подробнее об этом см. [43]).

Нарушение пространственной четности и геликоидальные фазы. Всё рассмотренные многокомпонентные сверхпроводящие состояния возникают из нормальной фазы, в группе симметрии которой имеется преобразование пространственной инверсии. В противном

случае, во-первых, теряет смысл

разделение на четные и нечетные сверхпроводящие состояния, ввиду возможности их перемешивания (см. 4), и, во-вторых, появляется возможность построения инвариантных слагаемых в свободной энергии, линейных по пространственным градиентам (инварианты Лифшица).

Например, если параметр порядка $\eta = (\eta_x, \eta_y)$ соответствует двумерному представлению E_1 группы D_6 , то кроме членов, входящих в разложение (12.15), имеется итвариант вида

$$\gamma (\eta_1^* D_2 \eta_2 + \text{к.с.}) \quad (12.40)$$

Учет подобных членов приводит к значительному изменению термодинамических и магнитных свойств системы, в частности, к возможности существования неоднородных (геликоидальных) фаз в нулевом магнитном поле [7].

Упражнения. 1. Доказать, что функционал Гинзбурга-Ландау для двухкомпонентного параметра порядка, соответствующего представлению E_2 группы D_6 (базисные функции см. в табл. 1,2), также можно записать в виде (12.15). Указание. Составьте из компонент D и η комбинации, инвариантные относительно операций группы D_{6h} и найдите преобразование $\eta_i \rightarrow \chi_i$, такое, что для функций $\chi_{1,2}$ градиентная энергия может быть приведена к виду (12.15).)

2. Найти критическую температуру и состояния, в которые происходит фазовый переход в гексагональном сверхпроводнике без центра инверсии с учетом слагаемого вида (12.40) в свободе энергии.

10.2.14 13. Граничные условия и поверхностная сверхпроводимость

Вблизи поверхности зародышей сверхпроводящей фазы в сверхпроводниках второго рода возникают в магнитном поле, превышающем верхнее критическое поле. Для нахождения поверхностного критического поля необходимо решить линеаризованное уравнение Гинзбурга-Ландау с учетом граничных условий для параметра порядка. В этом параграфе будут получены граничные условия и изучен вопрос о поверхностной сверхпрозолимости в кристаллах. Возможность образования поверхностных зародышей в необычных сверхпроводниках существенно зависит от ориентации поверхности по отношению к кристаллическим осям. Обнаружение такой зависимости может служить способом идентификации сверхпроводящих фаз.

Границные условия. Однокомпонентная сверхпроводимость. Уравнения Гинзбурга-Ландау были получены в предыдущем параграфе из условия равенства нулю вариации свободной энергии. Оставшаяся поверхностная часть:

$$\delta \mathcal{F}|_{S, \text{grad}} = -i \oint dS n_i K_{ij} (D_j \eta) \delta \eta^m \quad (13.1)$$

где \mathbf{n} - вектор нормали к поверхности, обращается в пуль при условии

$$n_i K_{ij} D_j \eta l_S = 0 \quad (13.2)$$

которое обеспечивает обращение в пуль нормальной к поверхности компоненты тока: $\mathbf{n} \mathbf{j}|_S = 0$. Полагая, что параметр порядка волизи поверхности в нулевом магнитном поле может меняться лишь вдоль направления нормали, получаем:

$$(\mathbf{n} \nabla) \eta|_S = 0 \quad (13.3)$$

Отсюда следует, что на поверхности сверхпроводника в отсутствие магнитного поля параметр порядка имеет ту же величину, что и в объеме.

Однако, даже для обычных сверхпроводников этот вывод, полученный в рамках теории Гинзбурга-Ландау, нуждается в проверке на основе микроскопической теории. Дело в том, что теория Гинзбурга-Ландау применима лишь на пространственных масштабах, превышающих длину когерентности ξ_0 и поэтому не учитывает изменение условий возникновения сверхпроводимости непосредственно вблизи поверхности. Микроскопическое рассмотрение (см. ниже 20) показывает, что вблизи границы, на расстояниях порядка атомных, волновые функции электронов существенно отличаются от волновых функций в объеме. Это, в свою очередь, приводит к появлению в свободной энергии сверхпроводника дополнительных слагаемых, локализованных на расстояниях порядка ξ_0 от границы. Данный факт можно учесть феноменологически, вводя в рассмотрение поверхностную энергию

$$\mathcal{F}_S = \oint dS a(\mathbf{n}) |\eta|^2 \quad (13.4)$$

которая зависит от ориентации поверхности кристалла по отношению к осям кристаллической решетки. Здесь $a(\mathbf{n}) \sim N_0 \xi_0 f(\mathbf{n})$, причем $f(\mathbf{n})$ есть безразмерная скалярная функция направлений нормали, инвариантная относительно всех преобразований симметрии точечной группы кристалла.

Границные условия для параметра порядка могут быть получены путем варьирования по η^* полной свободной энергии сверхпроводника

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_V + \mathcal{F}_S \quad (13.5)$$

состоящей из общей объемной части (12.2) и поверхностной энергии (13.4). Условие исчезновения вариации на поверхности принимает вид

$$in_i K_{ij} D_j \eta|_S = a(\mathbf{n}) \eta |_S \quad (13.6)$$

Таким образом, в задаче появляется новый характерный масштаб - интерполяционная длина, которая зависит от направления нормали:

$$b_i(\mathbf{n}) \sim \frac{K_n}{u(\mathbf{n})} \quad (13.7)$$

Эффективное граничное условие для параметра порядка вблизи критической температуры может быть получено путем сравнения $b(\mathbf{n})$ с корреляционной длиной $\xi(\mathbf{n})$ (12.8).

Пусть направление нормали таково, что поверхностный инвариант $f(\mathbf{n})$ и, следовательно, функция $a(\mathbf{n})$ равны нулю. Тогда из (13.6) мы получаем граничное условие (13.3). Интерполяционная длина в этом случае обращается в бесконечность.

Если же для данного направления нормали $f(\mathbf{n}) \neq 0$, то интерполяционная длина $b(\mathbf{n})$ конечна и не зависит от температуры. Следовательно, при $T \rightarrow T_c$ выполняется неравенство $b(\mathbf{n}) \ll \xi(\mathbf{n})$, которое, в свою очередь, означает, что эффективное граничное условие для параметра порядка имеет следующий вид:

$$\eta l_s = 0 \quad (13.8)$$

Выход о том, что при $f(\mathbf{n}) \neq 0$ граничное условие (13.3) должно быть заменено на (13.8), может быть получен также с помощью простых энергетических соображений. Проигрыш в энергии сверхпроводника вблизи поверхности определяется суммой градиентного (13.1) и поверхностного (13.4) вкладов. Относительный величину этих слагаемых при $T \rightarrow T_c$ можно оценить, учитывая, что характерным масштабом пространственного изменения параметра порядка является корреляционная длина $\xi(T) \sim \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}$, а его значение в объеме кристалла есть $|\eta_0| \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$. Тогда из (13.1) имеем

$$\mathcal{F}_{S,\text{grad}} \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (13.9)$$

Если $f(\mathbf{n}) \neq 0$, и параметр порядка на поверхности отличен от нуля, то из (13.4) имеем

$$\mathcal{F}_S \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \quad (13.10)$$

Сравнивая (13.9) и (13.10), мы видим, что вблизи критической температуры \mathcal{F}_S превосходит $\mathcal{F}_{S,\text{grad}}$. Этот существенный проигрыш в поверхностной энергии исчезает лишь при полном подавлении сверхпроводимости на поверхности, что приводит к граничному условию (13.8). Если $f(\mathbf{n}) = 0$, то проигрыша в энергии (13.4) нет, и имеет место граничное условие (13.3).

Очевидно, что на границе сверхпроводника с нормальным металлом условия отражения и прохождения квазичастиц изменяют их волновые функции в поверхностном слое, то есть $f(\mathbf{n}) \neq 0$ при любом направлении \mathbf{n} . Следовательно, в этом случае при $T \rightarrow T_c$ всегда имеют место граничные условия (13.6). Для границы сверхпроводника с диэлектриком или вакуумом следует различать случаи зеркального и диффузного отражения квазичастиц от границы. Рассмотрим сначала зеркальное отражение.

В этом случае также $f(\mathbf{n}) \neq 0$ для всех ориентаций нормали по отношению к кристаллографическим осям, кроме тех, для которых электронный спектр $\varepsilon(\mathbf{k})$ и функции $g(\mathbf{k})$ (или $d(\mathbf{k})$), описывающие сверхпроводящие состояния и преобразующиеся согласно одному из одномерных неприводимых представлений группы симметрии кристалла, не меняются при отражении в плоскости границы:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(\mathbf{k}\mathbf{n})) &= \varepsilon(\mathbf{k}) \\ g(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(\mathbf{k}\mathbf{n})) &= g(\mathbf{k}), \quad d(\mathbf{k} - 2\mathbf{n}(\mathbf{k}\mathbf{n})) = d(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (13.11)$$

В самом деле, при выполнении этих условий траектории квазичастиц, отраженных от границы, представляют собой зеркальное отражение в плоскости границы траекторий падающих на нее частиц, продолженных в полупространство, занятое диэлектриком (подробнее об этом см. ниже 20). Поэтому задача становится эквивалентной задаче о нахождении параметра порядка в сверхпроводнике, заполняющем все пространство, и подавления сверхпроводимости на границе не происходит, то есть имеют место граничные условия (13.3).

Таблица 7. Угловые зависимости параметра порядка и поверхностной энергии для однокомпонентных параметров порядка в тетрагональном кристалле ($S = 0, G = D_{4h}$)

Γ	$g(\mathbf{k})$	$f(\mathbf{n})$
A_{1g}	$(k_x^4 + k_y^4)$	$an_x^2(n_x^2 + n_y^2) + bn_x^2n_y^2(n_x^2 - n_y^2)^2$
A_{2g}	$k_x k_y (k_x^2 - k_y^2)$	$(n_x^2 + n_y^2)$
B_{1g}	$k_x^2 - k_y^2$	$an_z^2(n_x^2 + n_y^2) + bn_x^2n_y^2$
B_{2g}	$k_x k_y$	$an_x^2(n_x^2 + n_y^2) + b(n_x^2 - n_y^2)^2$

Итак, нуля функции $f(\mathbf{n})$ для данного сверхпроводящего состояния должны соответствовать ориентациям плоскости границы, совпадающим с общими плоскостями симметрии ферми-поверхности и параметра порядка сверхпроводника. Для сферической ферми-поверхности и полностью изотропного сверхпроводящего состояния (s -спаривание) $f(\mathbf{n})$ тождественно обращается в нуль для всех ориентаций \mathbf{n} . Поэтому общепринято, что в этом случае на границе сверхпроводник-диэлектрик выполнены граничные условия (13.3).

Для обычной сверхпроводимости, соответствующей единичному представлению A_{1g} в анизотропном кристалле, симметрия параметра порядка совпадает с симметрией фермиповерхности и включает в себя все преобразования точечной группы кристалла. Функции $f(\mathbf{n})$, обращающиеся в нуль для всех зеркально-симметричных направлений, в кристаллах с кубической, тетрагональной и гексагональной симметрией, соответственно, имеют вид

$$f_{A_{1g}}^{\text{cub}}(\mathbf{n}) = a \left[n_x^2 n_y^2 (n_x^2 - n_y^2)^2 + n_x^2 n_z^2 (n_x^2 - n_z^2)^2 + n_y^2 n_z^2 (n_y^2 - n_z^2)^2 \right] \quad (13.12)$$

$$f_{A_{1g}}^{\text{terr}}(\mathbf{n}) = a n_z^2 (n_x^2 + n_y^2)^2 + b n_x^2 n_y^2 (n_x^2 - n_y^2)^2 \quad (13.13)$$

$$f_{A_{1g}}^{\text{hex}}(\mathbf{n}) = a n_z^2 (n_x^2 + n_y^2) + b (n_x^3 - 3n_x n_y^2)^2 (n_y^3 - 3n_y n_x^2)^2 \quad (13.14)$$

Здесь a и b - числа, определяющие меру анизотропии, то есть отличие формы фермиповерхности и щели в спектре от сферической или цилиндрической.

Границные условия (13.3) имеют место в узкой области направлений нормали с шириной $\sim \sqrt{\xi_0/\xi(T)}$ ¹, для которых функции $f(\mathbf{n})$ обращаются в нуль. Для всех остальных ориентаций поверхности сверхпроводника электрические условия имеют вид (13.6).

Если мы имеем дело с необычным сверхпроводящим состоянием, параметр порядка которого преобразуется согласно неединичному представлению, то число ориентаций поверхности, для которых выполняется условие $f(\mathbf{n}) = 0$, может только уменьшиться по сравнению с обычным сверхпроводящим состоянием. В табл. 7 приведены соответствующие функции для однохомопонентных сверхпроводящих состояний с синглетным спариванием в тетрагональном кристалле, популярных в настоящее время в связи с исследованиями высокотемпературной сверхпроводимости.

Мы видим, что для представления A_{1g} поверхностная энергия обращается в нуль для восьми направлений \mathbf{n} в базисной плоскости, а также при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$. Для представлений B_{1g} и B_{2g} из этих нулей остается лишь по четыре нуля в базисной плоскости и один нуль при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$. Вертикальные плоскости зеркальной симметрии для представлений A_{1g} (фермиповерхность) и A_{2g} (сверхпроводящее состояние) не совпадают, поэтому если параметр порядка преобразуется согласно A_{2g} , то у функции $f_{A_{2g}}(\mathbf{n})$ остается лишь один нуль при $\mathbf{n} \parallel \hat{z}$, то есть вдоль направления, перпендикулярного общей горизонтальной плоскости симметрии функций $\varepsilon(\mathbf{k})$ и $g_{A_{2g}}(\mathbf{k})$.

Для пространственно-нечетных однокомпонентных сверхпроводящих состояний в тетрагональном кристалле ($S = 1$, сильное спин-орбитальное взаимодействие, см. табл. 3) нет симметрических причин, по которым функция $f(\mathbf{n})$ должна обратиться в нуль, и поэтому поверхностная энергия представляет собой произвольную комбинацию всех скалярных инвариантов тетрагональной группы.

Мы не будем здесь находить функции $f(\mathbf{n})$ для нетривиальных сверхпроводящих состояний в гексагональных и кубических кристаллах, предоставив это читателю (см. упражнение в конце параграфа).

Поверхностная сверхпроводимость. Найденные выше граничные условия (13.3) и (13.6) для параметра порядка позволяют вычислить критическое поле поверхностной сверхпроводимости в области применимости теории Гинзбурга-Ландау.

Рассмотрим тетрагональный сверхпроводник, занимающий полупространство $x > 0$ так, что тетрагональная ось лежит в плоскости границы, а нормаль к границе расположена в базисной плоскости кристалла. Выберем направление магнитного поля вдоль тетрагональной оси:

¹ Эта оценка получается путем сравнения поверхностной градиентной энергии (13.1) и поверхностной энергии (13.4) вблизи направления, для которого $f(\mathbf{n})$ обращается в нуль.

$$\mathbf{H} = H(0, 0, 1)$$

$$\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$$

Подставляя в уравнение Гинзбурга-Ландау (12.9) параметр порядка в виде $\eta(x, y) = f(x) \exp(-ipy)$, получаем:

$$-K_1 \frac{d^2 f}{dx^2} + K_1 \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 f + \alpha_0 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) f = 0 \quad (13.15)$$

Решение этого уравнения и величина поверхностного критического поля определяются граничными условиями.

Для тех ориентаций поверхности, для которых выполняется условие (13.8), то есть

$$\eta(x = 0) = 0$$

сверхпроводящий зародыш образуется вдати от поверхности ($p\xi(T) \gg 1$). Соответствующее решение уравнения (13.15) имеет вид

$$f(x) \propto \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right]$$

а поле, в котором зарождается сверхпроводящее состояние, совпадает с объемным верхним критическим полем:

$$H_{c3}(T) = H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi K_1} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (13.17)$$

Если же поверхность ориентирована так, что выполняется граничное условие (13.3), то есть

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (13.18)$$

то уравнение (13.15) имеет решение, локализованное вблизи границы:

$$f(x) \propto F_\nu(x) \quad (13.19)$$

$$F_\nu(x) = \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] H_\nu \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - p \frac{\Phi_0}{2\pi H} \right) \right]$$

где $H_\nu(x)$ - функция Эрмита (функция параболического цилиндра) с индексом

$$\nu(\lambda) = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \quad (13.20)$$

Здесь введена безразмерная величина

$$\lambda = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi K_1 H} \frac{T_c - T}{T_c}$$

Подстановка (13.19) в граничное условие (13.18) приводит к трансцендентному уравнению

$$2\nu H_{\nu-1}(-r) = -r H_\nu(-r) \quad (13.21)$$

где

$$r = p \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi H}}$$

которое позволяет найти зависимость $\lambda(r)$. При этом магнитное поле, в котором зарождается сверхпроводящая фаза вблизи поверхности образца, соответствует минимальному значению функции $\lambda(r)$. Численное решение уравнения (13.21) дает [78]: $\lambda_{\min} = 0,59$, $r = 0,77$, следовательно,

$$H_{c3}(T) \approx 1,69H_{c2}(T) \quad (13.22)$$

Для обычного сверхпроводящего состояния (представление A_{1g}) граничное условие (13.18) реализуется, строго говоря, для поверхностей с ориентациями нормали $n = (\cos(\pi k/4), \sin(\pi k/4), 0)$, где $k = 0, 1, \dots, 7$, или $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Для поверхностей, нормаль к которым отклоняется от указанных значений на углы, превышающие отношение $\sqrt{\xi_0/\xi(T)}$, граничное условие (13.18) заменяется на условие (13.16), и поверхностной сверхпроводимости не возникает.

На практике анизотропия обычного сверхпроводящего состояния не очень выражена. Дело в том, что как рассеяние на примесях, так и усредняющее действие диффузионного рассеяния на поверхности, не подавляя сверхпроводимости, приводят к уменьшению функции $f_{A_{1g}}(\mathbf{n})$, поэтому поверхностная сверхпроводимость наблюдается для произвольной ориентации поверхности.

Не так обстоит дело для сверхпроводящих состояний, преобразующихся согласно неединичным представлениям. Например, в тетрагональных кристаллах для состояния, соответствующего представлению B_{1g} , которое реализуется, по-видимому, в высокотемпературных сверхпроводниках, поверхностная сверхпроводимость в стечении зеркально отражающей поверхности имеет место для следующих ориентаций нормали:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(\cos \frac{\pi k}{2}, \sin \frac{\pi k}{2}, 0 \right), \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ \mathbf{n} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Если поверхность отклоняется от указанных направлений на углы, превышающие $\sqrt{\xi_0/\xi(T)}$, поверхностной сверхпроводимости нет. В отличие от состояния A_{1g} , учет диффузии рассеяния на границе не восстанавливает поверхностную сверхпроводимость для произвольной ориентации поверхности, а, напротив, вызывает усреднение параметра порядка по направлениям импульса и тем самым подавляет поверхностную сверхпроводимость.

Окончательный вывод таков: отсутствие поверхностной сверхпроводимости на диффузно-отражающих поверхностях может служить характерным признаком необычных сверхпроводящих состояний. По наличию же поверхностной сверхпроводимости лишь в узких угловых окрестностях выделенных направлений \mathbf{n} можно установить симметрию сверхпроводящего состояния.

Граничные условия для многокомпонентных параметров порядка. В этом случае выражение для поверхностной энергии находится точно так же, как это делалось для получения градиентной энергии в 12. Например, для сверхпроводящего состояния, преобразующегося согласно двумерному представлению E в тетрагональном кристалле, необходимо составить все возможные квадратичные по компонентам параметра порядка (η_x, η_y) и вектора нормали \mathbf{n} , комбинации, инвариантные относительно всех преобразований группы симметрии нормального состояния $U(1) \times R \times D_{4h}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S = \oint dS [a_1(\mathbf{n})\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^* + a_2(\mathbf{n}) |\eta_x n_x + \eta_y n_y|^2 + \\ + a_3(\mathbf{n}) (|\eta_x n_x|^2 + |\eta_y n_y|^2)] \quad (13.23) \end{aligned}$$

Здесь $a_i(\mathbf{n}) \sim N_0 \xi_0 f_i(\mathbf{n})$ ($i = 1, 2, 3$) - функции, инвариантные относительно всех преобразований из D_{4h} . За исключением ориентаций границы, задаваемых кристаллографическими направлениями, обе компоненты параметра порядка, преобразующиеся как $(k_z k_x, k_z k_y)$, не обладают определенной четностью при отражении в плоскости границы (ср. с (13.11)). Отсюда, так же, как и в однокомпонентном случае, следует обращение в нуль обеих компонент параметра порядка на поверхности и отсутствие поверхностной сверхпроводимости. Ориентации границы, совпадающие с кристаллографическими направлениями, требуют специального исследования. Мы проделаем его для более простого объекта - двухкомпонентного сверхпроводящего состояния в

гексагональном кристалле, где выражение для поверхностной энергии имеет

вид (13.23) без последнего слагаемого, отсутствие которого означает инвариантность по отношению к вращениям на произвольный угол вокруг оси шестого порядка.

Поверхностное критическое поле для векторного параметра порядка в гексагональном кристалле. Аналогично верхнему критическому полю в объеме, поверхностное критическое поле для многокомпонентной сверхпроводимости может быть вычислено аналитически лишь в исключительных случаях. В частности, это можно сделать для параметра порядка, соответствующего

представлению E_1 в гексагональном кристалле, если поле направлено вдоль оси шестого порядка, а нормаль лежит в Базисной плоскости [44].

Поверхностная энергия обладает симметрией шестого порядка относительно вращений вокруг гексагональной оси. Поэтому, при совпадении ориентации нормали к поверхности с одним из кристаллографических направлений, можно выбрать систему координат так, чтобы \hat{x} совпадала с направлением нормали. Тогда перекрестные члены вида $\eta_1^* \eta_2$ исчезают, и поверхностная энергия принимает вид

$$\mathcal{F}_S = \oint dS (b_1 |\eta_1|^2 + b_2 |\eta_2|^2) \quad (13.24)$$

Поскольку пара (η_1, η_2) преобразуется как $(k_z k_x, k_z k_y)$, то при отражении в плоскости yz компонента η_1 меняет, а компонента η_2 сохраняет знак. Поэтому на зеркально-отражающей границе векторный параметр порядка должен удовлетворять граничным условиям:

$$\eta_1|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (13.25)$$

Для вычисления поверхностного критического поля сверхпроводника, занимавшего полупространство $x > 0$, в случае поля, направленного вдоль оси шестого порядка, необходимо решить уравнения Гинзбурга-Ландау (12.30)

$$\begin{cases} \left(\alpha_0 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right) + K_0 (D_x^2 + D_y^2) - K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_+ + K_+ D_+^2 \eta_- = 0 \\ K_+ D_-^2 \eta_+ + \left(\alpha_0 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right) + K_0 (D_x^2 + D_y^2) + K_- \frac{2\pi H}{\Phi_0} \right) \eta_- = 0 \end{cases} \quad (13.26)$$

дополненные граничными условиями (13.25).

При нахождении верхнего критического поля в бесконечном объеме необходимо было наложить на параметр порядка условие убывания при $x \rightarrow -\infty$, вследствие чего решение уравнений выражалось через полиномы Эрмита. Теперь же, при рассмотрении поверхностной задачи, мы не фиксируем поведение решения на $-\infty$ и, соответственно, отказываемся от требования неотрицательности и целочисленности индекса полиномов Эрмита, которые, таким образом, становятся функциями Эрмита $H_\nu(x)$.

Итак, ищем решение уравнений (13.26) в виде

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q F_{\nu+2}(x) \\ F_\nu(x) \end{pmatrix}$$

где $F_\nu(x)$ даются формулой (13.19), а индекс ν должен удовлетворять уравнению

$$\alpha_0 \frac{T - T_c}{T_c} = (-(2\nu + 3)K_0 + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+^2}) \frac{2\pi H}{\Phi_0} \quad (13.27)$$

При этом параметр q равен

$$q(\nu) = \frac{-(2K_0 - K_-) + \sqrt{(2K_0 - K_-)^2 + 4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+^2}}{4(\nu + 1)(\nu + 2)K_+}$$

В отличие от однокомпонентного случая (см. (13.20)), выражение (13.27) не позволяет однозначно найти ν как функцию безразмерного параметра

$$\lambda = \frac{\Phi_0 \alpha_0}{2\pi/K_1 H} \frac{T_c - T}{T_c}$$

Будучи квадратным по ν , это уравнение при заданном λ может иметь два корня:

$$\nu_{1,2}(\lambda) = -\frac{3}{2} + \frac{\lambda K_0 K_1 \pm \sqrt{D}}{2(K_0^2 - K_+^2)} \quad (13.28)$$

где

$$D = 4K_0^4 + K_+^4 - 5K_0^2 K_+^2 - K_- (K_0^2 - K_+^2) (4K_0 - K_-) + \lambda^2 K_+^2 K_1^2$$

Соответствующие значения $q_{1,2}$ есть

$$q_{1,2}(\lambda) = \frac{K + (K_0^2 - K_+^2)}{(2K_0 - K_-)(K_0^2 - K_+^2) + \lambda K_1 K_+^2 \pm \sqrt{DK_0}} \quad (13.29)$$

Ниже мы будем считать, что дискриминант положителен, а $\nu_{1,2}$ и $q_{1,2}$ вещественны².

Собственное значение уравнений (13.26) оказывается двукратно вырожденным, поэтому их общее решение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} f_+(x) \\ f_-(x) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} q_1 F_{\nu_1+2}(x) \\ F_{\nu_1}(x) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_2 F_{\nu_2+2}(x) \\ F_{\nu_2}(x) \end{pmatrix} \quad (13.30)$$

где s - свободный параметр, который без потери общности мы выбираем вещественным.

Подстановка в граничные условия (13.25) даст нам систему двух трансцендентных уравнений для определения $\lambda(r, s)$ (ср. с (13.21)). Исклучая из них s , получаем одно уравнение на $\lambda(r)$:

$$\frac{A_1(\lambda, r)}{B_1(\lambda, r)} = \frac{A_2(\lambda, r)}{B_2(\lambda, r)} \quad (13.31)$$

где

$$\begin{aligned} A_i(\lambda, r) &= r H_{\nu_1}(-r) + 2\nu_i H_{\nu_1-1}(-r) - \\ &- r q_i H_{\nu_1+2}(-r) - 2q_i (\nu_i + 2) H_{\nu_1+1}(-r) \\ B_i(\lambda, r) &= H_{\nu_1}(-r) + q_i H_{\nu_1+2}(-r) \end{aligned}$$

Здесь $\nu_{1,2}$ и $q_{1,2}$ являются функциями λ (см. (13.28) и (13.29)). Минимизация решения по r в принципе решает поставленную задачу, то есть позволяет найти температурную зависимость критического поля поверхностной сверхпроводимости $H_{c3}(T)$.

Важным свойством (13.31) является то, что это уравнение не содержит явно зависимости от H , и, следовательно, зависимость $H_{c3}(T)$, отвечающая λ_{\min} - минимальному по r решению - линейна, однако аналитически найти коэффициент не представляется возможным. Численный расчет для $K_1 = K_2 = K_3$ дает следующий результат: $\lambda_{\min} \approx 0,89$, $r \approx 0,55$, то есть

$$H_{c3}(T) \approx 1,24I_{c2}(T) \quad (13.32)$$

Здесь для верхнего критического поля в объеме использовано выражение (12.39).

Отметим, что в предположении цилиндрической симметрии фермиповерхности поверхностное критическое поле одинаково для любых ориентаций поверхности, параллельных гексагональной оси. Полученный результат справедлив и для сверхпроводящих фаз с p -спариванием. В общем случае, так же, как и для однокомпонентных сверхпроводящих состояний, поверхностная сверхпроводимость исчезает при отклонении нормали к поверхности от кристаллографических направлений на весьма малые углы.

Упражнение. Пересчитать поверхностные инварианты $f(\mathbf{n})$ для всех однокомпонентных сверхпроводящих состояний в гексагональном и кубическом кристаллах.

10.2.15 14. Мейсснеровское и смешанное состояние в необычных сверхпроводниках

Большая часть анизотропных сверхпроводников (высокотемпературные и органические сверхпроводники, сверхпроводящие соединения с тяжелыми фермионами) относится к ярко выраженным сверхпроводникам второго рода. Электродинамика таких сверхпроводников является лондоновской, то есть между плотностью тока и вектор-потенциалом имеется локальная связь во всем температурном интервале вплоть до $T = 0$. В настоящем параграфе мы изучим ряд свойств необычных сверхпроводников, которые можно рассмотреть в рамках лондоновской электродинамики. Помимо обычных проявлений анизотропии здесь, как и в термодинамике, имеются специфические эффекты, связанные с наличием гулей в спектре элементарных возбуждений.

Эффект Мейсснера. Сравнение уравнения

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{A}} = 0$$

(см. 12) с уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi j}{c} \quad (14.1)$$

позволяет найти выражение для плотности тока j . Так, для однокомпонентного сверхпроводящего состояния, где плотность свободной энергии имеет вид (12.2), плотность тока определяется выражением

$$j_i = -2e\Re_{ij} [\eta^* (D_j \eta) + \eta (D_j \eta)^*] \quad (14.2)$$

Для двухкомпонентного сверхпроводящего состояния в гексагональном кристалле (представление E_1) из (12.15) имеем:

² Отказ от этого требования не вносит никаких принципиальных затруднений, поскольку функции Эрмита допускают аналитическое продолжение на комплексные значения индекса. Заметим, что если $K_1 = K_2 = K_3$ (теория стабильной связи, см. ниже 18), то $D > 0$.

$$j_i = -\frac{2e}{\hbar} \left\{ K_1 \eta_j^* D_i \eta_j + K_2 \eta_i^* D_j \eta_j + K_3 \eta_j^* D_j \eta_i + \text{к.с.} \right\}, \quad i = x, y \quad (14.3)$$

$$j_z = -\frac{2e}{\hbar} K_4 (\eta_i^* D_z \eta_i + \text{к.с.}) \quad (14.4)$$

Подставляя в (14.2) параметр порядка $\eta(\mathbf{r}) = |\eta(\mathbf{r})| e^{i\varphi(\mathbf{r})} = \Delta(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})}$, получаем:

$$j_i = -en_{ij}^s w_j \quad (14.5)$$

где введены скорость конденсата купровских пар (сверхтекущая скорость):

$$\mathbf{w} = \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \varphi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \quad (14.6)$$

) m - масса электрона), и тензор плотности сверхпроводящих электронов (сверхтекущей плотности):

$$n_{ij}^s = \frac{8m}{\hbar^2} \Delta^2 K_{ij} \quad (14.7)$$

Для двухкомпонентной сверхпроводимости с «вещественным» параметром порядка вида (11.7):

$$\boldsymbol{\eta} \sim (\cos \lambda_n, \sin \lambda_n) e^{i\varphi(r)}$$

характеризуем общей фазой φ обеих компонент, плотность тока также можно записать в виде (14.5), причем тензор сверхтекущей плотности n_{ij}^s здесь выражается через коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4 . В магнитных сверхпроводниках с комплексным параметром порядка (11.9) ситуация несколько сложнее, и мы рассмотрим ее в следующем параграфе.

Итак, в немагнитных сверхпроводниках с произвольным числом компонент параметра порядка связь тока с градиентом фазы и вектором-потенциалом в слабых полях имеет вид (14.5). Следует также подчеркнуть, что в немагнитных сверхпроводниках второго рода линейная связь (14.5) имеет место при любых температурах. Температурная зависимость тензора $n_{ij}^s(T)$ будет найдена ниже.

Плотность тока, также, как и плотность свободной энергии, инвариантна относительно калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \\ \varphi &\rightarrow \varphi - \frac{2e}{\hbar c} \chi \end{aligned} \quad (14.8)$$

что позволяет записать (14.5) в виде

$$j_i = -\frac{e^2}{mc} n_{ij}^s A_j \quad (14.9)$$

После подстановки (14.9) в (14.1) получаем уравнение для вектора \mathbf{B} (уравнение Лондонов):

$$\frac{mc^2}{4\pi e^2} \operatorname{rot} ((\leftrightarrow^s)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B}) + \mathbf{B} = 0 \quad (14.10)$$

Для любых сверхпроводящих состояний в одноосных кристаллах (гексагональном и тетрагональном), а также в случае многокомпонентных сверхпроводящих состояний в

кубических кристаллах, тензор n_{ij}^s имеет одноосную анизотропию и его можно записать в виде

$$n_{ij}^s = n_0 \delta_{ij} + n' \nu_i \nu_j \quad (14.11)$$

где ν - ось анизотропии. Подставляя (14.11) в уравнение (14.10), получаем:

$$\delta_0^2 [\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \lambda \operatorname{rot}(\nu (\nu \operatorname{rot} \mathbf{B}))] + \mathbf{B} = 0 \quad (14.12)$$

Де

$$\delta_0 = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (14.13)$$

а $\lambda = -n'/ (n_0 + n')$.

Пусть ось анизотропии $\nu = \hat{z}$ и внешнее поле $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)$ лежат в плоскости поверхности сверхпроводника, занимающего полупространство $x > 0$. Легко убедиться, что решение уравнения (14.12) имеет вид

$$B_y = H_y \exp \left(-\frac{x}{\delta_0 \sqrt{1 + \lambda}} \right) \quad (14.14)$$

$$B_z = H_z \exp \left(-\frac{x}{\delta_0} \right) \quad (14.15)$$

то есть магнитное поле затухает вглубь образца (эффект Мейсснера), при этом поворачиваясь, вследствие анизотропии, вокруг направления \hat{x} [45]. Глубина проникновения поля $\delta(T)$, различная вдоль разных направлений, называется лондоновской глубиной проникновения и определяется тензором плотности сверхпроводящих электронов $n_{ij}^s(T)$. Ее типичные значения при $T = 0$ порядка $10^{-5} - 10^{-6}$ см.

Плотность сверхпроводящих электронов. Температурную зависимость тензора n_{ij}^s можно найти из следующих соображений. Легко проверить, что формула (5.29) для энергии элементарных возбуждений сверхпроводника при учете различия направлений \mathbf{k} и $-\mathbf{k}$ принимает вид

$$E_k = \frac{\xi_k - \xi_{-k}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi_k + \xi_{-k}}{2} \right)^2 + \Delta_k^2} \quad (14.16)$$

В магнитном поле, достаточно медленно меняющемся в пространстве ¹, импульсы элементарных возбуждений приобретают одинаковую добавку $m\mathbf{w}$ за счет ненулевой скорости движения сверхтекущей компоненты. С помощью (14.16) получаем:

$$E_{\mathbf{k}} \rightarrow E_{\mathbf{k}+m\mathbf{w}} \approx E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w} \quad (14.17)$$

где $\mathbf{v}_F(\mathbf{k}) = \partial \xi_k / \partial \mathbf{k}$. Плотность потока возбуждений есть

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) f(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w}) \quad (14.18)$$

где $f(E)$ - фермиевская функция распределения. Введем тензор плотности возбуждений, как величину, определяющую отклик \mathbf{P} на изменение скорости \mathbf{w} :

$$\delta P_i = -n_{ij}^s \delta w_j \quad (14.19)$$

Из (14.18) получаем:

$$n_{ij}^n = -m \sum_{\mathbf{k}\alpha} v_{F,i}(\mathbf{k})v_{F,j}(\mathbf{k}) \frac{\partial f(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w})}{\partial E} \quad (14.20)$$

Разность тензоров n_{ij}^n в нормальном (то есть при $\Delta = 0$) и сверхпроводящем состояниях дает величину тензора плотности сверхпроводящих электронов

$$n_{ij}^s = n_{ij}^n(\Delta = 0) - n_{ij}^n \quad (14.21)$$

Опуская зависимость n_{ij}^n от магнитного поля (мы вернемся к этому вопросу ниже), получаем

$$n_{ij}^s(T) = 2m \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(\mathbf{k})v_{F,j}(\mathbf{k})}{|\mathbf{v}_F(\mathbf{k})|} [1 - Y(\hat{\mathbf{k}}, T)] \quad (14.22)$$

где $Y(\hat{\mathbf{k}}, T)$ - функция Иосида (9.4), а интегрирование происходит по ферми-поверхности. Формула (14.22) определяет тензор n_{ij}^s для фермиповерхности произвольной формы и произвольного типа спаривания. В области Гинзбурга-Ландау аналогичное выражение для обычной анизотропной сверхпроводимости впервые получено в работе [46]. При $T = 0$

$$n_{ij}^s(0) = 2m \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(\mathbf{k})v_{F,j}(\mathbf{k})}{|\mathbf{v}_F(\mathbf{k})|} \quad (14.23)$$

При наличии нумей в спектре элементарных возбуждений изменение компонент тензора плотности сверхпроводящих электронов (или лондоновской глубины проникновения) с температурой при $T \rightarrow 0$ происходит по степенным законам, аналогично поведению теплоемкости, парамагнитной восприимчивости и т.д. Так, для A -фазы, где $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$, вычисления, подобные приведенным в 7, дают [47]:

$$[n_{zz}^s(0) - n_{zz}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (14.24)$$

$$[n_{xx}^s(0) - n_{xx}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (14.25)$$

где n - полная плотность частиц. Аналогично, для полярной фазы ($\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$):

$$[n_{zz}^s(0) - n_{zz}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (14.26)$$

$$[n_{xx}^s(0) - n_{xx}^s(T)]|_{T \rightarrow 0} \sim n \frac{T}{T_c} \quad (14.27)$$

Несложно установить законы низкотемпературного поведения и для фаз с другим расположением нулей.

Вблизи критической температуры

$$n_{ij}^s(T \rightarrow T_c) = \frac{7\zeta(3)m}{2\pi^2} \left(\frac{\Delta(T)}{T_c} \right)^2 \int \frac{dS_F}{(2\pi\hbar)^3} \frac{v_{F,i}(\mathbf{k})v_{F,j}(\mathbf{k})}{|\mathbf{v}_F(\mathbf{k})|} |g(\mathbf{k})|^2 \quad (14.28)$$

Это выражение соответствует случаю синглетного спаривания, для триплетного спаривания надо произвести очевидную замену $|g(\mathbf{k})|^2 \rightarrow |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2$. Функция $\Delta(T)$ задана формулой

¹ Более точно, в лондоновском пределе, когда глубина проникновения превышает длину когерентности, что всегда имеет место в сверхпроводниках второго рода.

(6.18). Для полностью изотропного сверхпроводящего состояния из (14.23) и (14.28) получается известное соотношение [48]

$$n^s(T \rightarrow T_c) = 2n^s(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \quad (14.29)$$

Обратим внимание на то, что согласно (14.7) матрица коэффициентов K_{ij} , определяющая пространственные масштабы изменения параметра порядка (уравнение (12.6)) и поля (уравнение (14.10)) не зависит от массы электрона m , но зависит (через $\mathbf{v}_F(\mathbf{k})$) от той эффективной массы, которую электрон приобретает в кристалле.

Заметим также, что мы здесь не принимали во внимание перенормировку массы за счет ферми-жидкостного взаимодействия электрона с молекулярным полем, создаваемым током остальных электронов. Это можно сделать включая в скорость \mathbf{w} молекулярное поле:

$$w_i \rightarrow w_i - m F_{1,ij} P_j$$

и разрешая уравнения (14.18), (14.19) относительно $\delta\mathbf{P}$. Здесь $F_{1,ij}$ – тензор плотности ферми-жидкостного взаимодействия в кристалле, являющийся обобщением величины $F_1 / (N_0 k_F^2)$ в изотропной ферми-жидкости. Учет ферми-жидкостных эффектов, вообще говоря, изменяет температурную зависимость n_{ij}^s даже в изотропном случае [49, 50]. Мы не будем в дальнейшем принимать во внимание ферми-жидкостные эффекты, предполагая, что основная перенормировка массы электрона происходит за счет его взаимодействия с кристаллической решеткой.

Нелинейный эффект Мейсснера [51]. Кроме степенного убывания лондоновской глубины проникновения $\delta(T)$ при $T \rightarrow 0$, наличие нулей в спектре возбуждений приводит к специальному для каждой сверхпроводящей фазы и геометрии задачи увеличению $\delta(0)$ с ростом магнитного поля. Для рассмотрения этого эффекта вернемся к формуле (14.20). При $T = 0$ входящая в эту формулу производная фермисвской функции распределения обращается в нуль для всех ненулевых значений своего аргумента:

$$n_{ij}^n(0) = m \sum_{\mathbf{k}a} v_{F,i}(\mathbf{k}) v_{F,j}(\mathbf{k}) \delta(E_{\mathbf{k}} + m\mathbf{v}_F(\mathbf{k})\mathbf{w}) \quad (14.30)$$

Отсюда видно, что при $T = 0$ в сверхпроводниках с конечной величиной щели на всей ферми-поверхности тензор нормальной плотности равен нулю для скоростей \mathbf{w} , не превышающих критическую скорость $w_c \approx \Delta/mv_F$.

Если щель обращается в нуль на некотором множестве точек на фермиповерхности, то конечная плотность возбуждений сохраняется и при $T = 0$. Для сверхпроводника со сферической ферми-поверхностью можно переписать (14.30) следующим образом:

$$\begin{aligned} n_{ij}^n &= 3n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \int \frac{dE E}{\sqrt{E^2 - \Delta_k^2}} \delta(E + \mathbf{k}\mathbf{w}) = \\ &= 3n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \frac{|\mathbf{k}\mathbf{w}|}{\sqrt{(\mathbf{k}\mathbf{w})^2 - \Delta_k^2}} \end{aligned} \quad (14.31)$$

где n – полная плотность электронов, а интегрирование по углам производится в пределах, задаваемых условием $(\mathbf{k}\mathbf{w})^2 > \Delta_k^2$.

Пусть щель обращается в нули на экваторе ферми-сферы, как это имеет место в полярной фазе ($\Delta_k^2 = \Delta \cos^2 \theta$), а сверхтекущая скорость $\mathbf{w} = [e/(mc)]\mathbf{A}$ направлена вдоль оси y (сверхпроводник занимает полупространство $z > 0$, внешнее поле направлено вдоль оси x , в выбранной калибровке фаза конденсата постоянна). Тогда из (14.31) мы получаем, что при $T = 0$ имеется ненулевая плотность нормальной компоненты:

$$n_{yy}^n \approx \frac{3nk_F |w_y|}{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin^2 \varphi |\sin \varphi| = n \frac{4ek_F}{\pi mc\Delta} |A_y| \quad (14.32)$$

Следовательно,

$$n_{yy}^s = n \left(1 - \frac{4ck_F}{\pi mc\Delta} |A_y| \right) \quad (14.33)$$

Уравнение Максвелла (14.1), с учетом выражений для тока (14.9) и плотности сверхтекущей компоненты (14.33), принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\delta^2} A_y \quad (14.34)$$

где

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{mc^2}{4\pi nc^2} \left(1 - \frac{4ek_F}{\pi mc\Delta} |A_y| \right) \quad (14.35)$$

Таким образом, благодаря тому, что щель в спектре возбуждений обращается в нуль на экваторе ферми-сферы, в выражении для лондоповской глубины проникновения появляется неаналитическое, линейно зависящее от модуля поля слагаемое³. Его удобно записать, выражая Δ через термодинамическое критическое поле H_c :

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{N_0}{2} \Delta^2 \quad (14.36)$$

при котором работа по выталкиванию магнитного поля из сверхпроводника равняется выигрышу энергии (5.37) (или (5.38)) при переходе в сверхпроводящее состояние. Оценивая входящий в (14.35) вектор-потенциал как $|A_y| \sim H\delta_0$, где δ_0 дается формулой (14.13), получаем:

$$\delta(H) = \delta_0 \left(1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{H}{H_c} \right) \quad (14.37)$$

Смешанное состояние. Так же, как и в обычных сверхпроводниках второго рода, в полях, превышающих величину

$$H_{c1}(T) \sim \frac{\Phi_0}{4\pi\delta^2(T)} \ln \frac{\delta(T)}{\xi(T)} \quad (14.38)$$

мейсснеровское (идеально диамагнитное) состояние в необычных сверхпроводниках переходит в смешанное состояние, в котором в толще сверхпроводника начинают проникать абрикосовские вихри.

В отличие от изотропного случая, в анизотропных сверхпроводниках направление и расположение вихрей зависят от величины и направления внешнего поля по отношению к кристаллическим осям. Величина нижнего критического поля H_{c1} также зависит от направления внешнего поля, а симметрия вихревых решеток может отличаться от правильной треугольной. Теория смешанного состояния для необычных сверхпроводников в основном совпадает с соответствующей теорией для обычных анизотропных сверхпроводников, охватывающей большое разнообразие различных частных вопросов (распределения полей,

² На появление при $T = 0$ плотности нормальной компоненты, неаналитически зависящей от поля, в сверхтекущих фазах с нулями в щели в спектре возбуждений впервые указано в работе [58].

³ В обычных сверхпроводниках добавка к элубине проникновения квадратична по помю.

утловые зависимости и пр.). Мы не будем останавливаться на этой части теории (см. [45, 52-54]).

Среди явлений, специфических для смешанного состояния в необычных сверхпроводниках, следует прежде всего указать на фазовые переходы, связанные с изменением симметрии многокомпонентных сверхпроводящих состояний [43]. Пример такого перехода обсуждался в 12. Другой характерной чертой многокомпонентной сверхпроводимости является возможность существования сверхпроводящих состояний со спонтанным магнетизмом [9]. Свойства таких сверхпроводников мы изучим в следующем параграфе. Наконец, еще один эффект, специфический для сверхпроводников с нетривиальным спариванием - это появление необычной зависимости теплоемкости от магнитного поля в смешанном состоянии [55]. Посмотрим сначала, как обстоит дело в обычных сверхпроводниках.

Как известно, параметр порядка сверхпроводника обращается в нуль на оси вихревой нити и восстанавливает свое равновесное постоянное значение на расстояниях $\rho \sim \xi(T)$ от оси вихря. Такая «яма» в потенциале $\Delta(\rho)$ приводит к образованию локализованных на ядре вихря связанных состояний квазичастиц. Наиизншую энергию связанных состояний можно оценить с помощью соотношения неопределенностей как

$$E_0 \approx \frac{\hbar^2}{2m\xi^2(T)} \approx \frac{\Delta^2}{\varepsilon_F} \quad (14.39)$$

Поскольку эта энергия в Δ/ε_F раз меньше наизнешней энергии возбуждений вдали от ядра вихря, то спектр возбуждений, локализованных в ядре, можно считать бесщелевым, практически совпадающим со спектром возбуждений в нормальном металле. Таким образом, занимаемая ядрами вихрей часть объема сверхпроводника второго рода в смешанном состоянии обладает той же плотностью состояний⁴, что и нормальный металл. Следовательно, дополнительный вклад в плотность состояний пропорционален доле площади, занимаемой ядрами вихрей в плоскости, им перпендикулярной:

$$N_{\text{loc}} \approx N_0 \frac{S_{\text{cores}}}{S} = N_0 \pi \xi^2 n_\nu \quad (14.40)$$

Здесь N_0 - плотность состояний в нормальном металле, $n_\nu = B/\Phi_0$ - число вихрей на единицу площади, B - магнитная индукция (среднее значение микроскопического магнитного поля в образце).

В сильно выраженных сверхпроводниках второго рода, в которых выполняется условие $\delta(T)/\xi(T) \gg 1$, индукция B мало отличается от внешнего поля H практически во всем интервале полей $H_{c1} < H < H_{c2}$ (но не в непосредственной окрестности H_{c1}). Учитывая это обстоятельство, а также

⁴ Длотность состояний определяется следующим образом:

$$N(E) = \sum_{k\alpha} \delta(E - E_k)$$

вспоминая, что переход в нормальное состояние происходит в поле

$$H_{c2} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2(T)} \quad (14.41)$$

когда расстояние между ядрами вихрей становится порядка ξ , получаем:

$$N_{\text{loc}} \approx N_0 \frac{II}{H_{c2}} \quad (14.42)$$

В результате, при низких температурах ($T \ll T_c$), теплоемкость сверхпроводника в смешанном состоянии будет определяться в основном вкладом возбуждений, локализованных в ядрах вихрей:

$$C_s \approx \frac{H}{H_{c2}} C_n \quad (14.43)$$

где C_n - теплоемкость нормального металла, линейно зависящая от температуры.

В сверхпроводниках с нетривиальным спариванием результат (14.43), разумеется, сохраняет силу. Однако, если щель в спектре возбуждений обращается в нуль где-либо на ферми-поверхности, то возможно появление дополнительных вкладов в теплоемкость, связанных с плотностью состояний в окрестности нулей. В пространстве между ядрами вихрей текут незатухающие сверхтекущие токи $\mathbf{j} = -en_s \mathbf{w}$, что приводит к сдвигу энергии элементарных возбуждений (14.17). В области полей $H_{c1} < H \ll H_{c2}$ расстояние между вихрями $a \sim n_V^{-1/2} \sim (\Phi_0/H)^{1/2}$ ограничено интервалом $\xi \ll a < \delta$, и распределение сверхтекущей скорости

$$\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{j}}{en_3} = -\frac{c}{4\pi en_3} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

определяется вкладом ближайшего вихря:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\approx \hat{z} \frac{\Phi_0}{2\pi\delta^2} \ln \frac{\delta}{\rho} \\ \mathbf{w} &= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \end{aligned} \quad (14.44)$$

Здесь ρ обозначает расстояние до оси вихря, а $\hat{\varphi}$ - единичный вектор азимутального направления. Вновь, ограничиваясь для простоты случаем сферической ферми-поверхности, получаем вклад в плотность состояний за счет окрестностей нулей щели в спектре элементарных возбуждений:

$$N_{\text{deloc}} = n_v \int dS \sum_{\mathbf{k}\alpha} \delta(E_{\mathbf{k}} + \mathbf{kw}) \quad (14.45)$$

Интегрирование ведется здесь по площади элементарной ячейки решетки Абрикосова. Имеем (ср. с выводом формулы (14.31)):

$$\sum_{k\alpha} \delta(E_{\mathbf{k}} + \mathbf{kw}) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{|\mathbf{kw}|}{\sqrt{(\mathbf{kw})^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \quad (14.46)$$

причем интегрирование происходит по области $(\mathbf{kw})^2 > \Delta_{\mathbf{k}}^2$. Дальнейшие вычисления необходимо производить уже для конкретного вида сверхпроводящего состояния.

Рассмотрим в качестве примера полярную фазу с p -спариванием, где $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$. Главный вклад в плотность состояний возникает от окрестности экватора ферми-поверхности. Выполняя в (14.46) интегрирование по углам, получаем:

$$N_0 \frac{k_F |\mathbf{w}|}{\pi \Delta} \int_0^{2\pi} d\varphi |\cos \varphi| = N_0 \frac{4k_F |w|}{\pi \Delta}$$

Подставляя это выражение в (14.45), получаем (с учетом (14.44)):

$$N_{\text{deloc}} \approx n_v N_0 \frac{1 \hbar v_F}{\Delta} a \sim N_0 \sqrt{\frac{I}{H_{c2}}} \quad (14.47)$$

Полученный результат показывает, что в смешанном состоянии при $H \ll H_{c2}$ главный вклад в электронную плотность состояний сверхпроводника, имеющего нули параметра

порядка па линиях на ферми-поверхности, вносят не ядра вихрей, а пространство между ними, где текут сверхпроводящие токи:

$$\frac{N_{\text{deloc}}}{N_{\text{loc}}} \sim \sqrt{\frac{H_{\text{cc}}}{H}} \gg 1 \quad (14.48)$$

Теплоемкость такого сверхпроводника в смешанном состоянии при достаточно низких температурах должна иметь вид ⁵

$$\frac{C_s}{C_n} = b \sqrt{\frac{H}{H_{c2}}} \quad (14.49)$$

где b - численный коэффициент. Подобная зависимость наблюдалась экспериментально в высокотемпературных ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-6}$ [16, 56]) и в тяжелофермионных (UPt_3 [57]) сверхпроводниках.

Упражнение. Показать, что для сверхпроводника с нулями щели в изолированных точках на ферми-поверхности имеет место следующее поведение теплоемкости в смешанном состоянии при низких температурах:

$$\frac{C_s}{C_n} = b \frac{H}{H_{c2}} \ln \frac{H_{c2}}{H} \quad (14.50)$$

10.2.16 15. Магнитные сверхпроводники

Сверхпроводящие состояния с многокомпонентным параметром порядка могут обладать спонтанным магнитным моментом. Так, орбитальный момент куперовской пары в состояниях, преобразующихся согласно представлению E_1 группы D_6 , с параметрами порядка:

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_z (\hat{k}_x + i\hat{k}_y), \text{ при } S = 0 \quad (15.1)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto \hat{z} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y), \text{ при } S = 1 \quad (15.2)$$

равен . Имеются также состояния, обладающие спонтанным спиновым моментом пары, например:

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_z (\hat{x} + i\hat{y}), \text{ при } S = 1 \quad (15.3)$$

С симметрийной точки зрения все такие состояния соответствуют магнитным сверхпроводящим классам (\$§4, 11).

Магнитный момент \mathcal{M} сверхпроводящего магнетика складывается из магнитных моментов всех куперовских пар и для образца объемом V , в большей части которого они ориентированы вдоль общего направления $\hat{\mu}$, дается выражением

$$\mathcal{M} = \mathbf{MV}, \quad \mathbf{M} \sim \frac{\hbar\gamma n_s}{2} \hat{\mu} \quad (15.4)$$

Здесь n_s есть плотность сверхпроводящих электронов, а $\gamma = e/(2mc)$ – гиромагнитное отношение. Легко проверить, что магнитный момент магнитного сверхпроводника с точностью до численного множителя совпадает с магнитным моментом обычного сверхпроводника такого же объема, в котором находится один абрикосовский вихрь.

Магнитный момент (15.4) сверхпроводника создается незатухающими токами, текущими по его поверхности. В то же время магнитный момент единицы объема в толще сверхпроводника ничтожно мал. Дело в том, что спиновый момент пар компенсируется моментом неспаренных

⁵ См. также Н. Б. Копнин, Г. Е. Воловик //Письма в ЖЭТФ, 64, 641 (1996).

частиц. С другой стороны, куперовские пары сильно перекрываются между собой, поскольку размер пары ξ_0 велик по сравнению с межатомным расстоянием. По этой причине локальные токи, создающие орбитальный момент, практически полностью компенсируют друг друга в объеме сверхпроводника. Однако, на поверхности образца такая компенсация отсутствует, и поверхностные токи порождают магнитный момент [58, 59].

Локальный магнетизм. Рассмотрим ситуацию количественно на примере двухкомпонентного векторного параметра порядка в гексагональном кристалле. Для вычисления плотности внутреннего спонтанного момента вблизи критической температуры мы должны явно выделить в функционале свободной энергии Тинзурга-Ландау (12.15) слагаемые, пропорциональные магнитному полю. Для этой цели перепишем градиентные члены в (12.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{grad}} = & \int d^3r \left\{ K_1 (D_i \eta_j)^* (D_i \eta_j) + K_4 (D_z \eta_i)^* (D_z \eta_i) + \right. \\ & \frac{K_2 + K_3}{2} [(D_i \eta_i)^* (D_j \eta_j) + (D_i \eta_j)^* (D_j \eta_i)] + \\ & \left. + \frac{K_2 - K_3}{2} [(D_i \eta_i)^* (D_j \eta_j) - (D_i \eta_j)^* (D_j \eta_i)] \right\} \end{aligned} \quad (15.5)$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части и используя тождество

$$[D_i, D_j] \equiv D_i D_j - D_j D_i = -\frac{2\pi i}{\Phi_0} e_{ijk} (\text{rot } \mathbf{A})_k$$

находим, что вклад в плотность свободной энергии, пропорциональный магнитному полю, имеет вид

$$F_{MH} = -\frac{\pi i}{\Phi_0} (K_2 - K_3) (\eta^* \times \eta) \text{rot } \mathbf{A} \quad (15.6)$$

Отсюда получаем выражение для плотности внутреннего спонтанного момента:

$$M_i = \frac{\pi i}{\Phi_0} (K_2 - K_3) (\eta^* \times \eta) \quad (15.7)$$

Как мы знаем (см. 11), минимуму свободной энергии (11.6) при $\beta_2 > 0$ отвечает комплексная сверхпроводящая фаза $\eta = \eta_0(1, \pm i)e^{i\varphi}$. Согласно (15.7), эта фаза обладает ненулевым собственным магнитным моментом в однородном состоянии. Величина этого момента определяется значением разности $K_2 - K_3$ и оказывается ничтожно малой. Микроскопически якли (см. 18) показывают, что в теории БКШ лия векторного параметра порядка $K_1 = K_2 = K_3$, и спонтанный магнетизм отсутствует. Однако, при учете зависимости плотности состояния вблизи ферми-поверхности от энергии (электрон-дырочная асимметрия), разность $K_2 - K_3$, а вместе с ней и плотность внутреннего момента, становится отличной от нуля:

$$K_2 - K_3 \sim N_0 \xi_0^2 \left(\frac{T_c}{\varepsilon_F} \right)^2 \ln \frac{\varepsilon_1}{T_c}$$

Можно убедиться в том, что плотность внутреннего магнитного момента сверхпроводника весьма мала и при нулевой температуре. Проще всего это сделать для состояния (15.3). В этом состоянии спарены только электроны со спинами «вверх» (см. (2.7)). Используя преобразование Боголюбова (\$5), нетрудно проверить, что распределение таких электронов по энергиям имеет вид

$$n_\uparrow(\xi) = \langle a_{\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi}{E} (1 - 2f(E)) \right] \quad (15.8)$$

где $f(E)$ – фермиевская функция распределения, $E = \sqrt{\xi^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}$. При $T = 0$

$$n_{\uparrow}(\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{E} \right)$$

В то же время, электроны со спинами «вниз» не спарены, и их распределение по энергиям

$$n_{\downarrow}(\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{|\xi|} \right)$$

есть фермиевская «ступенька». Спиновый магнитный момент единицы объема такой жидкости дается выражением

$$M_i = \hat{z}\mu_B \int d\xi N(\xi) (n_{\uparrow}(\xi) - n_{\downarrow}(\xi)) \approx \hat{z}\mu_B N'_0 \Delta^2 \ln \frac{\varepsilon_1}{\Delta} \quad (15.9)$$

Здесь $N(\xi)$ – плотность электронных состояний, N'_0 – производная плотности состояний на ферми-поверхности, а ε_1 – параметр обрезания логарифмически расходящегося интеграла, соответствующий тому, что параметр порядка отличен от нуля в узком слое вблизи ферми-поверхности (см. 5). Таким образом, плотность спонтанного магнитного момента мала в меру малости $(T_c/\varepsilon_1)^2 \ln (\varepsilon_1/T_c)$ и отлична от нуля лишь при наличии асимметрии в распределении частиц и дырок вблизи ферми-поверхности [3, 60].

Малая плотность внутреннего спинового момента возникает в результате компенсации спиновых моментов куперовских пар, состоящих из частиц со спинами вдоль поля и неспаренных частиц с противоположной ориентацией спина. Такой компенсации может и не быть. Для этого надо иметь либо гигантское спаривающее взаимодействие для одного из двух направлений спина, либо создать практически полностью поляризованную ферми жидкость с очень сильно раздвинутыми ферми-поверхностями для частиц со спинами «вверх» и «вниз». Для сверхпроводников обе эти возможности в настоящем времени выглядят не очень реально. В нейтральный сверхтекучий ферми-жидкости (${}^3\text{He}$) создание сильно спин-поляризованной сверхтекучей фазы возможно.

Поверхностные токи и магнитный момент образца. Магнитные сверхпроводящие состояния в кристаллах, где существенны эффекты кристаллической анизотропии и сильного спин-орбитального взаимодействия, имеют один вид пепрерывного вырождения – вырождение по фазе φ параметра порядка, обеспечивающее возможность протекания бездисипативных токов. Токи, имеющие связанные с градиентами φ , могут протекать лишь в слоях толщиной порядка ξ вблизи границ образца или гранит магнитных доменов. Для их вычисления воспользуемся выражением (15.5) для градиентной части свободной энергии, подставив в него параметр порядка с явно выделенным фазовым множителем $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$. Опуская слагаемые с K_4 , с точностью до полных производных в попытке интегральном выражении имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{grad}} = & \int d^3r \left\{ K_1 \left[v^2 |\boldsymbol{\eta}|^2 + iv_i (\eta_k \nabla_i \eta_k^* - \eta_k^* \nabla_i \eta_k) + (\nabla_i \eta_j^*) (\nabla_i \eta_j) \right] + \right. \\ & + \frac{K_2 + K_3}{2} \left[2|\mathbf{v}\eta|^2 + i\mathbf{v} \text{rot} (\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) + |\nabla_i \eta_i|^2 + (\nabla_i \eta_j^*) (\nabla_j \eta_i) \right] - \\ & \left. - \frac{K_2 - K_3}{2} \frac{2\pi i}{\Phi_0} (\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) \text{rot} \mathbf{A} \right\} \end{aligned} \quad (15.10)$$

Здесь

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \varphi + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}$$

- калибровочно-инвариантный градиент фазы (ср. с (14.6)). Соответствующее выражение для плотности тока выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\frac{\delta \mathcal{F}_{\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2e}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{F}_{\text{grad}}}{\delta \mathbf{v}} = \\ &= -\frac{2e}{\hbar} \left\{ K_1 [2\mathbf{v}|\boldsymbol{\eta}|^2 + i(\eta_i \nabla \eta_i^* - \eta_i^* \nabla \eta_i)] + \frac{K_2 + K_3}{2} [2(\boldsymbol{\eta}^*(\mathbf{v}\boldsymbol{\eta}) + (\mathbf{v}\boldsymbol{\eta}^*)\boldsymbol{\eta}) + i \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta})] + i \frac{K_2 - K_3}{2} \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta}^* \times \boldsymbol{\eta}) \right\} \end{aligned} \quad (15.11)$$

Неоднородности в распределении модуля или направления вектора $i(\eta^* \times \eta)$ на границе образца (на расстояниях порядка длины когерентности $\xi(T)$) или на границах магнитных доменов порождают незатухающие поверхностные токи, создающие полный магнитный момент:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int d^3r (r \times j) \quad (15.12)$$

Величина \mathcal{M} зависит, разумеется, от распределения компонент параметра порядка $\eta_i(\mathbf{r})$ вблизи границы образца.

Рассмотрим цилиндрический образец радиуса R с осью \hat{z} вдоль гексагональной кристаллической оси. Для простоты будем считать, что параметр порядка во всем объеме имеет вид $\eta = \eta_0(r)(1, i)$, где $\eta_0(r)$ в поверхностном слое толщиной ξ гладко спадает от объемного значения η_0 до нуля при $r = R$. В этом случае даже в отсутствие внешнего магнитного поля, то есть при $\mathbf{v} = 0$, выражение вд. плотности тока приобретает вид

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} = -\frac{4\epsilon}{\hbar} K_2 \frac{\partial \eta_0^2(r)}{\partial r} \hat{\phi}$$

где $\hat{\phi}$ - единичный вектор азимутального направления. Выполняя теперь интегрирование в (15.12), получаем оценку (15.4) для магнитного момента цилиндра объема V :

$$\mathcal{M} = \frac{8e}{\hbar c} K_2 \eta_0^2 V \hat{z} \approx 2\hbar \gamma n_s V \hat{z} \quad (15.13)$$

Здесь использовано, что $K_2 \sim \hbar^2 n_s / (m \eta_0^2)$ (см. (14.7)).

Заканчивая обсуждение вопроса о спонтанном моменте магнитных сверхпроводников, подчеркнем, что в выражении для плотности тока (15.11) последнее слагаемое, соответствующее плотности спонтанного внутреннего момента, и предпоследнее слагаемое, соответствующее поверхностному моменту, неотличимы по своей структуре. Поэтому формулы для плотности тока, полученные на основе микроскопической теории, приводили многих авторов к утверждению о существовании «большой» ($\sim \mu_B n_s$) плотности спонтанного внутреннего момента (см., например, [61]). Для правильной же интерпретации различных вкладов в ток необходимо производить микроскопическое вычисление градиентной энергии [62, 63].

Электродинамика магнитных сверхпроводников. При наличии внешнего поля \mathbf{H} , параллельного оси цилиндра, уравнение лондоновской электродинамики приобретает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi j}{c} = -\frac{A}{\delta^2} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (15.14)$$

где δ - лондоновская глубина проникновения. Поскольку вклад в ток, обусловленный слагаемым с $\operatorname{rot} \mathbf{M}$, сосредоточен в поверхностном слое толщиной $\xi \ll \delta \ll R$, то магнитное поле, как обычно, затухает вглубь образца:

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}(R) \exp \left(-\frac{R - r}{\delta} \right) \quad (15.15)$$

Однако, за счет того, что по поверхности текут незатухающие токи, граничное условие для уравнений Лондонов приобретает вид:

$$\mathbf{B}(R) = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (15.16)$$

Таким образом, даже в отсутствие внешнего поля на поверхности сверхпроводника имеется магнитное поле, индуцированное магнетизмом пар:

$$\mathbf{B}_0 = 4\pi\mathbf{M} = 4\pi \frac{c\hbar}{2mc} n_s \hat{\mu} = 4\pi\mu_B n_s \hat{\mu} \quad (15.17)$$

которое подавляется в толще сверхпроводника, причем величина \mathbf{B}_0 оказывается порядка нижнего критического поля:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\delta^2} \ln \frac{\delta}{\xi} = 2\pi\mu_B n_s \ln \frac{\delta}{\xi} \quad (15.18)$$

Мы видим, что в магнитном сверхпроводнике достичь нижнего критического поля легче, прикладывая внешнее поле параллельно $\hat{\mu}$, чем антипараллельно ему. Более того, если поверхностное поле (15.17) в каком-то сверхпроводнике окажется больше H_{c1} , то это будет означать отсутствие майсснеровского состояния. Вихревые нити будут проникать вглубь такого сверхпроводника при сколь угодно малом внешнем поле.

Вблизи поверхности однодоменного магнитного сверхпроводника конечных размеров должно возникать поле порядка H_{c1} , убывающее с расстоянием от поверхности по тому же закону, что и поле магнитного шиполя.

Магнетизм в сверхпроводниках с p -спариванием. Несколько иная ситуация, по сравнению с рассмотренной выше, возникает в сверхпроводниках со слабым спин-орбитальным взаимодействием. В этом случае существенно не только вырождение по фазе, но и по пространственным ориентациям параметра порядка. Так, например, в заряженной сверхтекучей ферми-жидкости со структурой A -фазы гелия-3 (см. §§3, 11), параметр порядка имеет вид

$$A_{\alpha i} \sim V_\alpha (\Delta'_i + i\Delta''_i) \quad (15.19)$$

где $\mathbf{V}, \Delta', \Delta''$ - сдвоенные векторы, причем $\Delta' \perp \Delta''$, а $\Delta' \times \Delta'' = 1$ задает направление орбитального момента куперовских пар. Неоднородная часть свободной энергии Гинзбурга-Ландау в сверхпроводниках с p -спариванием в магнитном поле записывается как

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{grad}} = & \int d^3r [K_1 (D_i A_{\alpha j})^* (D_i A_{\alpha j}) + K_2 (D_i A_{\alpha i})^* (D_j A_{\alpha j}) + \\ & + K_3 (D_i A_{\alpha j})^* (D_j A_{\alpha i}) + K_4 \frac{2e}{\hbar c} ie_{\alpha\beta\gamma} B_\alpha A_{\beta i}^* A_{\gamma i} + \frac{B^2}{8\pi}] \end{aligned} \quad (15.20)$$

Состояния A -фазы вырождены по отношению к вращениям вектора \mathbf{V} и репера $(\Delta', \Delta'', 1)$. Поэтому во всем объеме бездиссипативные токи определяются не только калибровочно-инвариантной скоростью \mathbf{v} , но и пространственным изменением (текстурой) векторов, задающих параметр порядка (ср. с (15.11)). Выводы, сделанные выше о величине спонтанного магнетизма в таком сверхпроводнике, сохраняются, однако возможные типы вихрей и структура смешанного состояния оказываются существенно сложнее, нежели для многокомпонентных сверхпроводящих фаз в кристаллах, где ориентационное вырождение подавлено сильной анизотропией и спин-орбитальным взаимодействием.

Слагаемое в свободной энергии (15.20), содержащее K_4 , описывает взаимодействие спонтанного спинового магнитного момента сверхпроводящей фазы с внешним полем. Для унитарных фаз (определение унитарной фазы см. в сноске 6 к 5), в частности, для A - и

B -фаз, такое слагаемое отсутствует. Для неунитарных фаз спиновый момент отличен от нуля, что вызывает расщепление фазового перехода ${}^3\text{He}$ в сверхтекущее состояние на два. Сначала имеет место переход в A_1 -фазу, а затем - в A -фазу (см. рис. 2) [64]. Расщепление перехода, однако, оказывается малым, поскольку коэффициент K_4 отличен от нуля лишь в меру малости электрон-дырочной асимметрии (см. §18).

Сверхпроводники с p -спариванием и со структурой A - или A_1 -фазы в настоящий момент неизвестны. Отдельные вопросы теории таких сверхпроводящих состояний рассмотрены в работах [31, 65, 66].

10.2.17 16. Эффект Джозефсона

Обобщение феноменологической теории эффекта Джозефсона на случай контактов между двумя сверхпроводниками, обладающими различной симметрией, может быть построено в духе полюса, развитого в 13 при анализе поверхностных свойств. Проще всего рассмотреть это явление на примере плоского контакта между двумя сверхпроводниками, находящимися в различных сверхпроводящих состояниях с одинаковыми параметрами порядка

$$\eta_1 = |\eta_1| e^{i\varphi_1}, \quad \eta_2 = |\eta_2| e^{i\varphi_2} \quad (16.1)$$

Для одноосных (гексагональных и тетрагональных), а также кубических кристаллов свободная энергия системы дается выражением

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_J \quad (16.2)$$

также

$$\mathcal{F}_i = \int_{r_n > 0} d^3 r F_i \quad (i = 1, 2) \quad (16.3)$$

есть свободные энергии (12.2) сверхпроводников, занимающих левое и правое полупространства с плоской границей, проходящей через начало координат, \mathbf{n}_i - векторы внешней нормали к соответствующему полупространству ($\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$), а \mathcal{F}_3 есть поверхностная (джозефсоновская) энергия, феноменологически описывающая связь между сверхпроводниками из-за возможности туннелирования куперовских пар:

$$\mathcal{F}_J = A \oint dS g_1(\mathbf{n}_1) g_2(\mathbf{n}_2) (\eta_1^* \eta_2 + \eta_1 \eta_2^*) \quad (16.4)$$

Здесь интегрирование происходит по поверхности раздела. Вообще говоря, энергия джозефсоновского контакта представляется бесконечной суммой слагаемых вида (16.4):

$$\sum_{p,q} \oint dS g_1^p(\mathbf{n}_1) g_2^q(\mathbf{n}_2) (\eta_1^* \eta_2 + \eta_1 \eta_2^*)$$

где каждое произведение $g_1^p(\mathbf{n}_1) \eta_1$ и $g_2^q(\mathbf{n}_2) \eta_2$ не должно меняться при всех преобразованиях группы точечной симметрии соответствующего полупространства. Для дальнейшего, однако, достаточно рассмотреть лишь одно слагаемое в этой сумме.

Энергия \mathcal{F}_J инвариантна относительно всех преобразований группы симметрии как левого, так и правого кристаллов в нормальном состоянии. Для кристаллов с сильным спин-орбитальным взаимодействием всегда имеются -билинейные по η_1 и η_2 комбинации, обладающие указанной симметрией. Это означает, что в принципе нет никаких ограничений на существование джозефсоновской связи между двумя сверхпроводниками с одинаковыми параметрами порядка, в том числе - между сверхпроводниками с синглетным и триплетным спариванием. При этом, разумеется, возможны такие ориентации поверхности, при которых

какая-то из функций $g_i(\mathbf{n}_i)$, а вместе с ней и \mathcal{F}_J , обращаются в нуль. В этом случае необходимо принимать во внимание джозефсоновские энергии более высоких порядков по η_i .

Симметрия $g(\mathbf{n})$ совпадает с симметрией соответствующего сверхпроводящего класса. Для синглетных состояний это означает, что $g(\mathbf{n}) = 0$ для направлении нормали, при которых параметр порядка обращается в нуль на ферми-поверхности (см. 4), то есть при $S = 0$ функции $g(\mathbf{n})$ можно считать совпадающими с базисными функциями соответствующего представления. Для случая триплетного спаривания функции $g(\mathbf{n})$ найдены в работе [67].

Точно таким же образом, составляя инвариантные комбинации из векторов \mathbf{n}_i и компонент параметров порядка η_i в случае сильной спинорбитальной связи, можно получить джозефсоновские энергии \mathcal{F}_J для многокомпонентных сверхпроводящих состояний.

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия, в сверхпроводнике с триплетным спариванием нельзя построить скалярную линейную функцию из спинового вектора $\boldsymbol{\eta}$ параметра порядка и пространственного вектора нормали \mathbf{n} , поэтому джозефсоновская связь вида (16.4) невозможна. Однако в этом случае можно рассмотреть связи (джозефсоновские энергии) более высоких порядков по η [68]. То же самое справедливо для тех ориентаций поверхности, для которых выражение (16.4) обращается в нуль по симметрийным соображениям.

Варьируя градиентную часть (16.2) по A , находим выражения для плотности тока в правом и левом полупространствах:

$$\begin{aligned} j_1 &= -c \frac{\delta \mathcal{F}_{1,\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2\pi c}{\Phi_0} \operatorname{Re} \eta_1^* [K_{11}(D_x + D_y) + K_{12}D_z] \eta_1 \\ j_2 &= -c \frac{\delta \mathcal{F}_{2,\text{grad}}}{\delta \mathbf{A}} = -\frac{2\pi c}{\Phi_0} \operatorname{Re} \eta_2^* [K_{21}(D_x + D_y) + K_{22}D_z] \eta_2 \end{aligned} \quad (16.5)$$

Как и в 13, граничные условия для уравнений Гинзбурга-Ландау на поверхности контакта получатся варьированием полной энергии (16.2) по η_1^* и η_2^* :

$$\begin{aligned} i [K_{11}(n_{1,x}D_x + n_{1,y}D_y) + K_{12}n_{1,z}D_z] \eta_1|_S &= -Ag_1(\mathbf{n}_1) g_2(\mathbf{n}_2) \eta_2|_S \\ i [K_{21}(n_{2,x}D_x + n_{2,y}D_y) + K_{22}n_{2,z}D_z] \eta_2|_S &= -Ag_1(\mathbf{n}_1) g_2(\mathbf{n}_2) \eta_1|_S \end{aligned} \quad (16.6)$$

С помощью (16.5) и (16.6) находим плотность тока через джозефсоновский контакт:

$$\mathbf{j} = (j_1 + j_2) \mathbf{n}_1|_S = \frac{4\pi c A}{\Phi_0} g_1(\mathbf{n}_1) g_2(\mathbf{n}_2) |\eta_1| |\eta_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (16.7)$$

Согласно формуле (16.7), температурная зависимость максимального джозефсоновского тока определяется произведением модулей параметров порядка на границах контакта. Если правое и левое полупространства заняты сверхпроводниками с одинаковыми критическими температурами, и модуль параметра порядка принимает на границе объемное значение, то максимальный джозефсоновский ток пропорционален $T_c - T$. Однако, как мы знаем, в необычных сверхпроводниках величина параметра порядка на границе может быть сильно подавлена по сравнению с его объемным значением из-за проигрыша в поверхностной энергии, что имеет место при условии $f(\mathbf{n}) \neq 0$, где функция $f(\mathbf{n})$ описывает зависимость поверхностной энергии от ориентации нормали (см. 13). В этом случае справедлива следующая оценка

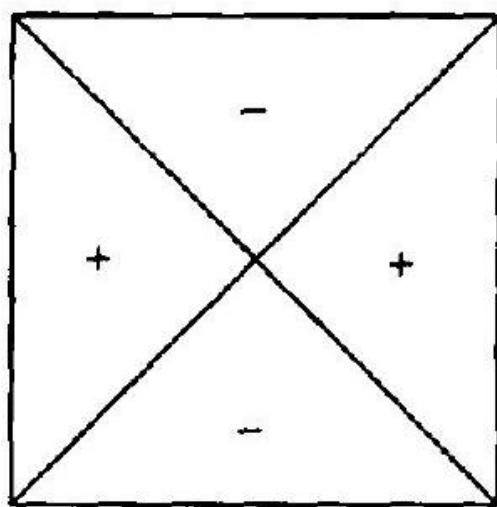
$$\eta|_S \sim \frac{b(n)}{\xi(T)} \eta_0(T) \quad (16.8)$$

где $b(n)$ - интерполяционная длина, определяемая формулой (13.7), $\xi(T) \sim \xi_0 (1 - T/T_c)^{-1/2}$ - корреляционная длина, $\eta_0(T) \propto (1 - T/T_c)^{1/2}$ - объемное значение модуля параметра

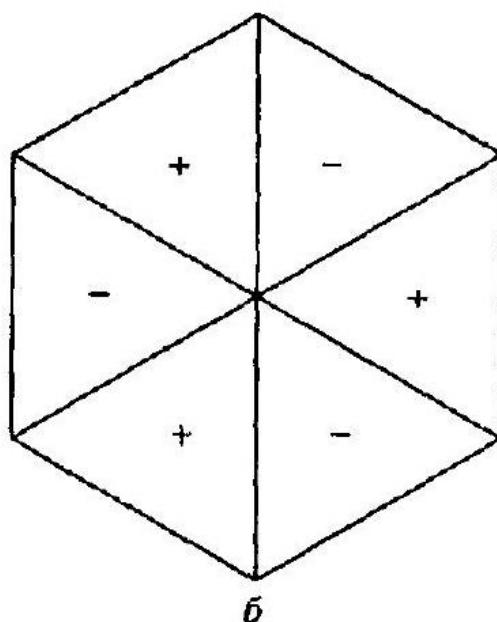
порядка. Подставляя (16.8) в (16.7), мы видим, что максимальный джозефсоновский ток пропорционален $(T_c - T)^2$, если параметры порядка обоих сверхпроводников подавлены на границах контакта и пропорциональны $(T_c - T)^{3/2}$, если подавление имеет место только на одной из границ.

Для обвтного сверхпроводящего состояния $g(\mathbf{n})$ преобразуется как базисная функция единичного представления A_1 , инвариантная относительно всех преобразований точечной группы кристалла. Традиционно считается, что $g_{A_1}(\mathbf{n})$ полностью изотропна, поэтому джозефсоновский ток не зависит от ориентации контакта по отношению к кристаллическим осям.

Напротив, для необычных сверхпроводящих состояний $g(\mathbf{n})$ зависит от направления \mathbf{n} . Так, для любого из одномерных неединичных представлений в тетрагональном кристалле $g(n)$ меняет знак при пересечении линии нудей. Например, $g_{B_1}(\mathbf{n}) \propto n_x^2 - n_y^2$ и меняет знак при изменении ориентации



а



б

Рис. 13. Знакочередование функции $g(\mathbf{n})$ для представлений B_{1g} па гравях: а) тетрагонального и б) гексагонального кристаллов

поверхности от одной боковой грани тетрагонального кристалла к другой (рис. 13а). То же самое происходит в гексагональном кристалле для сверхпроводящего состояния B_1 (рис. 130), поскольку $g_B \propto n_x^3 - 3n_x n_y^2$. Поэтому для контакта обычного сверхпроводника с различными боковыми гранями идеального тетрагонального или гексагонального кристалла в сверхпроводящем состоянии B_1 выражение для тока, используя формулу (16.7), можно записать в виде

$$I = I_0 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \pi n) \quad (16.9)$$

где n - номер боковой грани.

Этот результат позволил установить симметрию сверхпроводящего состояния иттриевых высокотемпературных сверхпроводников. Наиболее надежными выглядят измерения [69, 70] тока через двухконтактный SQUID, в двух джозефсоновских контактах которого провода из обычного сверхпроводника (свинец) подсоединенны к двум боковым граням сверхпроводящего тетрагонального кристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ (рис. 14). В предположении, что контакты 1 и 2 одинаковы, полный ток через SQUID дается выражением

$$I = I_0 (\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2) = 2I_0 \sin \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \cos \frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2} \quad (16.10)$$

Здесь $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ - скачки фаз на контактах 1 и 2. Их разность, то есть полное изменение фазы параметра порядка при обходе по замкнутому контуру

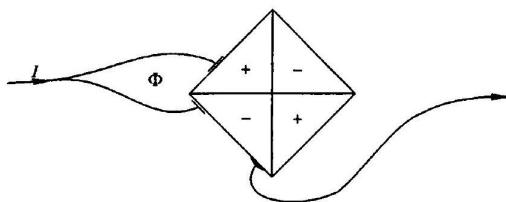


Рис. 14. Двухконтактный SQUID, подсоединенный к соседним граням тетрагонального кристалла с противоположными знаками параметра порядка

тому контуру SQUID'a, складывается из набега фазы в магнитном поле $(2e/\hbar c)\oint \mathbf{A} dr = (2\pi\Phi/\Phi_0)$ и «внутреннего» набега фазы δ_{12} между контактами 1 и 2:

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + \delta_{12} \quad (16.11)$$

Из формул (16.10) и (16.11) получаем выражение для максимального тока как функции внешнего поля:

$$I_{\max} = 2I_0 \cos \left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \frac{\delta_{12}}{2} \right) \quad (16.12)$$

В случае обычной сверхпроводимости в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}\delta_{12} = 0$, так что в отсутствие внешнего поля ток $I_{\max}(\Phi = 0) = 2I_0$ принимает наибольшее значение. На опыте [69, 70] оказалось, что $I_{\max}(\Phi = 0) = 0$, то есть $\delta_{12} = \pi$, как должно быть в случае необычной синглетной сверхпроводимости, соответствующей представлению B_1 .

Существование внутреннего набега фазы параметра порядка между боковыми гранями кристалла $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ продемонстрировано также прямым измерением полуцелого кванта потока, захваченного сверхпроводящим кольцом, изготовленным из трех иттриевых сверхпроводящих монокристаллов с различной ориентацией [19].

Поскольку простейшая функция неприводимого представления B_1 имеет вид

$$g(\mathbf{k}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2 \quad (16.13)$$

то в литературе принято говорить о сверхпроводимости в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ как о сверхпроводимости с d -спариванием (или $d_{x^2-y^2}$ -спариванием). Иногда (см. ссылки в работе [18]) также обсуждается так называемое « $s + id$ -спаривание»:

$$g(\mathbf{k}) = \Delta_s + i\Delta_d (k_x^2 - k_y^2) \quad (16.14)$$

для которого δ_{12} может отклоняться от π в меру отношения Δ_s/Δ_d . Как уже указывалось в 4, фаза вида (16.14) может образоваться непосредственно из нормального состояния, только если фазовые переходы в сверхпроводящее состояние (нарушение калибровочной симметрии) и в ферромагнитное состояние (нарушение симметрии по отношению к обращению времени) происходят одновременно, для чего не видно особых причин. Поэтому возникновение состояния (16.14) из нормального должно идти через два последовательных фазовых перехода, что, насколько известно авторам, не наблюдается. Таким образом, интерпретация отклонений δ_{12} от π в терминах смеси s - и d -состояний представляется весьма условной.

10.2.18 ЧАСТЬ II

Во второй части книги мы строим теорию необычной сверхпроводимости, используя квантово-полевой подход. Формулировка теории в терминах функций Грина не только придает наглядность и компактность процедур вывода основных результатов, но и позволяет решать значительно более широкий круг задач, не поддающихся решению методами, изложеными в первой части. Мы не ставим здесь своей целью систематическое введение в метод функций Грина в теории конденсированного состояния, в частности, в теории обычной сверхпроводимости (см. [71]), предполагая знакомство читателя с основными идеями и понятиями этого метода.

10.2.19 17. Уравнения Горькова

Рассмотрим электропроводящий газ с притяжением между частицами, описываемый следующим гамильтонианом:

$$\begin{aligned} H = H_0 + H_{\text{int}} &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (\mathbf{k}\alpha |H_0| \mathbf{k}'\beta) a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}'\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\alpha\beta, \lambda\mu} (\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha}^+ a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \lambda} a_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \mu} \\ H_0 &= \frac{1}{2m} \left[-i\nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 + U(\mathbf{r}) - \mu \end{aligned} \quad (17.1)$$

Здесь мы использовали более общее выражение, нежели (5.1), включив в одночастичный гамильтониан H_0 возможную пространственную неоднородность системы, возникающую за счет примесей, поверхности, внешних полей и т. д. Спаривающее взаимодействие V имеет вид (5.3), (5.7) или (5.8).

Функция Грина сверхпроводника при конечных температурах (мацубаровская функция Грина) определяется следующим образом:

$$G_{\alpha\beta} (\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) = - \langle T_\tau a_{\mathbf{k}\alpha} (\tau_1) a_{\mathbf{k}'\beta}^+ (\tau_2) \rangle \quad (17.2)$$

где угловые скобки означают гиббсовское усреднение с гамильтонианом (17.1) (см. сноску 4 в §5), $a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau) = \exp(\tau H) a_{\mathbf{k}\alpha} \exp(-\tau H)$ — фермионные операторы в мацубаровском представлении, а T'_τ — символ упорядочения в мнимом времени τ . Через функцию Грина (17.2) непосредственно выражаются физические характеристики системы.

Подобно тому, как это делается в теории обычной сверхпроводимости, и введем еще две, так называемые аномальные функции Грина:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) &= \langle T_\tau a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau_1) a_{-\mathbf{k}'\beta}(\tau_2) \rangle \\ F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \tau_1; \mathbf{k}', \tau_2) &= \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}\alpha}^+(\tau_1) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(\tau_2) \rangle \end{aligned} \quad (17.3)$$

Отличие от нуля аномальных средних следует из того, что в присутствии бозекондегсата купровских пар рожденис илі унитоженис пары электронов практически не меняет состояние системы (см. 5). В диаграммной технике нормальные и аномальные функции Грина (17.2) и (17.3) изображаются линиями со стрелками (рис. 15).

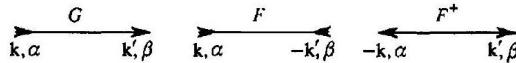


Рис. 15. Графическое изображение нормальной и аномальных функций Грина

При рассмотрении статических задач функции Грина зависят лишь от разности мнимых времеі $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, и удобно перейти в импульско-частотное представление:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}' : \tau) = T \sum_n G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \quad \text{ит.д.}$$

где $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ – фермионная мацубаровская частота.

Функции G и F удовлетворяют системе лифференциальных уравнений, к выводу которой мы и переходим. Воспользуемся уравнениями движения для операторов $a_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}\alpha}}{\partial \tau} = [H, a_{\mathbf{k}\alpha}]$$

Дифференцируем функцию G (17.2) по τ :

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \tau)}{\partial \tau} = - \langle T_\tau [H(\tau), a_{\mathbf{k}\alpha}(\tau)] a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle - \delta(\tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}$$

Подставляя соода гамильтониау (17.1) и используя свойство (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \tau)}{\partial \tau} &= - \sum_{\mathbf{k}_1} (\mathbf{k}\alpha | H_0 | \mathbf{k}_1\gamma) G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}') - \\ &- \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} V_{\gamma_1\alpha, \gamma_2\gamma_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \langle T_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_1}^+(\tau) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle - \\ &- \delta(\tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в преобразовании точного уравнения (17.4) с помощью расщепления стоящей в правой части двухчаститной функции Грипа по следующему рецепту (приближение среднего поля):

$$\begin{aligned} &\langle T_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_3}^+(\tau) a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle I_\tau a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}, \gamma_1}^+(\tau) a_{\mathbf{k}'\beta}^+(0) \rangle \langle T_\tau a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_2}(\tau) a_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}/2, \gamma_3}(\tau) \rangle \end{aligned}$$

Остальныс слагаемые в данном расщеплении дают линь алгебрическую добавку к входящему в H_0 химическому потенциалу, и поэтому не учитываются.

Введем теперь функцию, являющуюся параметром порядка сверхпроводника:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}; \mathbf{k}') F_{\lambda\mu} \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau; \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau \right) = \\ &= -T \sum_n \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') F_{\lambda\mu} \left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}; \omega_n \right) \end{aligned} \quad (17.5)$$

а также

$$\Delta_{\lambda}^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -T \sum_n \sum_{\mathbf{k}'} V_{\alpha\beta,\mu\lambda}(\mathbf{k}'; \mathbf{k}) F_{\alpha\beta}^{+}\left(\mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}; \omega_n\right)$$

После этого уравнение для функции Грина G в импульсно-частотном представлении окончательно переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}_1} (\mathbf{k}\alpha |i\omega_n - H_0| \mathbf{k}_1\gamma) G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) + \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) F_{\gamma\beta}^{+}(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}'; \omega_n) = \\ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (17.6)$$

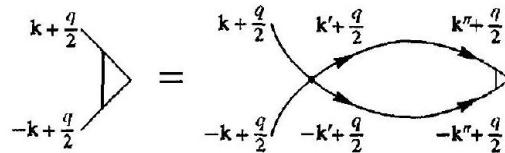
Рассуждая аналогичным образом, получаем уравнения для аномальных функций Грина:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}_1} \langle -\mathbf{k}_1\gamma | i\omega_n + H_0 | -\mathbf{k}\alpha \rangle F_{\gamma\beta}^{+}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) + \\ + \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}^{+}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) G_{\gamma\beta}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}'; \omega_n) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (17.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}_1} (\mathbf{k}\alpha |i\omega_n - H_0| \mathbf{k}_1\gamma) F_{\gamma\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'; \omega_n) - \\ - \sum_{\mathbf{q}} \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) G_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}', -\mathbf{k} + \mathbf{q}; -\omega_n) = 0 \end{aligned} \quad (17.8)$$

Уравнения (17.6)-(17.8) (дифференциальные в координатном представлении) называются уравнениями Горькова и составляют, вместе с условием согласования (17.5), основу теоретического описания сверхпроводников.

В дальнейшем нам часто придется использовать уравнение, определяющее температуру сверхпроводящего перехода T_c для различных ситуаций (например, в присутствие примесей или внешнего магнитного поля), получающееся из уравнений Горькова следующим образом.



Вблизи T_c параметр порядка мал и можно, используя (17.6) и (17.8), разложить аномальную функцию Грина F до первой степени по Δ , а затем подставить в условие согласования. При этом мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = -T_c \sum_n \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}'} V_{\beta\alpha, \lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') G_{\lambda\gamma}^{(0)}\left(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}'' + \frac{\mathbf{q}'}{2}; \omega_n\right) \times \\ \times G_{\mu\delta}^{(0)}\left(-\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, -\mathbf{k}'' + \frac{\mathbf{q}'}{2}; -\omega_n\right) \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}'', \mathbf{q}') \end{aligned} \quad (17.9)$$

где $G^{(0)}$ есть функция Грина нормального металла с учетом всех внешних полей. Соответствующее диаграммное выражение изображено на рис. 16. Критическая температура определяется как температура, при которой у линейного интегрального уравнения (17.9) появляется ненулевое решение.

Для практических вычислений важно знать функции Грина пространственно-однородной системы в отсутствие внешних возмущений. В этом случае уравнения Горькова значительно упрощаются:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \omega_n) = G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{и т. д.} \quad (17.10)$$

Следовательно, параметр порядка зависит лишь от направления импульсов \hat{k} на поверхности Ферми, но не от пространственных координат:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{q})$$

причем

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = -\Delta_{\beta\alpha}(-k)$$

Легко видеть, что введенные в §5 аномальные средние непосредственно выражаются через функции Грина однородной системы при совпадающих временных аргументах:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k},\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau; \mathbf{k}, \tau) = T \sum_n F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) \\ F_{\mathbf{k},\alpha\beta}^+ &= T \sum_n F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) \end{aligned}$$

Подставляя (17.10) в уравнения (17.6)-(17.8) и учитывая, что одночастичный гамильтониан ненеизмененной системы диагонален по импульсам и спинам:

$$\langle \mathbf{k}\alpha | H_0 | \mathbf{k}'\beta \rangle = \xi_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\beta}$$

причем $\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{-\mathbf{k}}$, получаем

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \xi_k) G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) &= \delta_{\alpha\beta} \\ (i\omega_n + \xi_k) F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\gamma}^+(\mathbf{k}) G_{\gamma\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= 0 \\ (i\omega_n - \xi_k) F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) - \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) G_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, -\omega_n) &= 0 \end{aligned} \quad (17.11)$$

Решение данной алгебраической системы уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= - (i\omega_n + \xi_k) [\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta(\mathbf{k})\Delta^+(\mathbf{k})]_{\alpha\beta}^{-1} \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) [\omega_n^2 + \xi_k^2 + (\Delta^+(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k}))]_{\gamma\beta}^{-1} \end{aligned} \quad (17.12)$$

Для всех сверхпроводящих фаз с синглетным спариванием, а также для унитарных фаз с триплетным спариванием, выполняется условие $(\Delta\Delta^+)_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta}$, и функции Грина принимают вид

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= - \frac{i\omega_n + \xi_k}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \delta_{\alpha\beta} \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \end{aligned} \quad (17.13)$$

где

$$\Delta_k^2 = \frac{1}{2} \text{Sp } \Delta^+(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k})$$

Отсюда для функции Грина нормального состояния (то есть при $\Delta = 0$) мы получаем

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\omega_n - \xi_k} \quad (17.14)$$

Для неунитарных фаз с триплетным спариванием

$$(\Delta\Delta^+)_{\alpha\beta} = \Delta^2 (dd^* \delta_{\alpha\beta} + m\sigma_{\alpha\beta})$$

здесь $m(\mathbf{k}) = i d(\mathbf{k}) \times d^*(\mathbf{k}) \neq 0$, и выражения для функций Грина сверхпроводника выглядят иесковолько сложнее:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= - (i\omega_n + \xi_k) \frac{(\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k})|^2) \delta_{\alpha\beta} + \Delta^2 m(\mathbf{k}) \sigma_{\alpha\beta}}{(\omega_n^2 + E_{k,-}^2) (\omega_n^2 + E_{k,-}^2)} \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \Delta (i\sigma\sigma_y)_{\alpha\beta} \frac{(\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta^2 |d(\mathbf{k})|^2) d(\mathbf{k}) - i\Delta^2 m(\mathbf{k}) \times d(\mathbf{k})}{(\omega_n^2 + E_{k,t}^2) (\omega_n^2 + E_{k,-}^2)} \end{aligned} \quad (17.15)$$

где

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 (|d(\mathbf{k})|^2 \pm |m(\mathbf{k})|)} \quad (17.16)$$

Уравненис, определяюще температурное поведение параметра порядка, получается подстановкой выражения (17.13) для функции P в условис согласования (17.5):

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -T \sum_n \sum_{k'} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}')}{\omega_n^2 + \xi_{k'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}^2} \quad (17.17)$$

(аналогитным образом может быть получено и соответствующе уравненис в случае неунитарных фаз (см. [13]). Для вычисления суммы по частотам в (17.17) воспользусмся формулой

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + x^2} = \frac{1}{2x} \ln \frac{x}{2} \quad (17.18)$$

Из (17.17) получаем:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}') \frac{1}{2E_{\mathbf{k}'}} \operatorname{th}\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T}\right) \quad (17.19)$$

откуда, учитывая, что $\operatorname{th}(E_{\mathbf{k}'}/2T) = 1 - 2f_{\mathbf{k}'}$, где $f_{\mathbf{k}'}$ – фермиевская функция распределения, возвращасмся к формулам (6.5) и (6.6). Уравненис, определяюще критическую температуру T_c , получается путем подстановки $\Delta = 0$ (1. с. замены $E'_{\mathbf{k}'} \rightarrow |\varepsilon_{\mathbf{k}'}|$) в (17.19).

Техника функций Грина для сверхпроводника может быть сформулирована в болсе компактном виде, формалю напоминаоощм диаграммную техику аля нормальной фермижидкости, если объединить G , F и F^{+} в одну матричную функцию Грина \hat{G} , используя векторные операторы (5.23) в мацубаровском представлении. По определснию:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) &= - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle T_\tau A_{\mathbf{k}_1}(\tau) A_{\mathbf{k}_2}^+(0) \rangle = \\ &= \begin{pmatrix} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) & -F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) \\ -F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \omega_n) & -G_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1; -\omega_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17.20)$$

Матричные элементы \hat{G} являются, в свою очередь, матрицами 2×2 в спиновом пространстве. В пространственно-однородном случае имеем (см. (17.12)):

$$\begin{aligned}\hat{G}_0(\mathbf{k}, \omega_n) &= -\frac{1}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \begin{pmatrix} (i\omega_n + \xi_k) \delta_{\alpha\beta} & \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}) & (i\omega_n - \xi_k) \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{i\omega_n \hat{\tau}_0 + \xi_k \hat{\tau}_3 + \dot{\Delta}(\mathbf{k})}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \quad (17.21)\end{aligned}$$

где $\hat{\tau}_i$ - матрицы Паули в «пространстве» частица-дырка.

Спектральное представление и энергии возбуждений. При решении конкретных задач необходимо уметь вычислять суммы по мацубаровским частотам. Для этого удобно использовать так называемое спектральное разложение функций Грина, которое в матричных обозначениях имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i\omega_n - z} \hat{\rho}(\mathbf{k}, z)$$

После этого суммы по фермионным частотам легко вычисляются с помощью тождества (ср. с (17.18))

$$T \sum_n \frac{1}{i\omega_n - z} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{z}{2T} \quad (17.22)$$

Вещественная спектральная плотность $\hat{\rho}$ выражается через фурье-образы запаздывающих и опережающих функций Грина¹ следующим образом:

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -2 \operatorname{Im} \hat{G}^R(\mathbf{k}, \omega) = i \left(\hat{G}^R(\mathbf{k}, \omega) - \hat{G}^A(\mathbf{k}, \omega) \right)$$

В свою очередь, запаздывающие (опережающие) функции Грина получаются из $\hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n)$ путем аналитического продолжения па верхнюю (нижнюю) полуплоскость комплексных ω :

$$\hat{G}^{R(A)}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{G}(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow \omega \pm i0} \quad (17.23)$$

Спектр элементарных возбуждений сверхпроводника определяется полюсами функции G^R . Выполняя аналитическое продолжение в (17.13), получаем уравнение, определяющее спектр:

$$\det \|E^2 - \xi_k^2 - \Delta(\mathbf{k})\Delta^+(\mathbf{k})\| = 0 \quad (17.24)$$

Подставляя сюда выражения (5.18) и (5.20), получаем, что энергии возбуждений даются формулами

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$$

для синглетного спаривания и

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 |\mathbf{d}(\mathbf{k})|^2}$$

для унитарных фаз с триплетным спариванием, то есть возвращаемся к результатам (5.33) и (5.34).

¹ Напомним, что функции $\hat{G}^R(\hat{G}^A)$ отличаются от мацубаровской функции \hat{G} (17.20) заменой τ -упорядоченного произведения операторов на их запаздывающие (опережающие) антисимметризаторы.

Для неунитарных фаз спектр возбуждений расщепляется на две ветви аналогично тому, как это происходит в обычных магнитных материалах, поскольку неунитарные фазы обладают собственным магнитным моментом:

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2 (|d(\mathbf{k})|^2 \pm |d^*(\mathbf{k}) \times d(\mathbf{k})|)} \quad (17.25)$$

Отсюда следует, что положение нулей спектра возбуждений для любых фаз триплетного спаривания определяется уравнением $\det \Delta(k) = 0$, то есть $d^2(\mathbf{k}) = 0$.

Плотность состояний. Плотность состояний квазичастиц по определению

$$N(E) = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \delta(E - E_{\mathbf{k}}) \quad (17.26)$$

Эта величина следующим образом выражается через функцию Грина:

$$N(E) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \rho(\mathbf{k}, E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}\alpha} G(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} \quad (17.27)$$

Из (17.26), с учетом выражения (5.29) для спектра возбуждений, получаем:

$$\begin{aligned} N(E') &= 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(E - E_{\mathbf{k}}) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \delta(E - E_{\mathbf{k}}) = \\ &= 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{dE'' E'}{\sqrt{E'^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \delta(E' - E') = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} \end{aligned} \quad (17.28)$$

где N_0 есть плотность состояний на узле Ферми в нормальном металле на одну проекцию спина, а интегрирование по углам производится в пределах $\Delta_{\mathbf{k}}^2 < E^2$.

Для обычного изотропного сверхпроводника с s -спариванием ($g(\mathbf{k}) = 1$) из (17.28) следует, что

$$N(E) = 2N_0 \begin{cases} 0, & \text{при } E < \Delta \\ \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, & \text{при } E > \Delta \end{cases} \quad (17.29)$$

то есть плотность квазичастических состояний тождественно обращается в нуль при $E < \Delta$.

Посмотрим теперь, что изменится, если в спектре возбуждений имеются нули. В качестве примера рассмотрим сверхпроводник со структурой A -фазы, параметр порядка в котором имеет вид (3.8), то есть щель обращается в нуль на северном и южном полюсах ферми-поверхности. Из (17.28) получаем:

$$N(E) = 2N_0 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 (\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2)}} = N_0 \int \sin \theta d\theta \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}}$$

причем $\sin \theta < E/\Delta$. При $E \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл дают окрестности полюсов $\theta < E/\Delta$ и $\pi - \theta < E/\Delta$, следовательно,

$$N(E) \approx N_0 \int_0^{E/\Delta} 0 d\theta \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \theta^2}} \sim N_0 \left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 \quad (17.30)$$

Таким образом, мы имеем ненулевую плотность состояний.

Можно убедиться в том, что если щель в спектре обращается в нуль на целой линии (это имеет место, например, для сверхпроводника со структурой полярной фазы), то

$$N(E) \sim N_0 \frac{E}{\Delta}. \quad (17.31)$$

Подобные степенные зависимости плотности состояний квазичастиц от энергии приводят к степенному (а не экспоненциальному) температурному поведению термодинамических и кинетических характеристик типичных сверхпроводников.

10.2.20 18. Функционал Гинзбурга-Ландау

Полученные в предыдущем параграфе уравнения для функций Грина сверхпроводника - уравнения Горькова - позволяют в принципе полностью описать свойства сверхпроводящего состояния. На практике, однако, существует широкий круг задач, в которых нет необходимости использовать эти достаточно сложные уравнения непосредственно. В частности, вблизи критической температуры, когда малы как сам сверхпроводящий параметр порядка ($\Delta \propto (T_c - T)^{1/2}$), так и его градиенты (то есть $\Delta(r)$ медленно меняется на характерном масштабе теории сверхпроводимости - размере куперовской пары ξ_0), удобно использовать уравнения Гинзбурга-Ландау (см. 12). Эти уравнения проще всего вывести с использованием техники функций Грина, вычисляя свободную энергию сверхпроводника \mathcal{F}_s как функционал от параметра порядка, с последующей ее минимизацией по Δ .

Мы рассмотрим в качестве примера сверхпроводник с p -спариванием вблизи критической температуры в отсутствие примесей (см. [72]), для которого потенциал спаривающего взаимодействия, входящий в гамильтониан (17.1), выглядит следующим образом:

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -3V \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{k_F^2} \quad (18.1)$$

где константа связи V отлична от нуля лишь в узком слое толщиной ε_1 вблизи фермифермы (см. 5.4)).

Свободная энергия определяется формулой $\mathcal{F} = -T \ln Z$, где $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H})$ есть статистическая сумма. Для гамильтониана H мы используем соответствующее приближение среднего поля выражение (5.22), переписав его в виде, содержащем только сверхпроводящий параметр порядка Δ и фермионные операторы рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{k}} \xi_k a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} S_p \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left(\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha}^+ a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta}^+ + \right. \\ & \left. + \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}) a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \alpha} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \beta} \right) \end{aligned} \quad (18.2)$$

В отличие от (5.22), здесь учтена возможная пространственная неоднородность параметра порядка ²

Рассматривая содержащие Δ слагаемые в (18.2) как возмущение \hat{H}_{int} и переходя к мацубаровскому представлению, разложим разность свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний

$$-T \ln \left\langle \exp \left[- \int_0^{1/\tau} d\tau \hat{\Pi}_{\text{int}}(\tau) \right] \right\rangle$$

вплоть до членов четвертой степени по Δ . Имеем:

$$\mathcal{F}_{\text{cond}} = \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n = \frac{1}{2V} \int d^3r \int \frac{d\Omega}{4\pi} \text{Sp} \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_4 \quad (18.3)$$

Здесь

$$\Delta_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Delta_{\lambda\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{qr}} = (i\sigma_\alpha \sigma_y)_{\lambda\mu} A_{\alpha i}(\mathbf{r}) \hat{k}_i \quad (18.4)$$

- параметр порядка сверхпроводника с p -спариванием,

$$\mathcal{F}_2 = - \int d^3 r_1 d^3 r_2 A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}_1) S_{ij,\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) A_{\beta j}(\mathbf{r}_2) \quad (18.5)$$

где ядро S выглядит следующим образом:

$$S_{ij,\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lim_{\mathbf{r}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{r}_{1,2}} \frac{T}{4k_F^2} \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}} - \frac{\partial}{\partial r'_{1,i}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r_{2,j}} - \frac{\partial}{\partial r'_{2,j}} \right) \times \\ \times (\sigma_y \sigma_\alpha)_{\lambda\mu} G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) (\sigma_\beta \sigma_y)_{\gamma\delta} G_{\mu\delta}^{(0)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n) \quad (18.6)$$

Входящие сюда функции $G^{(0)}$ представляют собой функции Грина нормального металла с учетом взаимодействия как зарядов, так и спинов электронов с внешним магнитным полем. Наконец член четвертого порядка в разложении свободной энергии имеет вид

$$\mathcal{F}_4 = \frac{1}{4} T_c \sum_n \sum_{\{\mathbf{q}_i\}} \sum_{\mathbf{k}} \text{Sp} \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2) G^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n) \Delta^+(\mathbf{k}, \mathbf{q}_3) G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) \times \\ \times \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{q}_4) G^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \quad (18.7)$$

Все импульсы \mathbf{q}_i в функциях Грина положены равными поглощению, так как рассмотрение конечных импульсов нужно лишь при вычислении градиентных членов четвертой степени по Δ , которые нас не интересуют.

Если пренебречь действием поля на спины электронов (мы вернемся к этому вопросу позже), то

$$G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \delta_{\lambda\gamma}$$

Для квадратичного закона дисперсии при $H = 0$ фурье-образ выражения (17.14) есть

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \omega_n) = -\frac{\pi N_0}{k_F r} \exp \left(ik_F r \sqrt{1 + \frac{i\omega_n}{\varepsilon_F}} \text{sign } \omega_n \right) \approx \\ \approx -\frac{\pi N_0}{k_F T} \exp \left(ik_F r \text{sign } \omega_n - \frac{|\omega_n|}{v_F} r \right) \quad (18.8)$$

¹ Более точно, таким образом определяется термодинамический потенциал Ω , однако, согласно общим принципам термодинамики, разность $\Omega_s - \Omega_n$ равна разности свободных энергий $\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n$.

² В общем случае второе слагаемое в правой части (18.2) имеет вид:

$$-\frac{1}{2} S_p \sum \Delta^+(\mathbf{k}, q) \hat{V}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}', q)$$

где \hat{V}^{-1} удовлетворяет уравнению $\sum_{\mathbf{k}''} \hat{V}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') \hat{V}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Используя ортогональность и полноту системы базисных функций, приходим к выражению (18.2).

При $\Delta = 0$, но $H \neq 0$, из (17.6) получаем следующее уравнение для функции Грина G :

$$\left[i\omega_n - \frac{\hbar^2}{2m} \left(-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \right)^2 + \epsilon_{\mathbf{F}} \right] G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

В последующих выкладках мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, при необходимости восстанавливая постоянную Планка в окончательных ответах.

Ищем решение этого уравнения в виде $G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) =$

$$= G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega_n) \exp \left[\frac{ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + i\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega_n) \right] \quad (18.9)$$

Интегрирование в показателе экспоненты идет по прямой линии, соединяющей точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Для функции ψ получаем уравнение [73]:

$$k_F \hat{\mathbf{r}} \operatorname{sign} \omega_n \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \omega_n)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e^2}{4c^2} (\mathbf{H} \times \mathbf{r})^2 = 0$$

откуда видно, что в даже в полях порядка $H_{c2}(0) \sim \Phi_0 / (\pi \xi_0^2)$ добавка к фазе имеет малость $\sim (k_F \xi_0)^{-1}$ по сравнению с первым членом в показателе экспоненты в (18.9). Поэтому для функции Грина имеем:

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) &= G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \omega_n) \exp \left(\frac{ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \approx \\ &\approx G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \omega_n) \exp \left(\frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right) \end{aligned} \quad (18.10)$$

Последнее равенство написано на основании, что характерный масштаб изменения вектор-потенциала (лондоновская глубина проникновения) вблизи T_c значительно превышает расстояние, на котором спадают плавкие функции Грина (18.8).

Подставляя (18.8) и (18.10) в (18.6), убеждаемся, что главный вклад в ядро происходит от дифференцирования меняющихся на атомных масштабах множителей вида $\exp(ik_F r \operatorname{sign} \omega_n)$, а поправки первого порядка малости по магнитному полю возникают при дифференцировании зависящих от поля фазовых множителей в (18.10). Имеем [31]:

$$\begin{aligned} S_{ij,\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta_{\alpha\beta} \\ S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= T \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \left(\hat{R}_i \hat{R}_j + \frac{ie}{2k_F^2 c} e_{ijk} H_k \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \mathbf{R} \right) \end{aligned} \quad (18.11)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$.

Оценим второй член в квадратных скобках в правой части (18.11):

$$\frac{eH}{k_F^2 c} \sim \frac{1}{(k_F \xi_0)^2} \frac{H}{II_{c2}(0)}$$

В нулевом порядке по параметру квазиклассичности $(k_F \xi_0)^{-1}$ им можно пренебречь, тогда

$$S_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = K_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) \exp \left(\frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \mathbf{R} \right) \quad (18.12)$$

где

$$S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) = T \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \hat{R}_i \hat{R}_j$$

Мы видим, что ядро $K^{(0)}$ экспоненциально убывает на расстояниях между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , превышающих

$$\xi_0 = \frac{v_F}{2\pi T_c}$$

и тем самым в теории появляется характерный микроскопический масштаб размер куперовской пары (или длина когерентности) ξ_0 . С другой стороны, параметр порядка сверхпроводника изменяется на масштабе порядка корреляционной длины $\xi(T)$, причем $\xi/\xi_0 \sim (1 - T/T_c)^{-1/2} \gg 1$ (см. 12). 100

Следовательно, вблизи T_c мы можем разложить в подынтегральном выражении в (18.5) как параметр порядка, так и фазовый множитель в ядре вплоть до второй степени по $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & - \int d^3 r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) \times \\ & \times \left[1 + \frac{2ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{2ie}{c} \right)^2 (\mathbf{A}(\mathbf{r}) \mathbf{R})^2 \right] \times \\ & \times \left[A_{\alpha j}(\mathbf{r}) + \frac{\partial A_{aj}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{\alpha j}}{\partial r_k \partial r_l} R_k R_l \right] \end{aligned}$$

Выделяя явно члены пулевой степени по \mathbf{R} и интегрируя члены второй степени по тастям, получаем:

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{\text{uniform}} + \mathcal{F}_{\text{grad}} \quad (18.13)$$

где

$$\mathcal{F}_{\text{uniform}} = - \int d^3 r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) A_{\alpha j}(\mathbf{r}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) \quad (18.14)$$

$$\mathcal{F}_{\text{grad}} = \frac{1}{2} \int d^3 r (D_k A_{\alpha i})^* (D_l A_{\alpha j}) \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) R_k R_l \quad (18.15)$$

а $\mathbf{D} = -i(\partial/\partial \mathbf{r}) + (2e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – ковариантная производная.

Вычислим входящие в (18.14) и (18.15) интегралы по \mathbf{R} . Для однородной части имеем:

$$\begin{aligned} \int d^3 R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) = & T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \int d\Omega \hat{R}_i \hat{R}_j = \\ = & \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} v_F \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 T \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} N_0 T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n} \end{aligned} \quad (18.16)$$

Обрезая логарифмически расходящуюся сумму на граничной частоте ε_1 , получаем:

$$2\pi T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n} = \ln \frac{\varepsilon_1}{2\pi T} + \ln 4\gamma = \frac{1}{N_0 V} + \ln \frac{T_c}{T} = \frac{1}{N_0 V} - \frac{T - T_c}{T_c} \quad (18.17)$$

Здесь мы воспользовались формулой (6.10) и тождеством

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0}^N \frac{1}{n + 1/2} = \ln N + \ln 4\gamma$$

Подставляя (18.16) и (18.17) в (18.14), получаем:

$$\mathcal{F}_{\text{uniform}} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{V} + N_0 \frac{T - T_c}{T_c} \right) \int d^3r A_{\alpha i}^*(\mathbf{r}) A_{\alpha i}(\mathbf{r}) \quad (18.18)$$

Подставляя (18.18) в (18.3), убеждаемся, что однородные слагаемые, явно содержащие константу связи, сокращают друг друга.

Для градиентной части имеем:

$$\begin{aligned} \int d^3R S_{ij}^{(0)}(\mathbf{R}) R_k R_l &= T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR R^2 \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int d\Omega \hat{R}_i \hat{R}_j \hat{R}_k \hat{R}_l = \frac{\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) v_F^2 N_0 T_c \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n^3} = \\ &= \frac{7\zeta(3)}{120} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \frac{N_0 v_F^2}{\pi^2 T_c^2} \end{aligned} \quad (18.19)$$

Сравнивая полученный результат с феноменологическим выражением (15.20) для свободной энергии сверхпроводника с p -спариванием, получаем окончательно следующие значения констант [72]:

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{7\zeta(3) N_0 v_F^2}{240 \pi^2 T_c^2} = \frac{7\zeta(3)}{60} N_0 \xi_0^2 \quad (18.20)$$

Рассмотрим теперь член четвертого порядка в разложении свободной энергии. Подставляя в \mathcal{F}_4 выражения (18.4) и (17.13), а затем вычисляя интеграл по углам и след по спиновым индексам с использованием тождества

$$\text{Sp}(\sigma \mathbf{d}_1)(\sigma \mathbf{d}_2)(\sigma \mathbf{d}_3)(\sigma \mathbf{d}_4) = 2(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_3 \mathbf{d}_4) - 2(\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_4)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= \frac{B}{4} \sum_{\mathbf{q}_1} (-A_{\alpha i}^* A_{\beta j} A_{\alpha i}^* A_{\beta j} + 2A_{\alpha i}^* A_{\alpha i} A_{\beta j}^* A_{\beta j} - 2A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + \\ &+ 2A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + 2A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j}) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \end{aligned} \quad (18.21)$$

где все слагаемые в фигурных скобках зависят от импульсов следующим образом: $A_{\alpha i}^* A_{\beta j} A_{\alpha i}^* A_{\beta j} = A_{\alpha i}^*(\mathbf{q}_1) A_{\beta j}(\mathbf{q}_2) A_{\alpha i}^*(\mathbf{q}_3) A_{\beta j}(\mathbf{q}_4)$ и т. п., а

$$B = \frac{2}{15} N_0 T_c \sum_n \int d\xi \frac{1}{(\omega_n^2 + \xi^2)^2} = \frac{7\zeta(3)}{60} \frac{N_0}{\pi^2 T_c^2}$$

Возвращаясь в (18.21) в координатное представление и сравнивая результат с (11.1), получаем значения коэффициентов [34, 74]:

$$-2\beta_1 = \beta_2 = -\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \frac{7\zeta(3)}{120} \frac{N_0}{\pi^2 T_c^2} \quad (18.22)$$

Таким образом, плотность функционала (18.3) принимает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}
F_{\text{cond}} = & \frac{N_0}{3} \frac{T - T_c}{T_c} A_{\alpha i} A_{\alpha i}^* + \frac{7\zeta(3)}{120\pi^2} \frac{N_0}{T_c^2} \left[-\frac{1}{2} |A_{\alpha i} A_{\alpha i}|^2 + (A_{\alpha i}^* A_{\alpha i})^2 - \right. \\
& - A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\alpha j}^* A_{\beta j} + A_{\alpha i}^* A_{\beta i} A_{\beta j}^* A_{\alpha j} + A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} A_{\beta i}^* A_{\beta j} \left. \right] + \\
& + \frac{7\zeta(3)}{60} N_0 \xi_0^2 [(D_i A_{\alpha j})^* (D_i A_{\alpha j}) + (D_i A_{\alpha i})^* (D_j A_{\alpha j}) + \\
& + (D_i A_{\alpha j})^* (D_j A_{\alpha i})]
\end{aligned} \tag{18.23}$$

Найденные параметры функционала Гинзбурга-Ландау соответствуют приближению слабой связи (см. конец 10).

Поправки к квазиклассическому приближению. Орбитальный магнетизм. Сравнивая (18.20) и (15.7), мы видим, что в рассматриваемом приближении внутренний спонтанный орбитальный магнитный момент в сверхпроводнике с p -спариванием отсутствует в силу равенства $K_2 = K_3$. Посмотрим, что произойдет, если учесть второе слагаемое в квадратной скобке в выражении (18.11), антисимметричное по индексам i, j и представляющее собой, как уже отмечалось, поправку второго порядка малости по параметру квазиклассичности.

Опуская зависящий от поля фазовый множитель в (18.11), получаем следующую поправку к плотности свободной энергии:

$$\begin{aligned}
\delta F_{MH} = & i \frac{e}{2k_F^2 c} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 e_{ijk} A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} H_k 2\pi T_c \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) = \\
= & i \frac{e}{4k_F^2 c} N_0 \ln \frac{\varepsilon_1}{2\pi T_c} e_{ijk} A_{\alpha i}^* A_{\alpha j} H_k
\end{aligned}$$

Отсюда, восстанавливая постоянную Планка, получаем выражение для плотности внутреннего орбитального магнитного момента [75]

$$M_i = -i \frac{ch}{4k_F^2 c} N_0 \ln \frac{\varepsilon_1}{2\pi T_c} e_{ijk} A_{\alpha j}^* A_{\alpha k}$$

Сравнивая с (15.7), приходим к выводу о том, что при учете поправок порядка $(k_F \xi_0)^{-2}$ к квазиклассическому приближению разность $K_2 - K_3$, а вместе с ней и плотность внутреннего спонтанного орбитального момента, становятся отличными от нуля.

Спиновый магнетизм. Рассмотрим теперь эффект взаимодействия спинов электронов с магнитным полем. В пренебрежении орбитальными эффектами ядро (18.6) зависит только от разности координат. Параметр порядка тогда можно считать ие зависящим от \mathbf{r} , и из (18.5) имеем следующее выражение для плотности свободной энергии:

$$F_{SH} = -\frac{1}{2} A_{\alpha i}^* S_{ij,\alpha\beta} A_{\beta j} \tag{18.24}$$

Входящий сюда коэффициент K удобно вычислять в импульсном представлении:

$$\begin{aligned}
S_{ij,\alpha\beta} = & T_c \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j (\sigma_y \sigma_\alpha)_{\lambda\mu} \times \\
& \times G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) (\sigma_\beta \sigma_y)_{\gamma\delta} G_{\mu\delta}^{(0)}(-\mathbf{k}, -\omega_n)
\end{aligned} \tag{18.25}$$

Выбирая ось квантования (направление магнитного поля \mathbf{H}) вдоль оси \hat{z} , функции Грина можно записать в следующем виде (ср. с (17.14) при $\mathbf{H} = 0$):

$$G_{\lambda\gamma}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{i\omega_n - \xi_k}{(i\omega_n - \xi_k)^2 - (\mu_B H)^2} \delta_{\lambda\gamma} - \frac{\mu_B H}{(i\omega_n - \xi_k)^2 - (\mu_B H)^2} (\sigma_z)_{\lambda\gamma} \quad (18.26)$$

где μ_B есть магнетон Бора (или магнитный момент ядра в 3). Подставляя (18.26) в (18.25) и вычисляя след по спиновым индексам, получаем линейную по полю поправку к коэффициенту :

$$\begin{aligned} \delta S_{ij,\alpha\beta} &= -ie_{\alpha\beta z}\mu_B H T_c \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{k}_i \hat{k}_j \left[\frac{1}{i\omega_n - \xi_k} \frac{1}{(i\omega_n + \xi_k)^2} + \text{к.с.} \right] = \\ &= -\frac{1}{3} i \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H T_c \sum_n \int d\xi N(\xi) \left[\frac{1}{i\omega_n - \xi} \frac{1}{(i\omega_n + \xi)^2} + \text{к.с.} \right] \end{aligned}$$

где $N(\xi)$ есть плотность электронных состояний. Записывая ее в виде разложения $N(\xi) = N_0 + N'_0 \xi$ вблизи энергии Ферми и выполняя интегрирование по ξ , получаем:

$$\begin{aligned} \delta S_{ij,\alpha\beta} &= -\frac{\pi}{2} \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H N_0 T_c \sum_n \frac{\text{sign } \omega_n}{\omega_n^2} - \\ &\quad - i \frac{\pi}{2} \delta_{ij} e_{\alpha\beta z} \mu_B H N'_0 T_c \sum_n \frac{\text{sign } \omega_n}{\omega_n} \quad (18.27) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части тождественно обращается в нуль, а расходящаяся сумма во втором слагаемом обрезается на граничной частоте ε_1 . Подставляя полученный результат в (18.24), приходим к ответу:

$$\delta F_{SH} = i \frac{\pi}{4} \mu_B N'_0 \ln \frac{\varepsilon_1}{2\pi T_c} e_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha i}^* A_{\beta i} H_\gamma \quad (18.28)$$

Сравнивая это выражение с (15.20), видим, что значение коэффициента K_4 , а, следовательно, и плотность внутреннего спонтанного спинового магнитного момента малы в меру малости асимметрии в распределении части и дырок вблизи поверхности Ферми.

Упражнение. Вычислить коэффициенты в разложении Гинзбурга-Ландау для изотропного сверхпроводника с d -спариванием в модели слабой связи.

10.2.21 19. Верхнее критическое поле в сверхпроводниках с p -спариванием

В области применимости теории Гинзбурга-Ландау верхние критические поля для сверхпроводников с необычным параметром порядка вычислялись в § 12. При понижении температуры корреляционная длина $\xi(T)$, задающая пространственный масштаб изменения параметра порядка, уменьшается и при $T \ll T_c$ становится сравнимой с длиной когерентности ξ_0 . В этих условиях градиентное разложение свободной энергии становится неприменимым, и для вычисления $H_{c2}(T)$ необходимо использовать методы микроскопической теории. В настоящем параграфе мы проведем вычисления для анизотропного сверхпроводника с p -спариванием. В этом случае, также как в случае обычного изотропного сверхпроводника можно получить аналитические выражения для верхнего критического поля при $T = 0$. Для многих других необычных сверхпроводящих состояний, даже с однокомпонентными параметрами порядка, не являющихся собственными функциями уравнения типа (19.5) (см. ниже), например, для тетрагонального сверхпроводника с $\Delta(\mathbf{r}) \sim \Delta(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)$, верхнее критическое поле можно найти лишь приближенно.

Для вычисления верхнего критического поля $H_{c2}(T)$ в сверхпроводнике с p -спариванием воспользуемся уравнением (17.9). Переходя в координатное представление, с учетом выражения (18.4) для параметра порядка и разложения (18.1) притягивающего взаимодействия, получаем линейное интегральное уравнение [76]:

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}_1) = \int d^3 r_2 K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) A_{\alpha j}(\mathbf{r}_2) \quad (19.1)$$

где ядро имеет вид (ср. с (18.5))

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \lim_{\mathbf{r}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{r}_{1,2}} \frac{3VT}{4k_F^2} \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}} - \frac{\partial}{\partial r'_{1,i}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r_{2,j}} - \frac{\partial}{\partial r'_{2,j}} \right) \times G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n) \quad (19.2)$$

Повторяя дословно рассуждения, использованные в предыдущем параграфе при выводе формулы (18.12), получаем:

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 3VT \dot{R}_i R_j \left(\frac{\pi N_0}{k_F R} \right)^2 \times \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \exp \left(\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \quad (19.3)$$

где $\hat{R} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$.

Воспользовавшись тождеством

$$\exp \left(\frac{2ie}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) f(\mathbf{r}_2) = \exp(i(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{D}(\mathbf{r}_1)) f(\mathbf{r}_1) \quad (19.4)$$

где $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = -i(\partial/\partial\mathbf{r}) + (2e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r})$ - оператор ковариантного лифференцирования, переписываем уравнение (19.1) в виде

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}) = 3VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \int d^3 R \frac{\hat{R}_i \hat{R}_3}{R^2} \sum_n \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{\psi_F} R \right) \times \exp(i\mathbf{R}\mathbf{D}(\mathbf{r})) A_{\alpha j}(\mathbf{r}) \quad (19.5)$$

Заметим, что (19.5) является дифференциальным уравнением бесконечно высокого порядка [77], причем линсаризованные уравнения Гинзбурга-Ландау получаются, если мы разложим экспоненту в правой части до членов второго порядка по D .

Пусть внешнее поле H направлено вдоль оси z , тогда ищем решение уравнения (19.5) в виде

$$A_{\alpha i}(\mathbf{r}) = e^{ip_z z} A_{\alpha i}(\rho)$$

где $\rho = (x, y)$.

Естественно предположить, что максимальному значению верхнего критического поля отвечает $p_z = 0$. Переходя в интеграле в (19.5) к сферическим координатам с полярной осью вдоль z , легко убедиться, что уравнения расцепляются, т.е. z -компоненты параметра порядка $A_{\alpha z}$ могут быть рассмотрены независимо от x, y -компонент.

Полярная фаза [76]. Начнем с вычисления $H_{c2}(T)$ для сверхпроводящего состояния вида

$$d_{\alpha x} = A_{\alpha z} \hat{k}_z$$

Поскольку уравнение (19.5) диагонально по спиновым индексам, то всем компонентам вектора \mathbf{d} соответствует одинаковое значение верхнего критического поля. Полагая $d_1 = d_2 = 0$, убеждаемся, что рассматриваемый случай соответствует полярной фазе¹. Итак, пусть $\mathcal{A}_{zz}(\rho) = \int(\rho)$. Метод решения аналогичен применяемому в соответствующей задаче для изотропного сверхпроводника с s -спариванием [77].

Введем повышающий и понижающий операторы:

$$D_{\pm} = \frac{D_x \pm i D_y}{\sqrt{2}} \quad (19.6)$$

удовлетворяющие коммутационному соотношению $[D_-, D_+] = 2\pi H/\Phi_0$, где Φ_0 - квант потока. Тогда уравнение (19.5) принимает вид

$$\begin{aligned} f(\rho) = 3VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) f(\rho) \end{aligned} \quad (19.7)$$

Воспользуемся теперь операторным тождеством:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-(1/2)[A \cdot B]}$$

верным, если коммутатор операторов A и B есть c -число, и перепишем содержащую D_{\pm} экспоненту в (19.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) = \\ = \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \times \\ \times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right) \end{aligned} \quad (19.8)$$

Если мы разложим правую часть в ряд по степеням D_{\pm} и подставим в (19.7), то после интегрирования по углу φ в этом разложении останутся только члены вида $D_+^n D_-^n$, содержащие однотаковое число повышающих и понижающих операторов. Это означает, что решениями уравнения (19.7) являются собственные функции $|N\rangle$ оператора $D_+ D_-$, являющегося оператором Гамильтона для гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} D_+ D_- |N\rangle &= N \frac{2\pi H}{\Phi_0} |N\rangle \\ D_+^n D_-^n |N\rangle &= \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^n |N\rangle \end{aligned}$$

В калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ эти собственные функции выглядят следующим образом:

$$f_{N,p}(\rho) \propto e^{ipy} \exp \left[-\frac{\pi H}{\Phi_0} \left(x - \frac{p\Phi_0}{2\pi H} \right)^2 \right] \times$$

¹ Это справедливо в пренебрежении взаимодействием $\mu_B H$ спинов электронов с магнитным полем. Если учесть такое взаимодействие, то переход происходит в β -фазу (см. 3) [31].

$$\times H_N \left[\sqrt{\frac{2\pi H}{\Phi_0}} \left(x - \frac{p\Phi_0}{2\pi H} \right) \right] \quad (19.9)$$

где $H_N(x)$ - полиномы Эрмита. С учетом сказанного получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right) |N\rangle &= \\ = 2\pi \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(n!)^2 (N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^n |N\rangle &= \\ = 2\pi L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N\rangle \end{aligned} \quad (19.10)$$

где $L_N(x)$ - полиномы Лагерра. Уравнение на собственные значения (19.7) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 &= 6\pi V T \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \times \\ &\times L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (19.11)$$

Можно показать, что максимальное значение верхнего критического поля получается для решения, отвечающего нулевому ($N = 0$) уровню гармонического осциллятора, при этом параметр порядка имеет вид

$$\mathbf{d} \propto f_{0,p}(x, y) \tilde{k}_z \quad (19.12)$$

Для устранения логарифмической расходности при суммировании по n в (19.11) вычтем из обеих частей выражения в нулевом поле. Тогда, учитывая (18.17), получаем окончательное уравнение, определяющее зависимость $H_{c2}(T)$ для полярной фазы:

$$\begin{aligned} \ln \frac{T_c}{T} &= \sum_n \left[\frac{1}{|2n+1|} - \frac{6\pi T}{N_0} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \right. \\ &\times \left. \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (19.13)$$

При выводе (19.13) использовало определение критической температуры T_c в нулевом поле:

$$\pi V N_0 T_c \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = 1$$

где сумма по частотам обрезана на граничной энергии ε_1 (см. предыдущий параграф).

А-фаза и фаза Парнберга-Клемма [76]. Рассмотрим теперь x - и y -компоненты параметра порядка. Обозначим $A_{\alpha i}(\rho) = f_i(\rho)$ и введем новые функции

$$f_\pm(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_x \pm i f_y)$$

тогда уравнение (19.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} &= \frac{3VT}{2} \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta (e^{-i\varphi} D_+ + e^{i\varphi} D_-) \right) \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19.14)$$

Если воспользоваться формулой (19.8), разложить зависящие от φ экспоненты в ряд Тейлора, а затем проинтегрировать по φ , то диагональные элементы матричного оператора в правой части содержат слагаемые вида $D_+^n D_-^n$, наддиагональный элемент - слагаемые вида $D_+^{n+2} D_-^n$, а поддиагональный слагаемые вида $D_+^n D_-^{n+2}$. По этой причине ищем решеник уравнения (19.14) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_N |N+2\rangle \\ q_N |N\rangle \end{pmatrix}, \quad N \geq 0 \quad (19.15)$$

где $|N\rangle$ определяется формулой (19.9).

Имеем:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\varphi} \\ e^{-2i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi} D_+ \right) \times \\ &\times \exp \left(i \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} D_- \right) \begin{pmatrix} p_N |N+2\rangle \\ q_N |N\rangle \end{pmatrix} = \\ &= 2\pi \begin{pmatrix} p_N \sqrt{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(n+2)!(N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{n+1} |N+2\rangle + \\ + q_N L_{N+2} \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N+2\rangle \\ p_N L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) |N\rangle + \\ + q_N \sqrt{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(n+2)!(N-n)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{n+1} |N\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Мы получили линейную однородную систему уравнений на коэффициенты p_N и q_N , условие разрешимости которой имеет вид

$$(1 - \alpha_N) (1 - \alpha_{N+2}) - \beta_N^2 = 0 \quad (19.16)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_N(H, T) &= 3\pi VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) L_N \left(\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \\ \beta_N(H, T) &= 3\pi VT \left(\frac{\pi N_0}{k_F} \right)^2 \sum_n \int_0^\infty dR \exp \left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} R \right) \times \\ &\times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \exp \left(-\frac{\pi H}{2\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right) \sqrt{(N+1)(N+2)} \times \\ &\times \sum_{m=0}^N \frac{N!}{m!(m+2)!(N-m)!} \left(-\frac{\pi H}{\Phi_0} R^2 \sin^2 \theta \right)^{m+1} \end{aligned}$$

при этом $q_N = ((\alpha_N - 1) / \beta_N) p_N$.

Итак, мы получили уравнение, определяющее температурную зависимость верхнего критического поля для решения вида (19.15). Можно показать, что максимальное значение $H_{c2}(T)$ достигается при $N = 0$. Соответствующий параметр порядка:

$$\mathbf{d} \propto \left[f_{2,p}(x, y) \left(\hat{k}_x - i \hat{k}_y \right) + \frac{\alpha_0 - 1}{\beta_0} f_{0,p}(x, y) \left(\hat{k}_x + i \hat{k}_y \right) \right] \quad (19.17)$$

описывает так называемую фазу Шарнберга-Клемма. В отсутствие спиновых эффектов верхнее критическое поле однократно для всех компонент вектора \mathbf{d} .

Осталось рассмотреть состояние

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19.18)$$

которое также является решением (19.14), но не принадлежит к семейству (19.15)². Подставляя (19.18) в (19.14), убеждаемся в том, что уравнение на верхнее критическое поле для параметра порядка

$$\mathbf{d} \propto f_{0,p}(x, y) \left(\hat{k}_x - i \hat{k}_y \right) \quad (19.19)$$

соответствующего, как легко видеть, A -фазе³, имеет вид

$$1 - \alpha_0 = 0 \quad (19.20)$$

Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: в заряженной ферми-жидкости с p -спариванием переход из нормального в сверхпроводящее состояние в магнитном поле может произойти в одну из трех фаз: полярную фазу, A -фазу или фазу Шарнберга-Клемма. Для ответа на вопрос, какая именно из них имеет максимальное критическое поле, необходимо решить уравнения (19.13), (19.20) и (19.16). Хотя в общем случае эта задача может быть решена лишь путем численного анализа, оказывается возможным получить аналитические выражения для H_{c2} при $T \rightarrow T_c$ (см. §12, 18, а также упражнение в конце параграфа) и при нулевой температуре.

вычисление $H_{c2}(0)$ [76]. Начнем с исследования полярной фазы. Для сокращения обозначений удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$h = \frac{2H}{H_0}, \quad \rho = \frac{r\sqrt{h}}{\xi_0}, \quad t = \frac{T}{T_{c0}}$$

где $H_0 = \Phi_0 / (\pi \xi_0^2)$, а T_{c0} — критическая температура при $H = 0$. Из (19.13) имеем

$$\begin{aligned} \ln t = \sum_n & \left[\frac{3t}{2\sqrt{h}} \int_0^\infty d\rho \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \times \right. \\ & \left. \times \exp \left(-\frac{t\rho|2n+1|}{\sqrt{h}} - \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{4} \right) - \frac{1}{|2n+1|} \right] \end{aligned} \quad (19.21)$$

Предельный переход $t \rightarrow 0$ в этом уравнении выполняется следующим образом. Пере пишем сумму по частотам в виде

² У (19.14) имеется также решение вида $\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1\rangle \\ 0 \end{pmatrix}$, однако можно показать, что оно приводит к заведомо меньшему значению верхнего критического поля.

³ В сверхпроводящей A -фазе орбитальный момент пар ориентирован против направления поля H .

$$\sum_n \{\dots\} = 2 \lim_{y \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n+1} \{\dots\}$$

Обозначая $x = \cos \theta$ и суммируя по n , получаем:

$$\ln t = \lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{3i}{\sqrt{h}} \int_0^1 x^2 dx \int_0^\infty d\rho \frac{2y \exp\left(-\frac{t\rho}{\sqrt{h}} - \frac{\rho^2(1-x^2)}{4}\right)}{1-y^2 \exp\left(-\frac{2t\rho}{\sqrt{h}}\right)} - \ln \frac{1+y}{1-y} \right]$$

Разложим теперь экспоненты в подынтегральном выражении по степеням t при $t \rightarrow 0$ и запишем правую часть в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 1} \left[3 \int_0^1 dx x^2 \cdot \int_0^\infty d\rho \frac{\exp\left(-\frac{\rho^2(1-x^2)}{4}\right)}{\rho + \frac{\sqrt{h}(1-y)}{t}} - \ln \frac{2}{1-y} \right] = \\ & = \lim_{y \rightarrow 1} \left\{ 3 \int_0^1 dx x^2 \left[\ln \frac{t}{\sqrt{h}(1-y)} - \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1-x^2}{4} + C \right) \right] - \ln \frac{2}{1-y} \right\} = \\ & = \ln \frac{t}{2\sqrt{h}} - \frac{C}{2} - \frac{3}{2} \int_0^1 dx x^2 \ln \frac{1-x^2}{4} = \ln \frac{t}{2\sqrt{h}} - \frac{C}{2} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

где $C = \ln \gamma$ — постоянная Эйлера. Отсюда окончательно получаем, что

$$h = \frac{e^{8/3}}{4\gamma}$$

Вычисления для A -фазы и фазы Шариберга-Клемма выполняются аналогично. Возвращаясь к размерным величинам, приведем сводку результатов:

$$H_2(T=0) = \frac{e^2}{4\gamma} \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_0^2} \begin{cases} e^{2/3}, & \text{полярная фаза,} \\ e^{-1/3}, & \text{A-фаза,} \\ e^{\sqrt{3}-4/3}, & \text{фаза Шариберга-Клемма.} \end{cases} \quad (19.22)$$

Для удобства сравнения мы явно выделили перед фигурной скобкой значение верхнего критического поля при $T = 0$ для изотропного сверхпроводника

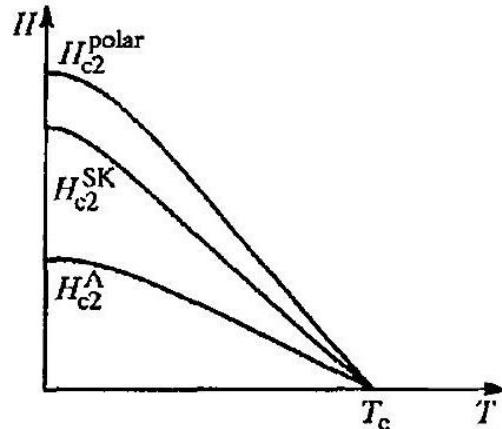


Рис. 17. Качественное новедение $H_2(T)$ в различных фазах с p -спариванием

с s -спариванием. Мы видим, что максимальное значение верхнего критического поля получается для полярной фазы. Графики $H_{c2}(T)$ для фаз с p -спариванием изображены на рис. 17.

Упражнения. I. Доказать тождество (19.4).

2. С помощью уравнений (19.13), (19.16) и (19.20) вычислить значение H_{c2} для сверхпроводника с p -спариванием вблизи критической температуры.

10.2.22 20. Граничные условия для параметра порядка

Из феноменологического анализа в 13 следует, что ввиду внутренней анизотропии параметра порядка, граничные условия для уравнений Гинзбурга-Ландау, определяющие повреждаемые свойства сверхпроводника, также оказываются существенно анизотропными. Предмет настоящего параграфа составляет микроскопический вывод граничных условий для параметров порядка, соответствующих нетривиальным типам спаривания. При этом мы ограничимся рассмотрением сверхпроводников со слабым спин-орбитальным взаимодействием и сферической ферми-поверхностью.

Зеркально отражающая поверхность [79, 80]. В области применимости теории Гинзбурга-Ландау задача сводится к решению линейного интегрального уравнения (17.9), в которое входят мацубаровские функции Грина нормального металла в полупространстве $x > 0$, обращающиеся в нуль на поверхности (то есть при $x = 0$) и имеющие в отсутствии примесей и магнитного поля

следующий вид:

$$G^{(0)}(x_1, x_2; k_{\parallel}, \omega_n) = \sum_q \frac{F_q(x_1, x_2)}{i\omega_n - \xi(q, k_{\parallel})} \quad (20.1)$$

где

$$F_q(x_1, x_2) = \theta(x_1) \theta(x_2) \sin qx_1 \sin qx_2$$

а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Мы использовали смешанное координатно-импульсное представление, в котором функции Грина диагональны по компонентам импульса вдоль поверхности.

Рассмотрим ситуацию на примере сверхпроводника с синглетным спариванием, параметр порядка в котором соответствует одномерному нетривиальному представлению точечной группы симметрии кристалла (см. 4). Обобщение для остальных случаев не составляется труда. Входящий в (17.9) параметр порядка выглядит в смешанном координатно-импульсном представлении следующим образом:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (i\sigma_y)_{\alpha\beta} \eta(\mathbf{r}) \psi(\hat{\mathbf{k}})$$

Подставляя в (17.9) разложение (5.7) и возвращаясь в координатное представление по x , получаем линейное интегральное уравнение для параметра порядка:

$$\eta(x_1) = \int_0^\infty dx_2 K(x_1, x_2) \eta(x_2) \quad (20.2)$$

ядро которого имеет вид

$$\begin{aligned}
K(x_1, x_2) = & -VT_c \sum_n \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, q_1, q_2} \exp(iq_1 x_1 - iq_2 x_2) \times \\
& \times \psi^*(\hat{\mathbf{k}}_1) \psi(\hat{\mathbf{k}}_2) \delta(\mathbf{k}_{1,\parallel} - \mathbf{k}_{2,\parallel}) G^{(0)}\left(k_{1,x} + \frac{q_1}{2}, k_{2,x} + \frac{q_2}{2}; \mathbf{k}_{\parallel}, w_n\right) \times \\
& \times G^{(0)}\left(-k_{1,x} + \frac{q_1}{2}, -k_{2,x} + \frac{q_2}{2}; -\mathbf{k}_{\parallel}, -\omega_n\right)
\end{aligned} \tag{20.3}$$

где $V > 0$ есть константа связи, а базисные функции ψ зависят от направлений векторов $\mathbf{k}_i = (k_{i,x}, \mathbf{k}_{\parallel})$.

Выполняя в (20.1) преобразование Фурье и подставляя результат в (20.3), получаем, после интегрирования сперва по модулям k_1 , а затем по $q_{1,2}$, следующее выражение для ядра ¹:

$$\begin{aligned}
K(x_1, x_2) = & \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[\exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} |x_1 - x_2|\right) F^{(-)}(s) + \right. \\
& \left. + \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} (x_1 + x_2)\right) F^{(+)}(s) \right]
\end{aligned} \tag{20.4}$$

где $s = \cos \theta$, а

$$F^{(\pm)}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f^{(\pm)}(s, \varphi)$$

Функции направлений $f^{(\pm)}(\hat{\mathbf{k}}) = f^{(\pm)}(s, \varphi)$ определяются следующим образом. Для фиксированных значений углов $0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi/2$ вводим два единичных вектора:

$$\hat{\mathbf{k}}_{\pm} = (\pm \cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) = \left(\pm s, \sqrt{1-s^2} \cos \varphi, \sqrt{1-s^2} \sin \varphi \right)$$

связанных отражением в плоскости границы. Тогда

$$f^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(\psi^*(\hat{\mathbf{k}}_+) \psi(\hat{\mathbf{k}}_{\mp}) + \psi^*(\hat{\mathbf{k}}_-) \psi(\hat{\mathbf{k}}_{\pm}) \right)$$

Таким образом, вид ядра $K(x_1, x_2)$ определяется трансформационными свойствами базисных функций представления при отражении в плоскости границы.

Для бесконечного однородного сверхпроводника ядро линейного интегрального уравнения, определяющее параметр порядка, имеет вид:

$$K^{(0)}(x_1 - x_2) = \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} |x_1 - x_2|\right) F^{(-)}(s) \tag{20.5}$$

причем из определения критической температуры:

$$\pi V N_0 T_c \sum_n \frac{1}{|\omega_n|} = 1$$

следует, что

¹ Данное выражение справедливо в квазиклассическом приближении. Это означает, что, поскольку характерный масштаб изменения ядра - длина когерентности \sim значительно превосходит атомный масштаб k_F^{-1} , то можно пренебречь быстросциалирующими вкладами в $K(x_1, x_2)$, пропорциональными $e^{\pm 21k_F x}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 K^{(0)}(x_1 - x_2) = 1 \quad (20.6)$$

По сравнению с бесконечным неограниченным сверхпроводником, учет поверхности свелся к появлению в правой части (20.4) второго слагаемого, убывающего на расстояниях порядка ξ_0 от поверхности и ответственного, как указывалось в §13, за подавление сверхпроводимости в приповерхностном слое.

Границные условия для уравнений Гинзбурга-Ландау получаются из асимптотики решения интегрального уравнения (20.2) при $x \gg \xi_0$. Непосредственной подстановкой в (20.2) с учетом (20.5), убеждаемся, что искомым асимптотическим решением является линейная функция $\eta(x) = \eta_0(1 + x/b)$ с вещественным b . Эффективное граничное условие тогда выглядит следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{b} \eta \Big|_{x=0} \quad (20.7)$$

Параметр b совпадает с интерполяционной длиной, введенной в 813.

Отметим два существенных симметрийных свойства граничных условий. Если базисная функция не меняется при отражении $x \rightarrow -x$, т.е.

$\psi(\hat{k}_-) = \psi(\hat{k}_+)$, то $b = \infty$, т. е. $\partial\eta/\partial x|_{x=0} = 0$. Действительно, в этом случае, распространяя параметр порядка четным образом на «нефизическую» область $x < 0$: $\eta(-x) = \eta(x)$, получим, что ядро (20.4) принимает вид однородного объемного ддра $K^{(0)}$, а уравнение (20.2) в попупространстве становится уравнением во всем пространстве:

$$\eta(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 K^{(0)}(x_1 - x_2) \eta(x_2) \quad (20.8)$$

определяющим температуру сверхпроводящего перехода для бесконечного однородного кристалла. Четное решение этого уравнения в силу (20.5) есть просто константа. Граничное условие, таким образом, имеет вид (13.18):

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (20.9)$$

Покажем, что в другом предельном случае, когда базисная функция меняет знак при отражении, имеем $b = 0$. Параметр порядка теперь также можно продолжить в область $x < 0$, но уже нечетным образом: $\eta(-x) = -\eta(x)$. Тогда уравнение (20.2) вновь переходит в обхемное уравнение, нечетное решетие которого есть линейная функция x , что дает граничное условие вида (13.16):

$$\eta|_{x=0} = 0 \quad (20.10)$$

В общем случае, если базисные функции не имеют определенной четности при отражении в плоскости границы, то интегральное уравнение, определяющее параметр порядка, не сводится к простому вилю и граничные условия не совпадают с (20.9) или (20.10). В этой ситуации можно пользоваться следующим приближенным выражением для интерполяционной длины b :

$$\begin{aligned} \frac{b}{\xi_0} = \frac{1}{7\zeta(3)} \frac{1}{\int_0^1 ds s^2 F^{(-)}(s)} & \left\{ \frac{\pi^4}{24} \int_0^1 ds s^3 (F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)) + \right. \\ & \left. + \frac{[7\zeta(3) \int_0^1 ds s^2 (P^{(-)}(s) + F^{(+)}(s))]^2}{2\pi^2 \int_0^1 ds s (F^{(-)}(s) - F^{(+)}(s))} \right\} \end{aligned} \quad (20.11)$$

Чтобы не прерывать связности изложения, вывод этой формулы вынесен в конец параграфа.

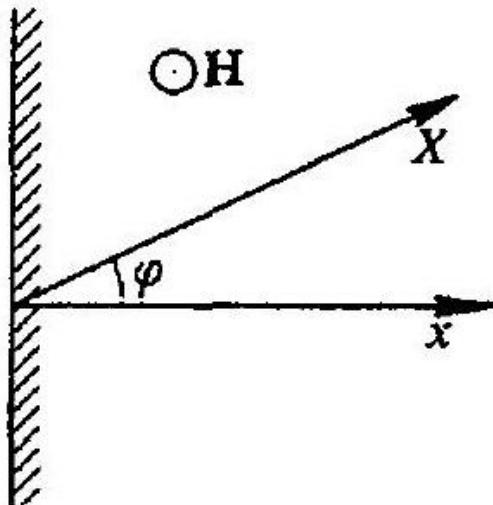
Для сдвиничного представления A_{1g} , соответствующего обычному s волновому параметру порядка, базисная функция $\psi(\hat{\mathbf{k}}) \sim \text{const}$ не изменяет знака при отражении в плоскости граниши, и мы имеем $b = \infty$, что означает существование изотропной в базисной плоскости поверхности сверхпроводимости.

Совсем по-другому обстоит дело в случае неединичных представлений. Рассмотрим ситуацию на примере параметра порядка, соответствующего представлению B_{1g} группы D_6 . В главных осях (X, Y, Z) (см. рис. 18) базисная функция имеет следующий вид:

$$\psi(\hat{\mathbf{k}}) \propto \hat{k}_Z \left(\hat{k}_X^3 - 3\hat{k}_X \hat{k}_Y^2 \right) \quad (20.12)$$

Если поверхность кристалла совпадает с плоскостью XZ , т.е. $\varphi = \pi/2$, то отражению в плоскости граниши соответствует замена $Y \rightarrow -Y$. При таком преобразовании базисная функция не меняет знак, и мы получаем $b = \infty$. Следовательно, поверхность критическое поле максимально и определяется формулой (13.22). Этот же результат мы получим, если угол φ принимает значения $\pi/6, 5\pi/6$ и т. д., поскольку во всех элих случаях $\psi(\hat{\mathbf{k}})$ не меняется при отражении в плоскости граниши.

Если же поверхность сверхпроводника совпадает с кристаллографической плоскостью YZ , т.е. $\varphi = 0$, то



при замене $X \rightarrow -X$ базисная функция (20.15) меняет

Рис. 18. Ориентация поверхности сверхпроводника (внешняя нормаль - вдоль \dot{x}) относительно осей кристаллической решетки. Поле H параллельно оси шестого порядка, внутренняя нормаль направлена вдоль оси x знак. Поэтому $b = 0$ и $f(0) = 0$. В этом случае (а также при $\varphi = \pi/3, 2\pi/3$ и т. д.) поверхность критическое поле минимально и совпадает с верхним критическим полем в объеме (см. (13.17)).

Окончательный вывод:

$$\frac{H_{c3}(T)}{H_{c2}(T)} = \begin{cases} \approx 1,69, & \text{при } \varphi = \frac{(2n+1)\pi}{6} \\ 1, & \text{при } \varphi = \frac{n\pi}{3} \end{cases} \quad (20.13)$$

где $n = 0, 1, \dots, 5$. Таким образом, граничные условия и поверхность критическое поле демонстрируют существенную анизотропию (в данном случае - шестого порядка)². Следует отметить, что результат (20.13) вытекает из общих свойств четности или нечетности базисной функции представления B_1 при отражении в плоскости граниши и поэтому не зависит от выбора $\psi(\hat{\mathbf{k}})$.

При промежуточных значениях угла φ необходимо пользоваться граничными условиями общего вида (20.7), причем для вычисления $b(\varphi)$ периодической функции с периодом $\pi/3$, изменяющейся в пределах 0 до ∞ , важе, разумеется, конкретный выбор базисной

функции. Зависимость $H_{c3}(\varphi)$ должна при этом иметь достаточно резкие пики. Дело в том, что вблизи T_c существует характерный масштаб изменения параметра порядка корреляционная длина $\xi \gg \xi_0$. Если $b(\varphi) < \xi$, что имеет место почти всюду, кроме узких окрестностей шириной $\delta\varphi$ вблизи угла $\varphi = \pi/2$ и т. д., то эффективное граничное условие имеет вид (20.10) и $H_{c3} = H_{c2}$ в целом интервале углов. С другой стороны, при $|\varphi - (2n + 1)\pi/6| < \delta\varphi$ имеем $b(\varphi) > \xi$, т.е. эффективно $b = \infty$ и $H_{c3} \approx 1,69H_{c2}$. Ширина пика определяется конкретным видом функции $b(\varphi)$. Для базисной функции (20.12) вычисление с помощью (20.11) дает:

$$\frac{b(\varphi)}{\xi_0} \sim \frac{1}{\cos^2 3\varphi}, \quad \text{при } \varphi \rightarrow \frac{(2n + 1)\pi}{6}$$

откуда $\delta\varphi \sim \sqrt{\xi_0/\xi}$.

В указанной узкой переходной области улов, где b изменяется от 0 до ∞ , следует ожидать, что сверхпроводящее состояние вблизи поверхности будет возникать в некотором поле между $H_{c2}(T)$ и $1,69H_{c2}(T)$, наклон которого становится функцией H . Следует заметить, что анизотропия интерполяционной длины, а следовательно и поверхностной энергии, вычисленная с помощью формулы (20.11), не описывается, вообще говоря, простейшими допустимыми по симметрии функциями $f(\mathbf{n})$ (см. (13.12)-(13.14)). Однако, положение нуля этих функций (то есть пиков интерполяционной длины) обусловлено симметрийными требованиями.

Диффузно-отражагомая поверхность. Для получения граничных условий на диффузно-отражающей поверхности удобно использовать метод квазиклассических траекторий (см. [81, 82]). Исходным пунктом, как и при рассмотрении случая зеркальной границы, является интегральное уравнение вида (17.9) для компонент параметра порядка.

Принимая во внимание слабую зависимость плотности состояний вблизи ферми-поверхности от энергии и сохраняя только медленно меняющиеся на атомных масштабах вклады, получаем следующее выражение для ядра $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$:

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pi V N_0 T \sum_n \int_0^\infty dt \exp(-2|\omega|t) \langle \psi^*(\hat{\mathbf{n}}_1) \psi_j(\hat{\mathbf{n}}_2) \rangle_{e\mathbf{F}, \text{classical}} \quad (20.14)$$

где $\psi(\hat{\mathbf{n}})$ - базисные функции выбранного представления. Угловые скобки означают усреднение по всем траекториям классической частицы, движущейся с фермиевской скоростью v_F , которые соединяют точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и удовлетворяют условию $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1$. При этом мы должны рассматривать как траектории, стартующие в момент времени $t = 0$ из \mathbf{r}_1 и через время t заканчивающиеся в \mathbf{r}_2 , так и обращенные во времени, то есть те, которые стартуют при $-t$ из \mathbf{r}_2 и заканчиваются в \mathbf{r}_1 при $t = 0$ (ниже мы записываем явные выражения только для траекторий первого типа, поскольку обращенные во времени дают лишь эрмитово-сопряженный вклад в ядро). Единичные векторы $\hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_1)$ и $\hat{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{n}(\mathbf{r}_2)$ обозначают направления \mathbf{n} скорости частицы в соответствующих точках.

Для того, чтобы вывести формулу (20.14), начнем с микроскопического определения ядра K :

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = VTT \sum_n \psi^* \left(\frac{\nabla_{\mathbf{r}_1} - \nabla_{\mathbf{r}'_1}}{2ik_F} \right) \psi \left(\frac{\nabla_{\mathbf{r}'_2} - \nabla_{\mathbf{r}_2}}{2ik_F} \right) \times \\ \times G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G^{(0)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; -\omega_n) \quad (20.15)$$

² Во избежание недоразумений подчеркнем, что под анизотропией поверхностной сверхпроводимости здесь имеется в виду анизотропия наклона линии $H_{c3}(T)$ при фиксированном направлении внешнего поля - вдоль главной оси - и различиях направлениях нормали в поверхности в базисной плоскости.

(ср. с выражением (19.2) для случая p -спаривания). Здесь $G^{(0)}$ есть функции Грина нормального состояния, для которых мы используем следующее представление:

$$G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \sum_i \frac{\Psi_i^*(\mathbf{r}_1) \Psi_i(\mathbf{r}_2)}{i\omega_n - \varepsilon_i} \quad (20.16)$$

где Ψ_i - собственные функции одноточечного гамильтониана H_0 (см. 17), а ε_i - соответствующие собственные значения. Здесь и ниже мы опускаем спиновые индексы.

Подставляя (20.16) в (20.15), получаем:

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{VT}{k_F^2} \sum_n \sum_{ij} \frac{(i|\psi_i^* J(\mathbf{r}_2)|j\rangle \langle j|\psi_j J(\mathbf{r}_2)|i\rangle)}{(i\omega_n - \varepsilon_i)(-i\omega_n - \varepsilon_j)} \quad (20.17)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ есть оператор тока:

$$J(r) = \frac{1}{2i} \lim_{r' \rightarrow r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r'} \right)$$

Следующий шаг состоит в использовании того факта, что только медленно меняющиеся части волновых функций дают вклады в сверхпроводящее ядро, и поэтому можно применять квазиклассическое приближение. Можно показать [81, 82], что в данном приближении произведение двух матричных элементов в числителе (20.17) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\hat{B}|i\rangle &= \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-i(\varepsilon_i - \varepsilon_j)t) \times \\ &\times \left\langle \hat{A}(\mathbf{r}_1) \hat{B}(\mathbf{r}(t)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}(t)) \right\rangle_{\varepsilon_P, \text{classical}} \end{aligned} \quad (20.18)$$

где усреднение проводится по всем классическим траекториям $r(t)$, таким, что $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1$. Разделим теперь область интегрирования в (20.18) на две части: $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, и произведем в первой из них замену $t \rightarrow -t$. Таким образом, мы получаем интеграл по положительным t от суммы двух вкладов - от «прямых» и «обращенных во времени» траекторий, соединяющих точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (t при этом имеет смысл времени пролета частицы по траектории). После суммирования по i и j приходим к формуле (20.14).

Рассмотрим оба типа рассеяния квазичастиц на поверхности: зеркальное и диффузное.

Кроме того, мы ограничимся сплошь сверхпроводниками, следовательно, квазиклассические траектории в объеме образца являются

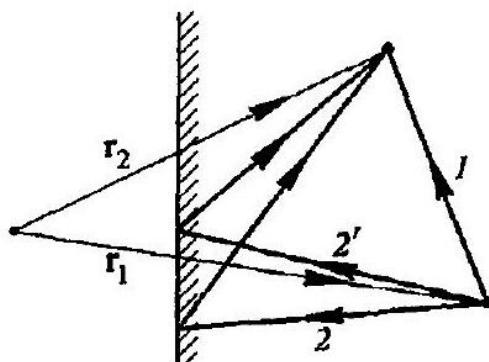


Рис. 19. Прямая (1) и отраженные (2 и 2') траектории из точки r_1 в точку r_2 в случае диффузного отражения на границе прямыми линиями, а все вклады в ядро могут быть разделены на два класса: «прямые» и «отраженные» (см. рис. 19).

Первый вклад определяется тривиальной траекторией: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F t$. Ее подстановка в (20.17) дает следующее выражение:

$$K^{(0)}(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} |x_1 - x_2|\right) F^{(0)}(s) \quad (20.19)$$

где

$$F^{(0)}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} (\psi^*(s, \varphi)\psi(s, \varphi) + \psi'^*(-s, \varphi)\psi(-s, \varphi)) \quad (20.20)$$

Как и выше, мы ввели обозначение: $s = \cos \theta$, где θ, φ есть полярный и азимутальный углы, соответственно (полярная ось направлена вдоль оси \hat{x} — нормали к поверхности). Подразумевается также, что все суммы по частотам обрезаны на граничной частоте ε_l .

Что касается второго вклада в ядро, который дает все возможные отраженные траектории, то его вил существенно зависит от характера отражения квазичастиц на поверхности. В случае зеркального отражения мы имеем дело лишь с одной траекторией:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F t, & t < t_0 = -\frac{x_1}{v_{F,x}} \\ \bar{\mathbf{v}}_F(t - t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

где t_0 соответствует моменту соударения с поверхностью, а $\bar{\mathbf{v}}_F = (-v_{F,x}, v_{F,y}, v_{F,z})$. Подставляя это выражение для $\mathbf{r}(t)$ в (20.17) и выполняя интегрирования, окончательно приходим к следующему результату:

$$K^{(\text{spec})}(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T}{v_F} \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F s} (x_1 + x_2)\right) F^{(\text{spec})}(s) \quad (20.21)$$

также

$$F^{(\text{spec})}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} (\psi^*(-s, \varphi)\psi(s, \varphi) + \psi^*(s, \varphi)\psi(-s, \varphi)) \quad (20.22)$$

Сумма выражений (20.19) и (20.21) совпадает, как и следовало ожидать, с формулой (20.4), полученной путем непосредственного интегрирования фулки Грина.

В случае диффузного отражения, принимая во внимание вклады от всех возможных траекторий вида:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_F^{(1)} t, & t < t_0 = -\frac{x_1}{v_{F,x}^{(1)}} \\ \mathbf{v}_F^{(2)}(t - t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

где $\mathbf{v}_F^{(1)}$ и $\mathbf{v}_F^{(2)}$ — скорости частицы на двух прямых отрезках данной траектории, и интегрируя по всем отраженным траекториям с весовым множителем $(1/\pi) \cos \theta$, получаем:

$$K^{(\text{diff})}(x_1, x_2) = \frac{\pi V N_0 T_c}{v_F} \times \sum_n^1 \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \exp\left(-\frac{2|\omega_n|}{v_F} \left(\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2}\right)\right) F^{(\text{diff})}(s_1, s_2) \quad (20.23)$$

где

$$F^{(\text{diff})}(s_1, s_2) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} (\psi^*(-s_1, \varphi_1) \psi(s_2, \varphi_2) + \psi^*(s_1, \varphi_1) \psi(-s_2, \varphi_2))$$

Окончательно получаем:

$$K(x_1, x_2) = K^{(0)}(x_1, x_2) + K^{(\text{diff})}(x_1, x_2) \quad (20.24)$$

В общем случае анизотропного спаривания и произвольной ориентации поверхности уравнение (20.2) с ядром (20.24) не может быть решено точно³, однако для вычисления b можно использовать вариационный метод. В результате интерполяционная линия b всегда оказывается порядка длины когерентности ξ_0 , то есть эффективное граничное условие в области Гинзбурга-Ландау имеет вид (20.10), и поверхносная сверхпроводимость отсутствует для всех направлений нормали. В случае изотропного спаривания можно показать [83], что граничное условие имеет вид (20.9) вне зависимости от характера отражения электронов.

Таким образом, поверхносная сверхпроводимость на диффузно отражающей границе оказывается весьма чувствительной к внутренней симметрии параметра порялка, поскольку случайный характер отражения электронов приводит к его изотропизации, а это может быть достигнуто лишь путем подавления сверхпроводимости вблизи поверхности.

Выход формулы (20.11). Для вычисления коэффициента b в линейной асимптотике параметра порядка воспользуемся вариационным методом.

Перейдем в (20.4) к безразмерной переменной $X = x/\xi_0$. Тогда

$$K(X_1, X_2) = \frac{1}{2} V N_G \sum_n \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[F_i^{(-)}(s) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{s} |X_1 - X_2|\right) + F_i^{(+)}(s) \exp\left(-\frac{|2n+1|}{s} (X_1 + X_2)\right) \right] \quad (20.25)$$

При $X \gg 1$, ищем решение в виде (индекс i опускаем): $\eta(X) = C(X + q(X))$, причем $b/\xi_0 = \lim_{X \rightarrow \infty} q(X)$. Уравнение для $q(X)$ имеет вид

$$q(X_1) = \frac{1}{2} E(X_1) + \int_0^\infty dX_2 K(X_1, X_2) q(X_2) \quad (20.26)$$

$$E(X_1) = V N_0 \sum_n \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^1 ds [F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)] \exp\left(-\frac{|2n+1|}{s} X_1\right)$$

Для формулировки вариационного принципа заметим, что интегральное уравнение на параметр порядка получается вариацией функционала: $\delta\Phi/\delta q = 0$, где

$$\Phi[q] = \frac{\int_0^\infty dX q(X) [q(X) - \int_0^\infty dX' \Psi(X, X') q(X')]}{\left[\int_0^\infty dX q(X) E(X) \right]^2} \quad (20.27)$$

При этом экстремальное (минимальное) значение функционала есть

$$\Phi_{\min} = \frac{1}{2 \int_0^\infty dX E(X) q(X)}$$

³ Если параметр порядка преобразуется согласно неединичному представлению точечной группы симметрии кристалла, то шесть некоторых выделенных направлений нормали вклад K (diff) (x_1, x_2) тождественно обращается в нуль в результате интегрирования по углам. Аналогичная ситуация имеет место для фаз p-спаривания при любой ориентации поверхности [72]. Негральное уравнение (20.2) в этом случае может быть решено методом Винера-Хопфа.

Покажем теперь, что нужное нам пределное значение решения уравнения (20.25) при $X \rightarrow \infty$ выражается как раз через Φ_{\min} . Пусть $q(X) = b/\xi_0 + Q(X)$, где $Q(X) \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \infty$. Подставляя $q(X)$ в (20.25), получаем уравнение на $Q(X)$, затем умножаем обе его части на X_1 и, интегрируя по X_1 от 0 до ∞ , окончательно имеем:

$$\frac{b}{\xi_0} = \frac{1}{7\zeta(3)} \frac{1}{\int_0^1 ds s^2 F^{(-)}(s)} \left\{ \frac{\pi^4}{24} \int_0^1 ds s^3 [F^{(-)}(s) + F^{(+)}(s)] + \frac{1}{VN_0 \Phi_{\min}} \right\}$$

Величину Φ_{\min} можно вычислять, используя вариационный принцип. Выбирая в качестве пробной функции пулевого приближения произвольную константу и подставляя ее в (20.26), приходим к формуле (20.11).

10.2.23 21. Вияние примесей на необычную сверхпроводимость

Хорошо известно, что немагнитные примеси не влияют на термодинамические свойства обычных сверхпроводников. В частности, критическая температура не зависит от концентрации немагнитных примесей. Эффект подавления сверхпроводимости возникает только за счет рассеяния на магнитных примесях, разрушающих когерентность спиновых состояний электронов в куперовских парах с $S = 0$. в необычных сверхпроводниках к такому же эффекту приводит и рассеяние на обычных примесях, разрушающее когерентность орбитальных состояний спаренных электронов.

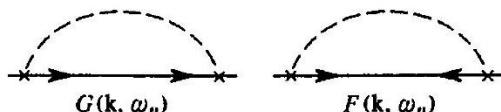
Здесь мы рассмотрим два эффекта, связанных с примесями в необычных сверхпроводниках: во-первых, уменьшение критической температуры немагнитными примесями, во-вторых, изменение плотности состояний квазичастиц и, соответственно, термодинамических и кинетических свойств при $T \rightarrow 0$.

Уравнения Горькова и температура перехода. Функции Грина сверхпроводника при произвольной температуре $T \leq T_c$ при наличии примесей определяются путем решения уравнений Горькова (17.6)-(17.8). При этом в одночастичный гамильтониан следует добавить слагаемое вида

$$II_{\text{imp}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}\alpha}^+ a_{\mathbf{k}'\beta} \quad (21.1)$$

где $u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ есть амплитуда рассеяния электрона в поле примесей, в общем случае зависящая от спина.

Поскольку мы интересуемся лишь характеристиками, усредненными по реализациям случайного потенциала (по положениям примесей), то для нахождения функций Грина следует воспользоваться уравнениями (17.11), включив в них примесные собственно-энергетические части (см. рис. 20), причем усреднение производится в точности так же, как и в теории обычных сверхпро-



6

Рис. 20. Примесные собственно-энергетические функции. Борновское приближение водящих сплавов [71]. Мы не принимаем во внимание интерференцию волн, рассеянных на разных примесях, предполагая выполнение условия слабого беспорядка $k_F l \gg 1$, где $l = v_F \tau$ — длина свободного пробега. Кроме того, мы пренебрегаем возможностью многократного рассеяния на одной и той же примеси, что справедливо в случае малости потенциала примесей по сравнению с характерной энергией электронов ϵ_F (борновское приближение)¹.

В указанных условиях диаграммы для усредненных собственоэнергетических частей содержат по два примесных креста, соединенных пунктирной линией (рис. 21). Если рассеяние на примесях изотропно и не зависит от спина, то пунктириой линии соответствует выражение

$$n_{\text{imp}} u^2 = \frac{1}{2\pi N_0 \tau}$$

где n_{imp} - концентрация примесей, u - входящая в (21.1) амплитуда рассеяния, а τ есть время свободного пробега квазичастиц.

В анизотропном сверхпроводнике амплитуда рассеяния на примеси зависит от углов, и пунктиру отвечает выражение $\hat{\tau}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, обладающее точечной симметрией кристалла (см. 4). Мы можем представить его в виде разложения по неприводимым представлениям группы G :

$$\tau_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\Gamma} \left(\frac{1}{\tau_{\Gamma,1}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{\tau_{\Gamma,2}} \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \right) \sum_{i=1}^{d_{\Gamma}} \psi_i^{\Gamma}(\hat{\mathbf{k}}) \psi_i^{\Gamma*}(\hat{\mathbf{k}}') \quad (21.2)$$

для случая слабого спин-орбитального взаимодействия, или

$$\tau_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\Gamma} \frac{1}{\tau_{\Gamma}} \sum_{i=1}^{d_{\Gamma}} \left(\psi_i^{\Gamma}(\hat{\mathbf{k}}) \sigma \right)_{\alpha\beta} \left(\psi_i^{\Gamma*}(\hat{\mathbf{k}}') \sigma \right)_{\gamma\delta}$$

для случая сильного спин-орбитального взаимодействия. Индекс Γ обозначает неприводимые представления размерности d_{Γ} группы G , а i нумерует базисные функции $\psi_i^{\Gamma}(\hat{k})$. Коэффициенты разложения τ^{-1} пропорциональны концентрации примесей, причем слагаемые с τ_2 в выражении (21.2) соответствуют рассеянию с переворотом спина.

Для простоты ограничимся рассмотрением изотропного рассеяния на немагнитных примесях. Тогда усредненная нормальная собственноэнергетическая часть (см. рис. 20а) имеет вид:

$$\Sigma_{1,\alpha\beta}(\omega_n) = \Sigma(\omega_n) \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi N_0 \tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G(\mathbf{k}, \omega_n) \delta_{\alpha\beta} \quad (21.3)$$

Аномальная собственно-энергетическая часть, соответствующая диаграмме на рис. 20б:

$$\Sigma_{2,\alpha\beta}(\omega_n) = \frac{1}{2\pi N_0 \tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) \quad (21.4)$$

обращается в нуль в результате интегрирования по направлениям k в случае изотропного примесного рассеяния для любого сверхпроводящего состояния с параметром порядка, преобразующимся согласно неединичному представлению.

Уравнения Горькова теперь записываются как

$$\begin{aligned} (i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n)) G(\mathbf{k}, \omega_n) \delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) F_{\gamma\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) &= \delta_{\alpha\beta} \\ (i\omega_n + \xi_k - \Sigma(\omega_n)) F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}, \omega_n) + \Delta_{\alpha\beta}^+(\mathbf{k}) G(\mathbf{k}, \omega_n) &= 0 \\ (i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n)) F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) - \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) G(-\mathbf{k}, -\omega_n) &= 0 \end{aligned} \quad (21.5)$$

Отсюда мы получаем следующие выражения для функций Грина сверхпроводника:

¹ Некоторые следствия выхода за пределы борновского приближения будут рассмотрены ниже.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \omega_n) &= -\frac{i\bar{\omega}_n + \xi_k}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \\ F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) &= \frac{\Delta_{\alpha\beta}(k)}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \Delta_k^2} \end{aligned} \quad (21.6)$$

где

$$i\tilde{\omega}_n = i\omega_n - \Sigma(\omega_n) \quad (21.7)$$

Собственно-энергетическая часть должна быть вычислена самосогласованным образом. Подставляя выражение для функции G из (21.6) в (21.3) и выполняя интегрирование по энергии в предположении электрон-дырочной симметрии, приходим к следующему уравнению:

$$\Sigma(\omega_n) = -\frac{i\bar{\omega}_n}{2\tau} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + \Delta_k^2}} \quad (21.8)$$

При $T < T_c$ решение уравнений (21.7), (21.8) определяется конкретным видом параметра порядка.

Вблизи критической температуры параметр порядка мал, и можно пренебречь зависимостью правой части уравнения (21.8) от Δ_k . Учитывая (21.7), получаем:

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\tau} \operatorname{sign} \tilde{\omega}_n$$

Опсюда

$$\bar{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\tau} \operatorname{sign} \omega_n$$

и, следовательно, собственно-энергетическая часть при $\Delta_k \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\Sigma(\omega_n) = -\frac{i}{2\tau} \operatorname{sign} \omega_n \quad (21.9)$$

то есть совпадает, как и должно быть, с соответствующим выражением для нормального металла.

Усредненная аномальная функция Грина выглядит тогда следующим образом:

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{[\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n]^2 + \xi_k^2} \quad (21.10)$$

Подставляя (21.10) в условие самосогласования (17.5) и выполняя интегрирование по ξ , приходим:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \pi N_0 V T \sum_n \frac{\operatorname{sign} \omega_n}{\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} V_{\beta\alpha,\gamma\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\gamma\delta}(\mathbf{k}')$$

После подстановки сююда разложений потенциала парного притяжения V из §5, получаем:

$$\begin{aligned} 1 &= \pi N_0 V T \sum_n \frac{\operatorname{sign} \omega_n}{\omega_n + (1/2\tau) \operatorname{sign} \omega_n} = \\ &= 2\pi N_0 V T \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\omega_n} + 2\pi N_0 V T \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\omega_n + 1/2T} - \frac{1}{\omega_n} \right) \end{aligned} \quad (21.11)$$

Логарифмически расходящаяся сумма в первом слагаемом обрезается на граничной частоте ε_1 . Вспоминая определение критической температуры T_{c0} в чистом сверхпроводнике (см. (18.17)), и переписывая второе (сходящееся) слагаемое в (21.11) с учетом определения дигамма-функции $\psi(x)$, мы приходим к окончательному результату [84]:

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T_c}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (21.12)$$

Полученное уравнение определяет понижение критической температуры для произвольного сверхпроводящего состояния с нетривиальным спариванием за счет изотропного рассеяния на немагнитных примесях относительно температуры перехода T_{c0} чистого сверхпроводника, характерной для представления Γ , согласно которому преобразуется параметр порядка. Обратим внимание на то, что (21.12) (с точностью до обозначений) совпадает с уравнением, описывающим подавление критической температуры парамагнитными примесями в обычном сверхпроводнике [85].

В случае малой концентрации примесей получаем:

$$T_c = T_{c0} - \frac{\pi}{8\tau} \quad (21.13)$$

(мы воспользовались тем, что $\psi'(1/2) = \pi^2/2$).

Таким образом, немагнитные примеси в сверхпроводнике с нетривиальным спариванием подавляют сверхпроводимость. Качественно данный эффект можно объяснить следующим образом. Внесение примесей приводит к изотропизации щели в спектре возбуждений. Однако, если куперовское спаривание происходит в состоянии с нарушенной пространственной симметрией, то единственной возможностью сделать щель изотропной является тождественное обращение ее в нуль на всей поверхности Ферми, что и происходит при некоторой концентрации примесей $\tau\Delta_0 \sim 1$, где Δ_0 - мопуль щели при $T = 0$ в отсутствие примесей.

Плотность состояний. Представляет интерес проследить, каким образом происходит подавление параметра порядка и что происходит с нулями щели при увеличении концентрации примесей. Для ответа на эти вопросы найдем плотность состояний квазитастиц $N(E)$ (см. 17) при $E \rightarrow 0$. При этом мы не будем принимать во внимание уравнение самосогласования для параметра порядка в присутствие примесей, так как это не влияет на поведение $N(E)$ при $E \rightarrow 0$, а лишь меняет величину модуля параметра порядка.

Выполним в (21.7) аналитическое продолжение и введем обозначение

$$t(E) = (i\tilde{\omega}_n)|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} = E - \Sigma^R(E) \quad (21.14)$$

Тогда выражение (17.27) для плотности состояний может быть с учетом (21.3), записано следующим образом:

$$N(E) = -2N_0\tau \operatorname{Im} \Sigma(\omega_n)|_{i\omega_n+E+i0} = 2N_0\tau \operatorname{Im} t(E) \quad (21.15)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению зависимости $\operatorname{Im} t(E)$. Для ее вычисления необходимо произвести в (21.8) аналитическое продолжение на ось вещественных частот. В результате получается зависящее от структуры сверхпроводящего параметра порядка $\Delta(k)$ уравнение самосогласования для функции $t(E)$:

$$t = E + \frac{i}{2\tau}g(t) \quad (21.16)$$

где

$$g(t) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta_k^2}} \quad (21.17)$$

(знак корня при аналитическом продолжении выбирается таким образом, чтобы $\text{Im } \Sigma^R < 0$).

В качестве примеров, иллюстрирующих поведение плотности состояний в необычных сверхпроводниках с примесями, найдем решения уравнения (21.16) для различных фаз с p -спариванием.

B-фаза. Аналогично случаю обычной сверхпроводимости, для *B*-фазы мы имеем $\Delta_k^2 = \Delta^2 = \text{const}$, и (21.16) принимает вид

$$t = E + \frac{i}{2\tau} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta^2}}$$

Мнимая часть у решения $t(E)$ данного уравнения (а, следовательно, и ненулевая плотность состояний) появляется лишь при $E > E_c$, где величина порога соответствует максимальному значению функции $E(t) = t - t/2\tau\sqrt{\Delta^2 - t^2}$ (см. [85]):

$$E_c^2 = \Delta \left[1 - \left(\frac{1}{2\tau\Delta} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (21.18)$$

Мы видим, что при достаточно высокой концентрации немагнитных примесей такод, что $\tau < 1/2\Delta$, щель в спектре обращается в нул. При этом, однако, критическая температура, определяемая уравнением (21.12), все еще больше нуля, что соответствует бесщелевой сверхпроводимости, совершенно аналогично тому, что имеет место в обычных сверхпроводниках с парамагнитными примесями (см. упражнение в конце параграфа).

A-фаза. Параметр порядка имеет вид $\Delta_k^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$ (мы выбрали такую же нормировку модуля Δ , как и в 7). Выполняя интегрирование по углам в (21.17), получаем:

$$t = E + \frac{i}{4\tau\Delta} t \ln \frac{t + \Delta}{t - \Delta}$$

Это уравнение может быть решено при $E \rightarrow 0$:

$$t = \frac{E}{1 - \pi/(4\tau\Delta)} + \frac{iE^2}{2\tau\Delta^2[1 - \pi/(4\tau\Delta)]^3}$$

откуда следует, что

$$N(E) = N_0 \frac{1}{[1 - \pi/(4\tau\Delta)]^3} \left(\frac{E}{\Delta} \right)^2$$

С увеличением степени загрязнения, то есть уменьшением времени пробега τ , коэффициент при E^2 растет и при $\tau\Delta = \pi/4$ обращается в бесконечность. Этим определяется критическая концентрация примесей, выше которой

$$N(E = 0) = 2N_0\tau\Delta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\tau\Delta \right) \quad (21.19)$$

Физический смысл полученного результата становится ясным при сравнении с (17.30): нули в спектре квазичастиц для *A*-фазы остаются изолированными точками при малом количестве примесей и размываются в « пятна » нулей [23, 86] только выше критической концентрации.

Полярная фаза. Параметр порядка имеет вид $\Delta_k^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$. Из (21.16) имеем:

$$t = E + \frac{i}{2\tau\Delta} t \arcsin \frac{\Delta}{t}$$

Легко убедиться в том, что это уравнение имеет при $E = 0$ следующее решение

$$t(E=0) = \frac{i\Delta}{\sinh 2\tau\Delta} \quad (21.20)$$

откуда

$$N(E=0) = N_0 \frac{2\tau\Delta}{\sinh 2\tau\Delta} \quad (21.21)$$

Это означает, что при сколь угодно слабом загрязнении линии нулей становятся цельми полосами [23, 86]. Такой эффект приведет к изменению термодинамических свойств сверхпроводника с подобной структурой щели при $T \rightarrow 0$, в частности, электронная теплоемкость станет пропорциональной температуре.

Упражнение. С помощью уравнения (21.12) вчислить значение критической концентрации примесей, при которой T_c обращается в нуль, и найти область существования бесщелевой сверхпроводимости в B -фазе.

Выход за пределы борновского приближения. Приведенный выше анализ базировался на использовании борновского приближения, то есть на пренебрежении возможностью многократного рассеяния электрона на одной и той же примеси. При учете такого рассеяния необходимая модификация теории сводится к замене собственно-энергетических частей, найденных в борновском приближении, на точные. Для обычных сверхпроводников при этом сохраняется основной вывод об отсутствии подавления сверхпроводимости немагнитными примесями. Для необычных сверхпроводников рассеяние на примесях подавляет сверхпроводимость, а выход за пределы борновского приближения приводит к существенным изменениям в поведении функций Грина, а, следовательно, и физических величин [87, 88].

Мы рассмотрим случая слабого беспоряшка, то есть достаточно малой концентрации примесей, когда выполняется условие $k_F l \gg 1$, позволяющее не учитывать диаграммы с пересекающимися пунктирными линиями. Физически это означает пренебрежение интерференцией волн, рассеянных на разных примесях, и ответ для $\Sigma(\omega_n)$ получается просто умножением вклада одной примеси $\Sigma_0(\omega_n)$ на их концентрацию: $\Sigma(\omega_n) = n_{\text{imp}} \Sigma_0(\omega_n)$. Величина $\Sigma_0(\omega_n)$ непосредственно связана с точной амплитудой рассеяния на нулевой угол на одной примеси, которая определяется суммой диаграмм

Рис. 21. Диаграммное уравнение для точной амплитуды рассеяния на одной примеси на рис. 21. Для изотропного точечного потенциала примесей аномальная собственно-энергетическая часть обращается в нуль для любых сверхпроводящих состояний с параметрами порядка, соответствующими неединичным представлениям группы симметрии кристалла. В этом случае амплитуда рассеяния характеризуется единственной скалярной функцией $f(\omega_n)$, причем

$$\Sigma(\omega_n) = n_{\text{imp}} f(\omega_n) \quad (21.22)$$

В общем же случае амплитуда рассеяния зависит от импульсов и является матрицей 4×4 (T -матрицей) в спиновом пространстве и «пространстве» частица-дырка (см. 17).

Суммирование диаграммного ряда на рис. 21 позволяет выразить $f(\omega_n)$ через затравочную амплитуду рассеяния u . Удобнее, однако, записать точную амплитуду рассеяния в несколько ином виде, вводя фазовый сдвиг δ_0 рассеянной s -волны в нормальном состоянии:

$$f(\omega_n) = \frac{k_n}{1 - k_n \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)} \quad (21.23)$$

где $k_n = -\operatorname{tg} \delta_0 / (\pi N_0)$, а $G(\mathbf{k}, \omega_n)$ есть усредненная функция Грина сверхпроводника². Подставляя (21.23) в (21.22), включая вещественную (четную по ω_n) часть собственно-энергетической функции в перенормировку химического потенциала и выделяя явно мнимую (нечетную по ω_n) часть, получаем:

$$\Sigma(\omega_n) = \frac{n_{\text{imp}} k_n^2 \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)}{1 - k_n^2 (\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n))^2} \quad (21.24)$$

Здесь мы использовали тот факт, что в случае элекрон-дырочной симметрии $\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, -\omega_n) = -\sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n)$ (см. (21.6)). Подставляя в (21.24) выражение для функции Грина (21.6), интегрируя по ξ и выполняя аналитическое продолжение с учетом (21.14), получаем окончательно уравнение для функции $t(E)$, обобщающее (21.16) на случай неборновского рассеяния:

$$t = E + i\Gamma \frac{g(t)}{\cos^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_0 g^2(t)} \quad (21.25)$$

где

$$\Gamma = \frac{n_{\text{imp}}}{\pi N_0} \sin^2 \delta_0$$

а $g(t)$ определяется формулой (21.17). В пределе слабого рассеяния, устремляя δ_0 К нулю, имеем:

$$\Gamma \rightarrow \frac{n_{\text{imp}}}{\pi N_0} \delta_0^2 = \pi N_0 n_{\text{imp}} u^2 = \frac{1}{2\tau_{\text{Born}}}$$

и (21.25) переходит в (21.16).

Выражение (21.15) для плотности состояний квазичастиц справедливо лишь в борновском приближении. Для вычисления $N(E)$ в случае произвольных фазовых сдвигов вернемся к определению (17.27):

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega_n) \Big|_{i\omega_n \rightarrow E+i0} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}} G^R(\mathbf{k}, E) \quad (21.26)$$

Входящая сюда функция Грина получается путем аналитического продолжения в (21.5):

$$G^R(\mathbf{k}, E) = \frac{t(E) + \xi_k}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2} \quad (21.27)$$

Из (21.26), (21.27) и (21.17) окончательно получаем:

$$N(E) = N_0 \operatorname{Re} g(t(E)) \quad (21.28)$$

В борновском приближении, как мы видели, изолированные точки нулей в сверхпроводнике со структурой, например, A -фазы, являются устойчивыми по отношению к слабому загрязнению. Покажем теперь, что для достаточно сильного потенциала примесей это не так.

Рассмотрим противоположный борновскому случай резонансного рассеяния, то есть больших фазовых сдвигов: $\delta_0 \rightarrow \pi/2$. Подставляя в (21.25) $\Delta_{\mathbf{k}}^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$, получаем для $t(E)$ уравнение:

$$t = E + 2i\Gamma \Delta \frac{1}{t} \left(\ln \frac{t + \Delta}{t - \Delta} \right)^{-1} \quad (21.29)$$

имеющее при $E = 0$ и $\Gamma \ll \Delta$ следующее решение:

² Чтобы не прерывать связности изложения, вывод формулы (21.23) вынесен в конец параграфа.

$$t(E) = i\sqrt{\frac{2\Gamma\Delta}{\pi}} \quad (21.30)$$

Подставляя его в (21.17), получаем:

$$\operatorname{Re} g(t(E=0)) = \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{2\Delta}}$$

Окончательно:

$$N(E=0) = N_0 \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{2\Delta}} \quad (21.31)$$

Мы видим, что плотность состояний при $E = 0$ оказывается конечной, но, разумеется, обращается в нуль при уменьшении степени загрязнения, то есть при $\Gamma \rightarrow 0$. Это означает, что внесение сколь угодно малого количества резонансных примесей превращает изолированные нули щели в спектре сверхпроводника в пятна конечного размера [88].

Упражнения. 1. Найти понижение критической температуры сверхпроводника с p -спариванием вследствие резонансного рассеяния на примесях. Как изменится в этом случае уравнение (21.12)?

2. Вычислить плотность состояний при $E = 0$ для полярной фазы при резонанском рассеянии на примесях ³.

Вывод формулы (21.23). Диаграммный ряд на рис. 21 сводится, как легко видеть, к следующему уравнению на амплитуду рассеяния:

$$f(\omega) = u + u \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}, \omega) f(\omega) \quad (21.32)$$

Запишем входящую сюда функцию Грина сверхпроводника как

$$G = G_{\text{off}}^{(0)} + G - G_{\text{off}}^{(0)} \quad (21.33)$$

где

$$G_{\text{off}}^{(0)} = \frac{1}{2} (G^{(0)R} + G^{(0)A})$$

есть вещественная часть функции Грина для рассеяния на одной примеси в нормальном состоянии. В соответствии с определением функции Грина уравнения Шредингера:

$$G^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon + i0} = P \frac{1}{\omega - \varepsilon} - i\pi\delta(\omega - \varepsilon) = G_{\text{off}}^{(0)} + G_{\text{on}}^{(0)}$$

где ε есть энергия свободных электронов, взаимодействующих с примесью, а P - символ главного значения интеграла. Индекс «off» («оп») у вещественной (мнимой) части функции Грина означает, что промежуточные состояния не находятся (находятся) на массовой поверхности.

³ См. Ю. С. Бараи, В. П. Минеев, А. А. Свидзинский //Письма в ЖЭТФ. 1997. 65. 606 .

Подстановка (21.33) в (21.32) и перегруппировка слагаемых дают:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \left(u + u^2 \sum_{\mathbf{k}} G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) + \dots \right) \times \\ &\times \left(1 + \sum_{\mathbf{k}} \left[G(\mathbf{k}, \omega) - G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) \right] f(\omega) \right) = \\ &= k_n + k_n \sum_{\mathbf{k}} \left[G(\mathbf{k}, \omega) - G_{\text{off}}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) \right] f(\omega) \end{aligned} \quad (21.34)$$

Здесь мы ввели величину k_n , описывающую рассеяние на примеси в нормальном металле и удовлетворяющую соотношению:

$$k_n = u + uG_{off}^{(0)}k_n$$

В общем случае вместо одной скалярной функции k_n необходимо рассматривать матрицу 4×4 (-матрицу) [88].

Величина k_n параметризуется с помощью фазового сдвига рассеянных волн следующим образом:

$$k_n = -\frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\pi N_0} \quad (21.35)$$

Стоящая в правой части (21.34) сумма по димпулесам от $G_{off}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)$ равна нулю и мы приходим к формуле (21.23).

10.2.24 22. Электронная теплопроводность необычных сверхпроводников

Наличие симметрийных нулей в спектре элементарных возбуждений приводит, как мы убедились выше, к существенному изменению термодинамических характеристик сверхпроводника при низких температурах. В кинетике необычных сверхпроводников нули в спектре также играют важную роль.

Наиболее просто неравновесные свойства сверхпроводников описываются с помощью кинетического уравнения Больцмана, которому удовлетворяет функция распределения возбуждений. Разумеется, большинством кинетическая теория справедлива лишь для газа хорошо определенных элементарных возбуждений, энергия которых велика по сравнению с обратным временем их жизни. Это условие заведомо нарушается в необычных сверхпроводниках с нулями в спектре элементарных возбуждений, обладающих конечной плотностью состояний при нулевой энергии. Поэтому описание релаксационных процессов с помощью уравнения Больцмана справедливо только в области достаточно высоких температур, где средняя тепловая энергия возбуждений велика по сравнению с их затуханием γ . В чистых сверхпроводниках данная область охватывает почти весь диапазон температур, кроме депрессии охлаждения нуля, поэтому здесь можно пользоваться уравнением Больцмана. Следует, однако, иметь в виду, что и в этой области вычисление энергетической зависимости времени свободного пробега возбуждений, через которое выражаются кинетические коэффициенты, требует привлечения

микроскопической теории. При $T < \gamma$ кинетические коэффициенты можно вычислить только теоретико-полевыми методами. Мы изложим здесь оба подхода к кинетике сверхпроводников на примере вычисления электронной теплопроводности.

Метод кинетического управления. Напомним определение коэффициента теплопроводности §. Поток тепла, переносимый неравновесными возбуждениями, определяется формулой

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (22.1)$$

где E – энергия, $\mathbf{v} = \partial E / \partial \mathbf{k}$ – скорость квазичастич в сверхпроводнике ¹, а $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – неравновесная функция распределения возбуждений, взаимодействующих с примесями. Коэффициент теплопроводности x связывает поток тепла с градиентом температуры

$$Q = -x \nabla T \quad (22.2)$$

Функция $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial k} \nabla f - \nabla E \frac{\partial f}{\partial k} = \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\text{imp}} \quad (22.3)$$

где в правой части стоит интеграл столкновений возбуждений с примесями². В стационарном случае и для слабо неравновесных распределений это уравнение может быть упрощено. Поскольку интеграл столкновений обращается в нуль при подстановке локально-равновесной функции распределения $f_k^{(0)}(\mathbf{r}) = f(E_k(\mathbf{r})/T(\mathbf{r}))$, где f – фермиевская функция (6.2), то в линейном по отклонению от равновесия приближении в левой части уравнения (22.3) мы можем заменить f на $f^{(0)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial k} \nabla f_k^{(0)} - \nabla E \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial k} &= \frac{\partial E}{\partial k} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial E} T \left(\frac{1}{T} \nabla E - \frac{E}{T^2} \nabla T \right) - \\ &- \nabla E \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{E}{T} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial k} \nabla T \end{aligned} \quad (22.4)$$

Обратим внимание на то, что члены, содержащие градиенты щели Δ , в точности сократили друг друга.

Интеграл столкновений в случае слабого беспорядка получается умножением вклада одной примеси на их концентрацию:

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_{\text{imp}} = n_{\text{imp}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (\delta f_{k'} - \delta f_k) \quad (22.5)$$

где $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ – вероятность упругого рассеяния квазичастиц, а δf – отклонение функции распределения от равновесной, входящее, согласно (22.1), в формулу для теплового поглощения:

$$\mathbf{Q} = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k \mathbf{v}_k \delta f_k(\mathbf{r}) \quad (22.6)$$

В борновском приближении вероятность w вычисляется с помощью «золотого правила Ферми»:

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} |(\mathbf{k}' | H_{\text{imp}} | \mathbf{k})|^2 \delta(E_k - E_{k'})$$

Применяя преобразование Боголюбова (5.25) к гамильтониану (21.1), описывающему взаимодействие электронов с немагнитной примесью, получаем:

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} u^2 \mathcal{C}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(E_k - E_{k'}) \quad (22.7)$$

где так называемый фактор когерентности дается выражением:

$$\mathcal{C}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k \xi_{k'} - \text{Re } \Delta^2 g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}')}{E_k E_{k'}} \right), & \text{при } S = 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k \xi_{k'} - \text{Re } \Delta^2 d(\mathbf{k}) d(\mathbf{k}')}{E_k E_{k'}} \right), & \text{при } S = 1 \end{cases}$$

¹ Пространственная зависимость E и \mathbf{v} возникает из-за зависимости энергетической щели Δ от температуры, которая, в свою очередь, является фундаментальной. Предполагается, что T медленно меняется на масштабе корреляционно длины.

² Вывод кинетических уравнений для сверхпроводника представляет собой довольно сложную задачу, поскольку необходимо учитывать динамику самого параметра порядка. Уравнение (22.3) справедливо в предположении, что возбуждения распространяются в заданном, не зависящем от времени, слабо неоднородном потенциале $\Delta(r)$, а $E_k(r) = \sqrt{\xi^2 + \Delta_k^2(r)}$.

Мы видим, что в случае анизотропного спаривания вероятность w зависит от уловов даже для изотропной амплитуды рассеяния $u(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = u = \text{const}$.

Перепишем кинетическое уравнение (22.3) с учетом (22.4) и (22.5) в следующем виде:

$$\delta f_{\mathbf{k}} - \tau_{\mathbf{k}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta f_{k'} = \tau_k E_k \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\nabla T}{T} \quad (22.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= n_{\text{imp}} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ \tau_{\mathbf{k}}^{-1} &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tau^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \mathcal{C}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) \end{aligned} \quad (22.9)$$

причем τ_k имеет смысл времени свободного пробега квазичастиц. Поскольку как при замене частица-дырка (т. е. $\xi_k \rightarrow -\xi_k$), так и при пространственной инверсии τ^{-1} остается инвариантным, а правая часть (22.8) меняет знак, получаем, что $\delta f_{\mathbf{k}}$ должна быть нечетной относительно указанных преобразований. По этой причине второе слагаемое в левой части (22.8) обращается в нуль, и

$$\delta f_{\mathbf{k}} = \tau_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} \frac{\nabla T}{T}$$

Подставляя найденное решение кинетического уравнения в (22.6) и вспоминая определение коэффициента теплопроводности (22.2), окончательно имеем:

$$\kappa_{ij} = -\frac{2}{T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(0)}}{\partial E} E_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k},i} v_{\mathbf{k},j} \tau_{\mathbf{k}} \quad (22.10)$$

причем скорость квазичастиц определяется следующим образом

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = v_F \hat{\mathbf{k}} \frac{\xi_k}{E_{\mathbf{k}}} + O\left(\frac{\Delta}{\varepsilon_F}\right) \quad (22.11)$$

Из всех величин, входящих в (22.10), неизвестным пока осталось лишь время свободного пробега квазичастиц $\tau_{\mathbf{k}}$. Для синглетного изотропного спаривания из (22.9) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} &= \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\Delta^2}{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}}\right) \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) = \\ &= \frac{1}{\tau_n} \frac{1}{N_0} \frac{E_{\mathbf{k}}^2 - \Delta^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E_{\mathbf{k}})}{N_0} \frac{\xi_k^2}{E_{\mathbf{k}}^2} \end{aligned} \quad (22.12)$$

где

$$\tau_n^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} N_0 u^2 \quad (22.13)$$

есть время свободного пробега в нормальной фазе ³, а плотность состояний $N(E_{\mathbf{k}}) = \int d^3 k' \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) / (2\pi)^3$ (см.(17.26)).

Подставляя (22.11) и (22.12) в (22.10) и учитывая (17.28), находим выражение для коэффициента теплопроводности [89, 90]:

$$x = \frac{2\tau_n N_0 v_F^2}{3T^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{E_{\mathbf{k}}^2 e^{E_{\mathbf{k}}/T}}{(e^{E_{\mathbf{k}}/T} + 1)^2} \frac{N_0}{N(E_{\mathbf{k}})} = \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{3T^2} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dE E^2}{\text{ch}^2[E/(2T)]} \quad (22.14)$$

При $T \ll \Delta$

$$x(T) = \frac{4}{3} v_F^2 \tau_n N_0 T \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \exp \left(-\frac{\Delta}{T} \right)$$

что можно переписать также в виде:

$$\frac{\kappa(T)}{\kappa_n(T_c)} = \frac{T}{T_c} \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \exp \left(-\frac{\Delta}{T} \right) I^{-1} \quad (22.15)$$

где теплопроводность в нормальном состоянии есть

$$\kappa_n(T_c) = \frac{1}{3} v_F^2 \tau_n N_0 T_c I \quad (22.16)$$

а

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dz z^2}{\text{ch}^2(z/2)} = \frac{2\pi^2}{3}$$

В случае анизотропного спаривания параметр порядка преобразуется в соответствии с неединичным представлением группы симметрии, и интеграл от фактора когерентности по направлениям \mathbf{k}' в (22.9) равен единице. Следовательно,

$$\frac{1}{\tau_k} = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} u^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \delta(E_k - E_{k'}) = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E_k)}{N_0} \quad (22.17)$$

Подставляя это выражение в (22.10), получаем, с учетом (22.11):

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \frac{2\tau_n v_F^2}{T^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\xi_k^2 E_k / T}{(e^{E_k/T} + 1)^2} \frac{N_0}{N(E_k)} \hat{k}_i \hat{k}_j = \\ &= \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{E dE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i \hat{k}_j \sqrt{E^2 - \Delta_k^2} \end{aligned} \quad (22.18)$$

причем интегрирование по углам производится в пределах, задаваемых условием $\Delta_k^2 < E^2$.

Для сверхпроводника со структурой B -фазы коэффициент теплопроводности изотропен и экспоненциально мал при $T \rightarrow 0$ (см. (22.15)).

Для сверхпроводников с нулями щели на поверхности Ферми температурное поведение теплопроводности, напротив, будет не экспоненциальным, а степенным, подобно многим другим физическим характеристикам (см. 7). Кроме того, следует ожидать, что ввиду анизотропии щели коэффициенты теплопроводности будут зависеть от направления. В качестве примера рассмотрим сверхпроводник со структурой A -фазы, параметр порядка в котором обращается в нуль на полюсах ферми-сферы: $\Delta_k^2 = \Delta^2 \sin^2 \theta$. Ввиду однодimensionalной анизотропии спектра возбуждений теплопроводность описывается двумя коэффициентами: $x_{\parallel} = x_{zz}$ и $x_{\perp} = x_{xx} = x_{yy}$. Из (22.18) получаем:

³ С учетом выражения для скорости возбуждения $v = \partial E / \partial k = v_k \xi_k / E_k$ и формулы (17.28) из (22.13) следует, что длина свободного пробега в сверхпроводящем состоянии с s-спариванием равна длине пробега в нормальном состоянии.

$$\begin{aligned}\kappa_{\parallel} &= \frac{\tau_{\pi} N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{dEE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta} \cos^2 \theta \approx \\ &\approx \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{dEE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \int_0^{E/\Delta} \theta d\theta \sqrt{E^2 - \Delta^2 \theta^2} \sim \\ &\sim \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{dEE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \frac{E^3}{\Delta^2}\end{aligned}$$

Вспоминая выражение (17.30) для плотности состояний в A -фазе, окончательно получаем:

$$\frac{x_{\parallel}(T)}{x_{\pi}(T_c)} \sim \frac{T}{T_c} \quad (22.19)$$

Аналогично выполняются вычисления для поперечного коэффициента теплопроводности:
 $x_{\perp} = \frac{\tau_n N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^{\infty} \frac{dEE}{\text{ch}^2(E/2T)} \frac{N_0}{N(E)} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \sim$
 $\sim \frac{\tau_n N_0 v_F^2 T^3}{\Delta}.$

Следовательно,

$$\frac{x_{\perp}(T)}{x_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (22.20)$$

Если щель в спектре обращается в нуль на целых линиях на фермиповерхности, как это имеет место, например, в сверхпроводнике со структурой полярной фазы: $\Delta_k^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$, то вычисления с помощью формулы (22.18), аналогичные проведенным выше, дают следующие результаты:

$$\frac{x_{\parallel}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3; \quad \frac{\kappa_1(T)}{x_n(T_c)} \sim \frac{T}{T_c}. \quad (22.21)$$

Из (22.19)-(22.21) видно, что в сверхпроводниках с нулями щели как на полюсах, так и на экваторе ферми-поверхности, максимальный коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры, т. е. $x(T)/T \rightarrow \text{const}$ при $T \rightarrow 0$.

Резонансное рассеяние на примесях [87, 91]. Выражение (22.10) для электронной теплопроводности, полученное из кинетического уравнения, справедливо и при резонанском рассеянии на примесях. Отличие от случая борновского рассеяния состоит в существенно иной зависимости времени свободного пробега возбуждений от энергии $\tau(E)$, которую нужно найти из решения уравнения самосогласования для собственно-энергетической части, выведенного в 21. В этом разделе мы получим $\tau(E)$ и определим область справедливости описания релаксационных явлений в необычных сверхпроводниках с помощью уравнения Больцмана.

При наличии рассеяния на примесях квазичастицы приобретают конечное время жизни, которое определяется мнимой частью запаздывающей собственно-энергетической функции:

$$\frac{1}{\tau(E)} = -2 \operatorname{Im} \Sigma^R(E) = 2 \operatorname{Im} t(E) \quad (22.22)$$

Здесь мы воспользовались определением (21.14). Величина $t(E)$ удовлетворяет уравнению (21.25).

В случае резонансного рассеяния ($\delta_0 \rightarrow \pi/2$) уравнение (21.25) принимает вид

$$t = E + i\Gamma \frac{1}{g(t)}$$

где

$$g(t) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{t}{\sqrt{t^2 - \Delta_k^2}}$$

В нормальном состоянии $g(t) = 1$, и

$$t_n(E) = E + i\Gamma$$

Сравнивая это выражение с (22.22), получаем, что величина Γ связана с временем жизни квазичастиц в нормальном металле с резонансными примесями следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_n} = 2\Gamma \quad (22.23)$$

и уравнение на функцию $t(E)$ в сверхпроводящем состоянии может быть записано как

$$t = E + \frac{i}{2\tau_n} \frac{1}{g(t)} \quad (22.24)$$

Из (22.22), (22.24) и (21.28) имеем

$$\frac{1}{r(E)} = \frac{1}{\tau_n} \operatorname{Re} \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E)}{N_0} \frac{1}{|g(t(E))|^2} \quad (22.25)$$

Таким образом, нахождение времени жизни квазичастиц требует, вообще говоря, самосогласованного вычисления собствено-энергетической части с помощью уравнения (22.24). Однако, в случае достаточно слабого беспорядка для энергий, превышающих некоторое критическое значение (точный критерий зависит от конкретного вида сверхпроводящего состояния, см. ниже), задача может быть упрощена. В самом деле, если при $E \rightarrow 0$

$$\operatorname{Im} t(E) \rightarrow \gamma = \text{const} \neq 0 \quad (22.26)$$

то при $E < \gamma$, как следует из (22.22), время жизни почти не зависит от энергии, и:

$$\frac{1}{\tau} = 2\gamma \quad (22.27)$$

Энергия квазичастиц становится малой по сравнению с их затуханием, и при $T < \gamma$ больцмановское описание кинетики неприменимо.

Если же $E > \gamma$, то при вычислении малой мнимой добавки к $t(E)$ можно ограничиться низшим порядком теории возмущений по потенциалу примесей. Это, в частности, означает, что в выражении (22.25) мы можем пренебречь отличием $t(E)$ от E . Тогда

$$\left. \frac{1}{\tau(E)} \right|_{\delta_0 \rightarrow \pi/2} = \frac{1}{\tau_n} \frac{N(E)}{N_0} \frac{1}{|g(E)|^2} \quad (22.28)$$

причем в правую часть здесь следует подставлять плотность состояний для чистого сверхпроводника.

При вычислении коэффициента теплопроводности в случае резонансного рассеяния на примесях с помощью кинетического уравнения необходимо использовать выражение (22.28). Проделаем эти вычисления для различных фаз с p -спариванием.

Для сверхпроводника со структурой A -фазы из (22.26) и (21.30) имеем

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\Gamma\Delta}{\pi}} = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi\tau_n}} \quad (22.29)$$

Из (21.17) находим функцию $g(E)$ (при $\gamma < E \ll \Delta$):

$$g(E) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2 \sin^2 \theta}} \approx -i \frac{\pi E}{2\Delta}$$

Подставляя это выражение в (22.28) и учитывая (17.30), получаем:

$$\tau(E) \sim \tau_n \quad (22.30)$$

Для сверхпроводника со структурой полярной фазы решение уравнения (22.24) дает с тогарифмической точностью при $\Gamma \ll \Delta$:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Delta}{\tau_n}} (\ln \tau_n \Delta)^{-1/2} \quad (22.31)$$

Из (21.17) получаем (при $\gamma < E \ll \Delta$):

$$g(E) = \frac{E}{\Delta} \ln \frac{2\Delta}{E}$$

Из (22.28) тогда имеем

$$\tau(E) \sim \tau_n \frac{E}{\Delta} \ln^2 \frac{E}{\Delta} \quad (22.32)$$

Как и следовало ожидать, в случае сильного рассеяния на резонансных примесях время жизни квазичастиц уменьшается по сравнению с борновским случасм. Подставляя (22.30) в (22.10), получаем, что в выражениях для коэффициента теплопроводности в А-фазе появляется дополнительная вторая степень температуры:

$$\frac{x_{||}(T)}{x_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3; \quad \frac{x_{\perp}(T)}{x_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^5 \quad (22.33)$$

Аналогичные вычисления с помощью (22.32) для полярной фазы дают

$$\frac{x_{||}(T)}{x_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^5 \ln^2 \frac{T}{T_c}; \quad \frac{\kappa_{\perp}(T)}{\kappa_n(T_c)} \sim \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \ln^2 \frac{T}{T_c} \quad (22.34)$$

Найденные температурные зависимости (22.33) и (22.34) согласуются с результатами измерений теплопроводности на монокристаллах UPt₃ [92-94], в соответствии с которыми $x(T)/T \propto T^2$ для всех направлений. Совокупность экспериментальных данных свидетельствует о том, что сверхпроводящий параметр порядка в UPt₃ пребывает согласно представлению E_{1g} (или E_{2u}) группы D_{6h} (см. 4). В этом случае продольный (вдоль оси шестого порядка) коэффициент теплопроводности определяется формулой (22.33), а поперечный - формулой (22.34).

Подчеркнем еще раз, что результаты, полученные с помощью кинетического уравнения, справедливы при не слишком низких температурах $\gamma \ll T < \Delta$. При $T < \gamma$ вычисление кинетических коэффициентов может быть произведено лишь в рамках теории линейного отклика, к изложению которой мы и переходим.

Упражнение. Вывести формулу (22.7).

Метод функций Грина: теория линейного отклика. Другой способ вычисления теплопроводности, а также многих других термодинамических и кинетических характеристик сверхпроводника, основан на использовании теории линейного отклика в терминах функций Грина [95]. Согласно этой теории, реакция системы на малое возмущение ее параметров (в нашем случае - на градиент температуры) описывается запаздывающими корреляторами сопряженных потоков.

Коэффициент теплопроводности в этом формализме вычисляется следующим образом. Введем прежде всего мацубаровскую корреляционную функцию потоков тепла:

$$K_{ij}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \langle T_\tau Q_i(\mathbf{r}_1, \tau_1) Q_j(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle \quad (22.35)$$

где Q_i - оператор потока тепла. В реальном времени имеем:

$$Q_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \dot{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \frac{\partial \psi_\alpha^+(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \quad (22.36)$$

Справедливость такого определения вытекает из операторного уравнения непрерывности для плотности гамильтониана $h(\mathbf{r}, t)$ ($H = \int d^3r$, где II - гамильтониан БКШ (17.1) в координатном представлении):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0$$

Фурье-образ уравнения (22.36) имеет вид $K_{ij}(\mathbf{q}, \omega_n)$, где $\omega_n = 2\pi nT$ - бозонная мацубаровская частота. Запаздывающая корреляционная функция потоков тепла $K_{ij}^R(\mathbf{q}, \omega)$ находится путем аналитического продолжения мацубаровской функции на ось вещественных частот $i\omega_n \rightarrow \omega + i0$. Согласно теории линейного отклика, коэффициент теплопроводности связан с $K_{ij}^R(\mathbf{q} = 0, \omega)$ следующим образом [95]:

$$\kappa_{ij} = -\frac{1}{T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{K_{ij}^R(\omega) - K_{ij}^R(0)}{\omega} = -\frac{1}{T} \frac{d \operatorname{Im} K_{ij}^R(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} \quad (22.37)$$

Подставим (22.36) в (22.35) и используем для расцепления стоящего в правой части (22.35) τ -упорядоченного произведения четырех фермионных операторов (двухчастичной функции Грина) приближение среднего поля:

$$\begin{aligned} & \overline{\langle T_\tau \psi_\alpha^+(\mathbf{r}'_1, \tau_1) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta^+(\mathbf{r}'_2, \tau_2) \psi_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle} \rightarrow \\ & \rightarrow -\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2) G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)} - \\ & - \overline{I_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{r}'_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2)} = \\ & = -\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}'_2, \tau_2) G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)} + \\ & + \overline{F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{r}'_2, \tau_2; \mathbf{r}'_1, \tau_1)} \end{aligned}$$

где черта сверху обозначает усреднение по положениям примесей. Переходя в импульско-частотное представление, перепишем коррелятор (22.35) в следующем виде:

$$K_{ij}(\omega_n) = T \sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\varepsilon_m + \omega_n)^2 \frac{k_i k_j}{4m^2} \left(\overline{G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \varepsilon_m + \omega_n) G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \varepsilon_m)} - \right. \\ \left. - \overline{F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \varepsilon_m + \omega_n) F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}, \varepsilon_m)} \right) + K_{ij}^{(\text{sing})}$$

где $\varepsilon_m = (2m + 1)\pi T$. Последнее слагаемое в правой части объединяет сингулярные вклады вида $\delta(\tau_1 - \tau_2)$, происходящие от дифференцирования по времени τ -упорядоченных произведений. Учет таких вкладов позволяет сократить расходимости при суммировании по m в первом слагаемом.

Данную трудность удобнее обойти, используя спектральное разложение (17.22) для функций Грина. При этом можно показать [96], что аналитически продолженное выражение для коррелятора имеет вид:

$$K_{ij}^R(\omega) = \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1 - \omega_2 - \omega - i0} \left(\operatorname{th} \frac{\omega_1 + \omega}{2T} - \operatorname{th} \frac{\omega_2}{2T} \right) \times \\ \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j}{4m^2} \left(\overline{\operatorname{Im} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_1 + \omega)} \operatorname{Im} G_{\beta\alpha}(\mathbf{k}, \omega_2) - \right. \\ \left. - \overline{\operatorname{Im} F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_1 + \omega)} \operatorname{Im} F_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}, \omega_2) \right)$$

Подставляя сюда выражение (17.23) для спектральной плотности, можно убедиться, что интеграл по ξ от слагаемых вида $G^R G^R$ и т. д. обращается в нуль. Для коэффициента теплопроводности тогда получаем:

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{4m^2 T^2} \int \frac{dE}{2\pi} \frac{E^2}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} \times \\ \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i k_j \left(\overline{G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) G_{\beta\alpha}^A(\mathbf{k}, E)} - \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) F_{\beta\alpha}^{+A}(\mathbf{k}, E)} \right) \quad (22.38)$$

Интеграл по импульсам в правой части определяется суммой диаграмм, изображенных на рис. 22, причем сплошным линиям соответствуют усредненные запаздывающие и опережающие функции Трина.

Если, как и выше, ограничиться случаем изотропного рассеяния на точечных примесях, то пунктирные линии несут никакой зависимости от импульсов. Поэтому для пространственно-четных сверхпроводящих фаз все диаграммы, кроме первой, обращаются в нуль при интегрировании по направлениям k ввиду нечетности вершины k_i .

Для пространственно-нечетных фаз, в частности, для p -спаривания, диаграммы с поперечными примесными линиями (так называемые вершинные поправки), вообще говоря, в пуль не обращаются, что значительно усложняет задачу. Однако, здесь мы интересуемся лишь поведением максимального

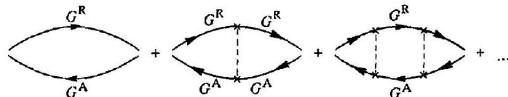


Рис. 22. Совокупность диаграмм, определяющих электронную теплопроводность сверхпроводников при рассеянии электрона на примесях.

коэффициента теплопроводности $\chi_{\max} = \chi_{ii}$, совпадающего с $\chi_{zz} = \chi_{\parallel}$ для А-фазы, и с $x_{xx} = x_{yy} = x_{\perp}$ для полярной фазы. В этом случае непосредственное вычисление показывает, что вершинные поправки равны нулю [88] в результате интегрирования по азимутальному углу. Следовательно,

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{8\pi m^2 T^2} \int_0^\infty \frac{dE E^2}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} L_{ii}(E) \quad (22.39)$$

где

$$L_{ii}(E) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_i^2 \left(\overline{G_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) G_{\beta\alpha}^A(\mathbf{k}, E)} - \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E) F_{\beta\alpha}^{+A}(\mathbf{k}, E)} \right) \quad (22.40)$$

(суммирования по повторяющимся латинским индексам нет).

Усредненные запаздывающие и опережающие функции Грина получаются путем аналитического продолжения в (21.6) и выглядят следующим образом:

$$\overline{G^R(\mathbf{k}, E)} = \frac{t(E) + \xi_k}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2}, \quad \overline{F_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, E)} = \frac{\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{t^2(E) - \Delta_{\mathbf{k}}^2 - \xi_k^2}$$

$$G^A(\mathbf{k}, E) = G^{R*}(\mathbf{k}, E), \quad F^A(\mathbf{k}, E) = F^{R*}(\mathbf{k}, E)$$

причем $t(E)$ находится из уравнения самосогласования (21.16) (или (21.25)). После полстановки в (22.40) получаем [88]:

$$L_{ii}(E) = 2N_0 k_F^2 \int \frac{dS}{4\pi} \hat{k}_i^2 \int d\xi \frac{|t|^2 + \xi^2 - \Delta_k^2}{(\xi^2 - t^2 + \Delta_k^2)(\xi^2 - t^{*2} + \Delta_k^2)} =$$

$$= \frac{2\pi N_0 k_F^2}{\operatorname{Re} i \operatorname{Im} t} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{|t|^2 + t^2 - 2\Delta_k^2}{\sqrt{t^2 - \Delta_k^2}} \quad (22.41)$$

Подставляя (22.41) в (22.39), приходим к окончательному ответу:

$$\varkappa_{ii} = \frac{N_0 v_F^2}{4T^2} \int_0^\infty \frac{dEE^2}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} \frac{1}{\operatorname{Re} t(E) \ln t(E^2)} \times$$

$$\times \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{|t(E)|^2 + t^2(E) - 2\Delta_k^2}{\sqrt{t^2(E) - \Delta_k^2}} \quad (22.42)$$

Данное выражение определяет максимальный коэффициент теплопроводности для нечетных фаз и все компоненты тензора теплопроводности для четных фаз.

Поскольку основной вклад в интеграл (22.42) происходит от области энергий $E \sim T$, поэтому при не слишком низких температурах и для достаточно малой концентрации примесей можно, как показано выше, пренебречь опорением $\operatorname{Re} t(E)$ от E . Тогда, вводя время жизни квазичастиц согласно (22.22), получаем

$$x_{ii} = \frac{N_0 v_F^2}{T^2} \int_0^\infty \frac{dEE}{\operatorname{ch}^2(E/2T)} \tau(E) \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \sqrt{E^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2} \quad (22.43)$$

Данное выражение справедливо как для борновского, так и для неборновского рассеяния на примесях. В случае борновского рассеяния, используя (22.17), приходим к формуле (22.18), полученной путем решения кинетического уравнения.

Универсальность кинетических коэффициентов при очень низких температурах [97]. Если $T < \gamma$ (то есть $\operatorname{Re} t(E) < \gamma$), то, подставляя $t(E) = \operatorname{Re} t + i\gamma$ в (22.41), получаем:

$$I_{ii}(E \rightarrow 0) = \frac{4\pi N_0 k_F^2}{\gamma \operatorname{Re} t} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \operatorname{Re} \frac{i\gamma \operatorname{Re} t - \Delta_{\mathbf{k}}^2}{\sqrt{2i\gamma \operatorname{Re} t - \gamma^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2}} =$$

$$= 4\pi N_0 k_F^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{3/2}}$$

Отсюда

$$x_{ii} = 4N_0 v_F^2 T I \int \frac{d\Omega}{4\pi} \hat{k}_i^2 \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2)^{3/2}} \quad (22.14)$$

где

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dz z^2}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{\pi^2}{12}$$

Таким образом, для сверхпроводящих фаз с нетривиальным спариванием имеет место линейное по T поведение теплопроводности при очень низких температурах, а коэффициент этой линейной зависимости определяется конкретным видом параметра порядка.

Так, для полярной фазы ($\Delta_k^2 = \Delta^2 \cos^2 \theta$) из (22.44) имеем (при условии $\gamma \ll \Delta$):

$$x_{||} = 4N_0 v_F^2 T I \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \cos^2 \theta \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \approx 4N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma^2}{\Delta^3} \ln \frac{2\Delta}{\gamma e} \quad (22.45)$$

$$x_\perp = 4N_0 v_F^2 T I \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 + \Delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \approx 2N_0 v_F^2 I \frac{T}{\Delta} \left(1 + O\left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)\right) \quad (22.46)$$

Для фаз с изолированными нулями первого или второго порядка аналогичные вычисления дают:

$$\begin{aligned} x_{||} &= 4N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma}{\Delta^2}, & x_\perp &= \pi N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma^2}{\Delta^3}, & \text{для } \Delta_k^2 &= \Delta^2 \sin^2 \theta \\ x_{||} &= 2N_0 v_F^2 I \frac{T}{\Delta}, & x_\perp &= N_0 v_F^2 T I \frac{\gamma}{\Delta^2}, & \text{для } \Delta_k^2 &= \Delta^2 \sin^4 \theta \end{aligned} \quad (22.47)$$

Мы приходим к заключению, что если тепловой поток направлен параллельно плоскости, в которой параметр порядка обращается в нуль, или вдоль линии, соединяющей точечные нули второго порядка, то коэффициент теплопроводности не зависит от концентрации примесей. Подобная универсальность имеет место и для других кинетических коэффициентов [98].

10.3 Сверхпроводимость по Ландау

(структура статфиз 2, потом разбирать буду.)

- 10.3.1 Сверхтекущий ферми-газ: Энергетический спектр
- 10.3.2 Сверхтекущий ферми-газ: Термодинамические свойства
- 10.3.3 Гриневские функции сверхтекущего ферми-газа (-)
- 10.3.4 Температурные гриневские функции сверхтекущего ферми-газа (-)
- 10.3.5 Джозефсоновский контакт (???)

Обсудим подробно джозефсоновский контакт.

- 10.3.6 Связь тока с магнитным полем в сверхпроводнике (-)
- 10.3.7 Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник (-)
- 10.3.8 Сверхпроводящие сплавы (-)
- 10.3.9 Эффект Купера при отличных от нуля орбитальных моментах пары (-)

10.4 Eliashberg Theory: a short review by F. Marsiglio

Abstract

Eliashberg theory is a theory of superconductivity that describes the role of phonons in providing the attractive interaction between two electrons. Phonon dynamics are taken into account, thus giving rise to retardation effects that impact the electrons, in the form of a frequency-dependent electron self-energy. In the superconducting state, this means that

the order parameter, generally considered to be a static quantity in the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) theory, also becomes frequency dependent. Here we review the finite temperature formulation of Eliashberg theory, both on the imaginary and real frequency axis, and briefly display some examples of the consequences of a dynamical, as opposed to static, interaction. Along the way we point out where further work is required, concerning the validity of some of the assumptions used.

10.4.1 introduction

Superconductivity is a remarkable phenomenon, not least because it represents a manifestation of the quantum world on a macroscopic scale. It is spectacularly demonstrated with levitating train sets,[1] and indeed this property and many others of superconductors are slowly being utilized in everyday applications.[2] However, the established practice of incorporating superconductors into the real world should not be taken as an indication that “the last nail in the coffin [of superconductivity]”[3] has been achieved. On the contrary, in the intervening half-century since this quote was written, many new superconductors have been discovered, and we have reached a point where it is clear that a deep lack of understanding[4] of superconductivity currently exists. Reference [[5]] compiles a series of articles reviewing the various “families” or classes of superconductors, where one can readily see common and different characteristics. At the moment many of these classes require a class-specific mechanism for superconductivity, a clearly untenable situation, in my opinion. Further classes have been discovered or expanded upon since, such as nickelates,[7] and the hydrides under pressure,[6] for example.

Our “deep lack of understanding” should not be taken to indicate that theoretical contributions have not been forthcoming. In fact there have been remarkable contributions to key theoretical ideas in physics that stem from research in superconductivity, starting with London theory[8] and Ginzburg-Landau[9] theory, through to BCS theory.[10] When Gor’kov[11] recast the BCS theory of superconductivity in the language of Green functions, then the stage was set for Eliashberg[12, 13] to formulate the theory that bears his name. It is fitting that we honour the lasting impact of his work with this brief review, on the occasion of his 90th birthday, and the 60th anniversary of the publication of two papers that paved the path for considerable future quantitative work in superconductivity. Based on an index I am fond of using for famous people, his name appears in titles of papers 248 times, and in abstracts and keywords 1439 times.[16]

Before proceeding further, we wish to make some remarks about the nature of this review. It will necessarily repeat material from previous reviews, which we catalogue as follows. Scalapino[17] and McMillan and Rowell[18] perhaps gave one of the first comprehensive reviews of both calculations and experiments that provide remarkable evidence for the validity of Eliashberg theory for various superconductors. These reviews were provided in the comprehensive monogram by Parks;[19] the reader should refer to this monogram and the references therein, as we cannot possibly properly reference all the primary literature sources before “Parks”, as this would consume too many pages here. The author list in Parks is a who’s who of experts in superconductivity, with two notable exceptions, John Bardeen and Gerasim (Sima) Eliashberg.

A subsequent very influential review was that of Allen and Mitrović,[20] where mostly superconducting T_c was discussed. These authors highlighted the expediency of doing many calculations on the imaginary frequency axis, a possibility first noted in Ref. [[21]] and utilized to great advantage in subsequent years.[22, 23, 24, 25]

A few years later Rainer wrote a “state-of-the-union” address[26] on first principles calculations of superconducting T_c in which a challenge was issued to both band structure and many-body theorists. For the former, the missing ingredient was a *complete* (italics are mine) calculation of the electron-phonon coupling. These were first calculated in the 1960’s (e.g. Ref. [[27]]) but have experienced vast improvement over the past 50 years, through the adop-

tion and improvement of Density Functional Theory methods, plus the increased computational ability achieved in the intervening decades. Excellent summaries of this progress is provided in Refs. [[28],[29],[30]], where two alternative procedures are described. The first follows the original route of determining the electron-phonon interaction and including this as input to the Eliashberg equations, while the second aims to treat both the electron-phonon-induced electron-electron interaction *and* the direct Coulomb interaction on an equal footing. The result is advertised to meet Rainer's challenge and calculate T_c and other superconducting properties without any experimental input. It is noteworthy that in the second formulation (see also Refs. [[31]] and [[32]]) the equations are BCS-like and do *not* depend on frequency, but only momentum. In the usual formulation, the calculation of μ^* , the effective direct electron-electron Coulomb interaction, is often simply assigned a (small) numerical value, and therefore is treated phenomenologically as a fitting parameter. The challenge to many-body theorists remains, as more superconductors have been discovered that seem to extend beyond the weak coupling regime, and likely require descriptions beyond BCS and Eliashberg theory.

In 1990 the review by Carbotte[33] provided a comprehensive update for a number of thermodynamic properties of various superconductors known at the time, including the high temperature cuprate materials. Partly for this reason his review is titled “*Properties of boson-exchange superconductors*,” since there was a feeling at the time (and still is in parts of the community) that the Eliashberg framework might apply to these superconductors, but with exchange of a boson other than the phonon. Quite a few years later we wrote a review jointly,[34] focusing on “*electron-phonon superconductivity*.” This review summarized known properties and extended results to dynamical properties such as the optical conductivity, building on earlier work in Ref. [[35]] and mini-reviews in Ref. [[36]]. More recently Ummarino has published a mini-review with some generalizations to multi-band and the iron pnictide superconductors.[37]

The other remark we should make is that while Eliashberg theory has been extremely successful, we will also point out the limitations that exist. Indeed, these were recognized right from the beginning, with both Eliashberg[12] and Migdal[38] emphasizing that limitations exist on the value of the dimensionless coupling parameter, λ , due to the expected phonon softening that would occur as λ increases. They claimed an upper limit of $\lambda \approx 1$, which then significantly restricts the domain of validity of the theory. Constraints on the parameters would be a constant theme over the ensuing years. In 1968 McMillan[39] gave more quantitative arguments for a maximum T_c , based on the expected relationship between the coupling strength and the phonon frequency. This was reinforced by Cohen and Anderson[40] and has been discussed critically a number of times since.[41, 42] Alexandrov[43] has also raised objections, based on polaron collapse, a topic we will revisit later.

Some of the early history regarding the origins of the electron-phonon interaction was provided in Ref. [[34]] and will be omitted here. By the early to mid 1950's Fröhlich[44] and Bardeen and Pines[45] had established that the effective Hamiltonian for the electron-phonon interaction had a potential interaction of the form[46]

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\text{eff}} = \frac{4\pi e^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + k_{\text{TF}}^2} \left[1 + \frac{\hbar^2 \omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'})^2 - \hbar^2 \omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right], \quad (10.2)$$

where k_{TF} is the Thomas–Fermi wave vector, and $\omega(\mathbf{q})$ is the dressed phonon frequency. This part of the Hamiltonian represents the pairing interaction between two electrons with wave vectors \mathbf{k} and \mathbf{k}' in the First Brillouin Zone (FBZ) and energies $\epsilon_{\mathbf{k}}$ and $\epsilon_{\mathbf{k}'}$. The interaction Hamiltonian written in this form is often said to have “the phonons integrated out.” It was on the basis of this Hamiltonian that Bardeen, Cooper and Schrieffer (BCS)[10] formulated a model Hamiltonian with an attractive (negative in sign) interaction for electron energies near the Fermi energy, ϵ_F .

10.4.2 The Eliashberg Equations

Eliashberg,[12] following what Migdal[38] had calculated in the normal state, did not “integrate out the phonons,” but instead adopted the Hamiltonian

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}' \\ \sigma}} g(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + a_{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}^\dagger) c_{\mathbf{k}'\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (10.3)$$

where $c_{\mathbf{k}\sigma}$ ($c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$) is the annihilation (creation) operator for an electron with spin σ and wave vector \mathbf{k} , and $a_{\mathbf{q}}$ ($a_{\mathbf{q}}^\dagger$) is the annihilation (creation) operator for a phonon with wave vector \mathbf{q} . The electron-phonon coupling function, $g(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ is generally a function of both wave vectors (and not just their difference), and in principle is calculable with the Density Functional Theory Methods mentioned earlier. Very often models are adopted based on simple (e.g. tight-binding) considerations.

Eliashberg then applied the apparatus of field theory to formulate a pairing theory that accounts for the dynamics of the interaction, i.e. for retardation effects. A sketch of the derivation, taken from Rickayzen[47] (see also Ref. [[34]]), is provided in the Appendix. This is my favourite derivation, as it does not rely on a formalism (e.g. the Nambu formalism) whose validity requires an act of faith (or, you simply work through everything anyways, to ensure that the formalism “works”).

Following Eliashberg[13] with more modern notation,[17, 20] the “normal” self energy $\Sigma(\mathbf{k}, i\omega_m)$ is separated out into even and odd (in Matsubara frequency) parts, so that two new functions, Z and χ are defined:

$$\begin{aligned} i\omega_m [1 - Z(\mathbf{k}, i\omega_m)] &\equiv \frac{1}{2} [\Sigma(\mathbf{k}, i\omega_m) - \Sigma(\mathbf{k}, -i\omega_m)] \\ \chi(\mathbf{k}, i\omega_m) &\equiv \frac{1}{2} [\Sigma(\mathbf{k}, i\omega_m) + \Sigma(\mathbf{k}, -i\omega_m)]. \end{aligned} \quad (10.4)$$

The equations that emerge are

$$Z(\mathbf{k}, i\omega_m) = 1 + \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} \frac{\lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(i\omega_m - i\omega_{m'})}{g(\epsilon_F)} \frac{(\omega_{m'}/\omega_m) Z(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}{\omega_{m'}^2 Z^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'}) + (\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'}))^2 + \phi^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'})} \quad (10.5)$$

$$\chi(\mathbf{k}, i\omega_m) = -\frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} \frac{\lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(i\omega_m - i\omega_{m'})}{g(\epsilon_F)} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}{\omega_{m'}^2 Z^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'}) + (\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'}))^2 + \phi^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'})} \quad (10.6)$$

along with the equation for the order parameter:

$$\phi(\mathbf{k}, i\omega_m) = \frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} \left[\frac{\lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(i\omega_m - i\omega_{m'})}{g(\epsilon_F)} - V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \right] \frac{\phi(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}{\omega_{m'}^2 Z^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'}) + (\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'}))^2 + \phi^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}. \quad (10.7)$$

These are supplemented with the electron number equation, which determines the chemical potential, μ :

$$n_e = 1 - \frac{2}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}{\omega_{m'}^2 Z^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'}) + (\epsilon_{\mathbf{k}'} - \mu + \chi(\mathbf{k}', i\omega_{m'}))^2 + \phi^2(\mathbf{k}', i\omega_{m'})}. \quad (10.8)$$

Written in this way both Z and χ are even functions of $i\omega_m$ (and, as we’ve assumed from the beginning, they are also even functions of \mathbf{k}). With electron-phonon pairing the anomalous self energy, which determines the anomalous pairing amplitude $\phi(\mathbf{k}, i\omega_m)$, is also an even

function of Matsubara frequency. A generalization of this latter result, giving rise to so-called Berezinskii[48] “odd-frequency” pairing, is beyond the scope of this review. A survey of Berezinskii pairing is given in Ref. [49].

Other symbols in Eqs. (10.5–10.8) are as follows. The number of lattice sites is given by N , the parameter $\beta \equiv 1/(k_B T)$, where k_B is the Boltzmann constant and T is the temperature, μ is the chemical potential, and $g(\epsilon_F)$ is the electronic density of states at the Fermi level in the band. These equations are generally valid for multi-band systems, and then the labels \mathbf{k} and \mathbf{k}' are to be understood to include band indices. However, we shall proceed for simplicity with the assumption of a single band, with single particle energy $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Because we are assuming finite temperature right from the start, the equations are written on the imaginary frequency axis, and are functions of the Fermion Matsubara frequencies, $i\omega_m \equiv \pi k_B T(2m - 1)$, with m an integer. Similarly the Boson Matsubara frequencies are given by $i\nu_n \equiv 2\pi k_B Tn$, where n is an integer. Finally, we have also included a direct Coulomb repulsion in the form of $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, which in principle represents the full (albeit screened) Coulomb interaction between two electrons.

The key ingredient of Eliashberg theory (as opposed to BCS theory) is the presence of the electron-phonon propagator, contained in

$$\lambda_{\mathbf{kk}'}(z) \equiv \int_0^\infty \frac{2\nu\alpha_{\mathbf{kk}'}^2 F(\nu)}{\nu^2 - z^2} d\nu \quad (10.9)$$

with $\alpha_{\mathbf{kk}'}^2 F(\nu)$ the spectral function of the phonon Green function. This function is sometimes written as $\alpha_{\mathbf{kk}'}^2(\nu)F(\nu)$ to emphasize that the coupling part (α^2) can have significant frequency dependence. This spectral function is often called the Eliashberg function. Equation (10.9) has been used as a “bosonic glue” to generalize the application of the Eliashberg/BCS formalism to beyond that of phonon exchange. Very often the boson is a collective mode of the very degrees of freedom that are superconducting, i.e. the conduction electrons. Examples include spin fluctuations or plasmons, but this work is on more questionable footing.[50]

A significant anisotropy may exist, specifically through the nature of the coupling in the Eliashberg function. Since the important physical attribute of the Eliashberg formalism beyond BCS is retardation, and therefore in the frequency domain, we will nonetheless neglect anisotropy in what follows.[51] More nuanced arguments for the wave vector dependence of the electron-phonon coupling are provided in Ref. [20], connected to the energy scale hierarchy $\epsilon_F \gg \nu_{\text{phonon}} \gg T_c$, where ν_{phonon} is a typical phonon energy scale (note that we have adopted the standard practice of dropping \hbar and k_B , and therefore we refer to temperatures and phonon frequencies as energies). Indeed very often the neglect of anisotropy was justified by the study of so-called “dirty” superconductors, where the presence of impurities served to self-average over anisotropies. We will also drop the wave vector dependence in the direct Coulomb repulsion, although this step is less justified. It means that the direct Coulomb repulsion is represented by a single parameter, which we will call U , since this is what we would obtain by reducing the long-range Coulomb repulsion with an on-site Hubbard interaction with strength given by U . This is one of the weak points of the Eliashberg description of superconductivity — an inadequate description of correlations due to Coulomb interactions. In what follows we will focus more attention on the retardation effects, since this is the part that Eliashberg theory is best designed to handle properly.

Once we drop the wave vector dependence in the coupling function, all quantities (Z, χ and ϕ) become independent of wave vector. The integration over the First Brillouin Zone can then be performed, although here a series of approximations are utilized. The result can lead to confusion, so we provide some detail here. First, once it is determined that the unknown functions in Eqs. (10.5–10.8) do not depend on wave vector, we can replace the sum over wave

vectors in the first Brillouin zone with an integration over the electronic density of states,

$$\frac{1}{N} \sum_k \rightarrow \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon), \quad (10.10)$$

where $g(\epsilon)$ is the single electron density of states and ϵ_{\min} and ϵ_{\max} are the minimum and maximum energies of the electronic band. Since typically the energy scales are such that $T_c \ll \nu_{\text{phonon}} \ll \epsilon_F$, the variation of the electronic density of states away from the Fermi level is of little importance, so the approximation $g(\epsilon) \approx g(\epsilon_F)$ is used. Exceptions to this case have been discussed previously, and one is referred to Ref. [[34]] for references. The remaining integration is now elementary and yields a combination of inverse tangent and logarithmic functions.[52]

However, the “standard” practice is to extend these integrations over energy to $\pm\infty$ (and similarly adopt particle-hole symmetry so $\epsilon_{\min} \equiv -\epsilon_{\max}$, along with $\mu = 0$, and now $\epsilon_{\max} \rightarrow \infty$) with the philosophy that the remainder of the integrand ensures that these additional contributions are negligible. This is in fact *not true* and the term proportional to $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ in Eq. (10.7) (now replaced by U as described above) will result in a Matsubara sum that diverges if this procedure is carried out without thought. So in fact the bandwidth parameters are required in the integration for this term and the resulting inverse tangent function results in a soft cutoff at $\omega_m \approx \epsilon_{\max}$. This is most often replaced with a hard (step-function) cutoff. Because of the assumptions about particle-hole symmetry the function $\chi(\mathbf{k}, i\omega_m)$ in Eq. (10.6) is identically zero, and Eq. (10.8) becomes meaningless (so the occupation is no longer considered an input parameter).

The more highly simplified equations that result are

$$Z(i\omega_m) = 1 + \frac{\pi T_c}{\omega_m} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) \frac{\omega_{m'} Z(i\omega_{m'})}{\sqrt{\omega_{m'}^2 Z^2(i\omega_{m'}) + \phi^2(\omega_{m'})}} \quad (10.11)$$

$$\phi(i\omega_m) = \pi T_c \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \left[\lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) - u \theta\left(\frac{W}{2} - |\omega_{m'}|\right) \right] \frac{\phi(i\omega_{m'})}{\sqrt{\omega_{m'}^2 Z^2(i\omega_{m'}) + \phi^2(\omega_{m'})}}. \quad (10.12)$$

where W is the bandwidth (i.e. $\epsilon_{\max} = -\epsilon_{\min} \equiv W/2$ and the band has been centred around zero for convenience), and $\theta(x)$ is the usual step function, and $u \equiv U g(\epsilon_F)$. Very often a different order parameter is favoured over $\phi(\omega_m)$, defined as $\Delta(\omega_m) \equiv \phi(\omega_m)/Z(\omega_m)$. Then Eqs. (10.11,10.12) are written as

$$Z(i\omega_m) = 1 + \frac{\pi T_c}{\omega_m} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) \frac{\omega_{m'}}{\sqrt{\omega_{m'}^2 + \Delta^2(\omega_{m'})}} \quad (10.13)$$

$$Z(i\omega_m) \Delta(i\omega_m) = \pi T_c \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \left[\lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) - u \theta\left(\frac{W}{2} - |\omega_{m'}|\right) \right] \frac{\Delta(i\omega_{m'})}{\sqrt{\omega_{m'}^2 + \Delta^2(\omega_{m'})}}. \quad (10.14)$$

These are the standard Eliashberg equations, written on the imaginary axis. These components of the self energy (refer back to Eq. (10.4)) are all real functions. One further ‘simplification’ is usually made before computations are performed. The Matsubara summation is in principle infinite; in practice the summation with the electron-phonon kernel converges with relatively few terms, corresponding to a frequency cutoff $\omega_c \ll W/2$. Yet in the term with the Coulomb interaction one is required to carry out a summation over many more terms, corresponding to a frequency cutoff of $W/2$. Inspection of Eqs (10.13,10.14) shows that over this range ($\omega_c < \omega_m < W/2$), the gap function is a constant, i.e. $\Delta(\omega_m) \approx \Delta_\infty$, and $Z(\omega_m) \approx 1$.

Making use of this allows one to sum this part analytically, with the result that U changes to an effective $U^*(\omega_c)$, where

$$U^*(\omega_c) \equiv \frac{U}{1 + U \ln\left(\frac{W/2}{\omega_c}\right)}, \quad (10.15)$$

and we have approximated digamma functions with their asymptotic logarithmic form, since it is assumed that both $W/2 \gg T_c$ and $\omega_c \gg T_c$. Now the equations are

$$Z(i\omega_m) = 1 + \frac{\pi T_c}{\omega_m} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) \frac{\omega_{m'}}{\sqrt{\omega_{m'}^2 + \Delta^2(\omega_{m'})}} \quad (10.16)$$

$$Z(i\omega_m)\Delta(i\omega_m) = \pi T_c \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} [\lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) - u^*(\omega_c)\theta] \omega_c - |\omega_{m'}| \frac{\Delta(i\omega_{m'})}{\sqrt{\omega_{m'}^2 + \Delta^2(\omega_{m'})}}, \quad (10.17)$$

where $u^*(\omega_c) \equiv g(\epsilon_F)U^*(\omega_c)$. One should note that $U^*(\omega_c) < U$, physically corresponding to the fact that retardation effects allow two electrons to exchange a phonon with one another while not being at the same place at the same time. This means they do not feel the full direct Coulomb interaction with one another.

Thus far we have written the Eliashberg equations as functions of imaginary frequency. As we will see in the next subsection one can solve these equations as they are, to determine many thermodynamic quantities of interest, in particular T_c . However, later we will extend these equations to the upper half-plane, and in particular just above the real axis. This is required for the evaluation of dynamic quantities like the tunneling density of states and the optical conductivity.[17, 36, 34] In anticipation of these results we note here that we use functions $Z(z)$ and $\phi(z)$ [and therefore $\Delta(z)$] with the following properties[53] as a function of complex frequency z

$$Z(z^*) = Z^*(z); \quad Z(-z) = Z(z), \quad (10.18)$$

$$\phi(z^*) = \phi^*(z); \quad \phi(-z) = \phi(z), \quad (10.19)$$

$$\Delta(z^*) = \Delta^*(z); \quad \Delta(-z) = \Delta(z). \quad (10.20)$$

10.4.3 Results on the imaginary axis: T_c

To compute actual results for T_c , along with the gap function $\Delta(\omega_m)$ and the renormalization function $Z(\omega_m)$, we need to specify $\alpha^2 F(\nu)$ (now assumed to be isotropic) and $u^*(\omega_c)$. The latter quantity is very difficult to compute, and the former is more tractable through Density Functional Theory. Historically it has been “measured” through tunnelling measurements.[18] We use quotation marks around the word “measured” because in fact the current is measured while the spectral function is extracted through an inversion process that requires theoretical input through the Eliashberg equations themselves.[18] We will simply adopt a model spectral function given by

$$\alpha^2 F(\nu) = \frac{\lambda_0 \nu_0}{2\pi} \left[\frac{\epsilon}{(\nu - \nu_0)^2 + \epsilon^2} - \frac{\epsilon}{\nu_c^2 + \epsilon^2} \right] \theta(\nu_c - |\nu - \nu_0|), \quad (10.21)$$

that is, a Lorentzian line shape cut off in such a way that the function goes smoothly to zero in the positive frequency domain. This Lorentzian has a centroid given by ν_0 and a half-width given by ϵ . The cutoff frequency parameter ν_c makes the Lorentzian go to zero at frequency $\nu_0 + \nu_c$ and frequency $\nu_0 - \nu_c$. For concreteness we will use a variety of values of ν_0 with $\epsilon = 0$, or $\epsilon \approx \nu_0/10$. The first choice results in a δ -function spectrum with weight such that the mass enhancement parameter, λ , defined by

$$\lambda \equiv 2 \int_0^\infty d\nu \frac{\alpha^2 F(\nu)}{\nu} \quad (10.22)$$

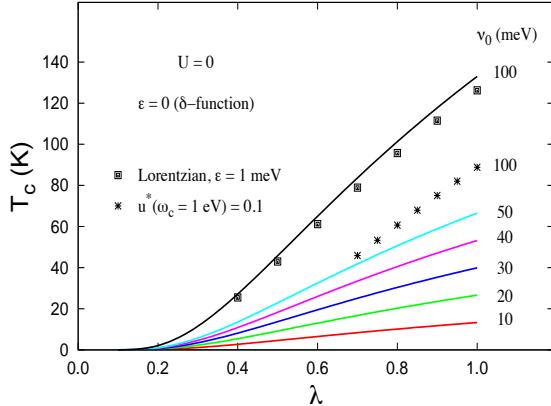


Figure 1: The superconducting critical temperature, T_c (K) vs. the dimensionless mass enhancement parameter, λ , for a variety of characteristic phonon frequencies, as indicated. The solid curves are for the Einstein spectrum with $U = 0$. The square points indicate how T_c changes (for $\nu_0 = 100$ meV only) when a Lorentzian is used instead with $\epsilon = 10$ meV and $\nu_c = 80$ meV, according to Eq. (10.21). For the same value of λ there is only a slight reduction in the value of T_c . The points marked with asterisks are again for the same broadened Lorentzian centred at $\nu_0 = 100$ meV, but now with $u^*(\omega_c = 1 \text{ eV}) = 0.1$. Note that ν_c is used as a practical cutoff for the phonon spectrum whereas ω_c is used for the Matsubara cutoff for the direct Coulomb repulsion. See the discussion in the text for how plausible these parameters might or might not be.

is simply given by λ_0 . As ϵ increases λ decreases from λ_0 ; however in what follows we will adjust λ_0 to keep λ constant.[54] Since the main focus of Eliashberg theory is the effect of retardation, we will often set $u^*(\omega_c) = 0$, but we will nonetheless note how this quantity affects the gap function and T_c .

Superconducting T_c is determined by linearizing the gap equations, Eqs. (10.16,10.17) so that they become

$$Z(i\omega_m) = 1 + \frac{\pi T_c}{\omega_m} \left\{ \lambda + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \lambda(i\nu_n) \right\}. \quad (10.23)$$

$$Z(i\omega_m)\Delta(i\omega_m) = \pi T_c \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} [\lambda(i\omega_m - i\omega_{m'}) - u^*(\omega_c)\theta(\omega_c - |\omega_{m'}|)] \frac{\Delta(i\omega_{m'})}{|\omega_{m'}|}. \quad (10.24)$$

The latter of these two equations is an eigenvalue equation and can be solved as such. We use a power method that iterates the eigenvalue and eigenvector simultaneously by requiring that the gap function at the lowest Matsubara frequency,[55] $\Delta(i\omega_1)$, remain at unity. This procedure tends to converge very quickly for stronger coupling, but requires more care for weaker coupling.[56]

We begin with a standard plot of T_c vs λ in Fig. 1, for a simple δ -function spectral function with frequency as shown. There are scaling relations for T_c with typical phonon frequency, but

we choose to show the results explicitly in real units to make the result clear. The possibility of determining an expression for T_c analytically has been discussed extensively in the literature[20] and will not be done here. The trends are clear; higher T_c comes from higher values of λ and from higher values of the characteristic phonon frequency, which in the present case is provided by ν_0 . The width of the spectrum plays a minor role, and the Coulomb repulsion suppresses T_c , as indicated by the marked points. It is well known that Eliashberg theory predicts that T_c increases with both frequency and coupling strength as $T_c \approx \nu_0\sqrt{\lambda}$ in the asymptotic limit.[57, 24]

10.4.4 Validity of the Theory

A perhaps more important question is the validity of the parameters used in the calculation. We have shown results up to a value of $\lambda = 1$. Are higher values allowed? In particular, is it possible for a material to have a sizeable value of electron-phonon coupling while maintaining a large phonon frequency? As discussed in the introduction, this question has been the subject of previous investigation,[40, 41, 42] although with only qualitative conclusions. The discovery of (very) high temperature superconductivity in the hydrides[58, 59] under intense pressure has spurred a reassessment of this type of analysis, since a part of the community believes that these superconductors are electron-phonon driven. The main evidence has been an observed isotope shift.[58] Moreover, the prediction of superconductivity in some of these compounds through density functional theory calculations[60] adds plausibility to this explanation. However, very high characteristic phonon frequencies (60 - 120 meV) and rather large electron-phonon coupling values ($\lambda \approx 2$ or more) are required. The latter is well outside the range considered reasonable, *especially* given that the characteristic phonon energy remains so high. Moreover, the superconductivity literature has unfortunately lapsed into simply accepting as “standard” or “conventional” a value for the Coulomb pseudopotential $u^* = 0.1$, and, *especially* given the high value of phonon frequency, the anticipated reduction of the Coulomb interaction through retardation will be much lower than previously thought, and the value of the direct Coulomb repulsion is undoubtedly higher when the phonon frequency is so high.

An additional direction of addressing this question comes from microscopic calculations involving Quantum Monte Carlo (QMC) and Exact Diagonalization (ED) techniques, utilizing specific microscopic models. These methods provide controlled approximations and are therefore suitable for benchmarking more approximate theories like Eliashberg theory. By far the most work in this direction has been done on the Holstein model.[61] The Holstein model retains only the short-range (on-site) interaction between local (Einstein) oscillators and the electron charge density. Because it is a very local model it is more amenable to the exact or controlled methods developed over the past 40 years, and therefore is a “favourite” for understanding the electron-phonon interaction, much like the Hubbard model[62] is heavily used for the study of electron-electron interactions. A short historical account of this activity is provided in the Appendix of Ref. [[34]].

Briefly, early Quantum Monte Carlo studies in one dimension[63] and two dimensions[64, 65] established that charge-density-wave (CDW) correlations dominate at half-filling and close to half-filling. The critical question is whether, sufficiently away from half-filling, where the susceptibility for superconductivity is stronger than that for CDW formation, do the “remnant” CDW correlations *enhance* or *suppress* superconducting T_c ? In Ref. [[66]] the present author, based on a comparison of QMC and Migdal-Eliashberg calculations on (very!) small lattices, argued that CDW fluctuations actually *suppress* superconducting T_c . In the so-called *renormalized* Migdal-Eliashberg calculations a phonon self-energy was included; in this manner CDW fluctuations impacted the phonon propagator, resulting in softer phonons and an enhanced coupling constant. Comparisons with the QMC results served to benchmark the

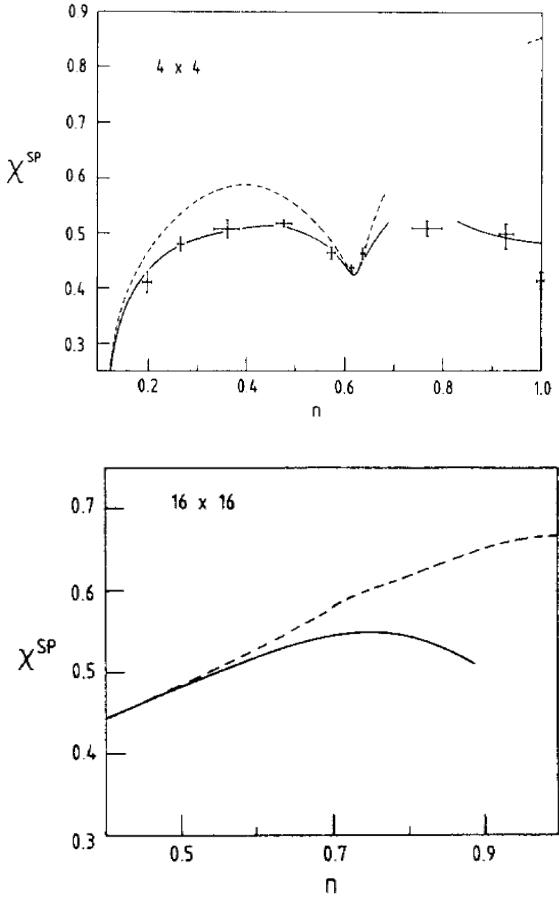


Figure 2: The singlet pairing susceptibility vs. electron density for the Holstein model on a 4×4 lattice. See Refs. [[65, 66]] for pertinent definitions. Here a bare dimensionless coupling strength $\lambda_0 = 2$ and phonon (Einstein) frequency $\omega_E = 1t$ are used, and the susceptibility is plotted for a temperature $T = t/6$, where t is the nearest neighbour hopping parameter. In the topmost figure, QMC results are indicated with error bars. The solid curves are the result for Migdal-Eliashberg theory with a renormalized phonon propagator and the dashed curves are the result for the unrenormalized calculations. The renormalized calculations agree very well with the QMC results (both done for a 4×4 lattice), indicating that this (combined Migdal-Eliashberg plus phonon self-energy in the bubble RPA approximation) result accurately captures the impact of CDW fluctuations on the pairing susceptibility. In the bottom figure the renormalized (solid curve) and unrenormalized (dashed curves) are plotted for a larger system. The renormalized calculations stop at an electron density close to $n \approx 0.9$ because a CDW instability occurs there. The unrenormalized calculations carry on to half-filling, because they are oblivious to the CDW instability (and fluctuations). This result indicates that CDW fluctuations at densities less than $n = 0.9$ suppress pairing, and presumably T_c , even though $\lambda^{\text{eff}} \rightarrow \infty$. Reproduced from Ref. [[66]].

Eliashberg-like calculations.

Figure 2, reproduced from Ref. [[66]], illustrates that the so-called *renormalized* calculations agree with the QMC results. These calculations (solid curves) include phonon self-energy effects which are essentially the CDW fluctuations.[65] In contrast, the *unrenormalized* calculations (dashed curves) are the standard Migdal-Eliashberg calculations that omit phonon self-energy effects. Figure 2(a) illustrates that the renormalized calculations are more accurate, and Fig. 2(b) shows that including CDW fluctuations *suppresses* the pairing susceptibility, χ^{SP} . We understand these results to indicate that in the vicinity of a CDW instability, while the effective coupling constant (λ^{eff} in Ref. [[65, 66]]) *increases*, superconducting T_c *actually decreases*.

More recently similar calculations have been performed[67] and other methodologies have been employed.[68] In the latter reference the role of retardation in reducing the direct Coulomb interaction was also addressed; while they found qualitative agreement with the standard arguments, quantitative agreement was lacking, especially for the expected large values of direct Coulomb repulsion. An older calculation with just two electrons,[69] based on Exact Diagonalization studies, also found qualitative support for a retardation-related reduction in the direct Coulomb repulsion. It is worth mentioning that finding this insensitivity to increased Coulomb repulsion, known as the “pseudopotential effect,”[70, 71] has been looked for in QMC studies, but these have mostly been unsuccessful. They may still be there; part of the problem is that QMC results become more difficult as the electronic and phonon energy scales differ from one another by a significant amount. Moreover, it may be that if larger lattices and more realistic phonon frequencies (i.e. significantly less than the electron hopping parameter, t) are used, the result illustrated in Fig. 2 could change qualitatively.

An additional concern has been raised about the electron-phonon coupling becoming too strong — that of polaron collapse.[43] Exact studies in the thermodynamic limit[72] have established that a single electron, interacting with Einstein oscillators through the Holstein model, acquires an additional mass which is modest for $\lambda \lesssim 1$, but becomes quickly (though smoothly!) very, very large beyond this point. This is true independent of dimension,[73, 74] and is especially acute when $\nu_0 \ll W$,[75] where W is the electronic bandwidth. So we have the intriguing situation where the standard Migdal approximation (upon which Eliashberg theory is based) utilizes a Fermi sea of electrons strongly coupled to phonons, while close examination of *just one* of these constituent quasiparticles (polarons) shows that it acquires a tremendous effective mass. Thus, the properties of the single polaron, out of which a Fermi sea is constructed, appear to be incompatible with the properties of the electrons in that Fermi sea.

For example, in Migdal theory, the effective mass for electrons near the Fermi energy is $m^*/m_e \approx 1 + \lambda$, even for $\lambda \approx 2$ or more, whereas a single electron with this coupling would have an effective mass many orders of magnitude higher. It is important to note that in the quantum treatment polarons never “self-localize,” essentially because of Bloch’s Theorem. However, with such large effective mass ratios, any impurities (including surfaces), would readily act as localization sites.

There are perhaps a few scenarios to work one’s way out of this dilemma. First, as we have already mentioned, perhaps the Holstein model itself is pathological. For this reason it is important to study other models. Unfortunately other models are more difficult to work with, but thus far the conclusions arrived at with the Holstein model seem to hold for these other models as well. For example, in Ref. [[76]] a variational approach was used with the Fröhlich Hamiltonian in the continuum with acoustic phonons, and in Refs. [[77, 78]] the Barisić-Labbé-Friedel/Su-Schrieffer-Heeger (BLF/SSH) model was examined with perturbation theory and the adiabatic approximation. In either case more definitive results as achieved with the Holstein model are still lacking, although all indications are that these models have strong polaronic tendencies as well.

A second scenario is that as one assembles a Fermi sea of polarons, they somehow become increasingly undressed, presumably due to some argument involving Pauli blocking. There are no calculations that we are aware of, however, that provide a demonstration of this.[79] Part of the reason may be psychological; the Migdal approximation is more often called the Migdal Theorem, and so one may be inclined to take it for granted that this is what will happen when we assemble a Fermi sea — the “theorem” will be fulfilled. However, in my opinion this is more a belief than an established argument, as the Migdal approximation does not foresee or account for polaron physics.

This discussion has been a long digression concerning the domain of applicability of Eliashberg theory, and clearly a lot more investigation is required on this question. For now we return to the properties of the solutions to the Eliashberg equations.

10.4.5 Results on the imaginary axis: in the superconducting state

Returning to Eqs. (10.16,10.17), or their linearized counterparts, Eqs. (10.23,10.24), once T_c is determined then the gap function can be determined both at T_c and below T_c . The gap function is a generalized (frequency-dependent) order parameter. It will grow continuously from zero at T_c to its full value at zero temperature, but it depends on frequency. In Fig. 3(a) we show the gap function as a function of Matsubara frequency for a variety of temperatures, for $\lambda = 1$ and $\nu_0 = 10$ meV. Note that these functions are defined on a discrete set of points (the Fermion Matsubara frequencies) that become more closely spaced as the temperature is lowered. For temperatures close to T_c the gap function diminishes gradually to zero at all frequencies, while at the lowest temperature the gap function attains a maximum. In Fig. 3(b) we plot the normalized values, $\Delta(i\omega_m)/\Delta(i\omega_1)$ vs. Matsubara frequency, and it is clear that they differ from one another by very little. Returning to Fig. 3(a), the lowest frequency function value can be thought of as an order parameter. In Fig. 4 we show the lowest frequency gap function value, $\Delta(i\omega_1)$, now normalized to the value at $T = 0$ vs. reduced temperature, T/T_c . These are shown as blue squares, for about 9 temperatures. Also shown is the BCS weak coupling result, given as a red curve. One can see that the differences are small. We have also plotted many more points (green asterisks) for a weaker coupling, $\lambda = 0.3$ (same phonon frequency), which fall exactly on the BCS curve. The main point is that deviations from the weak coupling BCS result are minor. For much stronger coupling than given here deviations are similarly very small, and experiment confirms this to be the case.[80]

Many measurable properties of the superconducting state can be calculated from the imaginary axis solutions to the gap function. The renormalization function, $Z(i\omega_m)$, is also required but this does not change by very much in the superconducting state. Examples of measurable properties include all thermodynamic quantities like the specific heat, and various critical fields. Systematic changes with coupling strength, as measured by λ , or alternatively the ratio of the critical temperature to a particular phonon frequency moment, T_c/ω_{ln} , have been reviewed elsewhere,[33, 34] and will not be repeated here.

10.4.6 Results on the real axis

For any dynamical property (tunneling current, optical response, dynamical penetration depth, etc.), the relevant Green function (and therefore self-energy) is required as a function of real frequency. More precisely, for the retarded Green function it is needed at $\omega + i\delta$, i.e. infinitesimally above the real axis. In the original literature[12, 13, 71, 81, 82] the spectral representation was introduced to replace Matsubara sums with real frequency integrals, and these equations were then solved, either analytically (with approximations) or numerically. This was a difficult task (especially with the computers available at that time), and eventually the procedure was adopted that first required a solution on the imaginary axis and then analytic

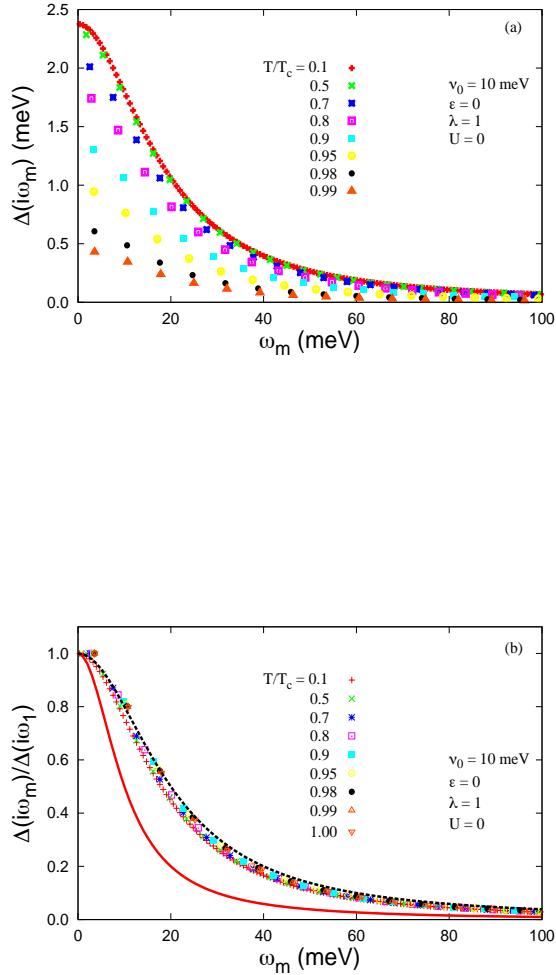


Figure 3: (a) The gap function $\Delta(i\omega_m)$ vs. Matsubara frequency, ω_m , for various temperatures. We have used a δ -function phonon spectrum ($\epsilon = 0$) with $\nu_0 = 10$ meV, electron-phonon coupling strength, $\lambda = 1$ and $U = 0$. For these parameters, $T_c = 13.3$ K. Clearly the gap function increases in amplitude with decreasing temperature, and below about $T/T_c = 0.5$ there is very little change in the amplitude and in the frequency dependence. With a broadened phonon spectrum there would be only minor changes. With a nonzero U , the gap function would have a negative asymptote as $\omega_m \rightarrow \infty$. In (b), to illustrate that there is very little change in the frequency dependence *at all temperatures* we show the normalized gap function, $\Delta(i\omega_m)/\Delta(i\omega_1)$ vs. ω_m . Now the results look very similar to one another, which makes convergence from one temperature to the next relatively easy. Also shown is the weak coupling expectation[56] at T_c , $\Delta(i\omega_m)/\Delta(i\omega_1) = \omega_E^2/(\omega_E^2 + \omega_m^2)$, indicated with a solid red curve. This result clearly does not resemble the data, since we the numerical results are for $\lambda = 1$. However, the slightly modified result, $\Delta(i\omega_m)/\Delta(i\omega_1) = \omega_E^2/(\omega_E^2 + \omega_m^2/(1 + \lambda)^2)$, shown as a dashed black curve, is a fairly good fit.

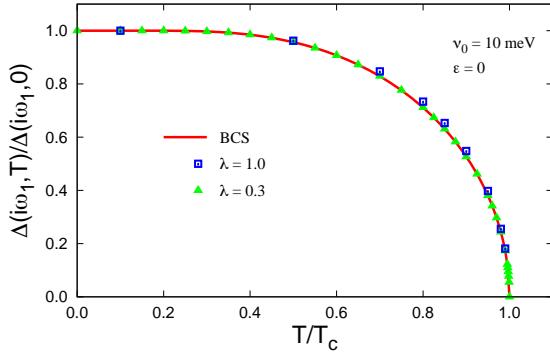


Figure 4: The gap function at the first Matsubara frequency (serving as an order parameter), normalized to the zero temperature gap function at the first Matsubara frequency, vs. reduced temperature T/T_c . The blue squares are the results at a few temperatures for calculations using a phonon δ -function spectrum with $\nu_0 = 10$ meV, $\lambda = 1$, and $U = 0$. Shown for comparison is the weak coupling BCS result (red curve). The deviations are very slight. Also shown for comparison are the Eliashberg results for the same phonon spectrum but with $\lambda = 0.3$ (green triangles). These results fall right on the BCS weak coupling result.

continuation ($i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta$) through some approximate process. For this type of analytic function, the method of Padé approximants was used,[83] although the degree of precision needed for the gap function on the imaginary axis was very stringent (10^{-12} for relative errors) in order to achieve accurate results on the real axis.

An appreciation for the information imbedded in imaginary axis solutions can be attained by considering the simple example of $g(i\omega_m) = \text{sech}(\omega_m/\nu_0)$, a very smooth function without structure, and monotonically decreasing with frequency on the positive imaginary axis. The analytic continuation can be easily done analytically; it is $g(\omega + i\delta) = \sec[(\omega + i\delta)/\nu_0]$. This function, in contrast to its imaginary axis counterpart, is riddled with divergences and discontinuities. And yet, in principle at least, this information is embedded in the (smooth) results on the imaginary axis. In practice, the information is contained in the 10th significant digit and beyond.

An alternative, numerically exact procedure was developed in the late 1980's.[84] Here we simply write down the resulting expressions, the derivation of which is available in Ref. [[84]]. They are

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega + i\delta) &= \pi T \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\lambda(\omega - i\omega_m) - u^*(\omega_c)\theta(\omega_c - |\omega_m|)] \frac{\Delta(i\omega_m)}{\sqrt{\omega_m^2 + \Delta^2(i\omega_m)}} \\
 &+ i\pi \int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu) \left\{ [N(\nu) + f(\nu - \omega)] \frac{\phi(\omega - \nu + i\delta)}{\sqrt{(\omega - \nu)^2 Z^2(\omega - \nu + i\delta) - \phi^2(\omega - \nu + i\delta)}} \right. \\
 &\quad \left. + [N(\nu) + f(\nu + \omega)] \frac{\phi(\omega + \nu + i\delta)}{\sqrt{(\omega + \nu)^2 Z^2(\omega + \nu + i\delta) - \phi^2(\omega + \nu + i\delta)}} \right\}, \tag{10.25}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 Z(\omega + i\delta) &= 1 + \frac{i\pi T}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda(\omega - i\omega_m) \frac{\omega_m}{\sqrt{\omega_m^2 + \Delta^2(i\omega_m)}} \\
 &+ \frac{i\pi}{\omega} \int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu) \left\{ [N(\nu) + f(\nu - \omega)] \frac{(\omega - \nu)Z(\omega - \nu + i\delta)}{\sqrt{(\omega - \nu)^2 Z^2(\omega - \nu + i\delta) - \phi^2(\omega - \nu + i\delta)}} \right. \\
 &\quad \left. + [N(\nu) + f(\nu + \omega)] \frac{(\omega + \nu)Z(\omega + \nu + i\delta)}{\sqrt{(\omega + \nu)^2 Z^2(\omega + \nu + i\delta) - \phi^2(\omega + \nu + i\delta)}} \right\} \tag{10.26}
 \end{aligned}$$

and of course $\Delta(\omega + i\delta) \equiv \phi(\omega + i\delta)/Z(\omega + i\delta)$. Here $f(\omega) \equiv 1/(\exp(\beta\omega) + 1)$ and $N(\nu) \equiv 1/(\exp(\beta\nu) - 1)$ are the Fermi and Bose functions respectively. Note that in cases where the square-root is complex, the branch with positive imaginary part is to be chosen. The reason for this can be traced back to Eq. (10.7) [or Eq. (10.5)] where the integration over $\epsilon_{\mathbf{k}'}$ (with the assumptions made there) requires that the pole (given the same square-root that appears here) be *above* the real axis.

It can easily be verified that substituting $\omega + i\delta \rightarrow i\omega_n$ instantly recovers the imaginary axis equations (all the Fermi and Bose factors cancel to give zero contributions beyond the initial terms that require Matsubara summations). Clearly the inverse is not true — replacing the Matsubara frequency $i\omega_m$ where it appears in Eqs. (10.16,10.17) produces the first lines in Eqs. (10.25,10.26) involving Matsubara sums, but leaves out the remaining two lines in each case. The strategy for solving these equations is straightforward; the imaginary axis equations [Eqs. (10.16,10.17)] are first solved self-consistently. These are then used in Eqs. (10.25,10.26) and these equations are iterated to convergence. The presence of the first lines in these equations provides a “driving term” that makes the iteration process quite rapid. For example, performing the entire operation (solution of imaginary axis and real axis equations) for a given temperature takes about a tenth of a second on a laptop.

Moreover, $T = 0$ is a special case, as is clear from these equations. In fact, this was recognized a long time ago,[85] where they established the following low frequency behaviour at $T = 0$,

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\Delta(\omega + i\delta) &= c, & T = 0 \\
 \text{Im}\Delta(\omega + i\delta) &= 0, \\
 \text{Re}Z(\omega + i\delta) &= d, \\
 \text{Im}Z(\omega + i\delta) &= 0. \tag{10.27}
 \end{aligned}$$

where c and d are constants. In contrast, the behaviour at any non-zero temperature is

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\Delta(\omega + i\delta) &\propto \omega^2, & T > 0 \\
 \text{Im}\Delta(\omega + i\delta) &\propto \omega, \\
 \text{Re}Z(\omega + i\delta) &= d(T), \\
 \text{Im}Z(\omega + i\delta) &\propto 1/\omega. \tag{10.28}
 \end{aligned}$$

For conventional parameter choices this distinction has very little consequence, as the differences are barely discernible. For example, the expression of the imaginary part of $Z(\omega + i\delta)$ in the normal state is given by

$$\text{Im}Z(\omega + i\delta) = 2\pi\lambda \frac{\nu_0}{\omega} [N(\nu_0) + f(\nu_0)] \quad (10.29)$$

for a δ -function spectrum [$\epsilon \rightarrow 0$ in Eq. (10.21)] with strength λ and central frequency ν_0 . For $\nu_0 = 10$ meV and $\lambda = 1$ then Fig. 1 indicates $T_c \approx 10$ K, and at $T/T_c = 0.1$, the exponent in the Bose and Fermi functions makes this part $\approx 10^{-50}$. Thus, true to Eq. (10.28) the limiting behaviour is $\propto \nu_0/\omega$. However, to see this requires $\omega/\nu_0 < 10^{-45}$, making it unobservable, and indistinguishable from the $T = 0$ case.

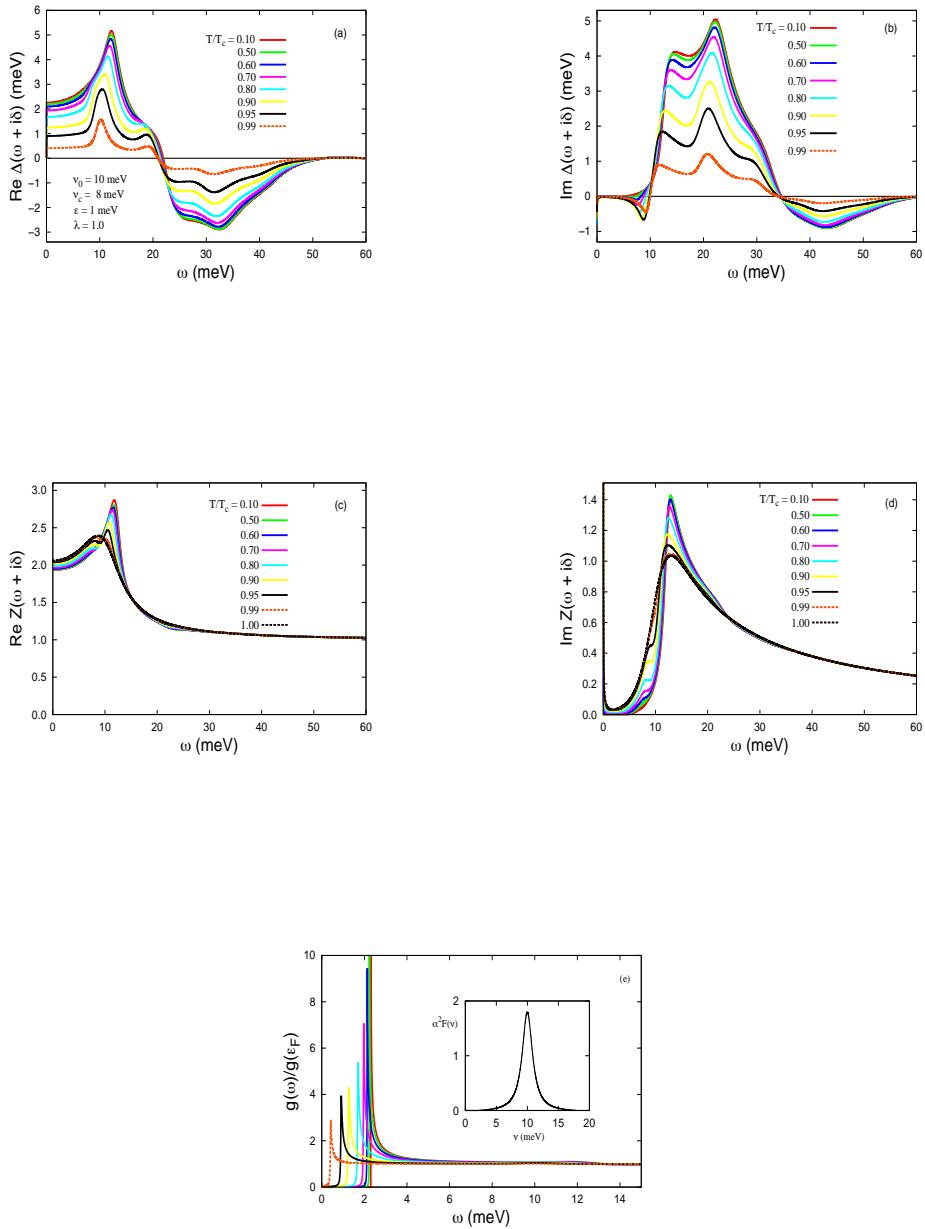


Figure 5: Frequency dependence of (a) $\text{Re } \Delta(\omega + i\delta)$, (b) $\text{Im } \Delta(\omega + i\delta)$, (c) $\text{Re } Z(\omega + i\delta)$, (d) $\text{Im } Z(\omega + i\delta)$, and (e) $g(\omega)/g(\epsilon_F)$, for various temperatures in the superconducting state. Features are discussed in the text. For the spectral function we have used Eq. (10.21) with $\lambda = 1$, $\nu_0 = 10$ meV, and $\epsilon = 1$ meV. It is displayed in the inset of (e) and was used for all these figures. The colour coding in (e) is the same as the others. We used $U = 0$.

While this expression is for the normal state, the corresponding one of the superconducting state is even more severe, due to the development of the superconducting order parameter, which gives rise to a gap in the spectrum. Again, given the first two lines in Eq. (10.28) there is technically *no gap*, but in practice for reasons like we have just indicated, the practical results more closely follow the behaviour indicated in Eq. (10.27). Where the finite temperature result becomes pronounced and noticeably different than the zero temperature behaviour is in the strong coupling limit,[86] but in this case the parameters are not realistic and undoubtedly

beyond the domain of validity of the theory.

Returning to $T = 0$, for cases like the present where the phonon spectrum has a gap there is a special simplification. Basically, no iteration is required — the low frequency gap and renormalization functions come entirely from the first lines of Eqs. (10.25,10.26), and these can be constructed explicitly from the imaginary axis results. For a δ -function phonon spectrum, however, one has to be careful to convert the Matsubara summation to an actual integral, as a discontinuity will occur at the phonon frequency (at non-zero temperature this discontinuity is broadened into a gradual drop). Once the low frequency gap and renormalization functions are so constructed, higher frequency values require the Matsubara sum *and* real axis values of these functions at *lower frequencies only*. Eventually the entire functional forms are so constructed, without the need for iteration. As we will see, low temperature results converge quite rapidly to the zero temperature result, so this non-iterative method can be used as an alternative, for the lowest temperatures. Nonetheless, we will proceed with fully converged (iterative) finite temperature results, since these require such few iterations anyways.

To show real axis results, we utilize a phonon spectrum as in Eq. (10.21) with $\nu_0 = 10$ meV, $\nu_c = 8$ meV, and $\epsilon = 1$ eV, and $\lambda = 1$. Results with a δ -function spectrum tend to have a series of singularities, that are anyways artifacts of the singular spectrum, so we prefer to show results corresponding to this model spectrum. A series of such plots was also shown in Ref. [[34]] for the tunneling-derived Pb spectrum, with a much larger value of λ , and many more such results have been shown in the literature, often using this same method.[87] In Fig. 5 we show (a) the real part of the gap function, (b) the imaginary part of the gap function, (c) the real part of the renormalization function, (d) the imaginary part of the renormalization function, and (e) the tunneling density of states,

$$\frac{g(\omega)}{g(\epsilon_F)} = \text{Re} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2(\omega + i\delta)}}, \quad (10.30)$$

which is measurable in single-particle tunneling experiments. The first observation, difficult to make with just these results, is that an image of the $\alpha^2 F(\nu)$ spectrum is contained in both the real and imaginary parts of the gap function. Here it is the peak structure clearly evident in (a) centred around 10 meV *for the highest temperature shown*. As the temperature decreases this peak shifts to higher frequency, roughly by an amount equal to the value of the gap function at low frequency (about 2 meV in the present case). Experimentation with different spectral functions makes this observation more self-evident. See, for example, the distinctive spectrum for Pb in Fig. 4.35(a) of Ref. [[34]].

Both functions in (a) and (b) go to zero as the critical temperature is approached from below. As discussed earlier, they both go to zero at zero frequency at all temperatures shown, according to Eqs. (10.28), although one cannot see this on the scale shown. Even for the highest temperatures shown this behaviour can barely be seen, but becomes evident when one expands the low frequency scale. For the lowest temperatures shown even expanding the frequency scale by a few orders of magnitude is not enough to reveal the low-frequency behaviour indicated by Eqs. (10.28). For this reason one cannot use $\Delta(\omega + i\delta)$ as an order parameter at any frequency; either one has to revert to $\phi(\omega + i\delta)$ at zero frequency, or one can use the imaginary axis result for $\Delta(i\omega_m)$, as we did in Fig. 4. Also note that these functions approach zero at high frequency. If a Coulomb repulsion is included then the real part of $\Delta(\omega + i\delta)$ approaches a negative constant at high frequency.

In contrast the real and imaginary parts of $Z(\omega + i\delta)$ plotted in (c) and (d) have changed very little in the superconducting state, and remain non-zero at the superconducting critical temperature, as indicated by the black curve. An image of $\alpha^2 F(\nu)$ is present in this function as well, particularly in the imaginary part (see also Fig. 4.35 (c) and (d) in Ref. [[34]]). Finally, the tunneling density of states is shown in Fig. 5(e), and reveals a “gap” that opens from zero at

$T = T_c$ rather quickly and then saturates to a low temperature value as indicated. In fact a plot of this “gap” vs. temperature would follow the result displayed in Fig. 4 very closely. However, as first pointed out by Karakozov et al.[85] there is no “gap” (hence the parentheses) and in fact this is evident in Fig. 5(e), where there is a noticeable rounding of the curves at frequencies below the sharp peak at almost all temperatures shown. The peak is a remnant of the square-root singularity known from BCS theory, which is evident from Eq. (10.30) if a constant gap function is used, $\Delta(\omega + i\delta) = \Delta_0$. In fact Eliashberg theory predicts smearing of this singularity simply due to the presence of imaginary components of all the functions involved in Eqs. (10.28) for all finite temperatures. It is also worth pointing out that the BCS limit of Eliashberg theory is *not* achieved by setting the gap function to a constant, $\Delta(\omega + i\delta) \rightarrow \Delta_0$, but in fact the gap function is a decaying function of frequency in this limit.[85] This frequency dependence and its implications for the weak coupling limit has been further explored in Refs. [[88, 56, 89]].

Finally, though not so evident in Fig. 5(e), there are “ripples” in the density of states beyond the “gap” region, caused by the coupling of electrons to phonons. The presence of these ripples in experiments (see, in particular, Refs. [[90, 91, 18]]) is perhaps the strongest evidence of the validity of Eliashberg theory. In fact the most intense scrutiny has been superconducting Pb, where the electron-phonon coupling is particularly strong, $\lambda \approx 1.5$, with a value well beyond the expected domain of validity. These experiments, coupled with an inversion technique that use the Eliashberg equations themselves, result in a consistent description of the superconducting state for Pb and other so-called “strong coupling” superconductors.

Many systematic deviations from BCS theory have been characterized, for example the gap ratio, $2\Delta_0/(k_B T_c)$,[92] the specific heat jump, and many other dimensionless ratios[93, 94]. These have all been reviewed in Ref. [[33]], and show very systematic behaviour as a function of the strong coupling index, T_c/ω_{ln} . On the other hand, when systematics are examined with purely experimental parameters, the picture is not so clear.[95]

10.4.7 Summary and Outlook

I have provided just a sketch of what we consider the essence of Eliashberg theory — retardation effects, in the context of a single featureless band. The generalization of these types of calculations to more complicated scenarios is well documented in a number of places, and have not been reviewed here. These include order parameter anisotropy, multi-band superconductivity, Berezinskii “odd-frequency” pairing, sharply varying electronic density of state, impurity effects, and so on. These additional complications are increasingly taken into account to understand new classes of compounds that exhibit superconductivity, such as the hydrides, MgB₂, and the pnictides. In some cases, these additional effects have been invoked to explain higher critical temperatures as well, but for the most part they are motivated by matching theory to experiment.

In its bare form, Fig. 1 presents the possibilities for T_c provided by Eliashberg theory. The conscious decision was made to extend the domain of coupling strength to unity *only* and not beyond, because there are reasons to believe that going beyond this regime is not viable. At the same time, large values of the characteristic phonon frequency have been used, and this is why the plot extends to beyond ≈ 50 K for the vertical axis, T_c . Are these values of frequency, together with large values of $\lambda \approx 1$ viable? Probably not, but given these sorts of parameter values, this is what Eliashberg in its standard form predicts.

I have also tried to touch on aspects of the theory where more critical scrutiny is possible, by comparing results to those obtained with microscopic models, such as the Holstein model. We believe there are significant difficulties that arise when these comparisons are made. One reaction is to dismiss such comparisons, as the Holstein model (or the Hubbard model, for that matter) may be regarded as “toy models,” possibly fraught with pathologies. However,

if the Holstein model is lacking in some way, it is important to know why, and what other aspect of the electron-phonon interaction (wave-vector dependence?) is essential to the success of Eliashberg theory. For example, if the super-high- T_c of the hydrides is confirmed to originate in the electron-phonon interaction, then clearly one or more missing gaps in our understanding of how this happens needs to be filled.

Moreover, as presented here, Eliashberg theory focusses on the superconducting instability, and does not consider other, possibly competing, or potentially enhancing, instabilities. This possibility has come up as more and more phase diagrams of families of materials exhibit a nearby antiferromagnetic or charge-density-wave instability, as a function of some tuning parameter (doping, pressure, etc.). It would be desirable to generalize Eliashberg theory to be more “self-regulating,” and have the theory itself indicate when a competing instability is limiting superconducting T_c , for example.

The other aspect that goes hand in hand with the electron-phonon coupling is the direct Coulomb interaction. We cannot claim to understand superconductivity to the point of having predictive power until we understand the role of Coulomb correlations, and their detrimental (or perhaps favourable?) effects on pairing. A key advancement has to come in further understanding the role that competitive tendencies or instabilities play in superconductivity. Many of the modern-day methods (Dynamical Mean Field Theory, for example) seek to address the question of competing interactions. Studies with Quantum Monte Carlo methods, like the ones mentioned here, will also aid in furthering our understanding of interacting electrons, and similar studies with the now-accessible much larger lattice sizes would be welcome.

This work was supported in part by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC). I would like to thank the many students and postdoctoral fellows in my own group who have contributed to the work described here. I also want to thank in particular Jules Carbotte, who first taught me about Eliashberg theory, and Ewald Schachinger, who was instrumental in teaching me about programming the Eliashberg imaginary axis equations. I also want to thank Sasha Alexandrov, who over the years continued to question the validity of Migdal-Eliashberg theory. In the same way, Jorge Hirsch, with whom I have worked a great deal on other matters, has been instrumental in discussions concerning the validity of the work reviewed here. I also want to thank him for critical comments concerning parts of this review. Finally, Jules sadly passed away earlier this year (April 5, 2019), and this review is dedicated to his memory. He was a wonderful man, and I feel extremely fortunate to have first entered the physics world under his guidance.

APPENDIX: Derivation of Eliashberg Theory

In this Appendix, we will first outline a derivation of Eliashberg theory, based on a weak coupling approach. Our primary source for this derivation is Ref. [[47]]. Migdal theory of the normal state follows by simply dropping the anomalous amplitudes in what follows.

If we know the many-body wave function of system, we can calculate the expectation value for any observable. However, usually this is something we do not know, and instead we calculate multi-electron Green functions, which are themselves related to observables. The Green functions are necessarily almost always approximate, and those computed in Eliashberg theory are no exception. In fact, Eliashberg theory is essentially a mean-field theory, though because of the inherent frequency dependence in the self energy, it is in many ways a precursor to Dynamical Mean Field Theory.[96]

We begin with the definition of the one-electron Green function, defined in momentum space,[97] as a function of imaginary time, τ ,

$$G(\mathbf{k}, \tau - \tau') \equiv - < T_\tau c_{\mathbf{k}\sigma}(\tau) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(\tau') >, \quad (10.31)$$

where \mathbf{k} is the momentum and σ is the spin. The angular brackets denote a thermodynamic average. We can Fourier-expand this Green function in imaginary frequency:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_m \tau} G(\mathbf{k}, i\omega_m) \\ G(\mathbf{k}, i\omega_m) &= \int_0^\beta d\tau G(\mathbf{k}, \tau) e^{i\omega_m \tau}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

The frequencies $i\omega_m$ are the Fermion Matsubara frequencies, given by $i\omega_m = i\pi T(2m - 1)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, where T is the temperature. Because the c 's are Fermion operators, the Matsubara frequencies are *odd* multiples of $i\pi T$. The imaginary time τ takes on values from 0 to $\beta \equiv 1/(k_B T)$.

A similar definition holds for the phonon Green function,

$$D(\mathbf{q}, \tau - \tau') \equiv - \langle T_\tau A_{\mathbf{q}}(\tau) A_{-\mathbf{q}}(\tau') \rangle, \quad (10.33)$$

where

$$A_{\mathbf{q}}(\tau) \equiv a_{\mathbf{q}}(\tau) + a_{-\mathbf{q}}^\dagger(\tau). \quad (10.34)$$

The Fourier transform is similar to that given in (10.32) except that the Matsubara frequencies are $i\nu_n \equiv i\pi T 2n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ and occur at *even* multiples of $i\pi T$. These are the Boson Matsubara frequencies.

To derive the Eliashberg equations, we follow Ref. [47], and use the equation-of-motion method. The starting point is the time derivative of Eq. (10.31),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(\mathbf{k}, \tau) = -\delta(\tau) - \langle T_\tau [H - \mu N, c_{\mathbf{k}\sigma}(\tau)] c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(0) \rangle, \quad (10.35)$$

where we have put $\tau' = 0$, without loss of generality. We use the Hamiltonian (10.3), and assume, for the Coulomb interaction, the simple Hubbard model, $H_{Coul} = U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}$. Including the Coulomb repulsion, the result is repeated here,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\sigma} g(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + a_{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}) c_{\mathbf{k}'\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} \\ &\quad + \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q}\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

where the various symbols have already been defined in the text. We consider only the Green function with $\sigma = \uparrow$; the commutator in Eq. (10.35) is straightforward and we obtain

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon_{\mathbf{k}} \right) G_{\uparrow}(\mathbf{k}, \tau) &= \\ -\delta(\tau) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &\langle T_\tau A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) c_{\mathbf{k}'\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle \\ + \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} &\langle T_\tau c_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}+\mathbf{p}\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{p}'\downarrow}(\tau) c_{\mathbf{p}\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Various higher order propagators now appear; to determine them another equation of motion can be written, which would, in turn, generate even higher order propagators, and this eventually leads to an infinite set of equations with hierarchical structure. This infinite series is normally truncated at some point by the process of decoupling, which is simply an approximation procedure. For example, in (10.37) the Coulomb term is normally decoupled at this point and becomes

$$\begin{aligned} & \langle T_\tau c_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}+\mathbf{p}\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{p}'\downarrow}(\tau) c_{\mathbf{p}\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle \rightarrow \\ & \quad \langle T_\tau c_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}+\mathbf{p}\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{p}'\downarrow}(\tau) \rangle \langle T_\tau c_{\mathbf{p}\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle \rightarrow \\ & \quad -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} G_\downarrow(\mathbf{p}', 0) G_\uparrow(\mathbf{k}, \tau). \end{aligned} \quad (10.38)$$

The case of the electron–phonon term is more difficult; in this case we define a ‘hybrid’ electron/phonon Green function,

$$G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau_1) \equiv \langle T_\tau A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) c_{\mathbf{k}'\uparrow}(\tau_1) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \quad (10.39)$$

and write out an equation of motion for it. We simply get

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau_1) = -\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \langle T_\tau P_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) c_{\mathbf{k}'\uparrow}(\tau_1) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \quad (10.40)$$

where $P_{\mathbf{q}}(\tau) = a_{\mathbf{q}}(\tau) - a_{-\mathbf{q}}(\tau)$. Taking a second derivative yields

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \right] G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau_1) = \\ & \sum_{\mathbf{k}''\sigma} 2\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \langle T_\tau c_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}+\mathbf{k}'\sigma}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{k}''\sigma}(\tau) c_{\mathbf{k}'\uparrow}(\tau_1) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.41)$$

At this point we *do not simply* decouple the last line of Eq. (10.41). We first need to take the phonon propagator into account, and the standard procedure is to use the “non-interacting” phonon propagator. The adjective “non-interacting” is in quotes because part of the philosophy of proceeding in this way was a desire to *not* compute corrections to the phonon propagator, because the information going into this part of the calculations (e.g. the phonon spectral function) was going to come from experiment. Coming from experiment means that nature “had already done the calculation,” and we did not want to double count. Clearly, if the purpose of this calculation is to compare to Quantum Monte Carlo calculations where this is *not* the case, then something different should be done, and this is what motivated the *renormalized* Migdal-Eliashberg calculations of Refs. [[65, 66]].

For now, we proceed with the standard Eliashberg calculations. The equation of motion for the non-interacting phonon propagator is

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \omega_{\mathbf{q}}^2 \right) D(\mathbf{q}, \tau - \tau') = 2\omega_{\mathbf{q}} \delta(\tau - \tau'). \quad (10.42)$$

Inserting this expression into Eq. (10.41) then yields

$$\begin{aligned} G_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}''\sigma} \int_0^\beta d\tau' g_{\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{k}'} D(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \tau - \tau') \\ &\times \langle T_\tau c_{\mathbf{k}''\sigma}^\dagger(\tau') c_{\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau') c_{\mathbf{k}'\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.43)$$

where now τ_1 has been set equal to τ as is required in (10.37). It is important that this be done only *after* applying Eq. (10.42). The result can be substituted into Eq. (10.37), and then Fourier transformed (from imaginary time to imaginary frequency). Before doing this however, we recall that Gor'kov[11] realized the important role of the so-called Gor'kov anomalous amplitude, in the Wick decomposition [97] of the various two-particle Green functions encountered above. We therefore have to account for these in addition to the pairing of fermion operators used in Eq. (10.38).

The anomalous amplitudes are defined to be

$$F(\mathbf{k}, \tau) \equiv - \langle T_\tau c_{\mathbf{k}\uparrow}(\tau) c_{-\mathbf{k}\downarrow}(0) \rangle \quad (10.44)$$

and

$$\bar{F}(\mathbf{k}, \tau) \equiv - \langle T_\tau c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle. \quad (10.45)$$

Now we need to repeat the same steps as above with F and \bar{F} as we did with G . Skipping the intermediate steps, the result is an equation analogous to Eq. (10.37)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon_{\mathbf{k}} \right) \bar{F}(\mathbf{k}, \tau) = \\ & - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}'} g_{-\mathbf{k}', -\mathbf{k}} \langle T_\tau A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle \\ & + \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}'', \mathbf{q}} \langle T_\tau c_{\mathbf{k}''\uparrow}^\dagger(\tau) c_{-\mathbf{k}''+\mathbf{q}\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.46)$$

and similarly for the function F . This leads to the need for another ‘hybrid’ electron/phonon anomalous Green function,

$$\bar{F}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau_1) \equiv \langle T_\tau A_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger(\tau_1) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \quad (10.47)$$

and, following the same process as for the regular Green function, we find

$$\begin{aligned} \bar{F}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau, \tau) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}''\sigma} \int_0^\beta d\tau' g_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{k}'} D(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \tau - \tau') \\ &\times \langle T_\tau c_{\mathbf{k}''\sigma}^\dagger(\tau') c_{\mathbf{k}''+\mathbf{k}-\mathbf{k}'\sigma}(\tau') c_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger(\tau) c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.48)$$

where again τ_1 has been set equal to τ *after* applying Eq. (10.42).

The Fourier definitions of the anomalous Green function are the same as Eq. (10.32):

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_m \tau} \bar{F}(\mathbf{k}, i\omega_m) \\ \bar{F}(\mathbf{k}, i\omega_m) &= \int_0^\beta d\tau \bar{F}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\omega_m \tau}, \end{aligned} \quad (10.49)$$

and similarly for F . In frequency space one finds that two self energies naturally arise,

$$\Sigma(\mathbf{k}, i\omega_m) = -\frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} D(\mathbf{k} - \mathbf{k}', i\omega_m - i\omega_{m'}) G(\mathbf{k}', i\omega_{m'}), \quad (10.50)$$

$$\phi(\mathbf{k}, i\omega_m) = -\frac{1}{N\beta} \sum_{\mathbf{k}', m'} g_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} g_{-\mathbf{k}'-\mathbf{k}} D(\mathbf{k} - \mathbf{k}', i\omega_m - i\omega_{m'}) F(\mathbf{k}', i\omega_{m'}). \quad (10.51)$$

One can show that $g_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*$; normally one expects a similar relation with negative wave vectors, and we assume it in what follows. These equations are then written self-consistently and lead to Eqs. (10.5-10.8) once Eq. (10.4) is used.

10.5 Сверхпроводимость по Абрикосову “теории металлов”

(у него много крутого написано, вот и когда-то почитаю, пока не до этого)

10.6 Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity by Philip F. Bagwell

Abstract

We study the Josephson current through a ballistic, normal, one-dimensional quantum channel in contact with two superconducting electrodes. A single point impurity having reflection coefficient R is placed in the normal conductor. The impurity couples the Andreev energy levels of forward and reverse moving electrons inside the junction, opening energy gaps in the quasiparticle level spectrum versus superconducting phase difference ϕ . These "Andreev" energy gaps suppress the Josephson current in much the same way as disorder suppresses the magnetic flux driven currents in a normal mesoscopic ring. Finite temperature "energy averages" the contribution of Andreev levels above the Fermi energy with those below μ , further suppressing the Josephson current. The portion of the Josephson current carried by scattering states outside the superconducting gap is similarly suppressed by disorder and finite temperature.

10.6.1 I. INTRODUCTION

The Josephson effect in a clean superconductornormal-superconductor (SNS) junction is very different from the Josephson effect in a tunnel junction. Coherent Andreev reflection,¹ whereby an electron incident on a superconductor from a normal conductor is reflected as a hole, is the mechanism responsible for supercurrent flow in clean SNS junctions.² Quasiparticles incident from the normal region of an SNS junction are Andreev reflected off the pair-potential discontinuity at each SN interface, and their wave interference produces a set of resonant levels which carry the Josephson current. Such a description for the Josephson current assumes quasiparticles in the normal region can move without losing phase information, that is, it assumes the SNS junction is a mesoscopic system.

When the normal region of the SNS junction forms a quantum point contact,^{3,4} the natural Josephson current scale is $I_c = e\Delta/\hbar$ (Refs. 5 and 6) (2Δ is the energy gap of the superconductor) and the current phase relation is $I(\phi) = I_c \sin(\phi/2)$.^{6,7} If a tunnel barrier is then introduced into the normal region of the point contact, electrons often reflect simply as electrons, rather than as a hole. The current through such a dirty SNS point contact then evolves gradually^{8–13} with decreasing barrier transmissivity T into the usual Josephson form¹⁴ $I(\phi) = I_c \sin(\phi)$, where $I_c = e\Delta T/2\hbar$. In long and clean SNS junctions, where the extent of the normal region L is longer than the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) healing length ξ_0 , the natural Josephson current scale is $I_c = ev_F/L$ (Refs. 2 and 15 – 18) (v_F is the Fermi velocity) and the current phase relation assumes a triangular shape. These developments, and other calculations where different types of mesoscopic systems are embedded in the normal region of an SNS junction,^{18–20} are reviewed in Refs. 21 and 22.

In this paper we apply the Bogoliubov-de Gennes equations^{23,24} to describe the Josephson current in both clean SNS junctions and in SNS junctions containing a tunnel barrier. We obtain expressions for the Josephson current versus superconducting phase difference ϕ for both short ($L < \xi_0$) and long ($L > \xi_0$) SNS junctions, and which account for both the bound levels inside the superconducting energy gap and scattering states outside the gap. We show that introducing a tunnel barrier forces quasiparticles in the normal region to form standing waves at $\phi = \pm\pi$, so that the effect of disorder on the Josephson current can be interpreted in a

manner very analogous to electrons confined to a normal mesoscopic ring^{25,26} or to electrons in a spatially periodic potential. Many magnetic flux sensitive effects predicted for normal mesoscopic rings^{27–29} therefore have analogs for the Josephson effect in SNS junctions.

10.6.2 II. SNS JUNCTION WITH AN IMPURITY

We model the SNS junction² by a step change in the pair potential shown in Fig. 1, namely

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta e^{i\phi_1}, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < L \\ \Delta e^{i\phi_2}, & x > L \end{cases} \quad (1)$$

This model for the pair potential requires that the superconductor widen adiabatically to an infinite width.^{6,17} The large superconducting banks can then be viewed as an "order parameter reservoir," where the supercurrent density is effectively zero. In that case, phase gradients of the superconducting order parameter in the contacts, required to support supercurrent flow, are negligible compared to phase gradients near the junction itself. The disorder we describe by a single point impurity placed in the junction

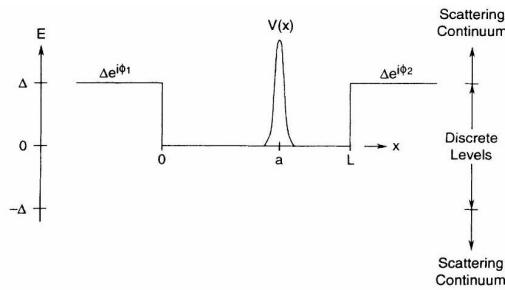


FIG. 1. Scattering potential which describes a mesoscopic Josephson junction. "Andreev" bound states form in the pair potential well. Both the bound levels and scattering states carry parts of the Josephson current.

$$V(x) = V_s \delta(x - a) \quad (2)$$

where $0 \leq a \leq L$.

The potentials $\Delta(x)$ and $V(x)$ enter the Bogoliubov-de Gennes equation of motion for the quasi-particles²³

$$\begin{pmatrix} H(x) - \mu & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & -[H^*(x) - \mu] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix},$$

where the one-electron Hamiltonian $H(x)$ is

$$H(x) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} - eA(x) \right)^2 + V(x) \quad (4)$$

Equation (3) embodies the quasiparticle dispersion relation for a uniform superconductor,

$$E^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^* \Delta \quad (5)$$

and does not depend on the specific form of the microscopic Hamiltonian giving rise to the pairing potential. We neglect the vector potential A , the electron spin, and the self-consistency condition for $\Delta(x)$. Neglecting the self-consistency condition for $\Delta(x)$ is equivalent to neglecting the proximity effect.

The Andreev levels [the discrete eigenvalues E from Eq. (3) occurring for $|E| < \Delta$] are determined by matching the solutions of Eq. (3) for a spatially uniform pair potential at $x = 0, x = a$, and $x = L$. Details of this procedure are given in Appendix A. For a clean SNS junction this was first done by Kulik,² who found the Andreev levels are determined from

$$2 \cos^{-1} \left(\frac{E}{\Delta} \right) + \left(\frac{L}{\xi_0} \right) \left(\frac{E}{\Delta} \right) \pm \phi = 2\pi n \quad (6)$$

Here $\xi_0 = \hbar v_F / 2\Delta$ is the BCS healing length, $\phi = \phi_2 - \phi_1$ the superconducting phase difference, and $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Equation (6) can be interpreted in terms of BohrSommerfeld quantization of the periodic electron-hole orbits in the normal region.³⁰ The term $2 \cos^{-1}(E/\Delta)$ is the phase shift acquired from the evanescent quasiparticle waves penetrating into the superconducting regions. The term $(EL/\Delta\xi_0)$ is the phase shift acquired from free electron and hole propagation in the normal region. Finally the superconducting phase difference ϕ enters Eq. (6) because, in Andreev reflection, the reflected electron and holes acquire an additional phase shift equal to the phase of the superconducting order parameter. Changing ϕ therefore affects the energy levels in a manner similar to changing the size of a confining potential well in ordinary quantum mechanics.

In the presence of a point impurity potential $V(x)$, Eq. (6) is modified to³¹

$$2 \cos^{-1} \left(\frac{E}{\Delta} \right) + \left(\frac{L}{\xi_0} \right) \left(\frac{E}{\Delta} \right) \pm \alpha = 2\pi n \quad (7)$$

where the "effective phase" α is determined from

$$\cos(\alpha) = T \cos(\phi) + R \cos \left[\left(\frac{L - 2a}{\xi_0} \right) \left(\frac{E}{\Delta} \right) \right] \quad (8)$$

This effective phase α depends on the the normal electron current transmission probability T , given in our point defect model by

$$T = 1 - R = \frac{1}{1 + (mV_s/\hbar^2 k_F)^2} \quad (9)$$

where $\hbar k_F = \sqrt{2m\mu}$ and μ is the Fermi energy. When $T \rightarrow 1$ we recover the Andreev levels for the clean junction, since $\alpha \rightarrow \phi$. In the opposite limit of small transmission, where $T \rightarrow 0$, α also becomes small and is nearly independent of the actual phase difference ϕ . If the junction is long compared to the healing length ($L > \xi_0$), and if an impurity is present ($T \neq 1$), α also depends on the particle's energy and the impurity position $|L - 2a|$.

To compute the Josephson current induced by the superconducting phase difference, one must compute both the electrical current $I_n^\pm(\phi)$ carried by quasiparticles occupying each Andreev level $E_n^\pm(\phi)$ ("discrete" levels with $|E_n^\pm| < \Delta$) and the imbalance $I(E, \phi)$ in the electrical current per unit energy carried by quasiparticles flowing in the "continuum" levels (where $|E| > \Delta$). Once both $I_n^\pm(\phi)$ and $I(E, \phi)$ are known, the total current can be written down if one knows the occupation probability for these energy levels. Since the Josephson current flows near equilibrium, we assume that the single particle levels are thermally populated according to the Fermi distribution function $f(E)$. We therefore obtain the contribution $I_d(\phi)$ to the Josephson current from the discrete spectrum as

$$I_d(\phi) = \sum_n \{ I_n^+(\phi) f(E_n^+(\phi)) + I_n^-(\phi) f(E_n^-(\phi)) \} \quad (10)$$

and the contribution $I_c(\phi)$ to the Josephson current from the continuous spectrum as

$$I_c(\phi) = \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty} \right) I(E, \phi) f(E) dE \quad (11)$$

The total supercurrent $I(\phi)$ is then computed from

$$I(\phi) = I_d(\phi) + I_c(\phi) \quad (12)$$

In this viewpoint only energies below the Fermi energy ($E \leq 0$) contribute to the Josephson current flow at $T = 0$. An additional contribution to the Josephson current results if the pair potential itself changes with superconducting phase difference.^{13, 21, 32}

For a clean junction ($R = 0$), we obtain the electrical current ${}^{24}I_n^{\pm}(\phi)$ carried by each occupied Andreev level from the normalized quasiparticle wave functions $u(x)$ and $v(x)$ as

$$I_n^{\pm}(\phi) = \mp \frac{ev_F}{L + 2\xi(E_n^{\pm}(\phi))} \quad (13)$$

where $\xi(E)$ is the energy dependent healing length²⁴

$$\xi(E) = \left(\frac{\hbar v_F}{2\Delta} \right) \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \right) = \xi_0 \left(\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \right) \quad (14)$$

and $E_n^{\pm}(\phi)$ is found from Eq. (6). One could, in principle, perform the same calculation with the impurity present. Unfortunately, the analytical calculation proves intractable. However, if such a calculation could be done, it must yield

$$I_n^{\pm}(\phi) = \mp \frac{ev_F}{L + 2\xi(E_n^{\pm}(\phi))} \frac{T \sin(\phi)}{\sin(\alpha)} \frac{1}{\gamma} \quad (15)$$

with $E_n^{\pm}(\phi)$ now found from Eqs. (7) and (8). Here γ is a "feedback" factor

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 \pm \left(\frac{\hbar}{2e\Delta} \right) \left(\frac{ev_F}{L + 2\xi(E_n^{\pm}(\phi))} \right) \left(\frac{R}{\sin(\alpha)} \right) \\ &\times \left(\frac{L - 2a}{\xi_0} \right) \sin \left(\frac{(L - 2a)E_n^{\pm}(\phi)}{\Delta\xi_0} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Equations (15) and (16) follow from free energy considerations given below.

The continuous spectrum also contributes to the Josephson current flow in a long SNS junction having $L > \xi_0$. This "continuous spectrum" can be viewed as being composed of "leaky" Andreev levels.¹⁷ When $|E| > \Delta$, it is possible for either the electron or hole composing the Andreev level to escape from the junction by simply transmitting over the pair potential. Although this leakage away from the junction leads to a finite lifetime for the Andreev levels, reducing the total contribution to $I(E, \phi)$ from the continuum Andreev level and spreading it out over a finite-energy range,¹⁸ these broadened Andreev levels nonetheless exist and contribute significantly to the supercurrent flow in long SNS junctions.

We find it most convenient to calculate the continuum current $I_c(\phi)$ using the quasiparticle transmission formalism of van Wees, Lenssen, and Harmans.¹⁸ The method of van Wees, Lenssen, and Harmans is closely analogous to the Landauer-Büttiker transmission formalism⁴ for normal currents, and is mathematically equivalent to the transmission formalism of Furusaki, Takayanagi, and Tsukada.²⁰ Applying this formalism, we find (in Appendix B) the continuum contribution $I_c(\phi)$ for a clean SNS junction to be

$$I_c(\phi) = \frac{2e}{h} \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty} \right) |u_0^2 - v_0^2| \times \left(\frac{1}{D(E, -\phi)} - \frac{1}{D(E, \phi)} \right) f(E) dE \quad (17)$$

where the function $D(E, \phi)$ is

$$D(E, \phi) = u_0^4 + v_0^4 - 2u_0^2v_0^2 \cos \left[\left(\frac{E}{\Delta} \right) \left(\frac{L}{\xi_0} \right) + \phi \right] \quad (18)$$

Here u_0 and v_0 are the standard BCS "coherence" factors

$$2u_0^2 = 1 + \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E} \quad (19)$$

and

$$2v_0^2 = 1 - \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E} \quad (20)$$

The contribution $I_c(\phi)$ to the Josephson current in a clean SNS junction has been calculated previously.^{2, 15 – 18, 20} We feel Eq. (17) is probably identical to the analytical results of Ishii,¹⁵ Svidzinski, Antsygina, and Bratus,¹⁶ and Furusaki, Takayanagi, and Tsukada.²⁰ In the presence of the point impurity, Eq. (17) is modified to

$$I_c(\phi) = \frac{2e}{h} T \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty} \right) |u_0^2 - v_0^2| \times \left(\frac{1}{D(E, -\alpha)} - \frac{1}{D(E, \alpha)} \right) \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} f(E) dE \quad (21)$$

with the effective phase α defined in Eq. (8). A computation given in Appendix B yields Eq. (21).

Equations (17) and (21) show that the continuous spectrum makes no contribution to the Josephson current if $L \ll \xi_0$, since Eq. (18) gives $D(E, \alpha) = D(E, -\alpha)$ when $L \ll \xi_0$. Further, only energies within a few Δ of the Fermi level make any sizable contribution to $I_c(\phi)$, since the phase sensitive term in Eq. (18) for $D(E, \phi)$ is significant only within a few Δ of the Fermi energy. Thus, the Josephson current at $T = 0$ is not limited to flowing only at the Fermi energy (the case for normal currents at $T = 0$ and small bias voltages), or even limited to flow within an energy range Δ below the Fermi level (false only if $L \ll \xi_0$), but flows over an energy range extending several Δ below the Fermi energy when $L > \xi_0$. Equations (17) and (21) also show that the continuum contribution $I_c(\phi)$ is negligible near $\phi = \pm\pi$, and that $I_c(\phi = \pm\pi) = 0$.

An alternate method to compute Josephson currents requires the change in Helmholtz free energy F with superconducting phase difference^{13, 21, 32, 33}

$$I(\phi) = \frac{2e}{\hbar} \frac{dF(\phi)}{d\phi} \quad (22)$$

Equation (22) provides additional insight into the supercurrent formulas presented in this section. Since Eqs. (7) and (8) hold for the SNS junction with an impurity, our results for the dirty SNS junction follow from those of the clean SNS junction plus the chain rule of differentiation

$$\frac{dF}{d\phi} = \frac{dF}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\phi} \quad (23)$$

where we have from Eq. (8)

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right|_E = \frac{T \sin(\phi)}{\sin(\alpha)} \quad (24)$$

The factor (24) appears both in our expression (15) for the current $I_n^\pm(\phi)$ carried by each Andreev level and in the expression (21) for the continuum supercurrent $I_c(\phi)$. As we argue more precisely in Appendix C, Eq. (23) for the derivative of the free energy, together with Eqs. (7) and (8), implies that Eq. (15) for $I_n^\pm(\phi)$ in the dirty junction follows from Eq. (13) for the clean junction. By similar arguments, Eq. (21) for $I_c(\phi)$ in the dirty junction follows from Eq. (17) for the clean junction.

10.6.3 III. JUNCTION SHORTER THAN THE HEALING LENGTH

In the limit of a "point contact" or "short" junction, for which $L \ll \xi_0$, we immediately find from Eq. (8) that the Andreev level spectrum is determined as

$$E^\pm = \pm \Delta \cos(\alpha/2) = \pm \Delta \sqrt{1 - T \sin^2(\phi/2)} \quad (25)$$

where

$$\cos(\alpha) = T \cos(\phi) + R \quad (26)$$

Equation (25) is a special case of the more general expression derived by Beenakker¹³ when multiple quantum channels are open.

We graph Eq. (25) in Fig. 2.³⁴ The dotted lines show

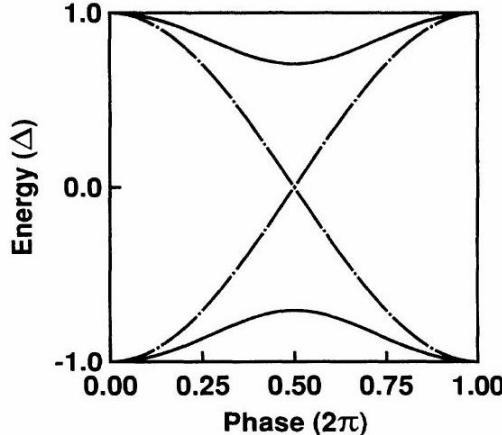


FIG. 2. Andreev levels $E^\pm(\phi)$ as a function of superconducting phase difference ϕ for a junction shorter than the healing length ($L \ll \xi_0$). The unperturbed levels in the clean junction (dotted), corresponding to a left-moving (E^+) and right-moving (E^-) electrons, become coupled by the impurity. As a result, the energy degeneracy at $\phi = \pm\pi$ is lifted and an energy gap of size $E_{\text{gap}} = 2\Delta\sqrt{R}$ appears in the quasiparticle energy spectrum for the dirty SNS junction (solid). The position of the Andreev levels versus phase difference when no impurities are present.^{6,35} The level $E^+(\phi)$ corresponds to an electron traveling in the negative- x direction, while the level $E^-(\phi)$ describes an electron moving along the positive- x direction. These two sets of Andreev levels are independent when no impurity is present in the junction. However, since the impurity will reflect electrons, it will couple these unperturbed Andreev levels. This effect is

most pronounced when the levels are degenerate in energy, i.e., at $\phi = \pm\pi$, so that the impurity opens an energy gap in the Andreev level spectrum versus superconducting phase difference having size

$$E_{\text{gap}} = 2\Delta\sqrt{R} \quad (27)$$

Figure 2 is reminiscent of the effects of impurities on the energy level spectrum of a small normal metal ring subject to an Aharonov-Bohm flux,^{25,26} and has also been previously suggested for a composite ring made of part normal and part superconducting material when the normal segment is disordered.³⁶ However, the motion of Andreev reflected electrons in the SNS junction is already periodic, so that a ring geometry (or other type of spatially periodic potential) is not required for $V(x)$ to open gaps in the quasiparticle energy spectrum. It is these "standing waves" forming in the energy level spectrum $E_n^\pm(\phi)$, due to the impurity, which suppress the Josephson current.

Using the properties $E^+ = -E^-$ and $f(E^+) = 1 - f(E^-)$, we readily obtain from Eqs. (25), (15), and (10)

$$I(\phi) = \frac{e\Delta}{\hbar} T \sin(\alpha/2) \left(\frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} \right) \tanh \left(\frac{\Delta}{2kT} \cos(\alpha/2) \right).$$

Writing this in terms of the phase difference ϕ , we find

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \frac{e\Delta}{2\hbar} T \left(\frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1 - T \sin^2(\phi/2)}} \right) \\ &\times \tanh \left(\frac{\Delta}{2kT} \sqrt{1 - T \sin^2(\phi/2)} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

again a limiting case of the multichannel formula from Ref. 13. The single-channel formula, Eq. (29), has also been obtained previously.^{8–13}

We consider the zero-temperature limit of Eqs. (28) and (29) in Fig. 3, where we can set $\tanh(E^+/2kT) = 1$. In the $kT = 0$ case, Eq. (28) becomes

$$I(\phi) = \frac{e\Delta}{\hbar} T \sin(\alpha/2) \left(\frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} \right) \quad (30)$$

Equation (30) interpolates nicely between the point contact and tunnel junction, as discussed in Refs. 13 and 21. When the transmission is nearly one, so that the effective phase difference $\alpha \simeq \phi$, we obtain the result⁷ for a point contact, $I(\phi) = (\pi G \Delta / e) \sin(\phi/2)$, where $G = 2e^2/h$. In the other limit, where the transmission T is small, the effective phase α is also small and is nearly independent of ϕ . We can then approximate $\sin(\alpha) \simeq \alpha$

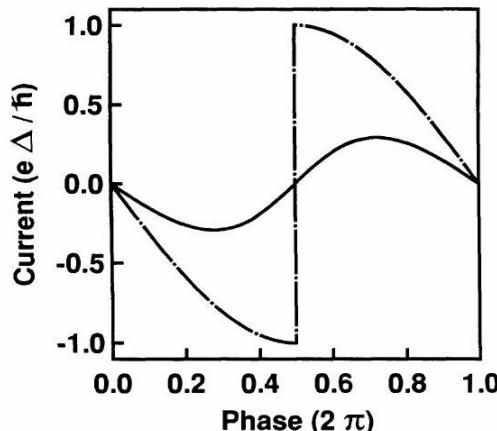


FIG. 3. The "discretized" Josephson current in a clean point contact (dotted) is suppressed by the presence of a tunnel barrier (solid). Regions analogous to "negative differential resistance" in a normal conductor, where the Josephson current decreases as the phase difference increases, are produced by the energy gap in Fig. 2.

so that we obtain the result for a tunnel junction¹⁴ $I(\phi) = (\pi G \Delta / 2e) \sin(\phi)$, where the normal conductance is given by a Landauer-type formula $G = 2e^2 T / h$.⁴

The effect of finite temperature on the Josephson current is qualitatively similar to that of impurity scattering, since both introduce a mixture of Andreev levels associated with left- and right-moving electrons into the supercurrent. The temperature dependence of Eq. (28) arises from the combination of Fermi factors

$$f(E^-) - f(E^+) = 1 - 2f(E^+) = \tanh\left(\frac{E^+}{2kT}\right),$$

so that the temperature dependence of the Josephson current can be viewed as thermally "energy averaging"³⁷ the contribution of some left-moving electrons above the Fermi energy with right-moving ones below μ . The hightemperature limit of Eq. (28) as $kT \rightarrow kT_c$ is¹³

$$I(\phi) = \frac{e\Delta^2}{4\hbar k T_c} T \sin(\phi) \quad (32)$$

which has the same $\sin(\phi)$ dependence as a tunnel junction, again illustrating the similar effects of disorder and finite temperature on the Josephson current. Equation (32) resembles the well-known result of Aslamazov and Larkin³⁸ for the Josephson current through a point contact calculated from Ginzburg-Landau theory. But since the Ginzburg-Landau theory is valid only near T_c , it will never produce the correct low-temperature form $\sin(\phi/2)$ for the clean point contact.

The sharp discontinuity at $\phi = \pm\pi$ for the clean junction at zero temperature arises from the sharp discontinuity in the Fermi function at $T = 0$.¹⁷ When $\phi = \pi$ the Andreev level E^- (carrying a current $I^- = e\Delta/\hbar$) moves above the Fermi level, while the level E^+ (carrying a current $I^+ = -e\Delta/\hbar$) passes below the Fermi level. Thus, the level E^- empties while E^+ becomes populated. This change in Andreev level occupation produces a discontinuity in the supercurrent of $2e\Delta/\hbar$. On the other hand, when the transmission T is small, the levels E^+ and E^- have combined to form a standing wave with $dE^\pm/d\phi = 0$ when $\phi = \pm\pi$, so that the Josephson current falls to zero near $\phi = \pm\pi$.

One would naively predict a critical "depairing current" 23, 39, 40 of order $e\Delta/\hbar$ for a one-dimensional (1D) superconductor. In the presence of a uniform superfluid flow having velocity v_s , the quasiparticle energies are shifted by an amount $\Delta E = p_F \cdot v_s$, where p_F is the Fermi momentum. Thus, the quasiparticle energy gap goes to zero when $\Delta = p_F v_c$, where v_c is the critical "depairing velocity," an argument originally advanced by Landau.⁴⁰ All the electrons below the Fermi energy then move at velocity v_c , giving a critical current I_c of

$$I_c = ev_c v_c = e \left(\frac{2k_F}{\pi} \right) \left(\frac{\Delta}{p_F} \right) = \left(\frac{e\Delta}{\hbar} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right) \quad (33)$$

which is correct to within a numerical factor of order unity. A better treatment⁴¹ would probably slightly increase the numerical value of this current. Thus, the "discretization of the Josephson current" in a superconducting quantum point contact,⁶ which follows as a limiting case of Eq. (6), can be understood as simply the Landau depairing current of a 1D superconductor.

10.6.4 IV. JUNCTION LONGER THAN THE HEALING LENGTH

When the junction length L becomes comparable to the BCS healing length ξ_0 , more Andreev levels become bound in the pair potential well and the continuum levels begin to carry a

supercurrent. Despite these differences in detail, the basic picture given in the preceding section is still qualitatively correct. Quasiparticles trapped in the normal region of the SNS junction set up standing waves near $\phi = \pm\pi$ when an impurity is present, suppressing the Josephson current.

Figure 4 shows the Andreev levels [from Eqs. (7) and (8)] in a clean SNS junction (dashed line) and when an impurity is placed in the normal region (solid line).⁴² The discrete energy level spectrum is quite similar to the normal mesoscopic ring²⁶ and to electrons in a periodic lattice. The energy gap near $E = 0$ for $\phi = \pi, a \simeq L/2$, and small R can be found (Appendix D) as

$$E_{\text{gap}} \simeq 2\sqrt{R}(\hbar v_F / L_{\text{eff}}) \quad (34)$$

where $L_{\text{eff}}^2 = (L + 2\xi_0)^2 + R(L - 2a)^2$. For both long and short SNS junctions, the Andreev gap therefore obeys

$$\pi E_{\text{gap}} \simeq \sqrt{R} I_c \Phi_0 \quad (35)$$

where I_c is the critical current of the clean junction and $\Phi_0 = h/e$ is the normal metal flux quantum. The statement (35) is exact for a short junction.

We plot the Josephson current corresponding to Fig. 4 in Fig. 5(a). In Fig. 5(a) we recover the known result for the Josephson current (solid) in a long and clean SNS junction.^{15–18} The current phase relation is triangular with a critical current $I_c = ev_F / (L + 2\xi_0)$. The critical current I_c is a consequence solely of the current $I_d(\phi)$ carried by the Andreev levels (short dashes), since Eq. (21) shows the continuum current is zero at $\phi = \pi$. The crit-

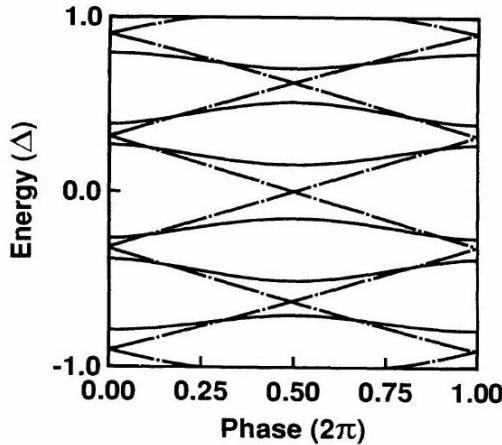


FIG. 4. Andreev levels in a long ($L > \xi_0$) junction with (solid) and without (dashed) an impurity present. As for the short junction, Andreev gaps open in the quasiparticle level spectrum. The analogy with "free electron" and "periodic potential" energy bands is evident in the figure.

ical current $I_c = ev_F / (L + 2\xi_0)$ follows from Eq. (13) and holds for all values of L , even for $L \ll \xi_0$ when the current phase relation is not triangular. The discretized Josephson current from Sec. III also follows by taking $L \rightarrow 0$ in this formula, namely $I_c = ev_F / 2\xi_0 = e\Delta/\hbar$.

To obtain the correct dependence of the supercurrent on the phase (triangular as $L \rightarrow \infty$), it is necessary to account for the current $I_c(\phi)$ carried in the continuum levels (long dashes). The continuum currents can be understood naively and qualitatively by extrapolating the energy levels from Fig. 4 into the continuum and, ignoring their broadening, treating these continuum Andreev levels "as if" they carried the current from Eqs. (10) and (C4). Thus, the continuum currents $I_c(\phi)$ augment the discrete level currents $I_d(\phi)$ before the first Andreev level moves into the continuum near $\phi \simeq \pi/4$. $I_c(\phi)$ opposes $I_d(\phi)$ after the Andreev level closest to $E = -\Delta$

becomes unbound. (The precise value of ϕ where the lowest Andreev level unbinds depends on the junction length L .) We note the continuum supercurrent $I_c(\phi)$ is not sinusoidal.¹⁵ We also note that $I(\phi)$ is a "small" difference between many larger currents^{15–17} carried in each discrete level, along with the larger continuum currents.

The Josephson current through a long and dirty junction is shown in Fig. 5(b). The triangular current phase relation for the clean junction has evolved into an approximately sinusoidal dependence (solid). Neither $I_c(\phi)$ (long dashes) or $I_d(\phi)$ (short dashes) appears to be sinusoidal, although their sum $I(\phi)$ is approximately sinusoidal. For a long and dirty SNS junction, the continuum contribution $I_c(\phi)$ is not only essential to obtain a sinusoidal $I(\phi)$, but is also required to obtain the correct magnitude of the critical current. The continuum levels now contribute to the critical current magnitude, since I_c no longer occurs at $\phi = \pm\pi$. The parameters chosen⁴² for this calculation give a transmission probability $T \simeq \frac{1}{2}$, so that comparing Figs. 5(a) and 5(b) reveals (for this calculation) that the critical current in the dirty junction is less than $T/2$ times the critical current of the clean junction. For a more transparent impurity, these ratios would be limited by the transmission coefficient T .

The continuum contribution $I_c(\phi)$ to the Josephson current is suppressed by finite temperature in the same way as the discrete contribution $I_d(\phi)$. Equation (21) can be written as an integral solely over the excitation spectrum as

$$\begin{aligned} I_c(\phi) &= \frac{2e}{h} T \int_{\Delta}^{\infty} |u_0^2 - v_0^2| \left(\frac{1}{D(E, -\alpha)} - \frac{1}{D(E, \alpha)} \right) \\ &\times \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} [2f(E) - 1] dE \end{aligned} \quad (36)$$

The temperature-dependent factor in Eq. (36) is $1/2f(E) = \tanh(E/2kT)$, implying the same physics of thermal "energy averaging"³⁷ for currents carried in the continuum levels as that discussed for the discrete levels in Sec. III. Thus, in this viewpoint, all the Josephson current flowing in the continuum at $T = 0$ is carried below the superconducting gap at $E \leq -\Delta$.

One could plausibly argue that moving the single impurity inside the normal region would produce mesoscopic fluctuations^{13,43} in the critical current I_c . Equa-

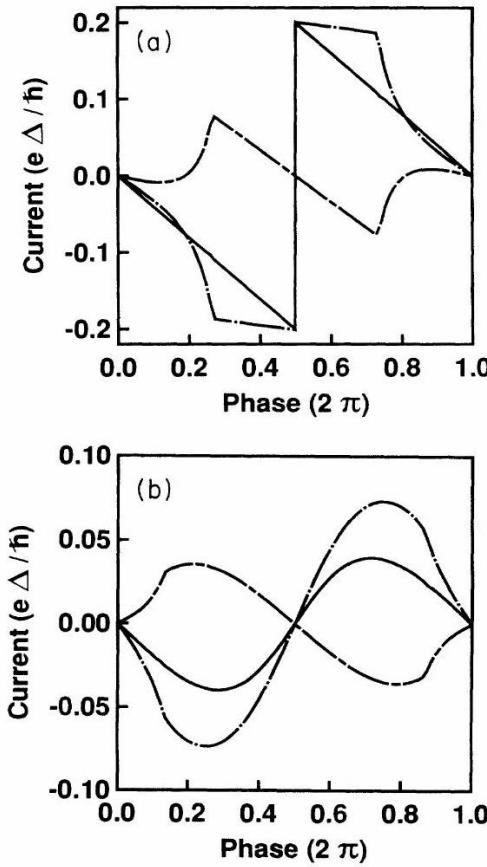


FIG. 5. Josephson current (solid) in a long junction that (a) is clean (b) has an impurity. The impurity rounds the triangular current versus phase relation into a sinusoidal shape, similar to its effect on the short SNS junction. Currents flowing in the scattering continuum (long dashes) and discrete levels (short dashes) combine to give the total Josephson current.

tions (7) and (8) show that moving the single impurity will change the Andreev energy levels E_n^\pm in a long junction ($L \gg \xi_0$). However, it is not obvious that these fluctuating energy levels will cause the Josephson current to fluctuate. For example, it was originally believed from an analogous argument that the critical current would oscillate by varying L even in a clean SNS junction.² Later it was realized^{15–17} that the critical current does not oscillate, but instead decreases monotonically with L as $I_c = ev_F / (L + 2\xi_0)$. This is because, as the various Andreev levels are forced into the continuum by reducing L , they do not immediately stop carrying a supercurrent. Instead, their contribution to I_c gradually decreases as they move farther outside the superconducting gap. A similar situation holds when moving the single impurity inside the SNS junction.

Moving the impurity away from the center of the junction ($a = L/2$) monotonically reduces the critical current I_c in Fig. 6,⁴⁴ showing that I_c does not fluctuate or oscillate with a . As the Andreev levels are forced farther away from the Fermi level by moving the impurity away from the center of the SNS junction, their contribution to I_c gradually decreases. The approximate analysis given in Appendix D agrees with this numerical result. If the impurity is moved a few healing lengths inside one of the superconducting contacts, the critical current should recover its full ballistic value ($I_c^{\text{clean}} = 0.2e\Delta/\hbar$ for the parameters used in Fig. 6), though we have not performed this calculation. In contrast, when the contacts are in their normal state, moving the impurity has no effect on the conductance. The normal state conductance⁴ $G = 2e^2T/h$ does not fluctuate as a function of impurity position a , since the transmission coefficient T from Eq. (9) is independent of the impurity position. Therefore, the changing I_c as a function of impurity position a in Fig. 6 is a mesoscopic effect due to the interference of electron waves with the pair potential discontinuities at each SN interface. Mesoscopic fluctuations of the critical

current studied in Refs. 13 and 43 have a different origin, arising from the wave interference between multiple impurity scattering events inside the normal region.

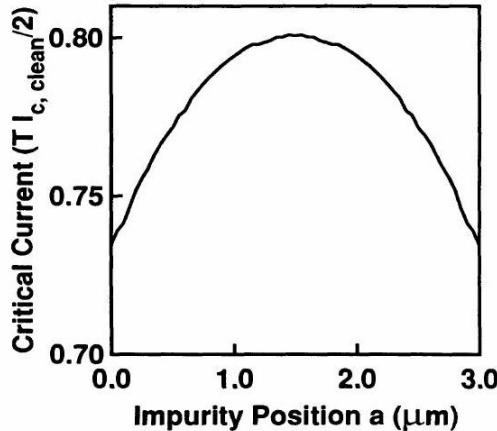


FIG. 6. Moving the lone impurity away from the center of the normal region suppresses the Josephson current in a long SNS junction, even though the normal state conductance of the junction remains unchanged. This mesoscopic effect is due to wave interference of the quasiparticles with the discontinuity in the pairing potential.

10.6.5 v. CONCLUSIONS

Bulk supercurrents flow in response to gradients in the phase $\phi(x)$ of the order parameter $\Delta(x) = |\Delta(x)| \exp[i\phi(x)]$, and are maximum when the phase gradient $\nabla\phi(x)$ is large. From this perspective, the Josephson relation for a tunnel junction, $I = I_c \sin(\phi)$, is quite counterintuitive. The Josephson tunneling current $I = I_c \sin(\phi)$ decreases as the driving phase difference increases, and is smallest when the superconducting phase difference is a maximum. The current phase relation $I = I_c \sin(\phi)$ is thus analogous to negative differential resistance in a normal conductor, where the normal current decreases as the driving voltage difference increases.

A more intuitive current phase relation exists for clean SNS junctions. For either long or short junctions, the Josephson current always increases as the superconducting phase difference increases, and is maximum when the superconducting phase difference is a maximum. Only when an impurity, tunnel barrier, or geometrical irregularity is present in the junction is the supercurrent zero when the superconducting phase difference is maximum at $\phi = \pm\pi$. The quasiparticle energy gap opening at $\phi = \pm\pi$ in the Andreev level spectrum versus superconducting phase difference when these imperfections are present, and the associated formation of "standing waves" with $dE_n^\pm/d\phi = 0$, explain the resulting suppression of the Josephson current. Finite temperature also mixes in a contribution to the Josephson current from the Andreev levels associated with reverse-moving electrons to those of the forward-moving ones, via thermal "energy averaging" instead of directly modifying the energy level spectrum, and therefore has a qualitatively similar effect as disorder on suppressing the Josephson current.

10.6.6 ACKNOWLEDGMENTS

We thank Terry Orlando, Supriyo Datta, and George Rittenhouse for discussions. We gratefully acknowledge support from the David and Lucile Packard Foundation and from the Indiana Center for Innovative Superconductor Technology.

10.6.7 APPENDIX A: SCATTERING FROM THE SNS POTENTIAL

In this appendix we obtain the electrical current ²⁴ transmission amplitude for the scattering of an electronlike excitation incident from the left contact on the potentials $\Delta(x)$ and $V(x)$,

shown schematically in Fig. 7. To

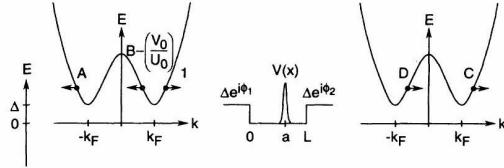


FIG. 7. An electronlike excitation incident from the left contact generates both reflected and transmitted quasiparticles. The transmission amplitudes C and D as a function of the superconducting phase difference $\phi_2 - \phi_1$ determine the Josephson current.

do this, we match the solutions of Eq. (3) in the regions of uniform pair potential shown in Fig. 1. The poles of this transmission amplitude⁴⁵ yield Eqs. (7) and (8) for the discrete Andreev levels, and therefore the electrical current $I_n^\pm(\phi)$ carried by the discrete levels. Appendix B shows how the transmission coefficient found in this appendix can be used to obtain Eq. (21) for the continuum current $I_c(\phi)$.

The energy dispersion curve from Eq. (5) can be described by the wave vectors k_e and k_h , where

$$\frac{\hbar^2 k_e^2}{2m} - \mu = \sqrt{E^2 - \Delta^2} \quad (\text{A1})$$

and

$$\frac{\hbar^2 k_h^2}{2m} - \mu = -\sqrt{E^2 - \Delta^2} \quad (\text{A2})$$

with $|k_e| > k_F$ and $|k_h| < k_F$. The "excitation spectrum" of this dispersion law, which includes only the states having $E > 0$, is plotted in Fig. 7.

For a homogeneous superconductor having a pair potential $\Delta(x) = \Delta e^{i\phi_1}$, Eq. (3) has both electronlike solutions for $E > 0$,

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_1} \\ v_0 \end{pmatrix} e^{\pm i k_e x} \quad (\text{A3})$$

and holelike solutions for $E > 0$,

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 e^{i\phi_1} \\ u_0 \end{pmatrix} e^{\pm i k_h x} \quad (\text{A4})$$

The "coherence" factors u_0 and v_0 are given by Eqs. (19) and (20). For $E^2 \leq \Delta^2$, $u(x)$ and $v(x)$ decay inside the superconductor²⁴ with an energy dependent healing length $\xi(E)$ given in Eq. (14). The current carried by normal electrons in the N region (for $E^2 < \Delta^2$) is then converted to a supercurrent within a length $\xi(E)$ inside the superconductor.²⁴

We consider now an electronlike excitation incident from the left contact above the superconducting gap, as shown in Fig. 7. The waves generated by this incident electron can be grouped into four sets (denoted by coefficients A, B, C , and D) which properly include the Andreev reflections. For the electronlike excitations transmitted into right contact we have

$$C \begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_2} \\ v_0 \end{pmatrix} e^{i k_e (x-L)} (x > L) \quad (\text{A5})$$

supported by electrons in the normal region

$$C \begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i \tilde{k}_e (x-L)} (a < x < L) \quad (\text{A6})$$

and holes in the normal region

$$C \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{i\tilde{k}_h(x-L)} \quad (a < x < L) \quad (\text{A7})$$

Similarly, for holelike excitations transmitted into the right contact, the waves

$$D \begin{pmatrix} v_0 e^{i\phi_2} \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-ik_h(x-L)} \quad (x > L) \quad (\text{A8})$$

$$D \begin{pmatrix} v_0 e^{i\phi_2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\tilde{k}_e(x-L)} \quad (a < x < L) \quad (\text{A9})$$

and

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{-i\tilde{k}_h(x-L)} \quad (a < x < L) \quad (\text{A10})$$

are required. I use the notation \tilde{k}_e and \tilde{k}_h to denote the wave vectors in Eqs. (A1) and (A2) when $\Delta = 0$.

A similar procedure applied to the left SN interface is only slightly complicated by the presence of an incident electronlike wave (source term). This source term, which carries an electrical current ²⁴ of $e\hbar k_e/m$, is

$$\begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_1} \\ v_0 \end{pmatrix} e^{ik_{ex}} \quad (x < 0) \quad (\text{A11})$$

The Andreev reflected holelike excitation is

$$\left(B - \frac{v_0}{u_0} \right) \begin{pmatrix} v_0 e^{i\phi_1} \\ u_0 \end{pmatrix} e^{ik_h x} \quad (x < 0) \quad (\text{A12})$$

The resulting electrons in the normal region are

$$\left(B - \frac{v_0}{u_0} + \frac{u_0}{v_0} \right) \begin{pmatrix} v_0 e^{i\phi_1} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\tilde{k}_{ex}} \quad (0 < x < a) \quad (\text{A13})$$

and holes

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} e^{i\tilde{k}_h x} \quad (0 < x < a) \quad (\text{A14})$$

The electronlike excitations reflected into the left contact are

$$A \begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_1} \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-ik_{ex}} \quad (x < 0) \quad (\text{A15})$$

supporting electrons in the normal region

$$A \begin{pmatrix} u_0 e^{i\phi_1} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\tilde{k}_{ex}} \quad (0 < x < a) \quad (\text{A16})$$

and holes

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{-i\tilde{k}_h x} \quad (0 < x < a) \quad (\text{A17})$$

The scattered waves written above assume $\mu \gg \Delta$, so that we can neglect the difference $(k_e - k_h)$ except when it appears in an exponent. This "Andreev approximation" is usually made in most works on the Josephson effect in SNS junctions.

The scattering matrix⁴⁶ (for both electrons and holes) connects the current amplitudes of incoming and outgoing waves at the impurity ($x = a$). The scattering matrix for electrons at $x = a$ gives

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Cu_0 e^{i\phi_2} e^{i\tilde{k}_e(a-L)} \\ Au_0 e^{i\phi_1} e^{-i\tilde{k}_e a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t(\tilde{k}_e) r(\tilde{k}_e) \\ r(\tilde{k}_e) t(\tilde{k}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(B - \frac{v_0}{u_0} + \frac{u_0}{v_0} \right) v_0 e^{i\phi_1} e^{i\tilde{k}_e a} \\ Dv_0 e^{i\phi_2} e^{-i\tilde{k}_e(a-L)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Equation (A18) contains the source term. A similar scattering matrix connects the hole current amplitudes

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Du_0 e^{-i\tilde{k}_h(a-L)} \\ Bu_0 e^{i\tilde{k}_h a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^*(\tilde{k}_h) r^*(\tilde{k}_h) \\ r^*(\tilde{k}_h) t^*(\tilde{k}_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Av_0 e^{-i\tilde{k}_h a} \\ Cv_0 e^{i\tilde{k}_h(a-L)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

where, for our point scatterer model, the current transmission and reflection amplitudes are

$$t(k) = \frac{1}{1 + i(mV_s/\hbar^2 k)} \quad (\text{A20})$$

and

$$r(k) = \frac{-i(mV_s/\hbar^2 k)}{1 + i(mV_s/\hbar^2 k)} \quad (\text{A21})$$

The electrical current²⁴ flowing into the right contact, due to the electrical current imposed from the left contact, is

$$J_Q \simeq \frac{e\hbar}{m} \tilde{k}_e (|C|^2 - |D|^2) \quad (\text{A22})$$

Hence, we must compute the coefficients C and D to obtain the electrical current. The matrix equation for C is

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 \begin{pmatrix} t(\tilde{k}_e) r(\tilde{k}_e) \\ r(\tilde{k}_e) t(\tilde{k}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_e} e^{-i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(a-L)} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} t^*(\tilde{k}_h) r^*(\tilde{k}_h) \\ r^*(\tilde{k}_h) t^*(\tilde{k}_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(a-L)} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' \\ A' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t(\tilde{k}_e) r(\tilde{k}_e) \\ r(\tilde{k}_e) t(\tilde{k}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 \right] \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\tilde{k}_e a} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' \\ A' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

Here C' and A' are the same as C and A up to a phase factor, so that $C' = C \exp(i\phi) \exp[i\tilde{k}_e(a - L)]$ and $A' = A \exp(-i\tilde{k}_e a)$. The analogous matrix equation for D is

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 \begin{pmatrix} t^*(\tilde{k}_h) r^*(\tilde{k}_h) \\ r^*(\tilde{k}_h) t^*(\tilde{k}_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(a-L)} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} t(\tilde{k}_e) r(\tilde{k}_e) \\ r(\tilde{k}_e) t(\tilde{k}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} e^{-i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(a-L)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' \\ D' \end{pmatrix} \\ & + \left(\frac{v_0}{u_0} \right) \begin{pmatrix} t^*(\tilde{k}_h) r^*(\tilde{k}_h) \\ r^*(\tilde{k}_h) t^*(\tilde{k}_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(a-L)} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(\tilde{k}_e) r(\tilde{k}_e) \\ r(\tilde{k}_e) t(\tilde{k}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1 - (\frac{v_0}{u_0})^2] e^{i\tilde{k}_e a} \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' \\ D' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

Here B' and D' are the same as B and D up to a phase factor, where $B' = B \exp(i\tilde{k}_h a)$ and $D' = D \exp[-i\tilde{k}_h(a - L)]$.

Equations (A23) and (A24) are in a form which can be easily generalized to arbitrary elastic scattering potentials and multiple-moded electron waveguides. Further, Eqs. (A23) and (A24) can be interpreted directly in terms of the phase shifts acquired by the electron and hole Feynman paths multiply reflected from the scatterer and multiply Andreev reflected from the SN boundaries. The remaining considerations here and in Appendix B now specialize to the case where the transmission amplitude is independent of energy.

We directly invert Eqs. (A23) and (A24) to find

$$C' = t \frac{\left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{i\phi} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \right] \left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 \right] e^{i\tilde{k}_e a}}{\left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{i\alpha} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \right] \left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{-i\alpha} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \right]} \quad (\text{A25})$$

and

$$D' = \left(\frac{v_0}{u_0} \right) \frac{\left(t r^* e^{-i\phi} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(L-a)} + r t^* e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)a} \right) \left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 \right] e^{i\tilde{k}_e a}}{\left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{i\alpha} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \right] \left[1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{-i\alpha} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \right]} \quad (\text{A26})$$

The angle α in Eqs. (A25) and (A26) is determined from

$$\cos(\alpha) = T \cos(\phi) + R \cos \left[(\tilde{k}_h - \tilde{k}_e)(L - 2a) \right].$$

If we remove the tunnel barrier ($\alpha \rightarrow \phi$ and $t \rightarrow 1$) and set the phase difference ϕ to zero, Eq. (A25) gives the result of Demers and Griffin⁴⁷ for the transmission amplitude of an electronlike excitation between two superconductors.

The discrete levels in the SNS potential with a tunnel barrier are found⁴⁵ by computing the poles of the transmission amplitudes C' or D' . Therefore, the Andreev levels are determined from

$$1 = \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 e^{\pm i\alpha} e^{i(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L} \quad (\text{A28})$$

Since $(v_0/u_0)^2 = \exp[2i\cos^{-1}(E/\Delta)]$ for $|E| < \Delta$, Eq. (A28) reduces to

$$2\cos^{-1}(E/\Delta) + (\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)L \pm \alpha = 2\pi n \quad (\text{A29})$$

Using $\tilde{k}_e - \tilde{k}_h \simeq k_F E / \mu = E / \Delta \xi_0$, Eqs. (A27) and (A29) reduce to Eqs. (7) and (8).

Equations (7) and (8) also determine the location of the "leaky" Andreev levels in the continuum. In the continuum, the solution of Eqs. (7) and (8) will occur at a complex energy $E = E_R + iE_I$. The imaginary part of this pole can then be interpreted as the lifetime ($\hbar/|E_I|$) of the leaky Andreev level. The locations of both the discrete poles and the continuum poles of the transmission amplitude are shown in Fig. 8.

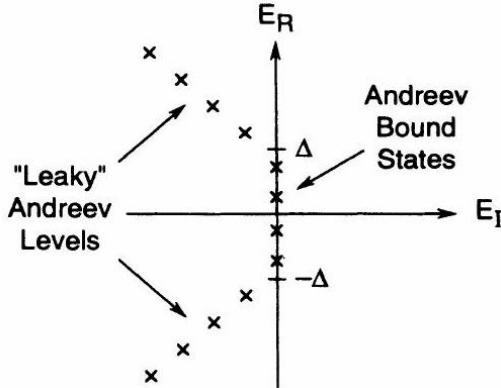


FIG. 8. Poles of the quasiparticle transmission amplitude determine the natural eigenenergies of the SNS potential. Welldefined quantum levels exist inside the superconducting energy gap, while scattering resonances outside the gap have a finite lifetime $\hbar/|E_I|$.

10.6.8 APPENDIX B: CONTINUUM SUPERCURRENTS

Continuum supercurrents can only flow if there is an imbalance in the electrical currents carried by the quasiparticles incident from the left and right superconducting contacts. The imbalance $I(E, \phi)$ will be proportional to the difference in the transmission coefficients $T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi) - T_{R \leftarrow L}^e(E, \phi)$ (transmission from left to right minus transmission from right to left) for electrical currents across the SNS junction. This conclusion follows because, near equilibrium, quantum states in the left and right contacts are equally thermally populated according to the Fermi function $f(E)$ at each energy, and because there are no inelastic scattering processes in the junction.

To obtain the continuum currents we invoke the insights of van Wees, Lenssen, and Harmans.¹⁸ Reference 18 notes that the electrical current $I(E)$ carried by a single filled quantum state per unit energy is $I(E) = ev_p(E)N_s^+(E)$, where v_p is the phase velocity and $N_s^+(E)$ the superconducting density of states for quasiparticles moving in one direction. We can write this current as $I(E) = e(v_p(E)/v_g(E))v_g(E)N_s^+(E)$, where v_g is the group velocity. (Reference 24 defines these phase and group velocities.) Just as in the normal metal,⁴ the group velocity times the density of states cancels to $v_g(E)N_s^+(E) = 1/h$. The other factor,

$$v_p(E)/v_g(E) = 1/|u_0^2 - v_0^2| = N_s^+(E)/N_n^+(E)$$

is simply the ratio of the density of states in the superconductor to the density of states in the normal metal. [This factor $N_s^+(E)/N_n^+(E)$ appears prominently in the study of superconducting tunnel junctions.] The electrical current carried by electronlike excitations in the continuum is therefore

$$I_c^e(\phi) = \frac{2e}{h} \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty} \right) \frac{1}{|u_0^2 - v_0^2|} \times [T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi) - T_{L \leftarrow R}^e(E, \phi)] f(E) dE \quad (B1)$$

The additional factor of 2 in Eq. (B1) comes from the electron spin.

We now evaluate the transmission coefficients appearing in Eq. (B1) for our model problem. The transmission coefficient for the electrical currents carried by electronlike excitations incident from the left contact is

$$T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi) = |C'|^2 - |D'|^2 \quad (B2)$$

with C' and D' determined from Eqs. (A25) and (A26) in Appendix A. Computing these quantities, we find

$$|C'|^2 = T |u_0^2 - v_0^2|^2 \frac{D(E, \phi)}{D(E, \alpha)D(E, -\alpha)} \quad (B3)$$

and

$$|D'|^2 = |u_0^2 - v_0^2|^2 \frac{2TRu_0^2v_0^2}{D(E, \alpha)D(E, -\alpha)} \times \left\{ 1 + \cos \left[(\tilde{k}_e - \tilde{k}_h)(L - 2a) - \phi \right] \right\} \quad (B4)$$

where $D(E, \alpha)$ is given by Eq. (18). $T_{L \leftarrow R}^e(E, \phi)$ is easily found from $T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi)$ by the transformations $\phi \rightarrow -\phi$ and $a \rightarrow (L - a)$. Therefore,

$$\begin{aligned} & T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi) - T_{L \leftarrow R}^e(E, \phi) \\ &= T |u_0^2 - v_0^2|^2 \frac{D(E, \phi) - D(E, -\phi)}{D(E, \alpha)D(E, -\alpha)} \end{aligned} \quad (B5)$$

Equation (B5) can be recast as

$$\begin{aligned} & T_{L \rightarrow R}^e(E, \phi) - T_{L \leftarrow R}^e(E, \phi) \\ &= T |u_0^2 - v_0^2|^2 \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} \frac{D(E, \alpha) - D(E, -\alpha)}{D(E, \alpha)D(E, -\alpha)} \end{aligned} \quad (B6)$$

Combining Eqs. (B6) and (B1), we find

$$\begin{aligned} & I_c^e(\phi)|_{E>\Delta} \\ &= \frac{2e}{h} T \int_{\Delta}^{\infty} |u_0^2 - v_0^2| \left(\frac{1}{D(E, -\alpha)} - \frac{1}{D(E, \alpha)} \right) \\ & \quad \times \frac{\sin(\phi)}{\sin(\alpha)} f(E) dE \end{aligned} \quad (B7)$$

One can now choose several alternate paths to Eq. (21). We have chosen what seems (to us) the most straightforward. Consider the full dispersion relation shown in Fig. 9. It can be separated into an electron branch (standard parabola) and hole branch (inverted parabola). These branches should all be populated according to a Fermi function $f(E)$ at finite temperatures, including

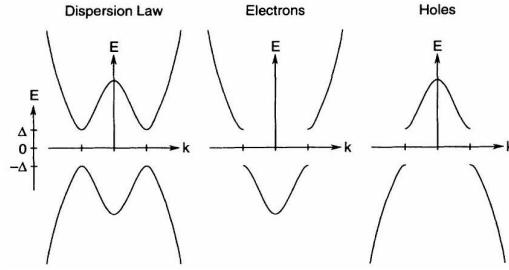
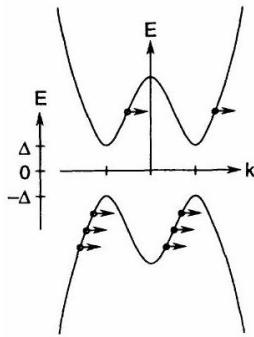


FIG. 9. The total dispersion law for a uniform superconductor can be decomposed into electronlike and holelike states.

Left Contact



Right Contact

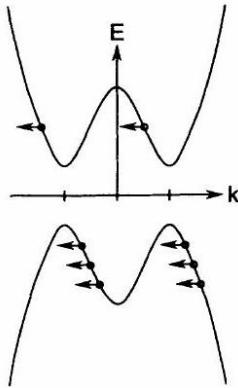


FIG. 10. Both electronlike and holelike states are incident on the SNS potential from all possible branches of the dispersion curve. These quantum levels are populated according to the Fermi function $f(E)$, even in the presence of supercurrent flow.

the hole branches. To compute the Josephson current, one must therefore work also with the negative energy ($E < 0$) solutions of the Bogoliubov-de Gennes equations. We consider quasiparticles incident in all possible branches of the dispersion curve, as shown pictorially in Fig. 10.

Calculating the currents implied from Fig. 10, the total electronlike currents are given by integrating Eq. (B7) over the entire continuum, which is the same as Eq. (21). The hole currents are found to be equal to the electron currents, thereby giving a continuum current too large by a factor of 2. This factor of 2 is easily understood when we note that the dispersion law shown in Fig. 9 contains twice the number of states as the normal metal. We therefore correct for this excess number of quasiparticle states by dividing a factor of 2 into the final result, namely,

$$2I_c(\phi) = I_c^e(\phi) + I_c^h(\phi) \quad (\text{B8})$$

obtaining Eq. (21).

We feel that the physics of Josephson current flow may be less transparent when working solely with the excitation spectrum. Since the excitation spectrum will not be populated at $T = 0$,¹⁸ it is unclear how it can carry the required zero-temperature Josephson current. It was even noted in Ref. 18 that "this seems to prevent the calculation" of the Josephson current at $T = 0$. However, a disadvantage of working with the full dispersion curve is that one must also use the negative energy solutions of Eq. (3). Further, one must compute twice the number of transmission coefficients. Alternatively, one could compute the currents carried by only the electron branch (or only by the hole branch) of the dispersion curve, and still use both positive and negative energies.

10.6.9 APPENDIX C: SUPERCURRENT FROM FREE ENERGY

The free energy of a set of independent fermions in the grand canonical ensemble is

$$F = N\mu - kT \sum_E \ln(1 + e^{-E/kT}) \quad (\text{C1})$$

The derivative of F with respect to the phase difference becomes a sum over the discrete energies $E_n(\phi)$ and integral over the continuum density of states $\rho(E, \phi)$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\phi} &= \sum_n \frac{dE_n}{d\phi} f(E_n) + \left(\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{\Delta}^{\infty} \right) \frac{d\rho(E, \phi)}{d\phi} \Big|_E \\ &\quad \times \ln(1 + e^{-E/kT}) dE \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

The discrete spectrum therefore carries the Josephson current suggested in Sec. II, namely Eq. (10), where

$$\begin{aligned} I_d(\phi) &= \frac{2e}{\hbar} \sum_n \left\{ \frac{dE_n^+(\phi)}{d\phi} f(E_n^+(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{dE_n^-(\phi)}{d\phi} f(E_n^-(\phi)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

letting us identify the current $I_n^\pm(\phi)$ carried by an Andreev level as

$$I_n^\pm(\phi) = \frac{2e}{\hbar} \frac{dE_n^\pm(\phi)}{d\phi} \quad (\text{C4})$$

Equation (C3) is computationally much simpler than obtaining the current from the quasi-particle wave functions $u(x)$ and $v(x)$, and shows how to easily compute $I_d(\phi)$ when the transmission amplitudes depend on the energy. Further, Eq. (C3) is identical to the current carried by the discrete spectrum from Ref. 13.

We now show how Eq. (15) for the current $I_n^\pm(\phi)$ carried by an Andreev level follows from Eq. (C4) combined with Eqs. (7) and (8). We wish to compute

$$\frac{dE_n^\pm}{d\phi} = \frac{dE_n^\pm}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\phi} \quad (\text{C5})$$

Equation (7) shows how the energy depends on the effective phase α . We find

$$\frac{dE_n^\pm}{d\alpha} = \frac{\partial E_n^\pm}{\partial \alpha} = \mp \frac{\hbar}{2e} \frac{ev_F}{L + 2\xi(E_n^\pm)} \quad (\text{C6})$$

On the other hand, Eq. (8) shows that $\alpha(E, \phi)$ is a function of both the energy and the phase difference. Therefore

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial E} \Big|_{\phi} dE + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \Big|_E d\phi \quad (\text{C7})$$

Combining (C5), (C6), and (C7), we find

$$\frac{dE_n^{\pm}}{d\phi} = \frac{\partial E_n^{\pm}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \Big|_E \frac{1}{\gamma} \quad (\text{C8})$$

where γ is the feedback factor in Eq. (15), namely

$$\gamma = 1 - \frac{\partial E_n^{\pm}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial E} \Big|_{\phi} \quad (\text{C9})$$

Equation (8) gives

$$\frac{\partial \alpha}{\partial E} \Big|_{\phi} = \left(\frac{R}{\Delta \sin(\alpha)} \right) \left(\frac{L - 2a}{\xi_0} \right) \sin \left(\frac{L - 2a}{\xi_0} \frac{E}{\Delta} \right) \quad (\text{C10})$$

so that combining (C10) with (24), (C6), (C8), (C9), and (C4) yields Eq. (15).

The continuum contribution to the supercurrent in Eq. (C2) requires the derivative of the continuum density of states with respect to the phase difference

$$\frac{d\rho(E, \phi)}{d\phi} \Big|_E = \frac{d\rho(E, \alpha)}{d\alpha} \Big|_E \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \Big|_E \quad (\text{C11})$$

Equation (C11) implies that we can take the result (17) for $I_c(\phi)$ in the clean junction, replace ϕ by α , then multiply the integrand by (24) to obtain Eq. (21) for $I_c(\phi)$ in the dirty junction. Even though we exploit the continuum contribution of Eq. (C2) to better understand the formulas presented in Sec. II, we do not immediately see the full correspondence between the continuum contribution ¹³ in Eq. (C2) and the transmission formalism ¹⁸ for computing supercurrents carried in the continuum. However, we feel the two methods can probably be shown to be identical.

10.6.10 APPENDIX D: APPROXIMATE ANDREEV LEVELS IN A LONG JUNCTION

In this appendix we obtain approximate expressions for the Andreev levels in a long SNS junction with an impurity. Equation (8) can be recast as

$$\cos^2(\alpha/2) = 1 - T \sin^2(\phi/2) - R \sin^2[(L - 2a)E/2\Delta\xi_0].$$

For $E \ll \Delta$, Eq. (7) becomes

$$E^{\pm} \simeq \left(\frac{\hbar v_F}{2L^*} \right) (2\pi n - \pi \mp \alpha) \quad (\text{D2})$$

with $L^* = L + 2\xi_0$. Taking the impurity exactly in the center of the junction, $a = L/2$, we immediately obtain from Eqs. (D1) and (D2)

$$\begin{aligned} E^{\pm} \simeq \pi \left(\frac{\hbar v_F}{2L^*} \right) & \{2n - 1 \\ & \mp \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left[\sqrt{1 - T \sin^2(\phi/2)} \right] \} \end{aligned} \quad (\text{D3})$$

We therefore find the Andreev energy gap near $E = 0$ and $\phi = \pi$ as

$$E_{\text{gap}} \simeq 2\pi \left(\frac{\hbar v_F}{2L^*} \right) \left(1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \sqrt{R} \right) \quad (\text{D4})$$

which becomes $E_{\text{gap}} \simeq (2\sqrt{R})(\hbar v_F/L^*)$ for small R . For $T \rightarrow 1$, $E \simeq 0$, and near $\phi \simeq \pi$, we can expand Eq. (D3) as

$$E^\pm \simeq \pm 2 \left(\frac{\hbar v_F}{2L^*} \right) \sqrt{1 - T \sin^2(\phi/2)} \quad (\text{D5})$$

The slope of the Josephson current versus phase at $\phi = \pi$ is then approximately

$$\left. \frac{dI}{d\phi} \right|_{\phi=\pi} \simeq \left(\frac{ev_F}{L^*} \right) \left(\frac{T}{2\sqrt{R}} \right).$$

For an impurity which is not centered in the junction, and taking $E \ll \Delta$ and $L - 2a \ll \xi_0$, we can approximate Eq. (D1) as

$$\cos^2(\alpha/2) \simeq 1 - T \sin^2(\phi/2) - R((L - 2a)E/2\Delta\xi_0)^2.$$

Solving Eq. (D7) together with Eq. (D2) for E^\pm merely replaces $L^* \rightarrow L_{\text{eff}}$ in Eqs. (D5) and (D6), where $L_{\text{eff}}^2 = (L + 2\xi_0)^2 + R(L - 2a)^2$. This very approximate analysis confirms Eqs. (34) and (35) in Sec. IV.

10.7 Другое про сверхпроводимость

(тут скорее всего еще много тем будет)

10.7.1 левитация над сверхпроводником

10.8 Теория сверхпроводимости по Абрикосову Горькову

10.8.1 Общие сведения. Выбор модели

Обзор явления сверхпроводимости

(все это примерно знаю, так что пока особо не вчитывался, потом дочитаю.)

Одним из наиболее важных и трудных вопросов квантовой статистики является проблема сверхпроводимости. Как известно, целый ряд металлов при достаточно низких температурах претерпевает фазовый переход в новое «сверхпроводящее» состояние. В этом состоянии металл обладает термодинамическими и электромагнитными свойствами, резко отличными от его свойств в нормальном состоянии. Экспериментально, пожалуй, наиболее наглядно этот переход проявляется в том, что при охлаждении до критической температуры металл внезапно перестает оказывать сопротивление электрическому току. Иными словами, при протекании тока в сверхпроводнике не происходит диссипации энергии.

Экспериментальные исследования показали, что свойства сверхпроводника в магнитном поле резко отличны от сравнительно простых свойств нормального металла. Магнитное поле не проникает в толщу массивного сверхпроводника (эффект Менснера-Оксенфельда). Эффективная глубина, от считываемая от поверхности сверхпроводника, помещаемого в постоянное магнитное поле, на которой поле еще отлично от нуля (так называемая глубина проникновения), очень мала и составляет по порядку величины 10^{-5} см. Термодинамический переход из нормального состояния в сверхпроводящее является фазовым переходом второго рода и характеризуется тем, что при температуре перехода теплоемкость металла меняется

скачком. Значительный успех в понимании этого явления был достигнут в последние годы. При этом оказалось, что разработка теории сверхпроводимости требует широкого применения методов квантовой теории поля. Изложению этих методов посвящены следующие параграфы, в настоящем же разделе мы остановимся более подробно на физической стороне вопроса.

Довольно давно уже было ясно, что в явлении сверхпроводимости мы имеем дело с чем-то родственным явлению сверхтекучести. Это видно, прежде всего, из того, что для поддержания в сверхпроводнике электрического тока не требуется внешней разности потенциалов, т. е. не требуется работы внешних источников. Носителями электрического тока в металле являются электроны; указанное свойство есть поэтому не что иное, как свойство сверхтекучести электронной жидкости.

В гл. I в связи с вопросом о сверхтекучести гелия мы подробно останавливались на свойствах энергетического спектра возбуждений, необходимых для возникновения сверхтекучести. Надо, однако, сразу отметить, что при малых импульсах спектр сверхпроводника не может иметь того вида, который следует сопоставить жидкому гелию. Действительно, гелий в качестве начального участка спектра имеет фононную звуковую ветвь. Распространение звука, как хорошо известно, связано с длинноволновыми колебаниями плотности. Но для электронной жидкости в металле изменение ее плотности связано с довольно значительной затратой энергии, поскольку этому препятствуют кулоновские силы, действующие между электронами и решеткой и между самими электронами. Изменение плотности электронной жидкости нарушает условие электронейтральности, поэтому соответствующий спектр длинноволновых колебаний, подобно тому как это имеет место в плазме, начинается с некоторой конечной частоты. Фактически в металле эта частота очень велика ($\sim 1 \text{ эв}^2 \simeq 10^4 \text{ К}$). Указанные соображения не относятся, конечно, к коротковолновым возбуждениям с волновым вектором порядка обратных межатомных расстояний. Как мы знаем, именно такие электронные возбуждения играют основную роль в нормальном металле. Для существования сверхтекучести достаточно, в соответствии с результатами гл. I, чтобы такие возбуждения были отделены от основного состояния щелью, т. е. чтобы спектр имел вид, изображенный на рис. 86.

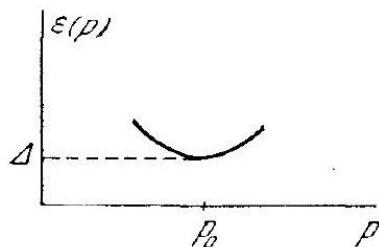


Рис. 86.

Заметим, что, помимо приведенных выше соображений, на наличие у сверхпроводников спектра такого типа указывали экспериментальные данные 110 электронной теплоемкости при низких температурах, приводившие к зависимости теплоемкости от температуры вида $e^{-\Delta/T}$.

Мы не будем здесь останавливаться на изложении ряда феноменологических теорий, зачастую довольно хорошо описывающих экспериментальный материал, укажем только, что эти теории не могли дать объяснения микроскопического механизма явления.

Ключом к пониманию относительной роли различных взаимодействий в металле в происхождении сверхпроводимости явилось открытие в 1953 г. изотопического эффекта [53]. Оказалось, что критическая температура T_c (температура, при которой происходит переход из нормального состояния металла в сверхпроводящее) зависит от массы того или иного изотопа как $T_c \sim (M)^{-1/2}$. Независимо Фрелихом [54] было высказано предположение, что основным взаимодействием, ответственным за явление сверхпроводимости, должно

быть взаимодействие электронов с фононами. Это взаимодействие содержит существенную зависимость от массы ионов.

Модель. Гамильтониан взаимодействия.

Гамильтониан взаимодействия, о котором уже шла речь в гл. II, имеет, как мы знаем, вид

$$H_{int}(x) = g\psi^+(x)\psi(x)\varphi(x)$$

Вычислим матричный элемент рассеяния двух электронов друг на друга, в процессе которого электроны обмениваются между собой одним фононом. Такой процесс схематически представлен на диаграмме рис. 87.

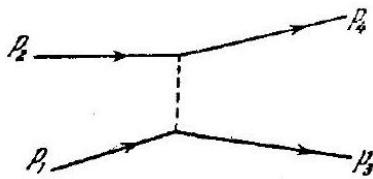


Рис. 87.

Пунктирная линия изображает обмен одним фононом, которому в матричном элементе соответствует D -функция фонана,

$$g^2 D(\varepsilon_3 - \varepsilon_1; \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = g^2 \frac{u^2 (p_3 - p_1)^2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 - u^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2},$$

где $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$, $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ – соответственно, изменение энергии и импульса одного из электронов при столкновении. Вблизи ферми-поверхности изменение импульса при столкновении в общем случае порядка p_0 (т. е. $u |\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1|$ порядка дебаевской частоты, ω_D , так как $p_0 \sim a^{-1}$), тогда как изменение энергии электронов может быть невелико. В этой области, т. е. когда $|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \ll \omega_D$, эффективное взаимодействие, которое определяется предыдущим выражением, сводится просто к константе $-g^2$, т. е. имеет характер притяжения.

Л. Купер в 1957 г. показал, что эффективное притяжение между электронами вблизи поверхности Ферми, возникающее в результате электрон-фононного взаимодействия, сколь слабо оно бы ни было, обязательно приводит к образованию связанных пар электронов. Поскольку спаривание является энергетически выгодным, при включении взаимодействия произойдет перестройка основного состояния системы. Для возбуждения такой системы необходимо затратить некоторую конечную энергию, равную энергии связи пары, которая и будет играть роль щели в спектре возбуждений. На основе этой идеи оказалось возможным построить полную теорию сверхпроводимости, объясняющую огромную совокупность фактов, накопленных за несколько десятков лет интенсивного изучения явления.

Выбранная нами за основу формулировка теории отличается от первоначальных формулировок (Бардин, Купер и Шриффер [56], Боголюбов [57]), поскольку нам кажется, что методы квантовой теории поля имеют и в этом вопросе значительное преимущество. Помимо своей простоты и стройности, излагаемый ниже подход позволяет получить ряд существенных новых результатов.

Прежде чем переходить к дальнейшему, заметим, что электрон-фононное взаимодействие не является единственным для электронов в металле. Между электронами действуют также кулоновские силы отталкивания. Поэтому эффективное взаимодействие между ними будет иметь знак притяжения или отталкивания в зависимости от соотношения между величинами упомянутого электрон-фононного притяжения и кулоновского отталкивания электронов в металле. В общем виде задача учета обоих взаимодействий для конкретных металлов чрезвычайно сложна. К этому надо добавить, что реальные сверхпроводники

являются анизотропными. Поэтому следует оговориться, что в современной теории сверхпроводимости по существу, рассматривается некоторая простая модель с квадратичным законом дисперсии для электронов, в которой заранее постулируется, что взаимодействие электронов в узкой области их энергий вблизи поверхности Ферми имеет характер притяжения. Эта область энергий имеет, очевидно, порядок максимальной энергии испускаемых фононов, т. е. $\sim \omega_D$, где ω_D - дебаевская частота. Кроме того, ниже мы будем предполагать для простоты, что взаимодействие постоянно в этой области и является достаточно слабым.

До настоящего времени теория сверхпроводимости, основанная на представлениях фермий-жидкости и тому же учитывающая анизотропию, не была построена. Интересно все же отметить, что, несмотря на грубость модели, теория не только качественно объясняет явление, но и приводит к хорошему количественному согласию с имеющимися экспериментальными данными.

Напишем эффективный гамильтониан взаимодействия электронов между собой в представлении вторичного квантования следующим образом:

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a_{p_1\sigma_1}^+ a_{p_2\sigma_2}^+ a_{p_3\sigma_2} a_{p_4\sigma_1} \theta_{p_1} \theta_{p_2} \theta_{p_3} \theta_{p_4},$$

где $\lambda < 0$, а θ_p - факторы обрезания: $\theta_p = \begin{cases} 1, & |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| < \omega_D \\ 0, & |\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_F| > \omega_D \end{cases}$.

Наличие этих факторов означает, что во взаимодействии участвуют только электроны с энергиями в узком слое толщиной $2\omega_D$ вблизи поверхности Ферми ($\omega_D \ll \varepsilon_F$). Ниже мы часто будем записывать этот гамильтониан через операторы $\psi_u(\mathbf{r})$ и $\psi_\beta^+(\mathbf{r})$ в координатном представлении

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2} \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\beta^+(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

подразумевая при этом, конечно, что значения четырех аргументов ψ -операторов в (32.3) на самом деле несколько различаются. Последнее связано с присутствием в выражении (32.2) для гамильтониана факторов θ_p . Точнее было бы написать вместо (32.3) следующее выражение:

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2} \int \iint \iint \theta(\mathbf{r} - \xi_1) \theta(\mathbf{r} - \xi_2) \theta(\mathbf{r} - \xi_3) \theta(\mathbf{r} - \xi_4) \psi_\alpha^+(\xi_1) \psi_\beta^+(\xi_2) \psi_\beta(\xi_3) \psi_\alpha(\xi_4) d\mathbf{r} d\xi_1 \dots d\xi_4,$$

где $\theta(\mathbf{x})$ есть фурье-обращение θ_p : $\theta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ipx} \theta_p d\mathbf{p}$.

Легко проверить переходом к фурье-представлению, что функции $\theta(\mathbf{x})$ обладают δ -функциональным свойством: $\int \theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, если функция $f(\mathbf{x})$ имеет отличные от нуля компоненты Фурье f_p для импульсов p только вблизи поверхности Ферми. В излагаемой ниже теории мы будем иметь дело именно с такими функциями. В этом смысле и следует понимать гамильтониан взаимодействия.

10.8.2 Феномен Купера и неустойчивость относительно притяжения

Обсудим феномен Купера и неустойчивость основного состояния системы невзаимодействующих ферми-частич относительно сколь угодно слабого притяжения между частицами.

Уравнение для вершинной части.

Рассмотрим свойства системы с взаимодействием (32.3). Для этого обратимся к изучению вершинной части $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ при абсолютном нуле. Напишем ряд теории возмущений

для этой величины. В первом приближении вершинная часть есть:

$$\lambda (\delta_{\gamma\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}).$$

Диаграммы, соответствующие первым членам ряда теории возмущений, изображены на рис. 88. Как мы знаем, с диаграммами а) и в) связаны особенности в вершинной части «нуль-звукового» типа, т. е. эти особенности существенны при малых передачах импульса. Диаграммы вида σ) связаны с особенностями в $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ при малых значениях суммарного 4-импульса $q = p_1 + p_2$. Исследуем более подробно последний случай. Используя конкретные свойства рассматриваемой модели, мы сможем получить более детальные сведения о вершинной части в области малых q по сравнению с общим результатом (20.8).

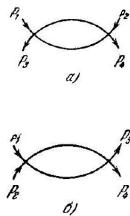
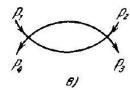
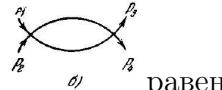


Рис. 88.



В)

Матричный элемент диаграммы б



Матричный элемент для диаграммы

$$M_2 = \lambda^2 \frac{i}{(2\pi)^4} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}) \int d^4k G(k) G(q-k),$$

где $q = \{\omega_0, \mathbf{q}\} = \{\omega_1 + \omega_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\}$. Подставляя сюда выражения для гриновских функций и интегрируя по частотам, (?? проделаю это еще!) получим:

$$M_2 = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_0 - \varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + 2\mu + i\delta} \\ (\varepsilon_0(\mathbf{k}) > \mu, \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) > \mu),$$

$$M_2 = -\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_0 - \varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + 2\mu - i\delta} \\ (\varepsilon_0(\mathbf{k}) < \mu, \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) < \mu).$$

В рассматриваемой модели сверхпроводимости взаимодействуют только электроны в узкой области энергий вблизи энергии Ферми $\varepsilon_F \simeq \mu$. Поэтому в интегралах (33.2) интегрирование по \mathbf{k} ограничено условиями $|\varepsilon_0(\mathbf{k}) - \mu|, |\varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \mu| < \omega_D$. Полагая $\omega_0, |\mathbf{q}|v \ll \omega_D$, перейдем обычным образом к интегрированию по $\xi = \mathbf{v}(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_0|)$. Пренебрегая

также в интегралах изменением верхнего предела на величины порядка ω_0 , $|\mathbf{q}|v$, преобразуем выражение (33.2) к следующему виду:

$$M_2 = -\frac{\lambda^2 mp_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\Sigma} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \int_0^\omega d\xi \int_0^1 \left[\frac{1}{\omega_0 + 2\xi + v|q|x - i\hat{\delta}} + \frac{1}{2\xi + v|q|x - \omega_0 - i\hat{\delta}} \right] dx$$

(где $x = \cos \theta$, θ -угол между направлением векторов \mathbf{q} и \mathbf{k}). Оставшиеся интегрирования выполняются элементарно. Выбирая ветви логарифмов из условия, что интеграл от первого члена в квадратной скобке положителен при $\omega_0 > 0$, а от второго - при $\omega_0 < 0$, получим для изучаемой диаграммы следующее выражение:

$$M_2 = -\frac{\lambda^2 mp_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \left[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2\omega_0 - i\delta}{\omega_0 + v|q| - i\delta} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\omega_D - i\hat{\delta}}{-\omega_0 + v|q| - i\delta} + \frac{\omega_0}{2v|q|} \left(\ln \frac{\omega_0 - i\delta}{\omega_0 + v|q| - i\delta} + \ln \frac{v|q| - \omega_0 - i\delta}{-\omega_0 - i\delta} \right) \right].$$

Главный член этого выражения при малых ω_0 и $v|q|$ имеет вид

$$M_2 = -\lambda^2 \frac{mp_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\rho\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \ln \frac{\omega_D}{\{\omega_0, v|q|\}}.$$

Поэтому при $\omega_D \gg \omega_0, v|q|$ малость константы взаимодействия λ может быть компенсирована большой величиной логарифма, в результате чего этот член становится того же порядка, что и первый член теории возмущений (33.1). Таким образом, для того чтобы пойти вершинную часть в окрестности малых ω_0 и $v|q|$, когда $\lambda \ln \frac{\omega_D}{\{\omega_0, v|q|\}} \sim 1$, надлежит, как и в гл. IV, суммировать совокупность главных членов ряда теории возмущений. С этой целью напишем уравнение для вершинной части в форме, в которой выделены члены, приводящие к особенностям $\Gamma_{\alpha\beta,\uparrow}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ при малых $q = p_1 + p_2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) &= \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) + \\ &+ \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\xi_{i1}}(p_1, p_2; k, q-k) G(k) G(q-k) \Gamma_{\xi\eta,\gamma\hat{\delta}}(k, q-k; p_3, p_4) d^4 k \end{aligned}$$

В этом уравнении $\tilde{\Gamma}_{\alpha,3,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ есть сумма всех матричных элементов, диаграммы которых неприводимы в интересующем нас смысле, т. е. не могут быть рассечены на две части, содержащие одна - только входящие, другая только выходящие внешние концы и соединенные двумя электронными линиями. Ядро интегрального уравнения (33.4) содержит большой логарифмический член от интегрирования двух функций Грина. В силу малости константы взаимодействия в качестве величины $\tilde{\Gamma}$ достаточно взять ее выражение через первые члены теории возмущений, поскольку соответствующие выражения для $\tilde{\Gamma}$ не содержат больших величин. Мы, однако, поставили себе целью вычислить ядро уравнения (33.4), не ограничиваясь членами порядка $\lambda \ln \frac{\omega_D}{\omega_0} \sim 1$; попытаемся найти его выражение с точностью до членов порядка λ включительно. На первый взгляд поэтому кажется, что для этого надо было бы знать величину $\tilde{\Gamma}$ с тоинностью до членов порядка λ^2 по теории возмущений, поскольку логарифмическое интегрирование в (33.4) может компенсировать один порядок по λ . Рассмотрим члены второго порядка теории возмущений для $\tilde{\Gamma}$. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 89.

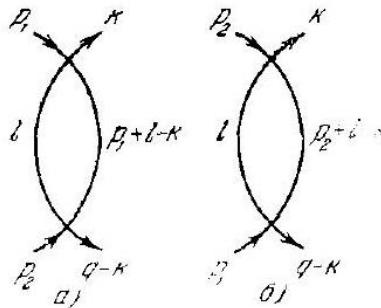


Рис. 89.

Матричный элемент диаграммы а

Оценим величину матричного элемента, отвечающего, например, диаграмме а). Опуская численные коэффициенты, получим:

$$\lambda^2 \int G(l)G(l - k + p_1) d^4l.$$

Подставляя выражения для гриновских функций, проинтегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \int \frac{dl}{\bar{\omega} + \varepsilon_0(l - k + p_1) - \varepsilon_0(l)} \quad (\varepsilon_0(l) > \mu; \varepsilon_0(l - k + p_1) < \mu), \\ & - \lambda^2 \int \frac{dl}{Q + \varepsilon_0(l - k + p_1) - \varepsilon_0(l)} \quad (\varepsilon_0(l) < \mu; \varepsilon_0(l - k + p_1) > \mu). \end{aligned}$$

Фактически область интегрирования по l значительно уже, чем если бы она определялась только последними условиями. Это связано со свойствами модели, в которой взаимодействовать могут только электроны с импульсами в окрестности фермиевского импульса $|v(|p| - p_0)| < \omega_D$. Фактическая область интегрирования заштрихована на рис. 90 для первого и закрашена черным для второго условия в выражении (33.5) ($|\mathbf{k} - \mathbf{p}_1| < 2\mathbf{p}_0$; если $|\mathbf{k} - \mathbf{p}_1| > 2\mathbf{p}_0$, область интегрирования вообще отсутствует).

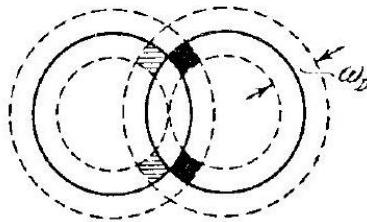


Рис. 90.

В обоих случаях значение разности $\varepsilon(l - k + p_1) - \varepsilon(l)$ в знаменателе подынтегрального выражения в рассматриваемой области равно по порядку величины ω_D , тогда как объем области, по которой производится интегрирование, есть $\sim \frac{m^2 \omega_D^2}{p_0}$. Таким образом, порядок величины матричного элемента для диаграмм рис. 89 есть $\lambda^2 \frac{m^2 \omega_D}{p_0}$, т. е. их относительный порядок по сравнению с простой вершиной есть $(\lambda t p_0) \frac{\omega}{\varepsilon_F}$. (Безразмерным малым параметром в рассматриваемой модели является, как видно из (33.3), величина $\lambda t p_0 \ll 1$.) Поскольку по своему физическому смыслу $D \ll \varepsilon_F$, то эта дополнительная малость не может быть компенсирована в рассматриваемой области большой величиной логарифма. В силу этого в уравнении (33.4) для величины $\tilde{\Gamma}$ можно ограничиться простой вершиной первого порядка теории возмущений (33.1).

Получающееся уравнение для вершинной части теперь может быть легко решено. Для этого заметим, что, как видно из выражения (33.3), $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ зависит только

от суммы переменных $q = p_1 + p_2$. Поэтому интеграл в правой части (33.4) сводится к уже вычисленному наии интегралу для матричного элемента второго порядка теории возмущений (33.3). В результате получаем ($\omega_0 > v|\mathbf{q}|$):

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) \equiv \Gamma(q)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

$$\Gamma(q) = \lambda \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda mp_0}{2\pi^2} \right) \left[\ln e \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - v^2|\mathbf{q}|^2} \right| + \frac{\omega_0}{2v|\mathbf{q}|} \ln \left| \frac{\omega_0 - v|\mathbf{q}|}{\omega_0 + v|\mathbf{q}|} \right| \right] \right\}^{-1}$$

Свойства вершинной части (!!??!?!?!!?)

Для простоты рассмотрим сначала

$$\Gamma(q) = \lambda \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda mp_0}{2\pi^2} \right) \left[\ln e \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - v^2|\mathbf{q}|^2} \right| + \frac{\omega_0}{2v|\mathbf{q}|} \ln \left| \frac{\omega_0 - v|\mathbf{q}|}{\omega_0 + v|\mathbf{q}|} \right| \right] \right\}^{-1}$$

при $\mathbf{q} = 0$. При вещественных и положительных ω_0 имеем:

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda mp_0}{2\pi^2} \right) \left[\ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} \right]}.$$

Будем рассматривать теперь $\Gamma(\omega_0)$ как функцию комплексной переменной ω_0 , определяя ее как аналитическое продолжение (33.7) в верхнюю полуплоскость $\text{Im } \omega_0 > 0$. Тогда получим:

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda mp_0}{2\pi^2} \right) \left[\ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} - i\varphi \right]}.$$

Таким образом, если взаимодействие имеет характер притяжения ($\lambda < 0$), величина $\Gamma(\omega_0)$ имеет полюс в точке $\omega_0 = i\Omega$, где

$$\Omega = 2\omega_D e^{-\frac{2\pi^2}{|\lambda|mp_0}}$$

В окрестности полюса $\Gamma(\omega_0)$ имеет вид

$$\Gamma(\omega_0) = -\frac{2\pi^2}{mp_0} \frac{i\Omega}{\omega_0 - i\Omega}.$$

Этот результат следует связать с упомянутой идеей Купера об образовании связанных пар электронов. Вершинная часть $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ определяется через компоненты Фурье двухчастичной функции Грина соотношением (10.17). Поэтому наличие полюса в величине Γ приводит к такому же полюсу в двухчастичной функции Грина. Образование связанных пар означает неустойчивость основного состояния газа взаимодействующих ферми-частиц, из которого мы исходили. Наложение сколь угодно слабых сил взаимного притяжения между частицами повлечет за собой перестройку всей системы. Существование неустойчивости находит свое отражение в появлении полюсов у вершинной функции по переменной $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ в верхней полуплоскости. Этот полюс, будучи чисто мнимым, определяет время релаксации неустойчивого основного состояния. В силу принципа неопределенности это время соответствует энергии связи реальной пары. В перестроенном основном состоянии пары ведут себя, как бозевские образования, и, подобно тому, что имеет место для обычных бозе-частиц, способны накапливаться в произвольном количестве на уровне наименьшей энергии. В сверхпроводящем состоянии эти пары находятся на уровне с импульсом движения пары как целого, равным нулю, в полной аналогии с тем, что происходит при «бозеконденсации» обычных бозе-частиц.

При отличных от нуля $v|\mathbf{q}|$ выражение (33.6) можно записать в следующем виде ($\omega_0 > v|\mathbf{q}|$):

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega_0) = \lambda \left\{ 1 + \left(\frac{imp_0}{2\pi^2} \right) \left[\ln e \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{i\pi}{2} - i\varphi - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2|\mathbf{q}|^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{\omega_0}{2v|\mathbf{q}|} \ln \left(\frac{\omega_0 - v|\mathbf{q}|}{\omega_0 + v|\mathbf{q}|} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

После продолжения в полуплоскость $\text{Im } \omega_0 > 0$, используя определение Ω (33.8), найдем:

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega_0) = -\frac{2\pi^2}{mp_0} \left\{ \ln \frac{\omega_0}{i\Omega} - 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2|\mathbf{q}|^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{\omega_0}{2v|\mathbf{q}|} \ln \left(\frac{\omega_0 - v|\mathbf{q}|}{\omega_0 + v|\mathbf{q}|} \right) \right\}^{-1}.$$

При малых $v|\mathbf{q}| \ll Q$

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega_0) = -\frac{2\pi^2}{mp_0} \frac{iQ}{\omega_0 - i\Omega + i(v^2|\mathbf{q}|^2/6\Omega)}.$$

Равенство нулю знаменателя (33.9) определяет полюс $\Gamma(\mathbf{q}, \omega_0)$ как функцию $|\mathbf{q}|$. При малых $|\mathbf{q}|$

$$\omega_0 = i\Omega \left(1 - \frac{v^2|\mathbf{q}|^2}{6Q^2} \right).$$

т. е. абсолютная величина ω_0 уменьшается. При некотором значении $v|\mathbf{q}|_{\max}$ Точка полюса ω_0 становится равной нулю, после чего при больших $v|\mathbf{q}|$ полюс в Γ отсутствует. Значение $v|\mathbf{q}|_{\max}$, при котором $\omega_0 = 0$, легко определяется:

$$v|\mathbf{q}|_{\max} = e\Omega$$

Поскольку q есть импульс системы двух частиц как целого, этот результат означает, что тенденцию к образованию связанных пар проявляют электроны, движущиеся почти навстречу друг другу.

Определение температуры перехода.

Отметим еще раз, что изложенные соображения свидетельствуют о неустойчивости обычного основного состояния системы «притягивающихся» частиц при низких температурах. Эта неустойчивость состоит в способности частиц, центр инерции которых почти поконится, образовывать связанные пары, т. е. своего рода бозе-частицы, которые «конденсируются» на основной уровень.

Температура, при которой впервые возникает такая неустойчивость, и будет температурой перехода металла из нормального в сверхпроводящее состояние.

Для ее определения можно воспользоваться упомянутой аналогией с газом бозе-частиц. приближении, в котором мы пренебрегаем рассеянием частиц друг на друга модель со слабым взаимодействием), связанные пары образуют идеальный газ. Как известно, температурная гриновская функция идеального газа бозе-частиц имеет вид:

$$\mathfrak{G}(q, i\omega_n) = \left[i\omega_n - \frac{q^2}{2m} + \mu \right]^{-1}$$

и представляет собой значения в точках $\omega = i\omega_n = i2n\pi T$ аналитической в верхней полуплоскости ω функции $G^R(q, \omega)$. Эта величина при $\omega_n = 0$ равна $\left[\mu - \frac{q^2}{2m} \right]^{-1}$. Принятое температуре $T = T_0$, называемой температурой «бозеконденсации», эта величина впервые обращается в бесконечность в точке $q = 0$. Температура T_0 определяется условием $\mu = 0$. Для связанной пары аналогом такой функции Грина бозе-частиц является двухчастичная фермионная функция Грина (16.5). Последняя в точке перехода должна обладать аналогичными

свойствами в смысле своей зависимости от переменных $\omega_{0n} = (\omega_1 + \omega_2)_n$ и $q = p_1 + p_2$, соответствующих центру инерции пары. Фермионные гриновские функции в выражении (16.5) никакими особенностями по этим переменным не обладают. Поэтому рассмотрим вершинную часть $\mathcal{J}(q, \omega_0)$ (мы опускаем всюду спиновые индексы, смысл q и ω_0 указан выше) и определим ее как аналитическую функцию в верхней полуплоскости ω_0 , совпадающую в точках $\omega_0 = i(\omega_1 + \omega_2)_n$ с вершинной частью в термодинамической технике. Иными словами, функция $\mathcal{J}(\mathbf{q}, \omega_0)$ есть аналитическое продолжение термодинамической вершинной части $\tau_{\alpha\beta}$ ($p_1\omega_1, p_2\omega_2; p_3\omega_3, p_4\omega_4 \equiv \mathcal{J}(q, \omega_0)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$) (ниже мы убедимся, что в интересующем нас приближении эта величина, подобно (33.9), действительно зависит только от переменных q и ω_0). Мы предположим на основании предыдущего, что при температурах ниже температуры перехода $\mathcal{J}(q, \omega_0)$ имеет полюсы $\text{Im } \omega_0 > 0$. При температуре, равной температуре перехода, в функции $\mathcal{J}(\mathbf{q}, \omega_0)$ впервые появляется полюс $\omega_0 = 0$.

Необходимое уравнение для термодинамической вершинной части имеет ту же структуру, что и (33.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{p}_1\omega_1, \mathbf{p}_2\omega_2; \mathbf{p}_3\omega_3, \mathbf{p}_4\omega_4) &= \tilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{p}_1\omega_1, \mathbf{p}_2\omega_2; \mathbf{p}_3\omega_3, \mathbf{p}_4\omega_4) - \\ &- \frac{T}{2(2\pi)^3} \sum_{\omega'} \int \tilde{J}_{\alpha\rho,\xi_\eta}(\mathbf{p}_1\omega_1, \mathbf{p}_2\omega_2; k\omega'; q - k\omega_0 - \omega') \times \\ &\times \mathfrak{G}(k)\mathfrak{G}(q - k)\mathcal{J}_{\xi\eta,\gamma\delta}(k\omega', q - k\omega_0 - \omega'; p_3\omega_3, p_4\omega_4) d\mathbf{k}, \end{aligned}$$

где опять $\tilde{\mathcal{J}}$ есть сумма матричных элементов для всех тех диаграмм, которые не могут быть разделены вертикальным разрезом на две части, соединенные двумя одинаково направленными линиями. Ю тем эке причинам, что и выше, для $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\mathbf{p}_1\omega_1, \mathbf{p}_2\omega_2; \mathbf{p}_3\omega_3, \mathbf{p}_4\omega_4)$ можно ограничиться первым приближением теории возмущений. Задача нахождения вершинной части тогда сводится к вычислению суммы и интеграла в матричном элементе:

$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} T \sum_{\omega'} \int \mathfrak{G}(k)(\mathbf{s})(q - k) dk$$

Подставляя сюда для гриновских функций (14.6), легко произвести элементарное суммирование по частотам. Мы не будем вычислять (33.12) при произвольных значениях $\omega_0, |q|$. Из соображений однородности ясно, что, как в бозе-газе, полюс в $\mathcal{J}(q, \omega_0)$ впервые появляется для значений $\omega_0 = |\mathbf{q}| = 0$. Поэтому достаточно найти решение уравнения (33.11) при $|\mathbf{q}| = \omega_0 = 0$. Момент, когда эта величина обращается в бесконечность, определяет температуру перехода из нормального в сверхпроводящее состояние. При $q = \omega_0 = 0$ интеграл (33.12) можно преобразовать:

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi^2} mp_0 \int_0^{\omega_D} \text{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right) \frac{d\xi}{\xi} = -\lambda^2 \frac{mp_0}{2\pi^2} \left(\ln \frac{\omega_D}{2T} - \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{\text{ch}^2 x} \right)$$

[после интегрирования по частям, поскольку остающийся интеграл сходится, предел $x = \omega_D/2T$ можно заменить на бесконечность. Интеграл равен $-\ln(2\gamma/\pi)$, где $\ln \gamma = C = 0,577$].

Таким образом,

$$\mathcal{J}(0, 0) = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda mp_0}{2\pi^2} \ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)}$$

Вблизи температуры перехода это выражение можно записать как

$$\mathcal{J}(0, 0) = -\frac{2\pi^2}{mp_0} \frac{T_c}{T - T_c}$$

где температура перехода T_c равна

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} 2\omega_D e^{-\left(\frac{2\pi^2}{|\lambda|^{mp_0}}\right)}.$$

Значение частоты Q , введенной нами выше и характеризующей неустойчивость системы при абсолютном нуле, равно

$$Q = \frac{\pi}{\gamma} T_c.$$

10.8.3 Система основных уравнений для сверхпроводника

Сверхпроводник при абсолютном нуле температур.

Приступим теперь к выводу системы уравнений для гриновских функций, описывающих свойства металла в сверхпроводящем состоянии (Горьков [59]). Для начала ограничимся случаем абсолютного нуля температур. В рассматриваемомон модели полный гамильтониан системы электронов в записи вторичного квантования имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \int \left\{ - \left(\psi^+ \frac{\nabla^2}{2m} \psi \right) + \frac{\lambda}{2} (\psi^+ (\psi^+ \psi) \psi) \right\} dr.$$

где $(\psi^+ \psi) \equiv \psi_\alpha^+ \psi_\alpha$ и операторы $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^+(\mathbf{r})$ в шредингеровском представлении удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_j^+(\mathbf{r}')\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta(\mathbf{r}')\} &= \{\psi_\alpha^+(\mathbf{r}), \psi_\beta^+(\mathbf{r}')\} = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к гейзенберговскому представлению, в котором операторы $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^+$ зависят от времени и подчиняются следующим операторным уравнениям:

$$\begin{aligned} \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \tilde{\psi}_\alpha(x) - \lambda (\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) \tilde{\psi}_\alpha(x) &= 0, \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \tilde{\psi}_\alpha^+(x) + \lambda \tilde{\psi}_\alpha^+(x) (\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение для функции Грина системы

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -i \langle T \left(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x') \right) \rangle$$

очевидным образом может быть получено из уравнений (34.2)

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} G_{\alpha\beta}(x, x') + i\lambda \langle T \left((\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) \tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x') \right) \rangle = \delta(x - x').$$

(далее какие-то слова, много слов, пока не особо читал.)

Фигурирующее в этом уравнении среднее от произведения четырех $\tilde{\psi}$ -операторов для системы невзаимодействующих электронов распадается по теореме Вика на парные средние операторов $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^+$. Для взаимодействующих частиц произведение четырех ψ -операторов выражается уже через вершинную часть, т. е. включает в себя вклад от различных процессов рассеяния.

В изучаемой модели со слабым взаимодействием рассеянием различных частиц друг на друге можно пренебречь. В то же время надо учесть, что основное состояние системы отличается от обычного состояния с заполненной сферой Ферми присутствием связанных пар электронов. Такие пары, как это уже отмечалось в предыдущем параграфе, представляют

собой бозевские образования и потому обладают способностью накапливаться в произвольном количестве на уровне с наименьшей энергией. В отсутствие внешнего поля и в пренебрежении процессами рассеяния пары, очевидно, «конденсируются» в состоянии, в котором они как целое покоятся. Рассмотрим произведение операторов $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ или $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$. Первое из них уничтожает, а второе рождает два электрона. В частности, эти два электрона могут находиться в связанном состоянии, иными словами, в операторах $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ имеются члены, отвечающие уничтожению и рождению связанных пар, в том числе пар, находящихся на основном уровне. Поскольку таких пар много (число их пропорционально полному числу частиц), то соответствующий вклад в операторы $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ можно считать числом, подобно тому как это делалось для системы бозе-частиц. Заметим, что в металле существуют особые причины для того, чтобы не рассматривать пары, находящиеся не на основном уровне. Действительно, связанная пара электронов с конечным импульсом движения как целое представляет собой бозевское возбуждение с нулевым спином. Как мы уже упоминали, условие электронейтральности в металле фактически приведет к тому, что для возбуждения такой пары из «бозе-конденсата» потребуется значительная энергия (~ 1 эВ), что гораздо больше характерных энергии, с которыми приходится встречаться при построении теории сверхпроводимости.

Преобразования (!??!??!)

Возвращаясь к уравнению для функции Грина (34.3), с учетом всего сказанного можно определенным образом расписать среднее от произведения четырех ψ -операторов. Имеем, например:

$$\begin{aligned} \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\xi(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)\tilde{\psi}_i^+(x_4)) \rangle &= -\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)) \rangle \langle T(\tilde{\psi}_3(x_2)\tilde{\psi}_0^+(x_4)) \rangle + \\ &+ \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_0^+(x_4)) \rangle \langle T(\tilde{\psi}_3(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)) \rangle + \\ &+ \langle N | T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)) | N+2 \rangle \langle N+2 | T(\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)\tilde{\psi}_{00}^+(x_4)) | N \rangle \end{aligned}$$

где $|N\rangle$ и $|N+2\rangle$ – основные состояния системы с числом частиц N и $N+2$. Такая запись означает, что мы пренебрегли всеми эффектами рассеяния частиц друг на друге. Наличие взаимодействия учтено лишь постольку, поскольку оно приводит к образованию связанных пар. Третий член в правой части равенства (34.4) написан в полной аналогии со случаем бозе-газа в соответствии с тем, что большое число связанных пар «сконденсировалось» на основном уровне. Величина

$$\langle N | T(\tilde{\psi}\tilde{\psi}) | N+2 \rangle \langle N+2 | T(\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+) | N \rangle,$$

очевидно, имеет порядок плотности числа пар.

Легко убедиться, что введенные таким образом величины можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle N | T(\tilde{\psi}_\alpha(x)\tilde{\psi}_\beta(x')) | N+2 \rangle &= e^{-2i\mu t} F_{\alpha\beta}(x-x'), \\ \langle N+2 | T(\tilde{\psi}_\alpha^+(x)\tilde{\psi}_\beta^+(x')) | N \rangle &= e^{2i\mu t} F_{\alpha\beta}^+(x-x'). \end{aligned}$$

Для однородной задачи (в отсутствие внешнего поля) функция Грина $G(x-x')$ зависит только от разности координат $x-x'$. Происхождение дополнительной зависимости от t в выражениях (34.5) видно из общей формулы квантовой механики для производной по времени от произвольного оператора $\tilde{A}(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N | \tilde{A}(t) | N+2 \rangle = i(E_N - E_{N+2}) \langle N | \tilde{A}(t) | N+2 \rangle.$$

По определению химический потенциал $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$, поэтому величина разности энергий $E_{N+2} - E_N$ равна 2μ .

При подстановке в уравнение (34.3) для функции Грина выражения (34.4) мы будем всюду опускать первые два члена в правой части (34.4), поскольку в уравнениях для функций G и F и F^+ они, как легко убедиться, приводят к аддитивной добавке к химическому потенциалу и не представляют интереса. В результате получаем следующее уравнение, связывающее функции G и F^+ :

$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \hat{G}(x - x') - i\lambda \hat{F}(0+) \hat{F}^+(x - x') = \delta(x - x').$ (Здесь \hat{G} , \hat{F} , \hat{F}^+ означают запись функций $G_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}^+$ в матричном виде по спинорным индексам, их произведение есть матричное произведение.)

Величина $\hat{F}(0+)$ определена следующим образом:

$$F_{\alpha\beta}(0+) := e^{2i\mu,t} \left\langle N \left| \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x) \right| N + 2 \right\rangle \equiv \lim_{r \rightarrow r', t \rightarrow t' + 0} F_{\alpha\beta}(x - x').$$

Уравнение для $\hat{F}^+(x - x')$ может быть получено аналогичным образом применением второго из уравнений (34.2):

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu \right\} \hat{F}^+(x - x') + i\lambda \hat{F}^+(0+) \hat{G}(x - x') = 0.$$

В соответствии с (34.7)

$$F_{\alpha\beta}^+(0+) = e^{-2i,k,t} \left\langle N + 2 \left| \tilde{\psi}_\alpha^+(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x) \right| N \right\rangle.$$

В отсутствие взаимодействий, зависящих от спинов частиц, функция Грина $\hat{G}(x - x')$ пропорциональна единичной матрице $\delta_{\alpha\beta}$ по спиновым переменным:

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x - x') = \delta_{\alpha\beta} G(x - x').$$

Свойства аномальных функций Грина (??) Функции \hat{F} и \hat{F}^+ пропорциональны матрице \hat{I} , антисимметричной по своим индексам. Действительно, поскольку операторы $\tilde{\psi}_\alpha(x)$ и $\tilde{\psi}_\beta(x')$ антикоммутируют в один и тот же момент времени, то $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = -F_{\beta\alpha}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, 0)$. Отсюда следует:

$$\{F_{\alpha\beta}^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)\}^* = -F_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0).$$

В частности,

$$\{F_{\alpha\beta}^+(0+)\}^* = -F_{\alpha\beta}(0+).$$

удобно написать \hat{F} и \hat{F}^+ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{F}^+(x - x') &= \hat{I}F^+(x - x'), \\ \hat{F}(x - x') &= -\hat{I}F(x - x'), \end{aligned}$$

$$\text{р. } (\hat{I}^2)_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

Нз (34.10) видно, что $F^+(x - x')$ и $F(x - x')$ удовлетворяют соотношению

$$\{F^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)\}^* = F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0).$$

Антисимметрия \hat{F} и \hat{F}^+ по спиновым индексам отвечает тому факту, что связанные пары находятся в синглетном состоянии. Функция $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)$ с точностью до множителя может, очевидно, рассматриваться как волновая функция пары частиц в связанном состоянии (центр инерции пары покойится).

Система уравнений

Напишем систему уравнений для функций, исключая всюду зависимость от спиновых переменных:

$$\begin{aligned} \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} G(x - x') - i\lambda F(0+)F^+(x - x') &= \delta(x - x'), \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu \right\} F^+(x - x') + i\lambda F^+(0+)G(x - x') &= 0, \end{aligned}$$

где $(F(0+))^* = F^+(0+)$.

Вводя компоненты Фурье всех величин, получим:

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p^2}{2m} \right) G(p) - i\lambda F(0+)F^+(p) &= 1, \\ \left(\omega + \frac{p^2}{2m} - 2\mu \right) F^+(p) + i\lambda F^+(0+)G(p) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет большое сходство с системой уравнений для функций G' и \hat{G} в бозе-системе. Надо иметь, однако, в виду, что аналогом функций F и F^+ служат в этом случае операторы ξ_0 и ξ_0^+ частиц конденсата. Поэтому мы пользуемся обозначениями G и F^+ в отличие G' и \hat{G} для бозе-частиц.

Предыдущее рассмотрение было проведено в термодинамических переменных, где число частиц задано. Гораздо удобнее пользоваться в качестве независимой переменной химическим потенциалом μ . Как обычно, переход к этим переменным формально может быть осуществлен заменой $\omega = \omega' + \mu$. Опуская в дальнейшем штрихи у частоты, перепишем систему (34.14):

$$(\omega - \xi)G(p) - i\lambda F(0+)F^+(p) = 1, (\omega + \xi)F^+(p) + i\lambda F^+(0+)G(p) = 0,$$

где $\xi = v(|\mathbf{p}| - p_0)$, $p_0 \simeq \sqrt{2m\mu}$ – граничный импульс ферми, $v = \frac{p_0}{m}$.

В результате решения найдем:

$$G(p) = \frac{\omega + \xi}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}, \quad F^+(p) = -i\lambda \frac{F^+(0+)}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}$$

и

$$\Delta^2 = \lambda^2 |F^+(0+)|^2.$$

Детерминант левой части системы уравнений (34.15) обращается в нуль в точках $\omega = \pm \varepsilon(\mathbf{p})$, где $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$. Поэтому решение (34.15) получено с точностью до произвольных членов вида

$$A_1(\mathbf{p})\delta(\omega - \varepsilon(\mathbf{p})) + A_2(\mathbf{p})\delta(\omega + \varepsilon(\mathbf{p})).$$

(!??!?!???)

Границным условием, определяющим выбор произвольных A_1 и A_2 в функциях G и F^+ , служит теорема Ландау (гл. II), согласно которой знак мнимой части функции Грина G противоположен знаку ω , а функция

$$G^R(\omega, \mathbf{p}) = \operatorname{Re} G(\omega, \mathbf{p}) + i\varepsilon(\omega) \operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p})$$

должна быть аналитической и не иметь особенностей в верхней полуплоскости. Нетрудно проверить, что решением, удовлетворяющим этим требованиям, является:

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon(p) + i\hat{\delta}} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon(p) - i\hat{\delta}}, \\ F^+(p) &= -i\lambda \frac{F^+(0+)}{(\omega - \varepsilon(p) + i\hat{\delta})(\omega + \varepsilon(p) - i\hat{\delta})}, \end{aligned}$$

где функции u_p^2 и v_p^2 равны

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi}{\varepsilon(p)} \right); \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi}{\varepsilon(p)} \right).$$

(!?!??!?) проверю это!!!)

Тут мы выбрали $F^+(0+)$ вещественным. Последнее всегда возможно в отсутствие внешнего поля, поскольку уравнения (34.13) допускают преобразование $\{F(x-x'), F(0+)\} \rightarrow \{F(x-x')e^{2i\varphi}, F(0+)e^{2i\varphi}\}$ и $\{F^+(x-x'), F^+(0+)\} \rightarrow \{F^+(x-x')e^{-2i\varphi}, F^+(0+)e^{-2i\varphi}\}$ с постоянной фазой. Подробнее об этом ниже, в разделе 2.

Положительный полюс $\omega = \varepsilon(\mathbf{p})$ в функции Грина (34.17) определяет спектр возбуждений $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$. Этот спектр имеет щель Δ , для определения которой будем исходить из соотношения

$$F^+(0) = (2\pi)^{-4} \int F^+(p) d\omega dp$$

Подставляя сюда (34.18), получим уравнение

$$1 = -\frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \int \frac{dp}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}.$$

Расходимость в этом интеграле обрезается из условия, что в рассматриваемой модели во взаимодействии участвуют только электроны с энергией в слое толщиной $2\omega_D$ около поверхности Ферми. Выполняя интегрирование, найдем:

$$1 = -\frac{\lambda}{2\pi^2} mp_0 \ln \frac{2\omega_D}{\Delta}.$$

В результате получаем:

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\zeta},$$

где $\zeta = \frac{|\lambda|mp_0}{2\pi^2}$. Сравнивая это выражение с результатом предыдущего параграфа, найдем, что величина щели в энергетическом спектре при абсолютном нуле температур связана с температурой перехода следующим образом:

$$\Delta = \frac{\pi}{\gamma} T_c$$

Уравнения при наличии внешнего электромагнитного поля. Градиентная инвариантность

Если сверхпроводник находится во внешнем поле, скажем, в электромагнитном поле, то система уравнений (34.13) несколько усложнится. Заметим, прежде всего, что во внешнем поле все функции уже не будут функциями только разности координат. Введение электромагнитного поля в уравнения (34.13) может быть произведено обычным образом заменой всех производных:

$$\nabla \rightarrow \nabla - ieA \text{ или } \nabla \rightarrow \nabla + ieA,$$

соответственно тому, относится ли это дифференцирование к оператору $\tilde{\psi}$ или $\tilde{\psi}^+$. (Обычно удобно пользоваться калибровкой, в которой скалярный потенциал ϕ равен нулю.)

Уравнения для функций G и F^+ в поле имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} G(x, x') - i\lambda F(x, x)F^+(x, x') &= \delta(x - x') \\ \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} + ieA(r) \right)^2 - \mu \right\} F^+(x, x') + i\lambda F^+(x, x)G(x, x') &= 0 \end{aligned}$$

Отметим очевидную градиентную инвариантность этих уравнений. При градиентном преобразовании вектор-потенциала

$$A \rightarrow A + \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

функции G , F и F^+ преобразуются каждая своим образом:

$$\begin{aligned} G(x, x') &\rightarrow G(x, x') e^{ie[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]}, \\ F(x, x') &\rightarrow F(x, x') e^{ie[\varphi(r) + \varphi(r')]}, \\ F^+(x, x') &\rightarrow F^+(x, x') e^{-ie[\varphi(r) + \varphi(r')]} \end{aligned}$$

а «щель» $|\lambda|F(x, x)$ или $|\lambda|F^+(x, x)$, которая во внешнем поле является, вообще говоря, функцией x , преобразуется по закону

$$\begin{aligned} F(x, x) &\rightarrow F(x, x)e^{2ie\varphi(r)}, \\ F^+(x, x) &\rightarrow F^+(x, x)e^{-2ie\varphi(r)} \end{aligned}$$

Градиентная инвариантность этих уравнений делает возможным последовательное изучение свойств сверхпроводников в магнитном поле. Отмечая градиентную инвариантность уравнений (34.25), следует подчеркнуть, что данный факт связан с написанием гамильтониана взаимодействия в форме (32.3). Строго говоря, гамильтониан (32.2) не является градиентно-инвариантным, что, конечно, есть свойство модели. Легко проверить, что в этой модели в уравнения (32.13) входят не $F(x, x)$ - значения функций F и F^+ в совпадающих точках, а величины

$$\overline{F(x, x)} = \int \theta(\mathbf{r} - \mathbf{y})\theta(\mathbf{r} - \mathbf{z})F(y, z)dzdy$$

и, соответственно, $\overline{F^+(x, x)}$. Функция $F(y, z; t = t')$, как волновая функция пары, имеет радиус корреляции порядка размеров пары $\xi_0 \sim \frac{\hbar v}{T_c}$ и при $|y - z| \gg \xi_0$ быстро спадает.

Функции θ имеют, как указывалось в §32, δ -функциональный характер с шириной максимума порядка v/ω_D . Таким образом, замена $\overline{F(x, x)}$ на $F(x, x)$ влечет за собой ошибку порядка T_d/ω_D , которая всегда мала в реальных сверхпроводниках.

Сверхпроводник при конечных температурах.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о распространении изложенной схемы на случай отличных от нуля температур. Такое обобщение, очевидно, можно провести на базе изложенной в гл. III техники для $T \neq 0$. В сверхпроводящем состоянии система характеризуется отличными от нуля средними

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x, x') &= \frac{\langle T_\tau (\psi(x)\psi(x') \subseteq) \rangle}{\langle \subseteq \rangle} \\ \mathfrak{F}^+(x, x') &= \frac{\langle T_\tau (\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x') \tilde{\Im}) \rangle}{\langle \subseteq \rangle} \end{aligned}$$

(смысл усреднения и определение операторов $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ те же, что и в гл. III. Напомним, что в качестве независимой термодинамической переменной выбран химический потенциал). Если рассматривать гиббсовское усреднение в определениях $\mathfrak{F}(x, x')$ и $\mathfrak{F}^+(x, x')$ как квантовомеханическое усреднение по состоянию с энергией, равной средней энергии \bar{E} , и числом частиц, равным среднему числу частиц, то это означает, что рождение или уничтожение пары электронов практически не изменяет состояния. Для этого нужно, чтобы указанная пара электронов принадлежала к числу связанных пар, находящихся в «бозе-конденсированном» состоянии. Поскольку число этих пар очень велико (пропорционально полному числу частиц во всем объеме системы), прибавление или уничтожение одной из таких пар не оказывается на всем состоянии системы. Иными словами, как и при абсолютном нуле, система в сверхпроводящем состоянии имеет в произведениях операторов $\psi\psi$ и $\psi^+\psi^+$ члены, которые можно рассматривать как числа. Мы предположим, что средние (термодинамические) от произведения четырех ψ -операторов могут быть записаны через функции Грина ($\mathfrak{S}(x, x') = -\langle T_t(\psi(x)\bar{\psi}(x') \leftrightarrow) \rangle / \langle 5 \rangle$) и функции $\mathfrak{F}(x, x')$ и $\mathfrak{F}^+(x, x')$, так же как это было сделано в выражении (34.4) при абсолютном нуле. Как и выше, это означает пренебрежение эффектами рассеяния частиц друг на друге. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle T_\tau (\psi_a(x_1) \psi_\beta(x_2) \bar{\psi}_\gamma(x_3) \bar{\psi}_\delta(x_4) \mathfrak{S}) \rangle}{\langle \mathfrak{S} \rangle} = \\ & = -(\mathfrak{Z}_{\alpha\gamma} x_1, x_3) (\mathfrak{H}_{\beta\delta}(x_2, x_4) + (\mathfrak{H}_{\alpha\delta} x_1, x_4)) (\mathfrak{Z}_{\beta\gamma}(x_2, x_3) + \\ & + \mathfrak{F}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \mathfrak{F}_{\gamma\delta}^+(x_3, x_4)). \quad (34.29) \end{aligned}$$

Мы не будем здесь повторять соответствующего вывода уравнений для функций () и \mathfrak{F}^+ . Он вполне аналогичен выводу (34.13); приведем только окончательный вид этих уравнений:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} (\mathfrak{S}(x - x') + \Delta \mathfrak{F}^+(x - x')) = \\ & = \delta(x - x'), \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathcal{F}^+(x - x') - \Delta^* (\mathfrak{B}(x - x')) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = |\lambda| \tilde{F}(0+), \quad \Delta^* = |\lambda| \mathcal{F}^+(0+).$$

Иногда возникает необходимость в определении функции $\mathfrak{F}(x - x')$. Соответствующее уравнение может быть легко получено:

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \tilde{F}(x - x') - \Delta(5)(x' - x) = 0.$$

Сюда входит функция (53 с переставленными аргументами. Нетрудно проверить, что совокупность четырех уравнений для функций $\mathfrak{S}(x - x')$, $\mathfrak{F}^+(x - x')$, $\mathfrak{F}(x - x')$ и

(5) $(x' - x)$ может быть символически записана в матричном виде:

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \right. \\ & \quad \left. - \Delta^* \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\Delta}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \right) \times \\ & X \begin{pmatrix} \mathfrak{S}(x-x') & \mathfrak{F}(x-x') \\ \mathfrak{F}^+(x-x') - (\mathfrak{S}(x'-x)) \end{pmatrix} = \hat{1}. \end{aligned}$$

иными словами, перечисленные четыре функции образуют одну матричную функцию Грина для оператора в левой части (34.30).

В температурной технике вместо разложения в интеграл Фурье по частоте производится, как мы знаем, разложение всех величин в ряды Фурье. Как видно из написанных уравнений, если ввести компоненты фурье для функций \mathcal{U} и \mathcal{F}^+ так же, как в гл. III были введены компоненты функции Γ рина:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(x-x') &= (2\pi)^{-3} T \sum_n^{\omega_n} \int dp e^{ipr_{Y_\omega}^+}(\mathbf{p}), \\ / \\ \mathfrak{F}(x-x') &= (2\pi)^{-3} T \sum_n e^{-i\omega r} n^\tau \int dp e^{ipr} \tilde{F}_\omega(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

где $\omega = (2n+1)\pi T$, то системе (34.15) соответствует система

$$\begin{aligned} (i\omega - \xi) \mathfrak{S}_\omega(p) + \Delta \tilde{\mathcal{U}}_\omega^+(\mathbf{p}) &= 1, \\ (i\omega + \xi) \mathfrak{F}_\omega^+(p) + \Delta (\mathfrak{S}_\omega(\mathbf{p})) &= 0, \end{aligned}$$

которой удовлетворяют

$$\xi_\omega(\mathbf{p}) = -\frac{i\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad \tilde{\mathcal{U}}_\omega^+(\mathbf{p}) = \frac{\Delta^*}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}$$

Отметим также, что в отсутствие поля функции $\bar{\mathcal{U}}$ и $\tilde{\mathcal{U}}^+$ равны друг другу, а Δ вещественно. Это решение в отличие от ситуации, имевшей место для системы (34.15), уже однозначно. Это связано с тем, что для термодинамических функций однозначно определены их аналитические свойства. Величина щели определяется из условия

$$1 = \frac{|\lambda|T}{(2\pi)^3} \sum_n \int \frac{dp}{\omega + \xi^2 + \Delta^2}.$$

Ряд по частотам легко суммируется. В результате вместо условия (34.21) при $T = 0$ мы получаем новое соотношение, из которого определяется величина щели при конечной температуре:

$$1 = \frac{|\lambda|mp_0}{2\pi^2} \int_0^{\omega^\infty D} d\xi \frac{\operatorname{th} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}.$$

В точке фазового перехода, т. е. при температуре $T = T_c$, щель $\Delta(T)$ обращается в нуль и условие (34.37), как и должно быть, переходит в условие (33.15), из которого определяется температура перехода T_c .

10.8.4 Вывод уравнений сверхпроводимости в фононной модели

Теория

Остановимся на выводе уравнений теории сверхпроводимости в модели, в которой электроны взаимодействуют друг с другом через посредство электрон-фононного взаимодействия. Разумеется, такая модель страдает тем же недостатком, что и рассмотренная выше схема, поскольку в ней не учитываются действующие в металле кулоновские силы. Тем не менее она, конечно, имеет более непосредственный физический смысл, чем модель с четырехфермионным взаимодействием, хотя в смысле получения практических результатов последняя несколько удобней. Основное преимущество фононной модели состоит, прежде всего, в том, что гамильтониан электрон-фононного взаимодействия (32.1) является градиентно-инвариантным с самого начала в отличие от схемы с гамильтонианом четырехфермионного взаимодействия (32.2), являющейся градиентно-инвариантной только приближенно в силу соотношения $T_c' \ll \omega_D$. Что же касается этого соотношения, то оно выполняется, вообще говоря, лишь в приближении слабой связи. Ниже мы покажем, что ограничение слабой связи не является существенным в теории сверхпроводимости и что фактическим малым параметром рассматриваемой теории служит только отношение $\omega_D/\varepsilon_F \ll 1$ ($\omega_D/\varepsilon_F \sim a/v \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$, где v — скорость звука в теле, а v -скорость электронов на поверхности Ферми). Мы ограничимся выводом уравнений при абсолютном нуле температур.

Итак, пусть гамильтониан взаимодействия системы электронов и фононов имеет вид

$$H_{int}(x) = g \left(\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x) \right) \tilde{\varphi}(x).$$

1) Для реальных сверхпроводников, однако, всегда имеет место $T_c \ll \omega_D$.²⁾ Электрон-фононное взаимодействие в теории сверхпроводимости изучалось в [57, 58].

Если система находится в сверхпроводящем состоянии, то, помимо функции Грина G , ее свойства характеризуются еще двумя функциями F и F^+ . Поэтому вместо обычного уравнения Дайсона (\$21) необходимо изучать, вообще говоря, три уравнения, связывающих между собой три функции:

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x, x') = -i \left\langle T \left(\tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x') \right) \right\rangle = \delta_{\alpha\beta} G(x - x'),$$

$$\hat{F}_{\alpha\beta}^+(x, x') = \left\langle T \left(\tilde{\psi}_\alpha^+(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x') \right) \right\rangle = I_{\alpha\beta} F^+(x - x'),$$

$$\hat{F}_{\alpha\beta}(x, x') = \left\langle T \left(\tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta(x') \right) \right\rangle = -I_{\alpha\beta} F(x - x').$$

Что касается уравнения для фононной функции Грина

$$D(x_1 - x_2) = -i \langle T(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \rangle,$$

то, как мы увидим, оно останется почти без изменений. Уравнение для функции Грина можно получить из диаграммной техники теории возмущений. Подобно тому как это имело место для системы бозе-частиц ниже точки «бозеконденсации», совокупность возможных диаграмм теории возмущений расширяется за

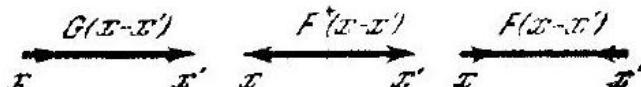


Рис. 91. Счет появления в них линий, соответствующих функциям F и F^+ . Условимся изображать на диаграмме функции G , F^+ и F жирными линиями с двумя стрелками, направление которых в точках x и x' выбрано

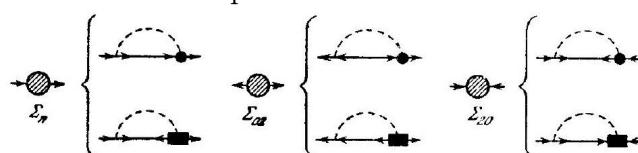


Рис. 92.

в соответствии с (35.1) так, чтобы оператору $\tilde{\psi}$ в данной точке отвечала стрелка, направленная от точки, тогда как оператору $\tilde{\psi}^+$ - стрелка в направлении к точке. Все три линии показаны на рис. 91. Тогда легко видеть, что в по.1ной аналогии с газом бозе-частиц имеются три типа неприводимых собственно энергетических частей, которые мы обозначим через $\Sigma_{11}(x, x')$, $\Sigma_{20}(x, x')$ и $\Sigma_{02}(x, x')$. На рис. 92, где изображены диаграммы для величин Σ_{ik} , пунктир соответствует фононной D -функции, точка - простой вершине, или множителю g , а жирная точка и.ли прямоугольник означает модификацию простой вершины за счет различных электрон-фононных взаимодействий.

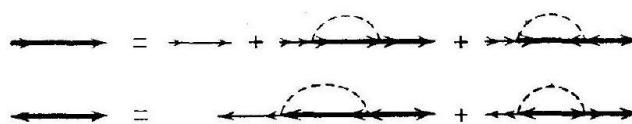
Перейдем к компонентам Фурье д.яя всех величин и рассмотрим любую из собственно энергетических диаграмм, скажем $\Sigma_{11}(p)$. Нетрудно увидеть, что с точностью до членов порядка ω_D/ε_F можно пренебречь всеми фононными поправками к трехвершинной части в простейшей диаграмме для $\Sigma_{11}(p)$ рис. 93.



Рис. 93.

Действительно, как мы показали в §21, в соответствующем подынтегральном выражении существенны значения D -функции (и фононной вершины) для фононов с импульсами порядка фермиевского импульса электронов. По этой причине произведенная в 21 оценка поправок к фононной вершине, происходящих от электрон-фононных взаимодействий, остается справедливой и в рассматриваемом случае, поскольку величина таких поправок определяется значениями гриновских функций в области энергий и импульсов, удаленной от поверхности Ферми. Между тем совершенно ясно, что компоненты Фурье электронной функции Грина для металла в сверхпроводящем состоянии отличаются от своих значений в нормальном металле лишь в узкой области вблизи поверхности Ферми с энергиями возбуждения не большими, чем порядок максимальных фононных энергий, т. е. порядка ω_D . В равной мере специфические для сверхпроводящего состояния функции $F^+(p)$ и $F(p)$ также отличны от нуля только в указанной области. На рис. 92 были изображены по два возможных типа собственно энергетической диаграммы для каждой из частей Σ_{11} , Σ_{20} и Σ_{02} в зависимости от выбора той или иной модификации фононной вершины. На основании только что сказанного мы можем сразу же опустить диаграммы второго типа, где фононная вершина отмечена жирным прямоугольником, поскольку диаграммы такого рода могут быть построены только с использованием сверхпроводящих функций Грина F и F^+ .

Таким образом, в качестве фононной вершины в неприводимых частях Σ_{11} , Σ_{20} и Σ_{02} можно ограничиться нулевым приближением теории возмущений. По тем же причинам останется неизменной фононная функция Грина $D(x_1 - x_2)$, для компонент Фурье которой можно непосредственно пользоваться выражением (21.14). Структура уравнений для функций G и F^+ изображена на рис. 94 и понятна без дальнейших пояснений. Приведем эти



уравнения в аналитическом виде. В координатном представлении

$$\begin{aligned}
 & \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} G(x - x') = \\
 & = \partial(x - x') + g^2 i \int G(x - z) D(x - z) G(z - x') d^4 z + \\
 & + g^2 i \int F(x - z) D(x - z) F^+(z - x') d^4 z \\
 & \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} F^+(x - x') = \\
 & = g^2 i \int G(z - x) D(z - x) F^+(z - x') d^4 z + \\
 & + g^2 i \int F^+(x - z) D(x - z) G(z - x') d^4 z
 \end{aligned}$$

Электромагнитное поле может быть включено в эти уравнения обычным образом, подобно тому как это было сделано выше, в §34. Подчеркнем, что получающаяся система является полностью градиентно-инвариантной в отличие от системы (34.13), в которой градиентная инвариантность была только приближенной с точностью до членов T_c/ω_D . К сожалению, как это видно из (35.2), эта система имеет гораздо более сложный вид с интегральным нелинейным членом, что делает ее менее удобной для решения в координатном представлении, как это требуется в ряде задач, в которых существует неоднородное магнитное поле. Получающиеся же практические результаты, как правило, эквивалентны для обеих моделей. В отсутствие магнитного поля для однородной задачи, переходя в уравнениях (35.2) к импульсному представлению, легко получить уравнения для компонент Фурье всех величин

$$\begin{aligned}
 (\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_\omega) G(p) - g^2 i \bar{F}_\omega F^+(p) &= 1. \\
 (-\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_{-\omega}) F^+(p) - g^2 \bar{F}_\omega^+ G(p) &= 0.
 \end{aligned}$$

3 Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_\omega &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p - k) D(k) d^4 k, \\
 \bar{F}_\omega &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int^0 F(p - k) D(k) d^4 k, \\
 \bar{F}_\omega^\omega &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \bar{G}_{-\omega}^+(p - k) D(k) d^4 k. \\
 &= \bar{G}_\omega(-p)
 \end{aligned}$$

Эта система совершенно аналогична системе (34.15) уравнений, полученной выше. Единственное отличие состоит в том, что в то время как в уравнениях (34.15) величины \bar{G}_ω и \bar{F}_ω , F_ω^+ суть постоянные в области $|v(|p| - p_0)| < \omega_D$ около поверхности Ферми и равны нулю вне этой области, величины (35.4) суть функции, вообще говоря, ж и p , плавно убывающие до нуля при $\omega, |v(|p| - p_0)| \gg \omega_D$.

Выразим функции G и F^+ через \bar{G}_ω и \bar{F}_ω , \bar{F}_ω^+ :

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \frac{\omega - g^2 i \bar{G}_\omega + \xi}{[\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_\omega] [\omega + \xi + g^2 i \bar{G}_{-\omega}] - g^4 |\bar{F}_\omega^+|^2}, \\
 F^+(p) &= \frac{-ig^2 \bar{F}_\omega^-}{[\omega - 5 - g^2 i \bar{G}_\omega] [\omega + 5 + g^2 i \bar{G}_{-\omega}] - g^4 |\bar{F}_\omega^-|^2}.
 \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в определения \vec{G}_ω и \vec{F}_ω^r (35.4) мы получим два интегральных уравнения для этих величин вместо одного уравнения (21.16) в §21. Решение этих уравнений было получено Элиашбергом [60]. Не останавливаясь на вычислениях, приведем окончательный результат. Оказывается, что при малых энергиях спектр возбуждений имеет вид

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$$

где, однако, $\xi = v_1(p - p_0)$ содержит, в согласии с (21.31), перенормированную скорость на поверхности Ферми v_1 .

Щель при абсолютном нуле связана с $\overline{F_{\omega=0}^+}$ соотношением

$$\Delta = g^2 \frac{v_1}{v_0} \left| \overline{F_{\omega=0}^+} \right|.$$

В пределе слабого взаимодействия $g^2 \ll 1$ эти формулы совпадают с результатами предыдущего параграфа.

10.8.5 Термодинамика сверхпроводников (!!!!!)

Зависимость щели в спектре от температуры.

Исследуем более подробно зависимость величины щели от температуры. Рассмотрим сначала случай низких температур $T \ll T_c$ и произведем соответствующее разложение условия (34.37). Имеем тождественно:

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^\omega \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - 2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \cdot \frac{1}{\exp(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T) + 1},$$

где $\zeta = |\lambda| \frac{mp_0}{2\pi^2}$ (второй интеграл является сходящимся, поэтому верхний предел интегрирования в нем можно положить равным бесконечности). Разлагая по экспоненте под знаком второго интеграла, переходя к интегрированию по и используя определение соответствующих функций Бесселя, мы можем представить уравнение (36.1) в виде ряда по функциям Бесселя нулевого порядка:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left(\frac{n\Delta}{T} \right)$$

(здесь $\Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)$).

При низких температурах $\Delta \gg T$, воспользовавшись асимптотическим разложением функции Бесселя, получаем:

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T \Delta_0} \left(1 - \frac{T}{8\Delta_0} \right) e^{-\frac{\Delta_0}{T}}$$

Поведение щели при температурах, близких к температуре перехода T_c , удобнее всего определить, исходя из соотношения (34.36). Вблизи T_c величина щели мала, поэтому в (34.36) можно произвести разложение по степеням

$$\Delta^2/T^2 \frac{1}{\zeta} = T \sum_n \int_{-\omega}^\omega d\xi \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \xi^2} - \frac{\Delta^2}{(\omega^2 + \xi^2)^2} + \frac{\Delta^4}{(\omega^2 + \xi^2)^3} + \dots \right\}.$$

Меняя в сходящихся членах правой части порядок суммирования по частотам и интегрирования по ξ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta} = & \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} - \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} + \\ & + \frac{3}{4} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь ряды выражаются через ζ -функции Римана

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \frac{2^z - 1}{2^z} \zeta(z)$$

Подставляя это в предыдущие выражения, найдем:

$$\begin{aligned} \ln \frac{T}{T_c} = & - \frac{7\zeta(3)}{8} \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} + \\ & + \frac{93\zeta(5)}{128} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} + \dots \end{aligned}$$

В первом приближении для величины щели вблизи T_c получим:

$$\Delta = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \simeq 3,06 T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

На рис. 95 приведен график, изображающий зависимость щели от температуры во всем интервале температур.

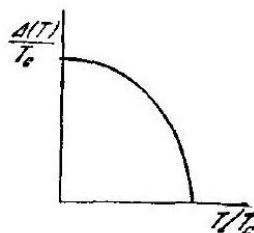


Рис. 95.

Термодинамика сверхпроводника

Для нахождения различных термодинамических величин воспользуемся выведенным ранее соотношением для производной от термодинамического потенциала по константе взаимодействия:

$$\frac{\delta Q}{\delta \lambda} = \frac{1}{\lambda} \langle H_{int} \rangle$$

В нашем случае H_{int} дается выражением (32.3). Оставляя в среднем члены, которые отличны от нуля только в сверхпроводящей фазе, получим, поскольку $\lambda < 0$,

$$\frac{\delta Q}{\delta |\lambda|} = -\frac{1}{\lambda^2} |\Delta|^2.$$

Связь между $\frac{1}{|\lambda|}$ и Δ при заданной температуре определяется соотношением (36.1). Поэтому разность между значениями потенциала Q для металла в сверхпроводящей и нормальной фазах равна

$$Q_s - \Omega_n = \int_0^\Delta \left(\frac{d \frac{1}{|\lambda T}}{d\Delta} \right) \Delta^2 d\Delta$$

Будучи выражена в соответствующих переменных, эта добавка, согласно общим положениям статистической физики, одна и та же для всех термодинамических потенциалов. Воспользовавшись соотношением (36.2), согласно которому

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{mp_0}{2\pi^2} \left\{ \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left(\frac{n\Delta}{T} \right) \right\},$$

и используя известную формулу из теории бесселевых функций $K'_0(x) = -K_1(x)$, получим:

$$F_s - F_n = - \left(\frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \left\{ \frac{\Delta^2}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{T^2}{n^2} \int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x)x^2 dx \right\}.$$

При низких температурах $\Delta/T \gg 1$. При этом

$$\int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x)x^2 dx = 2 - \int_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty} K_1(x)x^2 dx.$$

Последний интеграл нужно вычислить лишь для $n = 1$, воспользовавшись для этого асимптотическим разложением функции $K_1(x)$.

Остающийся ряд по n легко суммируется. В результате находим:

$$F_s - F_n = \frac{mp_0 T^2}{6} - \frac{mp_0}{2\pi^2} \left[\frac{\Delta^2}{2} + \sqrt{2\pi\Delta_0^3 T^2} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta_0} \right) e^{-\Delta_0/T} \right].$$

Первый член в правой части равен с обратным знаком основному члену в разложении свободной энергии нормального металла по степеням T . Как известно, этот член приводит к линейному закону для электронной части теплоемкости в нормально фазе:

$$C_n = \frac{mp_0 T}{3}$$

Подставляя (36.3), находим что энтропия в сверхпроводящей фазе при низких температурах равна

$$S_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}$$

а теплоемкость равна

$$C_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

Используя (34.23), получаем отсюда для отношения теплоемкостей сверхпроводящей фазы в области $T \ll T_c$ и нормальной фазы при $T = T_c$:

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = \frac{3}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\Delta_0}{T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\Delta_0}{T} \right).$$

С целью получения асимптотических формул в области температур вблизи T_c будем исходить из разложения (36.4)

$$\delta \frac{1}{|\lambda|} = - \left(\frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{(2\pi T)^2} \Delta \delta \Delta.$$

Для величины разности свободных энергий с помощью (36.6) находим:

$$F_s - F_n = - \left(\frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{16(\pi T)^2} \Delta^4 = \\ = - \frac{2mp_0 T_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2.$$

Отсюда энтропия в сверхпроводящей фазе равна

$$S_s = - \frac{4mp_0 T_c}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) + S_n.$$

Дифференцируя второй раз и оставляя главные члены, получаем следующее выражение для теплоемкости сверхпроводника в точке перехода:

$$C_s(T_c) = C_n(T_c) + \frac{4mp_0}{7\zeta(3)} T_c$$

Таким образом, теплоемкость металла в точке фазового перехода в сверхпроводящее состояние испытывает скачок, равный $\frac{4mp_0 T_c}{7\zeta(3)}$. Учитывая члены более высокого порядка по $T_c - T$ в разложении (36.9), найдем отношение теплоемкости $C_s^c(T)$ к теплоемкости в нормальной фазе $C_n(T_c)$ вблизи T_c :

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = 2,43 + 3,77 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right).$$

то поведение электронной части теплоемкости металла вблизи T_c изображено на рис. 96.

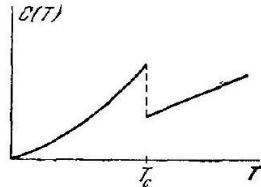


Рис. 96.

Важной термодинамической величиной в теории сверхпроводимости является так называемое критическое магнитное поле H_c . При заданной температуре $T < T_c$ металл в магнитном поле может находиться как в сверхпроводящем, так и в нормальном состояниях.

Если сверхпроводник помещен в магнитное поле, то экранирующие это поле поверхностные токи создают магнитный момент, который взаимодействует с внешним полем. Добавочная энергия, возникающая от этого взаимодействия, есть $-\frac{HM}{2}$ (на единицу объема). Рассмотрим сверхпроводящий цилиндр, помещенный в поле, параллельное оси цилиндра. Вычисляя величину поверхностного тока из условия, чтобы магнитное поле равнялось нулю в толще сверхпроводника, и определяя создаваемый этими токами магнитный момент, найдем, что дополнительная магнитная энергия есть $\frac{H^2}{8\pi}$, т. е. свободная энергия сверхпроводника в магнитном поле есть $F_{sH} = F_s + \frac{H^2}{8\pi}$. Поэтому с увеличением магнитного поля при заданной температуре происходит переход из сверхпроводящей фазы в нормальную: этот переход есть переход первого рода. Значение критического поля равно

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = F_n - F_s$$

Ограничимся опять только предельными случаями. Для случая низких температур ($T \ll T_c$) из (36.3) и (36.7), пренебрегая экспоненциально малыми членами, получаем:

$$H_c(0) = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}} \Delta_0 = T_c \frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}}$$

и

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{\gamma^2}{3} \frac{T^2}{T_c^2} \right)$$

Воспользовавшись формулой (36.9) и выражая $H_c(T)$ вблизи точки перехода через $H_c(0)$ с помощью (36.10), находим температурную зависимость $H_c(T)$ в области температур вблизи T_c :

$$H_c(T) = H_c(0) \gamma \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \simeq 1,73 H_c(0) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

Заметим, что экспериментальные данные обычно соответствуют зависимости

$$H_c(T) = H_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right).$$

В обоих предельных случаях теоретические формулы (36.11) и (36.12) и экспериментальная зависимость (36.13) довольно хорошо совпадают (см. [56], [61]).

10.8.6 Сверхпроводник в слабом электромагнитном поле

(вот это пока не особо интересует, есть очень многое тем важнее!)

Постоянное слабое магнитное поле.

Обратимся к вопросу об электромагнитных свойствах сверхпроводников. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением поведения сверхпроводников в достаточно слабых полях, величины которых малы по сравнению с величиной критического магнитного поля. Предположим, что сверхпроводник с плоской поверхностью занимает, как это изображено на рис. 97, полупространство $z < 0$ и помещен в постоянное магнитное поле, направленное параллельно его поверхности.

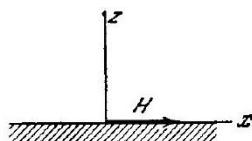


Рис. 97.

Введем векторный потенциал \mathbf{A}

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

В пустоте $\mathbf{H} = \text{const}$ и векторный потенциал можно взять, например, в виде

$$A_y = -Hz, \quad A_x = A_z = 0.$$

Под действием магнитного поля в сверхпроводнике возникает ток; распределение поля в сверхпроводнике подчиняется уравнению Максвелла:

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi j$$

Поскольку плотность тока в свою очередь обязана наличию поля, то в линейном по полю приближении его величина пропорциональна величине A . Из соображений однородности в бесконечном сверхпроводнике связь плотности тока с полем должна иметь в общем случае вид

$$j(x) = - \int Q(x-y) A(y) d^4y$$

или В компонентах Фурье

$$j(k) = -Q(k)A(k).$$

Мы не будем в дальнейшем подробно останавливаться на решении самой электромагнитной задачи для полупространства, определяемой уравнениями (37.2) и (37.3), а ограничимся выводом выражения для ядра $Q(x-y)$, имея в виду продемонстрировать применение методов квантовой теории поля к этому случаю.

Величина плотности тока j в данной точке есть, как обычно, термодинамическое среднее от известного квантовомеханического выражения для оператора тока $\hat{j}(x)$ во вторичном квантовании:

$$j(x) = \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \rightarrow r} \tilde{\psi}(x') \tilde{\psi}(x) - \frac{e^2 A(x)}{m} \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}(x).$$

Поэтому плотность тока $j(x)$ непосредственным образом может быть записана через гриновскую функцию системы $j(x) = 2 \left\{ \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r) \left(S(x, x') - \frac{e^2 A(x)}{m} (\delta)(x, x') \right) \right\}_{r' \rightarrow r, \tau' = \tau + 0^\circ}$ (37.5)

Приступим к отысканию гриновской функции, точнее, добавки к гриновской функции, первого порядка по величине поля. В постоянном магнитном поле все функции Грина (S) и \mathfrak{F} , \mathfrak{F}^+ зависят только от разности «временных» координат $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Перейдем к компонентам Фурье (5 ω_ω и \mathcal{U}_ω). Система уравнений для этих величин в постоянном магнитном поле выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ieA(r) \right)^2 + \mu \right\} (\xi_\omega(r, \mathbf{r}')) + \\ & + \Delta(\mathbf{r}) \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ & \left\{ -i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + ieA(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\ & - \Delta^*(\mathbf{r}) (\mathfrak{s}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = 0. \end{aligned}$$

Напишем функции Грина (\mathcal{S} и \mathfrak{F}^+ в виде

$$(\mathfrak{G} = (\mathfrak{S}_0 + (\mathfrak{S}^{(1)}; \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}^{(1)}; \quad \mathfrak{F}^+ = \mathfrak{F}_0^+ + \mathfrak{F}^{+(1)},$$

где \mathfrak{S}_0 , \mathfrak{F}_0 , \mathfrak{F}_0^+ суть функции Грина в отсутствие поля, а $(\mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{+(1)})$ – добавки, линейные по величине поля. Линеаризуя уравнение (37.6), получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \left(\oint_{\omega}^{(1)} (r, r') + \Delta_0 \mathfrak{U}_{\omega}^{+(1)} (r, r') = \right. \\ & = -\Delta^{(1)}(\mathbf{r}) \mathfrak{F}_{0\omega}^{+} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{ie}{2m} (\nabla A + A \nabla) \mathfrak{S}_{0\omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ & \left. \left\{ -i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathfrak{U}_{\omega}^{+(1)} (r, r') - \Delta_0 (\xi_{\omega}^{(1)} (r, r') = \right. \\ & = \Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) \mathcal{S}_{0\omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{ie}{2m} (\nabla A + A \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^{+} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Из этих уравнений очень легко выразить $\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

и $\mathfrak{Q}_{\omega}^{+(1)} (r, r')$ через величины, стоящие в правой части (37.7). Для этого удобно воспользоваться выражением (34.32) оператора, обратного оператору левой части уравнения (37.7). Однако прежде чем написать соответствующий результат для $(\mathbf{S}_{\omega}^{(1)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$, рассмотрим более подробно структуру уравнений (37.7).

Система (37.6), а следовательно, и (37.7) градиентноинвариантны, т. е. инвариантны относительно преобразований (34.26) и (34.27). Поэтому при вычислении тока $j(\mathbf{r})$, в линеном приближении равного

$$j(\mathbf{r}) = \frac{le}{m} T \sum_{\omega} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}})_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \left(\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{e^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) N}{m} \right),$$

окончательный результат может зависеть только от поперечной части вектор-потенциала \mathbf{A} . Иными словами, добавление к A градиента произвольного скаляра $\therefore A \rightarrow A + \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ не может изменить величины тока $j(\mathbf{r})$.

Что же касается $(\xi_{\omega}^{(1)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathfrak{F}_{\omega}^{+(1)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$, то они, согласно (34.27), отнюдь не инвариантны относительно такого изменения вектор-потенциала. То же самое относится и к величинам $\Delta^{(1)}(\mathbf{r}), \Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$, фигурирующим в правой части (37.7) и которые сами должны определяться из интегрального уравнения:

$$\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_{\omega} \tilde{\mathfrak{U}}_{\omega}^{+(1)} (\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

При произвольном $A(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r})$ есть, вообще говоря, некоторая неизвестная функция потенциала A . Можно тем не менее утверждать, что в линейном по полю приближении в силу однородности задачи функция $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$, будучи скаляром, зависит только от величины $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Благодаря этому обстоятельству, если выбрать калибровку вектор-потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ так, чтобы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

то оказывается возможным существенно упростить задачу, поскольку при таком выборе $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ функция $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$ тождественно обращается в нуль. Получаемый ниже результат относится только к чисто «поперечному» вектор-потенциалу $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Изложенный прием с обращением $\Delta^{*(1)}, \Delta^{(1)}$ в нуль удается сообщить так, чтобы им можно было пользоваться в задачах, не обладающих пространственной однородностью в отсутствие поля (скажем, сверхпроводник конечных размеров в магнитном поле). В этих случаях образовать скаляр можно из поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и вектора \mathbf{r} или какого-либо другого вектора, характеризующего задачу: Поэтому в общем случае неоднородной задачи в уравнениях (37.7) (теперь в этих уравнениях под \mathfrak{S}_0 и \mathfrak{F}_0 следует подразумевать гривовские функции рассматриваемого тела с соответствующими граничными условиями) $\Delta^{(1)}(\mathbf{r}), \Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$

зависят как от продольной, так и поперечной составляющих вектора $A(\mathbf{r})$. Всегда можно, однако, так выбрать продольную часть $A_{\text{прод}} = \text{grad } \varphi$, чтобы $\Delta^{(1)}, \Delta^{*(1)}$ обратились в нуль. Что же касается функции φ , для которой это условие выполняется, то она может быть найдена из условия $\text{div } j = 0$, т. е. из условия сохранения заряда.

Вернемся теперь снова к уравнениям (37.7) для бесконечного сверхпроводника. Полагая $\Delta^{(1)}(\mathbf{r}) = 0$ и пользуясь (34.32), получим для линейной по полю добавки $\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ к функции Грина следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ie}{m} \int \{ \mathfrak{F}_{0\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{l}) \mathbf{A}(\mathbf{l}) \nabla \} (\mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}') + \right. \\ \left. + \mathfrak{F}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r})(\mathbf{A}(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - \mathbf{l}) \} d\mathbf{l}. \right) \end{aligned}$$

В этой формуле мы уже воспользовались условием $\text{div } A = 0$, вследствие чего можно считать, что дифференцирование в скобке $(A(l) \nabla)$ относится только к функциям $\mathfrak{G}_{0\omega}(l - r')$ и $\mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - \downarrow)$. Плотность тока $j(\mathbf{r})$, согласно (37.8), равна $j(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{m^2} T \sum_{\omega} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \int \{ (\xi_{0\omega}(\mathbf{r} - l)(4(l) + \mathfrak{F}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r})(\mathbf{A}(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - l)) \}_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} dl - \frac{Ne^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Удобно перейти здесь к фурье-представлению, введя обычным образом компоненты фурье для плотности тока $j(r)$ и потенциала $\mathbf{A}(r)$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int j(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

Уравнение для связи компонент $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} j(k) = -\frac{2e^2 T}{(2\pi)^3 m^2} \sum_{\omega} \int \mathbf{p}(\mathbf{p} A(k)) \{ (\mathfrak{F}_{\omega}(p_+) \mathfrak{B}_{\omega}(p_-) + \\ + \mathfrak{F}_{\omega}(p_+) \mathcal{U}_{\omega}^+(p_-)) \} d\mathbf{p} - \frac{Ne^2}{m} A(k) \end{aligned}$$

где $p_{\pm} = p \pm \frac{k}{2}$. Подчеркнем еще раз, что наш результат относится только к чисто поперечной калибровке векторного потенциала. (Можно, однако, показать, что при произвольной калибровке полученные формулы остаются в силе, т. е. продольная часть выпадает из конечного результата.) Поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и ток $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в сверхпроводнике меняются на расстояниях порядка глубины проникновения δ , имеющей обычно порядок $\sim 10^{-5}$ (т. е. на расстояниях, гораздо больших атомных расстояний). Поэтому в (37.11) существенны только компоненты $\mathbf{j}(\mathbf{k})$ и $A(\mathbf{k})$ в области величин $k \sim \frac{1}{\delta} \ll p_0$. Мы увидим ниже, что интегрирование в ядре (37.11) происходит в основном вблизи поверхности Ферми по узкой области значений $|\mathbf{p}|$ порядка $|p| - p_0 \sim |k|$. Далее, в (37.11) фигурируют только два вектора \mathbf{k} и $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, причем $(\mathbf{k} \mathbf{A}) = 0$. Выбирая вектор \mathbf{k} в качестве полярной оси координат для переменной интегрирования \mathbf{p} и производя усреднение по углам в азимутальной плоскости, сразу же находим, что вектор $j(k)$ направлен вдоль вектора $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. На основании вышеизложенного, подставляя для функций (5) и \mathfrak{F} их выражения (34.35), получим:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -\frac{Ne^2}{m} \bar{Q}(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k})$$

где

$$\bar{Q}(\mathbf{k}) = 1 + \frac{3T}{4} \sum_{\omega} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{(i\omega + \xi_+)(i\omega + \xi_-) + \Delta^2}{[\omega^2 + \xi_+^2 + \Delta^2][\omega^2 + \xi_-^2 + \Delta^2]}$$

(мы воспользовались тем, что $\frac{p_0^3}{3\pi^2} = N$). При малых \mathbf{k} $\xi_{\pm} = \xi \pm \frac{(vk)}{2}$ Для дальнейших вычислений надо иметь в виду, что подынтегральное выражение в правой части (37.12) при больших ω и ξ ведет себя, как ω^{-2} при $\omega \gg \xi$ и как ξ^{-2} при $\xi \gg \omega$. Поэтому, строго говоря, интеграл по ξ и сумма по частотам ω расходятся. Чтобы понять, в чем дело, рассмотрим особенности такого выражения для нормального металла (т. е. при $\Delta = 0$)

$$\frac{3}{4}T \sum_{\omega} \int d\xi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \frac{1}{(i\omega - \xi_+) (i\omega - \xi_-)}.$$

Отметим, прежде всего, что в этом интеграле чрезвычайно существен порядок, в котором производится суммирование по частотам и интегрирование по ξ . В самом деле, при интегрировании сначала по полюсы подынтегрального выражения при любом знаке ω лежат по одну сторону от вещественной оси, вследствие чего результат оказывается равным нулю. Просуммируем теперь в первую очередь по частотам $\omega = (2n+1)\pi T$. Легко проверить, что в результате суммирования этого простого ряда возникает следующее выражение:

$$\frac{3}{8} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int^2 \frac{d\xi}{(vk)} \left[\operatorname{th} \frac{\xi}{2T} - \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} \right] = -1. \quad (37.14)$$

Причина такой неоднозначности от изменения порядка интегрирования и суммирования кроется в формальной расходимости всего выражения. Как видно, однако, суть дела состоит в том, что при суммировании в первую очередь по частотам оказывается, что результат суммирования отличен от нуля только в очень узкой области энергий вблизи поверхности

Ферми (эта область, как следует из (37.14), имеет ширину $\sim (v)$).

В этой области интеграл по импульсам оказывается быстро сходящимся, и только поэтому выражение для энергии возбуждений, отсчитываемой от поверхности Ферми, можно приближенно написать в виде $\xi = \frac{p^2 - p_0^2}{2m} \simeq v(|\mathbf{p}| - p_0)$. По этой причине в интегралах рассматриваемого - типа всегда надо сначала суммировать по частотам, а уже потом интегрировать по ξ , поскольку в противном случае интегрирование по ξ захватывает область $||\mathbf{p}| - p_0| \sim p_0$, где проведенное нами разложение всех величин около поверхности Ферми становится непригодным.

Можно, однако, избежать необходимости производить довольно сложное суммирование по частотам в (37.12). Для этого поступим следующим образом. В подынтегральном выражении (37.12) прибавим и вычтем соответствующее выражение (37.13) для нормального металла. Тогда интеграл и сумма по частотам от разности подынтегральных выражений быстро сходятся, благодаря чему в этом члене можно менять порядок суммирования и интегрирования. Соответствующее выражение для нормального металла было вычислено в (37.14),

оно сокращает единицу в (37.12). Интегрируя по ξ , получим:

$$\bar{Q}(k) = \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \mu^2) d\mu}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \cdot \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2 + \frac{1}{4}v^2 |k|^2 \mu^2}.$$

Дальнейшее преобразование этого ядра затруднительно, если не сделать тех или иных предположений о величине $|k|$. Из структуры подынтегрального выражения видно, что играет роль только соотношение между величиной $v|k|$ и температурой перехода T_c . В самом деле, при $T \ll T_c$ щель Δ_0 имеет порядок T_c ; вблизи T_c , т. е. при $|T - T_c| \ll T_c$, величина щели мала, но зато $\omega = (2n+1)\pi T \sim T_c$. Величина размерности длины $\xi_0 \sim \frac{v}{T_c}$ играет роль характерного параметра современной теории сверхпроводимости, это есть радиус корреляции связанных электронов. Глубина проникновения δ может быть как больше, так и меньше ξ_0 . В первом случае существенные $|k| \sim \frac{1}{\delta}$ удовлетворяют неравенству $v|k| \ll T_c$, тогда как второй случай описывается обратным неравенством $v|k| \gg T_c$.

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть $v|\mathbf{k}| \ll T_c$. В выражении (37.15) оставим только первый неисчезающий член разложения по $v|\mathbf{k}|$:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}) = \frac{3\pi}{4}\Delta^2 T \sum_{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \mu^2) d\mu}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \pi T \Delta^2 \sum_{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, при $\delta \gg \xi_0$ ядро $\bar{Q}(\mathbf{k})$ не зависит от \mathbf{k} и связь тока с полем носит локальный характер в том смысле, что значение тока в данной точке \mathbf{r} определяется только полем $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в этой же точке:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2 N_s}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Уравнение такого вида было впервые предложено Г. Лондоном и Ф. Лондоном [62]. Поэтому случай сверхпроводника, в котором $\delta \gg \xi_0$, естественно назвать лондоновским. Функция $N_s(T)$ играет роль числа «сверхпроводящих» электронов. Формула (37.16) выражает отношение $\frac{N_s(T)}{N}$ как функцию от температуры. Подчеркнем, что фигурирующая здесь щель Δ есть равновесная щель в отсутствие поля при данной температуре, определяемая из условия (34.37). При $T = 0$ суммирование по частотам можно заменить на интегрирование: $2\pi T \delta n = d\omega$. Вычисляя интеграл, мы получим, что при $T = 0$ число сверхпроводящих электронов равно полному их числу N .

Вблизи T_c величина $\Delta(T)$ мала по сравнению с T_c и ω . Пренебрегая в знаменателе Δ^2 , получаем ряд

$$\frac{N_s(T)}{N} = \frac{2\Delta^2}{\pi^2 T^2} \sum_{n>0} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

который уже вычислялся нами в 36. Используя выражение (36.6) для величины щели вблизи T_c , находим, что в рассматриваемом случае

$$\frac{N_s(T)}{N} = 2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right).$$

Рассмотрим теперь второй предельный случай $v|\mathbf{k}| \gg T_c$. Подынтегральное выражение имеет полюсы в точках $\frac{v|\mathbf{k}|\mu}{2} = \pm i\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$. Поскольку $v|\mathbf{k}|$ велико, это означает, что подынтегральное выражение имеет резкий максимум в области углов $\mu \simeq \frac{T_c}{v|\mathbf{k}|} \ll 1$. Поэтому членом с μ^2 в числителе можно пренебречь по сравнению с единице. Остающееся выражение представляет собой быстро сходящийся интеграл по μ , причем выражение, стоящее под знаком интеграла, убывает как $1/\mu^2$ в области $\frac{T_c}{v|\mathbf{k}|} \ll \mu \ll 1$. Сделав замену $v|\mathbf{k}|\mu = x$ и полагая пределы интегрирования равными бесконечности, вычислим интеграл с помощью теории вычетов:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}) = \frac{3T\pi^2}{v|\mathbf{k}|} \sum_{\omega>0} \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2} = \frac{3\pi^2}{4v|\mathbf{k}|} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}.$$

Мы видим, что ядро $\bar{Q}(\mathbf{k})$ в этом случае существенно зависит от \mathbf{k} . Поэтому если глубина проникновения поля $\delta \ll \xi_0$, то соотношение (37.3) является нелокальным, иными словами, значение плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ в данной точке определяется значениями векторного потенциала в целой окрестности этой точки с линейными размерами порядка ξ_0 . Нелокальная связь поля с током для некоторых сверхпроводников была впервые предсказана на основе анализа экспериментальных данных Пиппардом [63]. Ниже всюду соответствующий случай, когда $\delta \ll \xi_0$, мы будем называть пиппардовским.

Отметим сразу же следующее важное обстоятельство. Как об этом уже говорилось, для решения вопроса о том, какой случай в действительности имеет место, существенно только соотношение между глубиной проникновения δ и параметром $\varepsilon_0 \sim \frac{v}{T_c}$. Поэтому если при достаточно низких температурах выполняется условие $\delta \ll \xi_0$, то ввиду увеличения δ по мере приближения к T_c при температурах, достаточно близких к T_c , возникает обратная ситуация, т. е. δ станет гораздо больше ε_0 . Иными словами, в самой непосредственной окрестности температур вблизи T_c всегда имеет место лондоновский случай. Значительная часть известных сверхпроводников принадлежит к пиппардовскому типу почти во всей области температур и переходит в лондоновский только в очень узкой окрестности T_c – $T \ll T_c$. Остальные чистые сверхпроводники представляют при низких температурах промежуточный случай и потому имеют довольно заметную лондоновскую область температур вблизи T_c . Мы не касаемся сейчас вопроса о сплавах (см. 39).

Имея в своем распоряжении выражение для ядра $\bar{Q}(\mathbf{k})$ (37.15), можно с помощью уравнений Максвелла решить задачу о проникновении поля в сверхпроводник с плоской поверхностью. В лондоновском случае эта задача решается особенно просто: подставляя (37.17) в (37.2) и считая, что все величины суть функции только от координаты z , находим, что распределение векторного потенциала в сверхпроводнике описывается выражением

$$A_y(z) = -H_0 \delta e^{\frac{z}{\delta}}$$

где δ – лондоновская глубина проникновения

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}} \left(\text{в обычных единицах } \delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi N_s e^2}} \right).$$

Решение аналогичной задачи в пиппардовском случае гораздо сложнее и требует привлечения специальных математических методов. Мы не будем на этом останавливаться, отсылая читателя, который интересуется непосредственно самой теорией сверхпроводимости и ее выводами, к оригинальной литературе (см. [56], а также [61]).

2. Сверхпроводник в переменном поле. До сих пор мы ограничивались рассмотрением свойств сверхпроводника в постоянном магнитном поле. Большой физический интерес, однако, имеет также вопрос о поведении сверхпроводника в переменном электромагнитном поле, или, говоря конкретнее, вопрос о специфике поглощения и отражения электромагнитного излучения, падающего на поверхность сверхпроводника. Термодинамический, равновесный подход к вопросу, на котором основывалось предыдущее изложение, в случае переменного поля непосредственно неприменим. В этих условиях оказываются чрезвычайно полезными аналитические соотношения, выведенные нами в гл. III, связывающие различные временные функции с соответствующими функциями, определенными в термодинамической технике. Предположим, что переменное поле \mathbf{A} (как и выше, будем считать, что $\varphi = 0$) с частотой ω существует внутри бесконечного сверхпроводника. Возникающий под влиянием поля ток в сверхпроводнике, очевидно, по-прежнему связан с полем соотношением вида (37.3). Разница состоит в том, что в случае переменного поля необходимо знать компоненту Фурье $Q(k, \omega)$ с отличной от нуля ω . [Ядро $\bar{Q}(k)$, которое мы определяли выше, есть, очевидно, $\bar{Q}(\mathbf{k}) \equiv Q(\mathbf{k}, 0)$.] Будем опять исходить из квантовомеханического выражения для оператора тока:

$$\begin{aligned} \hat{j}(x) &= \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \rightarrow r} \tilde{\psi}^+(x') \tilde{\psi}(x) - \frac{e^2}{m} A(x) \tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x) \equiv \\ &\equiv \hat{j}(x) - \frac{e^2}{m} A(x) \tilde{\psi}^+(x) \psi(x), \end{aligned}$$

где операторы написаны в гайзенберговском представлении и содержат зависимость от поля. Связь с соответствующими операторами в представлении взаимодействия, согласно (6.28). дается соотношением

$$\hat{\tilde{j}} = S^{-1}(t)jS(t)$$

где

$$S(t) = T \exp \left\{ i \int_{-\infty}^t (j(x)A(x))d^4x \right\}$$

В линейном по полю приближении

$$\hat{\tilde{j}}_\alpha(x) = \hat{\mathbf{J}}_{1\alpha}(x) - \frac{e^2}{m} A_\alpha(x) \psi^+(x) \psi(x) +$$

$$+ i \int_{-\infty}^t [\hat{\mathbf{j}}_{1\alpha}(x), \hat{\mathbf{j}}_{1\beta}(y)] A_\beta(y) d^4y.$$

Значение тока в сверхпроводнике в данной точке и в данный момент времени есть среднее

$$j(x) = \langle \hat{\tilde{j}}(x) \rangle = \sum_m e^{\frac{2+\cdots N_m - E_m}{T}} \langle m | \hat{\tilde{j}}(x) | m \rangle.$$

Поскольку $\langle \hat{j}_1 \rangle \equiv 0$,

$$j_\alpha(x) = -\frac{e^2 N}{m} A_\alpha(x) + \int P_{\alpha,3}^R(x-y) A_\beta(y) d^4y,$$

где мы ввели обозначение

$$P_{\alpha,\beta}^R(x-y) = \begin{cases} i \langle [\hat{j}_\alpha(x), \hat{j}_\beta(y)] \rangle & \text{при } t_x > t_y, \\ 0 & \text{при } t_x < t_y. \end{cases}$$

При переходе к компонентам Фурье ядро интегрального соотношения (37.3) имеет вид

$$Q_{\alpha,\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^2 N}{m} \delta_{\alpha,3} - P_{\alpha,3}^R(\mathbf{k}, \omega).$$

Рассмотрим теперь ту же задачу в технике при конечных температурах, считая формально поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \tau)$ и $j(\mathbf{r}, \tau)$

функциями «временного» параметра τ . При этом вместо

(37.20) возникает следующее соотношение:

$$j_\alpha(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{e^2 N}{m} A_\alpha(\mathbf{r}, \tau) + \int d\mathbf{r} \int_0^{e_0} \mathcal{P}_{\alpha a}(x-y) A_\beta(y) d\tau_y,$$

где

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau') = \langle T (\hat{j}_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \tau), \hat{j}_{1\beta}(\mathbf{r}', \tau')) \rangle. \quad (37.22)$$

Вводя компоненты Фурье термодинамических величин, найдем, что роль ядра $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_0)$ играет следующее выражение:

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{e^2 N}{m} \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_0),$$

где частоты ω_0 пробегают дискретные значения $\omega_0 = 2n\pi T$. Мы покажем сейчас в общем виде, что компоненты Фурье $P_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_0)$ суть значения одной и той же функции комплексного переменного ω , аналитической в верхней полуплоскости, взятые в первом случае на вещественной оси, а во втором - в точках $\omega = t\omega_0$. Доказательство проводится совершенно так же, как это уже делалось в предыдущих главах. Разложим (37.21) и (37.22) в суммы по промежуточным состояниям. Тогда для компоненты фурье, определенной соответствующим образом в случае $P_{\alpha\beta}^R$ и $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, находим:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\xi}^R(\mathbf{k}, \omega) &= - \sum_{m,p} \rho_{pm}(\mathbf{k}) \frac{1}{\omega - \omega_{pm} + i\delta}. \\ \mathcal{P}_{\alpha^3}(\mathbf{k}, \omega_0) &= - \sum_{m,p} p_{pm}(\mathbf{k}) \frac{1}{i\omega_0 - \omega_{pm}}. \end{aligned}$$

где

$$\rho_{pm}(\mathbf{k}) = e^{\frac{\omega + \mu N_m - E_m}{T}} \left(1 - e^{-\frac{\omega_{pm}}{T}}\right) (j_{\alpha 1})_{mp} (j_{\beta 1})_{pm} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{pm}).$$

Из (37.23) видно, что $P_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega)$ получается из $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega_0)$ заменой ω_0 на $-\omega$, причем на вещественной оси значения $P_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega)$ должны выбираться как предел при стремлении ω сверху.

Таким образом, вычисляя в технике Мацубары $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0)$ и аналитически продолжив ее на вещественные частоты $P_{\alpha\beta}^R(k, \omega) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, -i\omega)$ так, чтобы возникающая функция не имела особенностей в верхней полуплоскости ω , принципиально можно найти ядро $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, определяющее связь j с \mathbf{A} в переменном электромагнитном поле.

Имея в виду эту цель, рассмотрим формально уравнения для термодинамических функций (s) и \mathfrak{F}^+ в переменном по полю виде $A(\mathbf{r}, \tau) = A(\mathbf{k}, \omega_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_0\tau}$. Вместо (37.11) выражение для компоненты Фурье тока $j(k, \omega_0)$ примет теперь вид $j(\mathbf{k}, \omega_0) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3 m^2} T \sum_{\omega} \int \mathbf{p} (\mathbf{p} A(k, \omega_0) + \mathfrak{F}(p_+) \mathfrak{F}^+(p_-)) dp$

$$+ \mathfrak{F}(p_+) \mathfrak{F}^+(p_-)] dp - \frac{Ne^2}{m} A(k, \omega_0)$$

(здесь $p_{\pm} = \{p \pm \frac{k}{2}; \omega' \pm \frac{\omega_0}{2}\}$). Повторяя весь ход рассуждений, которые в случае постоянного поля привели нас к выражению (37.15), получим после интегрирования по:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega'} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu \times$$

$$\begin{aligned} &x \left\{ \frac{i \left(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} \right) \left[i \left(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2} \right) - v|k|\mu \right] + \Delta^2}{\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} \left[\omega_-^2 + \Delta^2 + \left(v|k|\mu - i\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} \right)^2 \right]} + \right. \\ &\left. + \frac{i(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2}) [i(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2}) + v|k|\mu] + \Delta^2}{\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2} [\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|k|\mu + i\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})^2]} \right\}. \end{aligned}$$

Как и выше, для дальнейшего упрощения этого выражения следует сделать некоторые допущения о величине $v|k|$. Мы ограничимся ниже практически наиболее интересным случаем, когда $v|k| \gg (T_c, \omega_0)$. В этом случае по-прежнему основной вклад в выражение для $\bar{Q}(k, \omega_0)$ вносит область углов, где $\mu \sim \frac{T_c}{v|k|}, \frac{\omega'}{v|k|}$, и потому в числителе под интегралом можно пренебречь μ^2 по сравнению с единицей. Остающееся выражение в фигурных

скобках убывает при $\mu \gg \frac{T_c}{v|\mathbf{k}|}, \frac{\omega'}{v|\mathbf{k}|}$ несколько медленнее по сравнению со случаем $T = 0$, а именно, как $1/\mu$. Поэтому целесообразно сделать в (37.24) перегруппировку членов, выделив эти, более медленно убывающие члены: $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega'} \int_{-1}^1 d\mu \left\{ \frac{\Delta^2 - (\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})}{\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} [\omega_-^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu - i\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})^2]} + \right. \\
 &\quad + \frac{\Delta^2 - (\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})}{\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2} [\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu + i\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})^2]} - \\
 &\quad - i \frac{\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} [v|\mathbf{k}|\mu - i(\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})]} + \\
 &\quad \left. + i \frac{\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2} [v|\mathbf{k}|\mu + i(\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})]} \right\}.
 \end{aligned}$$

Выполняя интегрирований и переходя к пределу $v|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$, получим:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi^2 T}{4v|\mathbf{k}|} \sum_{\omega'} \left[1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{\sqrt{\omega'^2 + \Delta^2} \sqrt{(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2}} \right]. \quad (37.25)$$

При $\omega_0 = 0$ этот результат переходит в (37.18).

Поскольку при суммировании в (37.25) ω пробегает значения $\omega = (2n+1)\pi T$, $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0)$ можно представить в виде контурного интеграла:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi i}{16v|\mathbf{k}|} \left| \int_C \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T} \left\{ 1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{\sqrt{\omega'^2 + \Delta^2} \sqrt{(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2}} \right\} d\omega \right|, \quad (37.26)$$

где контур C состоит из двух частей C_+ и C_- , приведенных на рис. 98. Выбор аналитических ветвей функций $\sqrt{\omega'^2 + \Delta^2}$ и $\sqrt{(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2}$ понятен из этого же рисунка: на разрезах значения этих функций чисто мнимые, причем на правой стороне верхнего разреза и на левой - нижнего мнимая часть положительна. Переходим от интегрирования по контурам C_+ и C_- к интегрированию по четырем контурам $C_+^{(1,2)}$ и $C_-^{(1,2)}$ (рис. 99). Легко видеть, что интегралы по $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(2)}$, рассматриваемые формально как функция ω_0 , имеют особенности при $\omega_0 = (2n+1)\pi T$, поскольку в данном случае контур интегрирования проходит через точку $\omega' = (2n+1)\pi T$, где $\operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T}$ обращается в бесконечность. Поэтому, чтобы определить ветвь функции, аналитической в верхней полуплоскости переменной $\omega = i\omega_0$, надо так преобразовать выражение (37.26) при частных значениях $\omega = 2n\pi Ti$, чтобы в дальнейшем при распространении этого выражения на произвольные значения ω контур интегрирования не проходил через точку $\omega = 2n\pi Ti$.

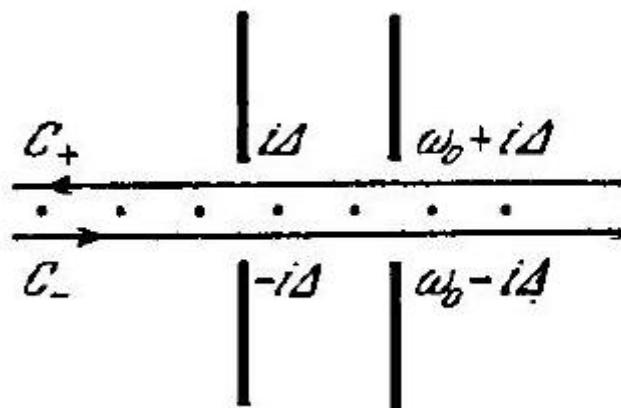


Рис. 98. Интегрирования не проходил через особенности подынтегрального выражения. Для этого заметим, что если $\omega_0 = 2n\pi T$, то в силу периодичности $\operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T}$ интеграл по контуру $C_-^{(2)}$ равен интегралу по контуру $C_+^{(1)}$ (и то же самое для контуров $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(1)}$). В справедливости сказанного

для контуров $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(1)}$.
Справедливости сказанного

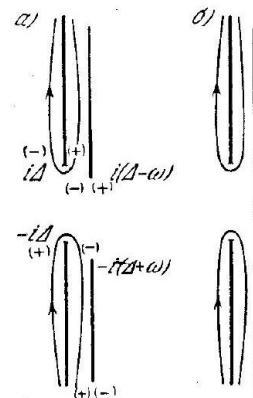
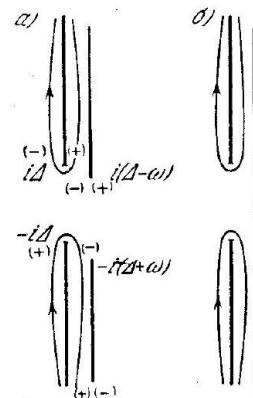
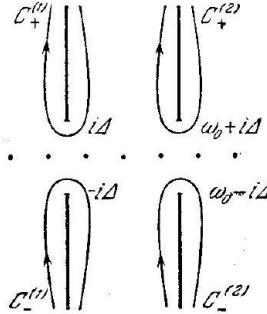
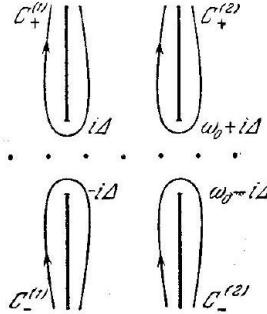


Рис. 99.

Рис. 100.

легко убедиться, заменяя, скажем, в интеграле по контуру $C_-^{(2)}$ переменную интегрирования $\omega' - \omega_0 = -u$. Поэтому (37.26) можно написать в виде

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) =$$

$$= \frac{3\pi i}{8v|\mathbf{k}|} \left(\int_{C_-^{(1)}} + \int_{C_t^{(1)}} \right) \left\{ \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T} \left[1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2}} \right] \right\} d\omega$$

формально как функция переменной $\omega = i\omega_0$, представляет собой аналитическую в верхней полуплоскости ω функцию, поскольку в данном случае контур интегрирования при $\operatorname{Im} \omega > 0$ никогда не пересекает никаких особенностей подынтегрального выражения.

Интересующая нас величина $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega)$ при $\omega > 0$ может теперь быть непосредственно написана. При этом возникают два случая: а) $\omega < 2\Delta$ и б) $\omega > 2\Delta$. Вычисление в обоих случаях производится элементарно в соответствии с рис. 100, на котором в скобках указан выбор знака мнимой части функций на различных берегах разрезов. Приведем получающийся результат [64, 65]: а) $\omega < 2\Delta$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{3\pi}{4v|\mathbf{k}|} \int_{\Delta}^{\Delta+\omega} \int_{\Delta}^{\omega} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{\Delta^2 - (\omega' - \omega)^2}} d\omega' + \\ & - 1 \int_{a^a}^{\infty} \left[\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} - \operatorname{th} \frac{\omega' + \omega}{2T} \right] \frac{\omega'(\omega' + \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' + \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' \end{aligned}$$

б) $\omega > 2\Delta$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{3\pi}{4v|\mathbf{k}|} \left\{ \int_{\omega - \Delta}^{\omega + \Delta} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{\Delta^2 - (\omega' - \omega)^2}} d\omega' + \right. \\ & + i \int_{\Delta}^{\omega - \Delta} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' - \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' + \\ & \left. + i \int_{\Delta}^{\infty} \left[\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} - \operatorname{th} \frac{\omega' + \omega}{2T} \right] \frac{\omega'(\omega' + \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' + \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' \right\} \end{aligned}$$

10.8.7 Сверхпроводник в произвольном магнитном поле вблизи температуры перехода

(вот это пока не особо интересует, есть очень много тем важнее!)

Теория (???)

Особый случай представляют свойства сверхпроводника вблизи критической температуры. Величина щели при этом достаточно мала, вследствие чего все уравнения значительно упрощаются. Из результатов 36 (выражение (36.4)) легко усмотреть, что в данном случае возможно разложение уравнений по величине $1 - T/T_c \ll 1$. Кроме того, как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, вблизи T_c глубина проникновения слабого магнитного поля $\delta \gg \xi_0$, т. е. все величины в поле, в том числе и само поле, меняются на расстояниях, гораздо больших параметра теории $\xi_0 \sim \tau/T_c$. Указанное обстоятельство позволит в этой области температур построить теорию (Горьков [66]), описывающую поведение сверхпроводников в произвольных магнитных полях (порядка величины критического поля).

С этой целью перепишем снова уравнения (37.6)

$$\begin{aligned} & \left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ieA(r) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta(\mathbf{r}) \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ & \left\{ -i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + ieA(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Delta^*(\mathbf{r}) \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \end{aligned}$$

вместе с уравнением, определяющим величину щели:

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_\omega \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r})$$

Поскольку $|\Delta|$ мало, разложим функцию $\mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ по степеням $|\Delta|$ и, подставляя это разложение в (38.1), найдем уравнение для $\Delta^*(\mathbf{r})$. При этом полезно ввести компоненты Фурье функции Грина $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для электронов в нормальном металле (в данном поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$). Уравнение, которому удовлетворяет $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, можно записать двояким образом:

$$\left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - ieA(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

или

$$\left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + ieA(\mathbf{r}') \right)^2 + \mu \right\} \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

С помощью функции

$$\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

привлекая второе из этих уравнений, приведем систему уравнений для \mathbf{G}_ω к интегральной форме:

$$\mathfrak{F}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \Delta(\mathbf{l}) \mathcal{U}_\omega^+(\mathbf{l}, \mathbf{r}') d\mathbf{l},$$

$$\mathfrak{F}_\omega^+(r, r') = \int \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(l, r) \Delta^*(l) (\xi_\omega(l, r')) dl.$$

Прежде чем переходить к дальнейшему, найдем, чему: равна функция $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. В отсутствие магнитного поля $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ равна ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$)

$$\mathbf{S}_\omega^{(0)}(R) = \begin{cases} -\frac{m}{2\pi R} e^{ip_0 R - \frac{|\omega|}{v} R} & \text{при } \omega > 0, \\ -\frac{m}{2\pi R} e^{-ip_0 R - \frac{|\omega|}{v} R} & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

В этом можно убедиться или непосредственной подстановкой (38.4) в уравнение (38.2) в стсусствие поля, или воспользовавшись известным нам выражением для компоненты Фурье ($\mathbf{S}_\omega^{(0)}(p) = [i\omega - \xi]^{-1}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\omega^{(0)}(R) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{S}_\omega^{(0)}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} e^{ipR} = \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2 i R} \int \frac{e^{ip_0 R + i \frac{\xi}{v} R} - e^{-ip_0 R - i \frac{\xi}{v} R}}{i\omega - \xi} d\xi \end{aligned}$$

(нас интересует, разумеется, вид функции $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ на расстояниях, больших по сравнению с атомными: $R p_0 \gg 1$). Интегрируя по ξ , непосредственно получаем (38.4).

Функция $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(R)$ быстро осциллирует. Поскольку $p_0 R \gg 1$, это обстоятельство позволяет для определения функции $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в магнитном поле применить своего рода квазиклассическое приближение. В самом деле, будем искать $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в виде

$$\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Подставляя (38.5) в (38.2) и дифференцируя только главные члены, найдем уравнение для добавки $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ к действию

$$(\mathbf{n}, \nabla_r \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = e(\mathbf{n}, A(\mathbf{r})); \left(n = \frac{R}{|R|} \right).$$

В этом уравнении мы отбросили квадратичные по \mathbf{A} члены, поскольку радиус закручивания электронов $\frac{ep_0}{H}$ в интересующих нас полях очень велик по сравнению с глубиной проникновения: $p_0 \gg eA \sim eH\delta$ (δ - порядок глубины проникновения). Вернемся теперь к уравнениям (38.3) и произведем в них разложение по степеням $|\Delta(r)|$. Как видно из (38.4) и (38.6), это разложение в $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ достаточно произвести до членов третьего порядка по $|\Delta|$ включительно. Что касается

функции Грина $\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, то ее достаточно знать с точностью до членов второго порядка по $|\Delta|$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) &= (\widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \Delta(\mathbf{l}) \widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{m}, \mathbf{r}') \Delta^*(\mathbf{m}) \times \\ &\quad \times (\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{m}, \mathbf{l}) d\mathbf{m} d\mathbf{l}). \end{aligned} \quad (38.7)$$

Подставляя это выражение во второе из уравнений (38.3), найдем разложение $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, с помощью которого из (38.1) получаем следующее уравнение относительно $\Delta^*(\mathbf{r})$: $\Delta^*(\mathbf{r}) : \Delta^*(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_\omega \int \widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \Delta^*(\mathbf{l}) (\widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) d\mathbf{l} - |\lambda| T \sum_d \iint \widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{m}) \Delta(\mathbf{m}) \widetilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \Delta^*(\mathbf{s}) \widetilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{s}, \mathbf{m}) \times$

$$\times \Delta^*(\mathbf{l}) (\widetilde{\mathfrak{S}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) d\mathbf{l} d\mathbf{m} ds). \quad (38.8)$$

Существенные расстояния в интегралах в этом уравнении порядка ξ_0 , поскольку, как это видно из (38.4) и (38.5), функция $\mathfrak{G}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ экспоненциально убывает при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \xi_0$. Между тем изменение щели $\Delta(\mathbf{r})$ и поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ происходит на расстояниях порядка глубины проникновения, которая вблизи критической температуры много больше ξ_0 . По тем же причинам фаза $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в (38.5) может быть написана в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq e(A(\mathbf{r}), \mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Вблизи $T_c A(\mathbf{r}) \sim H\delta \sim \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$, поэтому фаза $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ мала и экспоненту можно разложить по φ .

Рассмотрим сначала первы член в правой части. Пусть
 $K(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = T \sum_{\omega} \tilde{\mathfrak{S}}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \tilde{\mathfrak{S}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) = K_0(\mathbf{l} - \mathbf{r}) e^{2ie(\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{l} - \mathbf{r})}$.

Воспользовавшись представлением (38.4) для функции Грина в координатном пространстве и произведя суммирование по частотам, найдем для $K_0(R)$ следующее выражение:

$$K_0(R) = \frac{m^2 T}{(2\pi R)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{2\pi T R}{v}}.$$

Поскольку, как мы уже отмечали, все величины меняются мало на расстояниях порядка ξ_0 , можно в интеграле

$$\int K_0(\mathbf{l} - \mathbf{r}) e^{2ie(\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{l} - \mathbf{r})} \Delta^*(\mathbf{l}) d\mathbf{l}$$

разложить все величины в ряд по степеням $(\mathbf{l} - \mathbf{r})$ около точки \mathbf{r} . Ограничиваюсь членами второго порядка по $(\mathbf{l} - \mathbf{r})$, получим:

$$\Delta^*(\mathbf{r}) \int K_0(R) dR + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \Delta^*(\mathbf{r}) \int K_0(R) R^2 dR.$$

Функция $K_0(R)$, согласно (38.9), при $R = 0$ обращается

в бесконечность как $1/R^3$. Поэтому формально первый из этих двух интегралов расходится.

Обрезание расходящегося выражения удобнее произвести в импульсном пространстве. В результате мы получаем знакомое выражение:

$$\int K_0(R) dR = \frac{mp_0}{2\pi^2} \int_0^{\omega_D} \operatorname{th} \left(\frac{\xi}{2T} \right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Второй член при интегрировании вблизи $R = 0$ особенностей не содержит. Вычисляя этот интеграл непосредственно в координатном представлении, получим:

$$\int R^2 K_0(R) dR = \frac{7\zeta(3)v^2}{8(\pi T)^2} \cdot \frac{mp_0}{2\pi^2}.$$

В члене третьего порядка по $|\Delta|$ в уравнении (38.8) зависимостью $\Delta(\mathbf{r})$ от координат можно пренебречь. Этот член равен поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \Delta^*(\mathbf{r}) |\Delta(\mathbf{r})|^2 T \sum_{\omega} \int d\xi \frac{1}{(\omega^2 + \xi^2)^2} = \\ = \left(\frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T)^2} \Delta^*(\mathbf{r}) |\Delta(\mathbf{r})|^2. \end{aligned}$$

Собирая вместе полученные результаты, найдем, что вблизи критической температуры функция $\Delta^*(r)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left\{ \frac{1}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2} |\Delta(\mathbf{r})|^2 \right] \right\} \Delta^*(\mathbf{r}) = 0$$

где

$$\eta = \frac{7\zeta(3)}{6(\pi T_c)^2} \varepsilon_F$$

В отсутствие поля Δ постоянно по пространству и уравнение (38.10) совпадает с первыми членами разложения (36.4).

Перейдем теперь к вычислению плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Формула (37.5) предыдущего параграфа, конечно, верна и в данном случае. Пользуясь, однако, тем, что величина Δ мала по сравнению с T_c , мы будем и здесь производить разложение по A и Δ до первых неисчезающих членов. Заметим, что член в плотности тока (37.5)

$$-\frac{2e^2 A(\mathbf{r})}{m} \left(S_{t'=t+0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right) \equiv -\frac{e^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}) N.$$

Здесь N - плотность полного числа электронов, которая равна своему значению для нормального металла. Изменение N противоречило бы условию электронейтральности. (Решение (38.7) удовлетворяет этому требованию, т. е. если $(\mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(3)_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, то $T \sum_\omega \delta(\xi)_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \equiv 0$)

Подставляя (38.7) в (37.5), найдем:

$$T \sum_\omega \frac{ie}{m} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}}) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{e^2}{m} N A(\mathbf{r}) \equiv 0,$$

поскольку в постоянном магнитном поле ток в нормальном металле равен нулю. Таким образом,

$$j(\mathbf{r}) = \frac{ie}{m} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}})_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} T \sum_\omega^\top \delta(S_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$$

где

$$\delta \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$= - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, l) \Delta(l) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{m}, \mathbf{r}') \Delta^*(\mathbf{m}) \tilde{\mathbf{G}}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{m}, l) d\mathbf{m} dl$. Подставляя сюда (38.5), разлагая все величины около точки r до членов первого порядка и опуская члены, которые дают нуль при интегрировании по углам, получим:

где

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \left[\frac{ie}{m} \left(\Delta \frac{\partial \Delta^*}{\partial \mathbf{r}} - \Delta^* \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{4e^2 |\Delta|^2}{m} A(\mathbf{r}) \right] C,$$

$$C = \frac{1}{3} T \sum_\omega \int^0 \int \left(\left[\left(\nabla_r \left(\mathbf{s}_\omega^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{l}) \right) \right) \left(\mathfrak{s}_\omega^{(0)}(\mathbf{m} - \mathbf{r}) - \left(\mathfrak{s}_\omega^{(0)}(r - l) X - X (\nabla_r (3_\omega^0(\mathbf{m} - \mathbf{r}))) \right] \cdot \mathbf{m} \right) \left(\mathbf{j}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{r}) \right) \right)$$

Вычисление C удобно произвести в компонентах Фурье, заменяя обычным образом $r \rightarrow i \frac{d}{dp}$. Не останавливаясь на этом довольно простом вычислении, приведем окончательный результат:

$$C = \frac{7\zeta(3)N}{16(\pi T_c)^2}$$

Система уравнений (38.10) и (38.11) описывает свойства сверхпроводников в постоянном магнитном поле вблизи T_c . Введем волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, пропорциональную $\Delta(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)N}{8(\pi T_c)^2}} \Delta(\mathbf{r}).$$

Взяв комплексно сопряженное от уравнения (38.10) и подставляя всюду выражение (38.12), приведем эти уравнения к следующему виду:

$$\left\{ \frac{1}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - 2ieA(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{1}{N} |\psi|^2 \right] \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{2ie}{4m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{(2e)^2}{2m} A(\mathbf{r}) |\psi|^2.$$

Теперь становится понятным смысл введения волновой функции $\psi(\mathbf{r})$: получающиеся уравнения имеют вид, похожий

на квантовомеханические уравнения для частицы с массой

$2m$ и зарядом $2e$. Физически этот результат совершенно ясен, поскольку $\Delta(\mathbf{r})$ имеет смысл величины, пропорциональной волновой функции связанной пары, или, точнее, волновой функции относительно координат ее центра инерции. Интересно, что подобного вида уравнения были предложены в феноменологической теории Гинзбурга - Ландау [67], где, однако, фигурировал однократный элементарный заряд: Помимо этого существенного изменения, новая теория сверхпроводимости, подтверждая правильность теории Гинзбурга Ландау вблизи T_c , дает возможность вычислить фигурирующие в последней теории постоянные.

В заключение отметим еще раз тот факт, что при выводе мы использовали малость изменения всех величин на расстояниях порядка ξ_0 . Поскольку, как легко видеть из (38.13) и (37.19), все величины меняются в общем случае на расстояниях порядка лондоновской глубины проникновения вблизи T_c , а для пиппардовских металлов эта глубина проникновения становится больше ξ_0 только в самой близости от T_c , то область применимости этих уравнений для металлов пиппардовского типа представляет собой очень незначительную окрестность температур вблизи критической температуры перехода. Для металлов лондоновского типа, или промежуточных, эти уравнения справедливы в довольно широкой области температур вблизи T_c . С экспериментальной точки зрения это - весьма интересная область температур, и следует отметить, что уравнения (38.13) приводят к очень хорошему согласию теории с результатами измерений в этой области.

10.8.8 О сверхпроводящих сплавов

Постановка вопроса.

Одним из интересных вопросов в теории сверхпроводимости является вопрос о свойствах «сплавов», т. е. сверхпроводников с примесью атомов других элементов и иными нарушениями решетки (Абрикосов и Горьков [68]).

В нормальном состоянии эти дефекты решетки обусловливают так называемое остаточное сопротивление металла. В сверхпроводящем состоянии примеси играют новую роль. Как мы уже указывали, в сверхпроводнике взаимодействие между электронами приводит к установлению определенной пространственно корреляции между ними. В частности, зависимость тех или иных гриновских функций в координатном представлении от своих пространственных аргументов на расстоянии порядка ξ_0 (эффективный размер пары) существенно меняется с переходом металла из нормального в сверхпроводящее состояние. Наличие атомов посторонних элементов или других дефектов решетки приведет к тому, что электроны станут рассеиваться на примесях. Поскольку такое рассеяние происходит случайным образом, на произвольные углы, а рассеивающиеся электроны обладают очень малой длиной волны, то корреляции электронов будут очень чувствительны к актам рассеяния. Нынешним словами, рассеяние электронов на атомах примесей должно уменьшать пространственную корреляцию между ними.

При очень малых концентрациях роль примесей невелика. Увеличение концентрации примесей приведет, очевидно, к тому, что радиус корреляции электронов в сверхпроводнике будет уменьшаться. Для достаточно концентрированного сплава роль параметра корреляции

перейдет от ξ_0 к длине свободного пробега электронов. При таких концентрациях мы вправе ожидать появления новых характерных свойств у сверхпроводника. Не ставя своей целью в этой книге последовательное изложение теории сверхпроводимости, мы коснемся здесь только одного вопроса - о свойствах сплавов в постоянном слабом магнитном поле. Это позволит нам, однако, в полной мере продемонстрировать своеобразную технику теории поля, чрезвычайно полезную при изучении такого рода объектов.

Выше, в § 37, уже отмечалось, что большинство реальных сверхпроводников в отношении их электромагнитных свойств в слабом поле принадлежит к нелокальному типу («пиппардовскому» и промежуточному). Иными словами, величина тока, возникающего в данной точке сверхпроводника при помещении его в электромагнитное поле, определяется значениями поля в щелой окрестности этой точки. Такая нелокальность заложена, конечно, в самой основе теории, базирующейся на идеи Купера об образовании связанных электронных пар. Размеры пары обусловливают существование корреляции электронов на расстоянии порядка $\xi_0 \sim 10^{-4}$ с.. которая и проявляется в виде нелокальной связи между полем и током, если поле меняется на расстояниях, существенно меньших ξ_0 (эти расстояния порядка глубины проникновения поля). В обратном, лондоновском, случае поле почти не меняется на расстояниях $\sim \xi_0$, существенных в интегральном соотношении (37.3), и может быть вынесено из-под интеграла в точке r . Соображения, которые были изложены выше, о роли примесей в сверхпроводнике, показывают, что при достаточной концентрации примесей сверхпроводящий сплав должен принадлежать ко второму типу. Поскольку с увеличением числа примесей роль длины корреляции начинает играть величина свободного пробега, то наступает момент, когда этот пробег становится меньше глубины проникновения поля, т. е. возникает лондоновская ситуация.

Прежде чем переходить к дальнейшему, необходимо разъяснить еще следующее обстоятельство. В реальных сверхпроводниках ξ_0 имеет порядок 10^{-4} с... Однако из предыдущего следует, что новые свойства у сверхпроводника наступают при концентрациях, когда длина свободного пробега становится сравнимой с глубиной проникновения поля, порядок которой есть $\sim 10^{-5}$ с... Чрезвычайно существенно, что эти концентрации еще являются малыми ($\sim 1\%$). Дело в том, что при больших концентрациях примеси мы имеем дело, по существу, с новым веществом, свойства которого не имеют ничего общего с исходным сверхпроводником. В частности, меняются свойства электрон-фононного взаимодействия и, следовательно, меняется температура сверхпроводящего перехода. Этими изменениями основных свойств решетки можно пренебречь при достаточно малых концентрациях.

Однако уже такие малые концентрации существенно меняют поведение сверхпроводника в магнитном поле. Интересно, что при этом его термодинамические свойства, как это и подтверждает эксперимент, практически не отличаются от свойств чистого сверхпроводника.

Обычные методы, использующие кинетическое уравнение, с помощью которого изучается, например, остаточное сопротивление нормального металла, оказываются непригодными для решения поставленного выше вопроса. Поэтому мы ниже вновь обратимся к методам квантовой теории поля.

2. Остаточное сопротивление нормального металла. С целью сделать наше дальнейшее изложение наиболее понятным, мы сформулируем используемую ниже технику на примере вычисления остаточного сопротивления нормального металла с примесями при температуре абсолютного

нуля (Абрикосов и Горьков [68], Эдвардс [69]). Разумеется, получающиеся результаты в этом случае совершенно эквивалентны общизвестным результатам, найденным с помощью метода кинетического уравнения.

Как известно, наличие примесей приводит в нормальном металле к конечной проводимости σ , так что плотность тока j в приложенном однородном электрическом поле E при достаточно

малых частотах дается формулой

$$j = \sigma E$$

Вводя векторный потенциал $A(t)$ обычным образом, $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$, можно представить это соотношение в следующем виде (для монохроматической компоненты поля):

$$J_\omega = i\omega\sigma A_\omega.$$

В таком виде это соотношение совпадает с (37.3'). Ядро $Q(k, \omega)$ в данном случае просто равно

$$Q(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega\sigma.$$

Ниже мы будем определять $Q(k, \omega)$ методами квантово теории поля.

Учитывая разницу в определении гриновских функций в полевой технике при абсолютном нуле и в технике при $T \neq 0$, вместо (37.5) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x) &= \frac{i\varepsilon}{m} (\mathbf{p}_{r'} - \mathbf{p}_r) \underset{r' \rightarrow r, t' = t+0}{G(x, x')} - \frac{Ne^2}{m} A(x) \\ &\quad (p = -i\nabla). \end{aligned}$$

Разлагая функцию $G(x, x')$ обычным образом до линейных по полю членов, получим:

$$\begin{aligned} j(x) &= -\frac{ie^2}{2m^2} (p_{r'} - p_r) \int_{r' \rightarrow r} (A(y), p_{y'} \rightarrow p_{y' \rightarrow y}) G^{(0)}(x, y') X \\ &\quad X G^{(0)}(y, x') d^4y - \frac{Ne^2}{m} A(x). \end{aligned}$$

В этом соотношении функции $G^{(0)}(x, y)$ суть функции Грина нормального металла в отсутствие поля. Заметим, что эти величины уже зависят не только от разности аргументов $x - y$, как это было всюду до сих пор; в функциях $G^{(0)}(x, y)$ мы считаем учтенным взаимодействие электронов с атомами примесей. (В дальнейшем мы будем функции Грина металла с примесями обозначать через $G(x, y)$ и т. д. (без значка), соответствующие функции чистого металла - через $G^{(0)}(x, y)$ и т. д.) Взаимодействию электронов с атомами примеси соответствует гамильтониан

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_a H_a, \\ H_a &= \int u(r - r_a) \psi^+(x) \psi(x) dr. \end{aligned}$$

Прежде чем продолжать дальнейшее преобразование (39.1), найдем функцию $G(x, x')$.

При наличии примесей функция Грина не совпадает с выражением (7.7). Напишем ее в виде

$$G(x, x') = (2\pi)^{-4} \int G(p, p'; \omega) e^{ipr - ip'r' - i\omega(t-t')} dp dp' d\omega.$$

Функция $G(p, p'; \omega)$ выражается по известным правилам теории поля как сумма диаграмм, изображенных на рис. 101. Каждой линии соответствует $G^{(0)}(p)$. Примесную вершину

$$\overline{p} \quad \overline{p'} = \overline{\delta(p-p')} + \overline{p} \times \overline{p'} + \overline{p} \times \overline{p''} \times \overline{p'} + \dots$$

Рис. 101.

мы будем обозначать крестиком. Ей соответствует множитель, равный $u(q)e^{iqr_a\delta(\omega-\omega')}$, $u(q)$ - фурье-компоненты потенциала $u(r)$, а q -передаваемый импульс.

Суммирование диаграмм приводит к интегральному уравнению для $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$:

$$G(p, p'; \omega) = \delta(p - p') G^{(0)}(p) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_a G^{(0)}(p) \int^c u(p - p'') e^{i(p-p'')r_a G(p'', p'; \omega)} dp''$$

Нас не интересует точное решение (39.3). Поскольку атомы примесей хаотически распределены по металлу, мы должны усреднить все выражения по положению каждого примеси. При этом существенно, что в силу нашего предположения о малости атомной концентрации среднее расстояние между атомами примесей гораздо больше атомных расстояний в решетке металла, благодаря чему усреднение может производиться в объемах, с размерами, большими по сравнению с межатомными расстояниями. После такого усреднения функция Грина $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$, очевидно, примет вид

$$\overline{G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)} = G(p)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Интересующие нас импульсы \mathbf{p}, \mathbf{p}' имеют величины порядка граничного фермиевского импульса p_0 , который в свою очередь имеет порядок обратных межатомных расстояний. Это обстоятельство сразу облегчает выполнение усреднения.

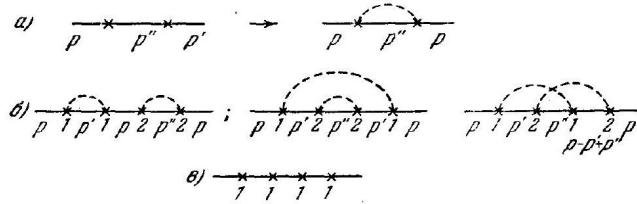


Рис. 102.

Мы произведем вычисления в борновском приближении, т. е. будем предполагать $p_0^3 \int u(r)dr \ll \varepsilon_F$. Можно показать, что окончательные результаты, выраженные через время столкновений, будут справедливы и в общем случае.

Простейшая диаграмма для $G(p, p'; \omega)$ содержит всего один крест. Усредненное значение по положению атома примеси есть постоянная $u(q)e^{iqr_a} = u(0)$, которую можно включить в энергию основного состояния и в дальнейшем считать равной нулю. Следующая по сложности диаграмма содержит два креста (рис. 102, a). Если эти кресты относятся к разным атомам, то матричный элемент содержит множитель $u(p'' - p') u(p - p'') e^{i(p-p'')r_a + i(p''-p')r_b}$, среднее от которого равно нулю. Если в обоих крестах рассеяние происходит на одинаковых атомах и $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, то среднее значение

от этой диаграммы (без внешних $G^{(0)}(p)$) отлично от нуля

и равно

$$\frac{1}{V} \int |u(p - p')|^2 G^{(0)}(p') \frac{dp'}{(2\pi)^3},$$

где V - объем системы. (Чтобы получить этот результат, удобно в формулах (39.2) и (39.3) перейти от интегралов по импульсам к дискретным суммам и, выполнив усреднение, совершить обратный переход.)

Нас в дальнейшем будут интересовать значения \mathbf{p} , близкие по абсолютной величине к p_0 . Как и в §21, интеграл в выражении (39.5) может быть разбит на две части: по значениям \mathbf{p}' , далеким от поверхности Ферми, и по значениям, близким к поверхности Ферми (пределы второго интеграла по $|\mathbf{p}'|$ могут быть взяты симметричными относительно

$|\mathbf{p}'| - p_0$). Интеграл по далеким областям дает действительную константу, которая вместе с $u(0)$ является перенормированной химического потенциала и может не рассматриваться. Во втором интеграле можно считать $u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ медленно меняющейся функцией. Подставляя формулу (7.7) для $G^{(0)}(p)$ и суммируя по атомам примеси (это означает просто умножение на число атомов), получаем существенный вклад в G -функцию:

$$\frac{i \operatorname{sign} \omega}{2\tau}$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{nmp_0}{(2\pi)^2} \int^2 |a(\theta)|^2 d\Omega$$

) θ - угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Согласно (39.6) τ есть в борновском приближении время между столкновениями, n - число атомов примеси в единице объема). Отсюда видно, что основную роль в интегралах играет область вблизи поверхности Ферми ($\mathbf{v}(|\mathbf{p}| - p_0) \sim \frac{1}{\tau}$).

С этой точки зрения не все диаграммы являются эквивалентными. Сравним, например, между собою три диаграммы, изображенные на рис. 102,6 (пунктиры соединяют кресты, относящиеся к одному атому). Нетрудно видеть, что в первых двух выражениях интегрирование по \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' может произв одиться вблизи Ферми-поверхности при произвольных углах между импульсами. Наоборот, в третьем интеграле требование близости всех аргументов G -функций к поверхности Ферми приводит к ограничению углов. В результате вклад такого графика оказывается меньшим в $\frac{1}{vp_0G}$ раз по сравнению с остальными. Так как в дальнейшем нам понадобятся значения ω и $\xi \sim \frac{1}{\tau}$, где τ - время между столкновениями, то малость «пересекающихся» графиков можно оценить как $\frac{1}{p_0l}$, где $l = v\tau$ - длина пробега.

Легко показать, что малый вклад дают также диаграммы, содержащие более двух крестов от одного атома примеси. Сравним, например, между собой полный вклад (от всех атомов примеси) диаграмм типа первой диаграммы на рис. 102, σ с диаграммами типа 102, в. Первые диаграммы дают величину порядка

$$\frac{1}{\tau^2} G^{(0)}(p) \sim \frac{1}{\tau}$$

а вторые - величину порядка

$$\frac{1}{\tau} \frac{u^2(q)}{v^2} p_0^4 \sim \frac{1}{\tau} \left[\frac{\int u d\mathbf{r} p_0^3}{\varepsilon_F} \right]^2 \ll \frac{1}{\tau}$$

(это обстоятельство есть следствие борновского приближения). Отсюда ясно, что мы должны рассматривать только диаграммы, содержащие по два креста на один атом примеси. Суммируя все существенные диаграммы (т. е. только «парные» и не содержащие «пересечений», наподобие третьей диаграммы рис. 102,6), получаем следующее уравнение для G -функции:

$$G(p) = G^{(0)}(p) + \frac{n}{(2\pi)^3} G^{(0)}(p) \int |u(p - p')|^2 G(p') dp' G(p).$$

Если отказаться от борновского приближения, то необходимо учитывать диаграммы со многими крестами на один атом примеси. Можно показать, что все изменение, которое при этом возникает, заключается в замене борновской амплитуды $u(\theta)$ на полную амплитуду рассеяния. Это останется справедливым и для всех дальнейших расчетов. Поэтому во всех формулах под $a(\theta)$ можно подразумевать полную амплитуду рассеяния. Решением уравнения (39.7) является:

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi - \bar{G}_\omega},$$

где \bar{G}_ω удовлетворяет уравнению

$$\bar{G}_\omega = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \frac{1}{\omega - \xi' - \bar{G}_\omega} d\mathbf{p}'.$$

Полагая \bar{G}_ω чисто мнимым $\bar{G}_\omega = -i\beta$ и вычисляя интеграл в правой части тем же способом, что и в (39.5), находим:

$$\beta = \frac{\text{sign } \beta}{2\tau}$$

где τ определено формулой (39.6). Сравнивая полученные таким образом $G(p)$ с результатом в случае малого количества примесей ($G \rightarrow G^{(0)}$), находим $\beta = \frac{\text{sign } \omega}{2\tau}$ или

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}}.$$

Переходя к kx -представлению, нетрудно видеть, что все изменение в G по сравнению с $G^{(0)}$ сводится к умножению на экспоненциально затухающий множитель

$$G(x - x') = G^{(0)}(x - x') e^{-\frac{|r-r'|}{2\tau}}.$$

Действительно, имеем после интегрирования по углам

$$\begin{aligned} G(x - x') &\propto pdpd\omega \frac{\sin pRe^{-i\omega(t-t')}}{R \left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau} \right)} \circ \\ &\circ m \int d\xi d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{e^{i(p_0 + \frac{\xi}{v})R} - e^{-i(p_0 + \frac{\xi}{v})R}}{R \left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{|\omega|2\tau} \right)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по ξ и беря вычет, находим (39.9).

Обратимся к вычислению ядра $Q(k, \omega)$. Переходя к компонентам Фурье, удобно написать получающееся из (39.1) выражение Q в виде

$Q_{\alpha\beta}(k, \omega) = \frac{Ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} - \frac{2ie^2}{m^2} \int p'_\alpha \Pi_\beta(p'_+, p'_-) dp' d\omega'$ где $p_\pm = (\mathbf{p}' \pm \frac{k}{2}, \omega' \pm \frac{\omega}{2})$. В (39.10) выделена одна из фотонных вершин, вторая вершина содержится в $\Pi_\beta(p_+, p_-)$, которое с точностью до коэффициента может рассматриваться как результат включения фотонной вершины \mathbf{p}'_3 в электронную линию. Вставляя эту вершину в электронную гриновскую функцию $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$, получаем:

$$\begin{aligned} \Pi(p'_+, p'_-) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(\mathbf{p}'_+, \mathbf{p}'_+'; \omega' + \frac{\omega}{2}) \mathbf{p}'' G(\mathbf{p}''_-, \mathbf{p}''_-; \omega' - \frac{\omega}{2}) d\mathbf{p}''. \end{aligned}$$

Входящие сюда функции $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$ соответствуют сумме диаграмм на рис. 101 и удовлетворяют уравнению (39.3). При усреднении по расположению атомов примеси надо

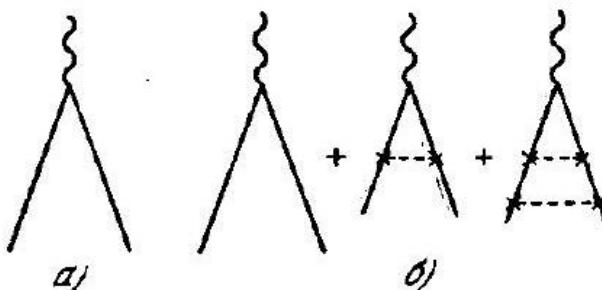


Рис. 103.



а) выражению (39.11) соответствует диаграмма, изображенная на рис. 103, а. После усреднения по положе-

жению атомов примеси, помимо простых диаграмм, соответствующих переходу от нулевых функций Грина $G^{(0)}(p)$ к функциям $G(p)$ (39.8), для величины (39.11) оказываются существенными графики, изображенные на рис. 103, б. Большой вклад от этих поправок связан с тем, что импульс фотона, стоящий в вершине, $k \ll p_0$, благодаря чему при интегрировании основноны вклад в интеграл дает область импульсов вблизи поверхности Ферми. Диаграмма другого типа, например, график на рис. 103, в, гораздо меньше, поскольку одно из интегрирований происходит по области импульсов, удаленной от поверхности Ферми. Таким образом, усреднение величины (39.11) сводится к суммированию «клестницы» диаграмм на рис. 103, б. Интегральное уравнение для $\Pi(p_+, p_-)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(p_+, p_-) &= \\ &= G(\mathbf{p}_+) G(p_-) \left[\mathbf{p} + \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Pi(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}' \right]. \end{aligned}$$

Возможны два предельных случая:

1. аномальный скин-эффект ($|\mathbf{k}|v \geq 1/\tau$); легко убедиться, что интеграл в правой части (39.12) в этом случае пренебрежимо мал $\sim 1/|\mathbf{k}|\tau\tau \ll 1$;

б) нормальный скин-эффект ($|\mathbf{k}|v \ll 1/\tau$); именно этот случай представляет для нас интерес. В уравнении (39.12) при этом можно считать $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_-$.

Вектор, получающийся из интеграла в правой части (39.12), будет, очевидно, направлен по \mathbf{p} . Введем обозначение

$$p\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Pi(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}'.$$

Ввиду того, что $|\mathbf{p}| \simeq p_0$, $\Lambda(\omega', \omega)$ можно считать не зависящим от $|\mathbf{p}|$. Умножим (39.12) на $\frac{n}{(2\pi)^3} |u(l - p)|^2$ и проинтегрируем по $d\mathbf{p}$:

$$\iota\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(l - p)|^2 p G(p_+) G(p_-) [1 + \Lambda(\omega', \omega)] dp$$

Подставляя для $G(p)$ его выражение (39.8), легко найдем, что $\Lambda(\omega', \omega)$ отлично от нуля только при $|\omega'| < \frac{\omega}{2}$, ибо

в противном случае оба полюса в (39.14) при интегрировании по ξ , согласно (7.7), лежат в одной полу平面ости. В этом интервале $\Lambda(\omega', \omega)$ не зависит от ω' . Интегрируя по ξ и воспользовавшись соотношением

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \cos (\varphi' - \varphi''),$$

получаем:

$$\Lambda(\omega', \omega) = \begin{cases} \frac{i}{\tau_1} \frac{1}{\omega + \frac{i}{\tau_{tr}}} & \text{при } \omega''^2 < \frac{\omega^2}{4}, \\ 0 & \text{при } \omega''^2 > \frac{\omega^2}{4}, \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{tr}}, \quad \frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{nmp_0}{(2\pi)^2} \int |u(\theta)|^2 (1 - \cos \theta) d\Omega.$$

После подстановки (39.16) в (39.12) и (39.10) и интегрирования, считая $\tau \ll 1$, находим:

$$Q_{ab}(\omega) = -i\omega \delta \delta_{ab}.$$

Как и должно быть, в проводимость $\sigma = \frac{Ne^2 \tau_{tr}}{m}$ входит «транспортное» время между соударениями.

Мы видели, таким образом, что вычислению различных характеристик металла, усредненных по положению атомов примеси, возможно придать форму своего рода полевой техники. Усреднение в нашем случае сводится к попарным усреднениям рассеяния на одинаковых атомах, каждому из которых на диаграмме может быть сопоставлена пунктирная линия, соединяющая два креста. В матричном элементе такой линии, несущей импульс \mathbf{q} , соответствует множитель $n|u(\mathbf{q})|^2$, играющий роль D -функции для пунктирной линии. В вершине, из которой исходит пунктир, не меняется частота электронной линии. Очень существенно, что такой пунктир, охватывающий любую вершину, в которой происходит большое изменение импульса электронной линии ($q \sim p_0$), дает малый вклад. В частности, по этой причине можно пренебречь диаграммами с пересекающимися пунктирными линиями. Порядок относительной малости таких диаграмм есть $1/p_0 l \ll 1$.

3. Электромагнитные свойства сверхпроводящих сплавов. Изложенный метод мы теперь применим к изучению сверхпроводника, включающего примеси. Рассмотрим сразу же случай произвольных температур. Главное отличие по сравнению с изложенным выше состоит в том, что сверхпроводник описывается тремя функциями Грина - функциями (5), \mathfrak{F}^+ и \mathfrak{F} . то обстоятельство приводит к необходимости изменить диаграммную технику. Легко видеть, что в рассматриваемом случае такое видоизменение происходит совершенно аналогично §35 и сводится к появлению \mathfrak{F} - и \mathfrak{F}^+ -линий в диаграммах для (S)-линий в диаграммах для \mathfrak{F} и \mathfrak{F}^+ . Гамильтониан взаимодействия с примесями содержит произведение операторов $\bar{\psi}$. Поэтому при включении примесной вершины в каждую электронную линию возникает по две



Рис. 104.

возможности отдельно для линий (), и $\tilde{\mathfrak{J}}^+$. Эти возможности приведены на рис. 104. Результат можно записать в виде

$$(B(x, x') \rightarrow (\mathfrak{S}(x, y)(5)(y, x') - \tilde{J}(x, y)\tilde{\mathfrak{J}}^+(y, x')) \tilde{\mathfrak{J}}^+(x, x') \rightarrow \tilde{j}^+(x, y) (\mathfrak{S}j(y, x') + (\mathfrak{J})(y, x)\tilde{\mathfrak{J}}^+(y, x'))$$

$$\mathfrak{J}(x, x') \rightarrow \mathfrak{G}(x, y)\mathfrak{J}(y, x') + \mathfrak{J}(x, y)\mathfrak{G}(x', y).$$

Вместо уравнения (39.3) мы будем иметь следующие уравнения для функции (3) и $\tilde{\mathfrak{J}}^+$:

$$(5)(p, p'; \omega) = (\mathfrak{S}^{(0)}(p)\delta(p - p') +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \mathfrak{G}^{(0)}(p) \int u(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{G}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}', \omega) d\mathbf{p}'' - \right.$$

$$- \mathfrak{J}^{(0)}(p) \int u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{J}^+(\mathbf{p}'', p'; \omega) d\mathbf{p}'' \}$$

$$\mathfrak{J}^+(p, p'; \omega) = \tilde{\mathfrak{J}}^{+(0)}(p)\delta(p - p') +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \tilde{\mathfrak{J}}^{+(0)}(p) \int u(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{G}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}', \omega) d\mathbf{p}'' + \right.$$

$$+ \left. \left(\mathfrak{j}^{(0)}(-p) \int_a u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{J}^+(\mathbf{p}'', p'; \omega) d\mathbf{p}'' \right) \right\}$$

(39.19)

В принципе необходимо рассмотреть еще уравнение для функции $\mathfrak{J}(p, p'; \omega)$. Для чистого сверхпроводника $\mathfrak{J}^{(0)}(x, x') = \mathfrak{J}^{+(0)}(x, x')$ в отсутствие поля. Не останавливаясь на доказательстве, мы заметим только, что то же самое будет иметь место и для сплавов после усреднения уравнений (39.18) и (39.19) по положению атомов примеси. Обобщение техники усреднения предыдущего раздела на случай конечных температур и в применении к сверхпроводнику производится элементарным образом. При рассеянии электрона на статической примеси меняются только три компоненты его импульса. Поэтому пунктирной линии попрежнему сопоставляется множитель $n|u(\mathbf{q})|^2$, а частота электронной линии в примесной вершине сохраняется. Все оценки, позволяющие пренебречь пересечением пунктирных линий, а также диаграммами, в которых пунктир охватывает

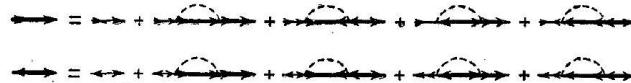


Рис. 105.

вершину с передачей импульса порядка фермиевского, остаются в силе. Для этих оценок существенны свойства гриновских функций нормального металла, для которого температуры сверхпроводящего перехода ничтожно малы. Уравнения для усредненных функций ($\mathfrak{S}(p)$ и $\mathfrak{J}^+(p)$) изображены схематически на рис. 105. Структура их понятна без дальнейших пояснений. Заметим, что с диаграммной точки зрения уравнения рис. 105 аналогичны уравнениям 35 (см. рис. 94) для системы с электрон-фононным взаимодействием. Отличие состоит в том, что на диаграммах рис. 105 имеются «нулевые» линии всех сортов:

$$(\mathfrak{S}^{(0)}(p), \mathfrak{J}^{+(0)}(p) \text{ и } \mathfrak{J}^{(0)}(p)).$$

Систему уравнений рис. 105, пользуясь явными выражениями для функций чистого сверхпроводника ($\mathfrak{S}^{(0)}$ и $\mathfrak{J}^{+(0)}$), можно привести к очень простому виду:

$$\left(i\omega - \xi - \overline{(G)}_\omega \right) (B)(p) + \left(\Delta + \overline{\mathfrak{J}}_\omega^+ \right) \mathfrak{J}^+(p) = 1,$$

$$(i\omega + \xi + \overline{\mathfrak{G}}_{-\omega}) \mathfrak{F}^+(p) + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_\omega^+) \mathfrak{G}(p) = 0,$$

также

$$\overline{\mathfrak{G}}_\omega = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{G}(p') d\mathbf{p}',$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{F}}_\omega^+ &= \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{F}^+(p') d\mathbf{p}' \\ \overline{(\mathfrak{G})}_{-\omega}(p) &= \overline{\mathfrak{G}}_\omega(-p)\end{aligned}$$

(мы обозначили $p' = (p'; \omega)$). Решение предыдущей системы есть (ниже показано, что $\overline{(\mathfrak{G})}_\omega = -\overline{\mathfrak{G}}_{-\omega}$)

$$\mathfrak{G}(p) = -\frac{i\omega - \overline{\mathfrak{G}}_\omega + \xi}{(i\omega - \overline{\mathfrak{G}}_\omega)^2 + \xi^2 + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_\omega^+)^2},$$

$$\mathfrak{F}^+(p) = \frac{\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_\omega^+}{(i\omega - \overline{G}_\omega)^2 + \xi^2 + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_\omega^+)^2}.$$

Подстановка этих выражений в (39.20) дает два уравнения для определения $\overline{(\mathfrak{S})}_\omega$ и $\overline{\mathfrak{F}}_\omega^+$. Мы видим, что, как и раньше, $\overline{\mathfrak{G}}_\omega$ содержит постоянный член, означающий аддитивную добавку к химическому потенциалу. Этот член не зависит от температуры и обязан интегрированию по $d\mathbf{p}'$ вдали от ферми-поверхности. Поэтому этот член тот же, что и для нормального металла:

$$\delta\mu \simeq \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \frac{d\xi}{\xi}.$$

За вычетом этого члена остальная часть \overline{G}_ω , как видно из уравнений (39.20) и (39.21), определяется в точности тем же интегралом, что и $\overline{\mathfrak{F}}_\omega^+$. Таким образом,

$$-\frac{\Xi_\omega}{i\omega} = \frac{\overline{\mathfrak{F}}_\omega^+}{\Delta}.$$

Введем обозначения

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \overline{\mathfrak{U}}_\omega^+ = \Delta\eta_\omega, \quad i\tilde{\omega} = i\omega - \overline{G}_\omega = i\omega\eta_\omega.$$

Тогда для функции η_ω получим уравнение

$$\eta_\omega = 1 + \frac{\eta_\omega}{2\pi} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2)\eta_\omega^2}$$

решение которого есть

$$\eta_\omega = 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}.$$

Таким образом, усредненные по положению атомов примесей функции $(\$)(p)$ и $\overline{\mathfrak{F}}_\omega^+(p)$ могут быть получены из функции чистого сверхпроводника заменой

$$\{\omega, \Delta\} \rightarrow \{\omega\eta_\omega, \Delta\eta_\omega\}$$

Нетрудно проверить, что, как и для случая нормального металла, эти формулы в координатном пространстве означают умножение нулевых функций на $e^{-R/2l}$. Огсюда, в частности, следует, что величина

$$\Delta = |\lambda| \tau^+(x, x)$$

в сплаве совпадает с Δ чистого сверхпроводника. Поскольку, как мы видели в §36, термодинамические величины зависят в сверхпроводнике только от Δ , то тем самым оправдывается сделанное выше утверждение, что термодинамические свойства сверхпроводника не меняются в присутствии примесей при достаточно малых концентрациях примеси.

Перейдем к вопросу о температурной зависимости глубины проникновения слабого статического магнитного поля в сверхпроводящий сплав. Выражение для плотности тока $j(\mathbf{r})$ в линейном по полю приближении в соответствии с (37.10) имеет вид

$$\begin{aligned} j(r) = & \frac{e^2}{m^2} T \sum_{\omega} (\nabla_r - \nabla_{r'})_{r' \rightarrow r} \int [(\mathbf{j}_{\omega}(r, l)) A(l), \nabla_l] (\mathbf{j}_{\omega}(l, r') + \\ & + \mathfrak{F}_{\omega}(\mathbf{l}, \mathbf{r})(\mathbf{A}(\mathbf{l}), \nabla_l) \mathfrak{F}_{\omega}^+(\mathbf{r}', \mathbf{l})] d\mathbf{l} - \frac{Ne^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

где, однако, функции $(j'_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ и $\mathfrak{F}_{\omega}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ включают в себя взаимодействие с атомами примеси. Усредняя это равенство по положениям примесей и переходя к компонентам Фурье,

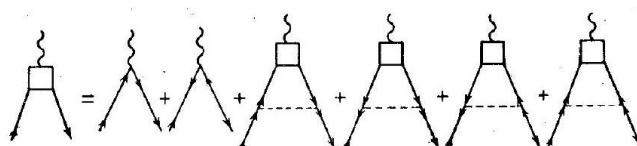
1. Может показаться, что этот вывод верен только с точностью до членов порядка $\sim 1/\omega_D \sim \sim 10^{-6}$ см/1 (см. (32.2), (34.37)). В более реалистической фононной модели обрезание происходит по частотам, благодаря чему таких членов вообще не возникает. Остальные результаты совпадают в обоих моделях. представим ядро $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} + \frac{2e^2 T}{(2\pi)^3 m^2} \sum_{\omega} \int_{\alpha}^2 \mathbf{p}'_{\alpha} \Pi_{\beta}^{(1)}(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}'$$

$(p'_{\pm} = p' \pm \frac{k}{2}, k = (\mathbf{k}, 0))$, где $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ есть компонента Фурье от

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(x - y, y - x') = & \\ = & -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} \left[(\mathbb{S}(x, y') (\mathbf{j}(y, x') - \mathcal{U}^+(y', x') \mathfrak{F}(x, y)) \right]; \\ \Pi^{(1)}(x - y, y - x') = & \frac{T^2}{(2\pi)^6} \sum_{\omega+\omega_-} \int_{\omega}^2 \Pi^{(1)}(p_+, p_-) X \\ & X e^{ip} + (x - y) - i\omega (\tau x - \tau y) e^{ip-(y-x')-i\omega} - (\tau_y - \tau') dp_+ dp_-. \end{aligned}$$

Как и в случае нормального металла, среднее от произведения двух гриновских функций не равно произведению средних. Для выполнения усреднения по положениям атомов



Phe. 106.

примесей опять надлежит просуммировать целую совокупность диаграмм. Поскольку сверхпроводимость искажает гриновские функции лишь вблизи поверхности Ферми, нужные диаграммы, как и в предыдущем разделе, будут «лестничного» типа. Наличие трех разных гриновских функций в сверхпроводнике приведет, однако, к несколько более сложным уравнениям, чем уравнение (39.12), выраждающее суммирование диаграмм рис. 103 в нормальном металле. Из рис. 106 видно, что для того, чтобы определить $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$, надо знать еще три величины, отличающиеся на графике от $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ иными направлениями стрелок на электронно линии. Каждой из этих величин отвечает своя комбинация (b) и \mathfrak{J}^+ :

$$\begin{aligned}\Pi^{(2)}(x-y, y-x) &= \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} \left[\overline{\mathfrak{J}^+(x, y')} (\mathfrak{S}(y, x')) + \overline{(\$)(y, x) \mathfrak{J}^+(y', x')} \right]. \quad \Pi^{(3)}(x-y, y-x') = \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} \left[\overline{(5)(y, x) (3(x', y'))} - \overline{\mathfrak{J}^+(x, y') \mathfrak{J}(y, x')} \right], \quad \Pi^{(4)}(x-y, y-x') = \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} \left[\overline{(\mathfrak{S}(x, y') \mathcal{F}(y, x'))} + \overline{\mathfrak{J}(x, y) (\mathfrak{S}(x', y'))} \right].\end{aligned}$$

Таким образом, вместо простого уравнения (39.12) в рассматриваемом случае необходимо решать систему из четырех уравнений для компонент Фурье $\Pi^{(l)}(p_+, p_-)$ ($l = 1, \dots, 4$). Введем обозначение

$$\Lambda^{(i)}(\omega') = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Pi^{(i)}(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}'.$$

Принцип построения уравнений ясен из рис. 106. Например, имеем:

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(p_+, p_-) &= p \left\{ \left({}'_i p_+ \right) \mathbb{S}(p_-) + \mathcal{F}(p_+) \mathfrak{J}^+(p_-) \right\} + \\ &+ (B)(p_+) (\mathfrak{S}(p_-) \Lambda^{(1)}(\omega) - \mathfrak{J}^+(p_+) (\$)(p_-) \Lambda^{(2)}(\omega) - \\ &- \mathfrak{J}(p_+) \mathfrak{J}^+(p_-) \Lambda^{(3)}(\omega) - \mathfrak{G}(p_+) \mathfrak{J}(p_-) \Lambda^{(4)}(\omega)).\end{aligned}$$

Аналогично выглядят остальные четыре уравнения. Подстановка их в (39.25) приводит к системе уравнений для величин $\Lambda^{(1)}(\omega)$. Мы не будем выписывать ее полностью, поскольку в общем виде эта система может быть решена только в случае сферически симметричного рассеяния. Нас, однако, не будет интересовать решение при произвольных соотношениях между величинами. При малых концентрациях сверхпроводящий сплав близок по своим свойствам к чистому сверхпроводнику. Мы уже говорили, что большинство последних принадлежит к пиппардовскому или промежуточному типу. Внесение примесей, уменьшая радиус корреляции, переводит при достаточной концентрации примеси сверхпроводник в сверхпроводящий сплав лондоновского типа, для которого электродинамика является уже локальной. Критерием локальности в данном случае служит соотношение между глубиной проникновения δ и длиной свободного пробега относительно рассеяния электронов на атомах примеси l (или, что то же, между величиной характерных $|k| \sim \frac{1}{\delta}$ и $\frac{1}{l}$). Ниже мы будем считать, что концентрация примесей такова, что сплав стал лондоновским ($|k|l \ll 1$). В этой ситуации вышеупомянутая система уравнений значительно упрощается. В $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ можно пренебречь величиной \mathbf{k} ($\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_-$); оказывается, что при этом

и

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}(\omega) &= -\Lambda^{(3)}(\omega); \\ \Lambda^{(2)}(\omega) &= \Lambda^{(4)}(\omega) \\ \Lambda^{(1)}(\omega) &= p \Lambda^{(1)}(\omega) \\ \Lambda^{(2)}(\omega) &= p \Lambda^{(2)}(\omega)\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(p, p) = p \left\{ (\mathfrak{s}^2(p) + \mathfrak{F}^{+2}(p)) [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - \right. \\ \left. - 2p(5)(p)\mathfrak{F}^+(p)\Lambda^{(2)}(\omega)\right.\end{aligned}$$

1 система уравнений для $\Lambda^{(i)}(\omega)$ принимает вид

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}(\omega) = \left[\overline{\mathfrak{S}_\omega^2 + \mathfrak{F}_\omega^{+2}} \right] [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - 2\overline{\mathfrak{G}_\omega \tilde{U}_\omega^+} \Lambda^{(2)}(\omega), \\ \Lambda^{(2)}(\omega) = 2\overline{2(\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{V}_\omega^+)} [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - \left[\overline{(\mathfrak{S}_\omega^2 + \mathfrak{F}_\omega^{+2})} \right] \Lambda^{(2)}(\omega),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \overline{\mathbf{S} \mathbf{S}_\omega^2} = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \left(\dot{s}^2(p') \mathbf{p}' d\mathbf{p}' \right) = \frac{\Delta^2 \mathbf{p}}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + d^2})^3}, \\ \mathbf{p} \overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}} = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{F}^{+2}(p') \mathbf{p}' d\mathbf{p}' = \frac{\Delta^2 \mathbf{p}}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + \Delta^2})^3},\end{aligned}$$

$$\mathbf{p} \overline{\mathfrak{F}_\omega^+ \mathfrak{G}_\omega} = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{F}^+(p') \mathfrak{G}(p') \mathbf{p}' d\mathbf{p}' =$$

$$= \frac{i\Delta\omega p}{4\tau_1 \eta_\omega (\sqrt{\omega^2 + \Delta^2})^3}$$

Решение приводит к выражениям для $\Lambda^{(1)}(\omega), \Lambda^{(2)}(\omega)$:

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}(\omega) = \frac{\Delta^2}{2\tau_1 (\omega^2 + \Delta^2) \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)}. \\ \Lambda^{(2)}(\omega) = \frac{i\Delta\omega}{2\tau_1 (\omega^2 + \Delta^2) \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)}.\end{aligned}$$

Подстановка последних в (39.26) и подстановка $\Pi^{(1)}(p, p)$ в (39.24) дают следующее выражение для ядра $Q(k)$:

$$\begin{aligned}Q \equiv Q(k) = \frac{Ne^2}{m} \left\{ 1 + T \sum_\omega \int d^2 [\xi^2 - \omega^2 \eta_\omega^2 + \Delta^2 \eta_\omega^2] X \right. \\ \left. X \left(1 + \frac{\Delta^2}{2\tau_1 (\omega^2 + \Delta^2)^{3/2} \eta_{\omega ir}} \right) + \frac{2\Delta^2 \omega^2 \eta_\omega^2}{2\tau_1 (\omega^2 + \Delta^2)^{3/2} \eta_{i\omega tr}} \right\} \frac{1}{[\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2) \eta_\omega^2]^2} \} \\ (\text{мы ввели обозначение } \eta_{\omega tr} = 1 + \frac{1}{2\tau_{tr} \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}). \text{ Здесь, как}\end{aligned}$$

в §37, мы снова сталкиваемся с формально расходящимся интегралом. По тем же основаниям в первую очередь следует выполнять суммирование по частотам. Сгруппировав в круглых скобках члены в виде $\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2) \eta_\omega^2 - 2\omega^2 \eta_\omega^2$, воспользуемся преобразованием Абеля, обобщающим для рядов принцип интегрирования по частям. Именно, имеет место

$$\sum_{n=1}^k (B_n - B_{n-1}) u_n = B_k u_k - B_0 u_1 - \sum_{n=1}^{k-1} (u_{n+1} - u_n) B_n.$$

Применяя это к ряду

$$2\pi T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + (\Delta^2 + \omega^2) r_\omega^2}$$

где

$$B_n = (2n + 1)\pi T = \omega,$$

$$B_n - B_{n-1} = 2\pi T,$$

удается сократить формально расходящиеся члены в (39.27).

После этого получаем:

$$Q = \frac{Ne^2}{m} 2\pi T \Delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2) \left(\sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)}.$$

В эту формулу входит только «транспортное» время между соударениями. Для глубины проникновения δ имеем:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{4\pi Q}}$$

При $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$ эта формула переходит в обычную лондоновскую формулу:

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}},$$

где N_s - «число сверхпроводящих электронов».

В обратном случае $l \ll \varepsilon_0$ можно пренебречь корнем в скобке (39.28). Остающийся ряд легко суммируется.

В результате для глубины проникновения «грязных» сплавов получаем:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Delta \sigma \text{th} \frac{\Delta}{2T}}},$$

где σ - проводимость нормального металла.

11 Основы флюктуаций по Варламову и Ларкину

Введение

резистивного перехода в сверхпроводящее состояние в аморфных пленках висмута [37]. Форма перехода великолепно совпала с теоретическим предсказанием.

В теории БКШ [19] учитываются лишь те куперовские пары которые образуют Бозе-конденсат. Построение же теории сверхпроводящих флюктуаций заключается в учете неравновесных куперовских пар пребывающих в надконденсатных состояниях. При описании некоторых явлений эти куперовские пары ведут себя подобно квазичастицам, но с одним существенным отличием. В то время как энергия хорошо определенной квазичастицы должна быть много больше ее обратного времени жизни, в случае флюктуационной куперовской пары ее «энергия связи» E_0 оказывается того же порядка. Время жизни флюктуационной куперовской пары τ_{GL} определяется процессом ее распада на два свободных электрона. Очевидно, что в самой точке перехода куперовские пары начинают конденсироваться, и соответствующее $\tau_{GL} = \infty$. Следовательно, на основании анализа размерностей, естественно предположить, что $\tau_{GL} \sim \hbar/k_B(T - T_c)$. Микроскопическая теория флюктуаций подтверждает эту гипотезу и дает точную величину численного коэффициента:

$$\tau_{GL} = \frac{\pi\hbar}{8k_B(T - T_c)}$$

Другое важное отличие куперовских пар от квазичастиц заключается в их большом размере $\xi(T)$. Этот размер определяется тем расстоянием, на которое образующие флюктуационную куперовскую пару электроны могут удалиться друг от друга за время жизни τ_{GL} . В случае грязного сверхпроводника движение электронов носит диффузионный характер с коэффициентом диффузии $D = v_F^2 \tau / D$ (здесь v_F - фермиевская скорость электрона, D - размерность пространства, τ - время упругого рассеяния электронов на примесях², и $\xi_d(T) = \sqrt{D\tau_{\text{GL}}} \sim v_F \sqrt{\tau \tau_{\text{GL}}}$). В случае чистого сверхпроводника, где $k_B T \tau \gg \hbar$, рассеяние электронов на примесях больше не оказывает влияния на электронные корреляции. В этом случае время электронного баллистического движения, определяющееся из соотношения неопределенности как $\tau_{\text{bal}} \sim \hbar / k_B T$, оказывается короче времени упругого рассеяния на примесях τ . Поэтому при определении эффективного размера пары в случае чистого сверхпроводника вместо τ должно использоваться именно это время: $\xi_c(T) \sim v_F \sqrt{\hbar \tau_{\text{GL}} / k_B T}$. В обоих случаях длина когерентности растет по мере приближения к критической температуре, как $\epsilon^{-1/2}$, где

$$\epsilon = \ln \frac{T}{T_c} \approx \frac{T - T_c}{T_c} \ll 1$$

есть приведенная температура³. Таким образом, для длины когерентности можно записать единую формулу ($\xi = \xi_{c,d}$):

$$\xi(T) = \frac{\xi}{\sqrt{\epsilon}}$$

Микроскопический анализ в случае изотропной ферми-поверхности позволяет явно выразить ξ при произвольной концентрации примесей через скорость Ферми и время упругого рассеяния (см. Приложение А).

Наконец, необходимо отчетливо понимать, что, хотя флюктуационные куперовские пары и могут в некоторых случаях рассматриваться как классические объекты, однако, при этом они проявляют себя скорее как релей-джинсовские классические поля, чем как Больцмановские частицы. Это означает, что в общем распределении Бозе - Эйнштейна, описывающим их функцию распределения по импульсам центра масс, фигурируют лишь малые энергии $\mathcal{E}(p)$ и соответствующая экспонента может быть разложена:

$$n(p) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\mathcal{E}(p)}{k_B T}\right) - 1} = \frac{k_B T}{\mathcal{E}(p)}$$

Именно по этой причине более подходящим инструментом для изучения флюктуационных явлений служит временное уравнение Гинзбурга - Ландау для классических полей, а не кинетическое уравнение Больцмана. Тем не менее, при обсуждениях на качественном уровне, часто оказывается полезным представление о флюктуационных куперовских парах как о газе частиц с концентрацией⁴ $n_s^{(D)} = \int n(p) \frac{d^D p}{(2\pi\hbar)^D}$.

² Строго говоря, под τ в большинстве полученных ниже результатов следует понимать электронное транспортное время τ_{tr} . Тем не менее, поскольку, как известно, в случае изотропного рассеяния эти величины совпадают, то мы в целях упрощения записи будем повсеместно использовать символ τ .

³ В литературе приведенную температуру часто обозначают как τ . На протяжении всей книги мы будем использовать для нее обозначение ϵ , так как символ τ уже задействован нами в качестве электронного времени упругого рассеяния

⁴ Определение концентрации введено для (D)-мерного пространства. Это означает, что оно определяет нормальную объемную концентрацию частиц в трехмерном случае, число частиц на единицу площади в двумерном и число частиц на единицу длины в одномерном. Привычная трехмерная концентрация n может быть определена посредством формул $n = n_s^{(2)}/d$ (d - эффективная толщина пленки) и $n = n_s^{(1)}/S$ (S - эффективное сечение проволоки)

Ниже будет показано, как в рамках феноменологической теории Гинзбурга - Ландау, так и посредством микроскопической теории флуктуаций, что вблизи перехода

$$\mathcal{E}(p) = \alpha k_B (T - T_c) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} = \frac{1}{2m^*} \left[\frac{\hbar^2}{\xi^2(T)} + \mathbf{p}^2 \right].$$

Вдали от температуры перехода зависимость $n(p)$ оказывается более сложной, чем (1.5), однако ее всегда можно записать в форме

$$n(p) = \frac{m^* k_B T}{\hbar^2} \xi^2(T) f \left(\frac{\xi(T)p}{\hbar} \right).$$

В классической теории поля понятия функции распределения частиц $n(p)$ (пропорциональной $\mathcal{E}^{-1}(p)$ в нашем случае) и массы флуктуационной куперовской пары m^* определены плохо. В то же время характерная величина импульса центра масс куперовской пары может быть строго введена и связана с величиной длины когерентности: $p_0 \sim \hbar/\xi(T)$. Таким образом, комбинация двух плохо определенных величин $m^* \mathcal{E}(p_0)$ может быть строго определена как $m^* \mathcal{E}(p_0) \sim p_0^2 \sim \hbar^2/\xi^2(T)$. Заметим, что концентрация частиц входит в формулы для многих физических величин в комбинации n/m^* . Вследствие упомянутого выше наблюдения:

$$\frac{n_s^{(D)}}{m^*} = \frac{k_B T}{m^* \mathcal{E}(p_0)} \left(\frac{p_0}{\hbar} \right)^D \sim \frac{k_B T}{\hbar^2} \xi^{2-D}(T)$$

Величина p_0^D в последней формуле представляет собой оценку результата интегрирования по импульсам.

В качестве примера применения найденного соотношения мы, основываясь на формуле Друде, можем оценить вклад флуктуационных куперовских пар в проводимость нормального металла вблизи сверхпроводящего перехода:

$$\sigma = \frac{n_s^{(D)} e^2 \tau}{m^*} \Rightarrow \frac{k_B T}{\hbar^2} d^{D-3} \xi^{2-D}(T) (2e)^2 \tau_{\text{GL}}(\epsilon) \sim \epsilon^{D/2-2}$$

Аналогично, основываясь на известной формуле Ланжевена для атомного диамагнетизма, можно качественно понять рост диамагнитной восприимчивости металла при приближении к сверхпроводящему переходу 5:

$$\chi = -\frac{e^2}{c^2} \frac{n_s^{(D)}}{m^*} \langle R^2 \rangle \Rightarrow -\frac{4e^2}{c^2} \frac{k_B T}{\hbar^2} d^{D-3} \xi^{4-D}(T) \sim -\epsilon^{D/2-2}.$$

Мы воспользовались здесь соотношением (1.8).

Помимо приведенных примеров прямого влияния флуктуаций на свойства сверхпроводников, имеет место и их косвенное проявление посредством квантовой интерференции, а также ввиду перераспределения электронной плотности состояний вблизи уровня Ферми при процессах флуктуационного спаривания. Эти эффекты, имея квантовую природу, оказываются гораздо более тонкими и, в отличие от рассмотренных выше прямых вкладов флуктуационных куперовских пар, требуют микроскопического описания.

⁵ Полученная формула оказывается справедливой для размерностей $D = 2, 3$, когда флуктуационные куперовские пары имеют возможность «вращаться» в приложенном магнитном поле, и средний квадрат радиуса такого вращения $\langle R^2 \rangle \sim \xi^2(T)$. «Размерные» эффекты, важные для низкоразмерных образцов, будут рассмотрены позже.

11.1 2.1. Теория Гинзбурга - Ландау

11.1.1 2.1.1. Функционал Гинзбурга - Ландау

Рассмотрим модель металла, находящегося вблизи перехода в сверхпроводящее состояние. Как известно из статистической физики, полное описание термодинамических свойств системы может быть получено путем вычисления ее статистической суммы¹:

$$Z = \text{tr} \left\{ \exp \left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{T} \right) \right\}.$$

Во Введении уже было сказано, что вблизи сверхпроводящего перехода наряду с фермионными электронными состояниями в металле возникают флюктуационные куперовские пары бозонной природы. Там же отмечалось, что они могут быть описаны посредством классических бозонных полей $\Psi(\mathbf{r})$, которые могут рассматриваться в качестве «волновых функций флюктуационных куперовских пар». Таким образом, вычисление следа в (2.1) может быть разделено на суммирование по «быстрым» электронным степеням свободы и последующее функциональное интегрирование по всевозможным конфигурациям «медленных» волновых функций флюктуационных куперовских пар:

где

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathfrak{D}^2 \Psi(\mathbf{r}) \mathcal{Z}[\Psi(\mathbf{r})] \\ \mathcal{Z}[\Psi(\mathbf{r})] &= \exp \left(-\frac{\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r})]}{T} \right) \end{aligned}$$

есть статистическая сумма системы, отсуммированная по электронным степеням свободы при фиксированном бозонном поле $\Psi(\mathbf{r})$.

«Медленность» волновых функций означает, что они предполагаются меняющимися на расстояниях, значительно превышающих атомные. Классическая часть гамильтониана, зависящая от бозонных полей, может быть выбрана в духе теории фазовых переходов Ландау. Однако, ввиду пространственной зависимости волновых функций, Гинзбург и Ландау включили в нее и первый неисчезающий член разложения по градиенту флюктуационного поля (из соображений симметрии он, очевидно, квадратичный). Слабая пространственная зависимость поля позволяет пренебречь следующими членами такого разложения. Таким образом часть гамильтониана системы, связанная с наличием в ней флюктуационных куперовских пар, или так называемый функционал Гинзбурга - Ландау, записывается в виде²:

$$\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r})] = F_N + \int dV \left\{ a|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{b}{2}|\Psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{4m}|\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 \right\}$$

Обсудим его коэффициенты. В соответствии с гипотезой Ландау, коэффициент a обращается в ноль в точке перехода и зависит линейно от $T - T_c$. В нем удобно выделить зависимость от приведенной температуры ϵ , характеризующей степень близости системы к точке перехода и представить в виде $a = \alpha T_c \epsilon$. Все коэффициенты α , b и m предполагаются положительными и не зависящими от температуры. Что касается величин этих коэффициентов, следует сделать следующее замечание. Один из них всегда может быть выбран произвольно: эта возможность связана с произволом в нормировке волновой функции куперовской пары. Тем не менее, произведение двух из них фиксируется размерным анализом: $ma \sim \xi^{-2}(T)$. Другой комбинацией коэффициентов, независящей от нормировки волновой функции

¹ Далее по тексту, если не оговорено иное, мы пользуемся системой единиц $\hbar = k_B = c = 1$.

и температуры, служит α^2/b . Легко видеть, что эта величина имеет размерность плотности состояний. Поскольку эти коэффициенты возникли в результате суммирования по электронным степеням свободы, то единственным естественным кандидатом для этой величины может служить лишь плотность одноэлектронных состояний ν (на один спин).

Можно заметить, что произвол в нормировке амплитуды параметра порядка приводит к неоднозначности в выборе массы куперовской пары введенной в (2.4) как $2m$. Действительно, эта величина входит в (2.6) в произведении с коэффициентом α , следовательно один из этих параметров должен быть зафиксирован.

В феноменологической теории Гинзбурга - Ландау нормировка параметра порядка Ψ обычно выбирается таким образом, чтобы коэффициент m соответствовал массе электрона. При этом коэффициент α для D-мерного чистого сверхпроводника определяется выражением

$$\alpha_{(D)} = \frac{2D\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{T_c}{E_F}$$

Более удобной, однако, оказывается другая нормировка, при которой параметр порядка, обозначаемый $\Delta(\mathbf{r})$, в однородном случае равен щели в спектре одночастичных возбуждений сверхпроводника. Как будет показано ниже, вблизи T_c микроскопическая теория позволяет представить свободную энергию сверхпроводника в форме разложения Гинзбурга Ландау именно по степеням параметра $\Delta(\mathbf{r})$. При этом оказываются известными и точные значения коэффициентов α и b :

$$4m\alpha T_c = \xi^{-2}; \quad \frac{\alpha^2}{b} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu$$

где $\zeta(x)$ есть дзета-функция Римана, $\zeta(3) = 1,202$.

При этом параметр теории Гинзбурга - Ландау $C = 1/(4m)$ оказывается зависящим от концентрации примесей.

11.1.2 2.1.2. Скачок теплоемкости

В качестве первого шага в теории фазовых переходов второго рода Ландау делается предположение о независимости параметра порядка Ψ от координат. В пределе достаточно большого объема системы V это предположение позволяет вычислить функциональный интеграл в (2.2) посредством метода наискорейшего спуска. Его седловая точка определяет равновесное значение параметра порядка

$$|\tilde{\Psi}|^2 = \begin{cases} -\frac{\alpha T_c \epsilon}{b}, & \epsilon < 0 \\ 0, & \epsilon > 0 \end{cases}$$

Связанная с переходом флуктуационная часть свободной энергии определяется минимальным значением функционала (2.4):

$$F = (\mathcal{F}[\Psi])_{\min} = \mathcal{F}[\tilde{\Psi}] = \begin{cases} F_N - \frac{\alpha^2 T_c^2 \epsilon^2}{2b} V, & \epsilon < 0 \\ F_N, & \epsilon > 0. \end{cases}$$

Вычисляя вторую производную от (2.8), можно найти величину скачка удельной теплоемкости в точке фазового перехода второго рода:

² Для простоты магнитное поле пока предполагается равным нулю.

$$\begin{aligned}\Delta C = C_S - C_N &= \frac{T_c}{V} \left(\frac{\partial S_S}{\partial T} \right) - \frac{T_c}{V} \left(\frac{\partial S_N}{\partial T} \right) = \\ &= -\frac{1}{VT_c} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2} \right) = \frac{\alpha^2}{b} T_c = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu T_c\end{aligned}$$

Заметим, что скачок в теплоемкости был получен первоначальным стремлением объема системы к бесконечности и лишь последующем приравниванием к нулю относительной температуры ϵ .

11.1.3 2.1.3. Уравнения Гинзбурга - Ландау

Введенный Гинзбургом и Ландау функционал свободной энергии в форме (2.4) стал основой их феноменологической теории сверхпроводимости [23], правильность которой была позже доказана Горьковым [34] в рамках микроскопического подхода [19]. Ввиду своей простоты теория Гинзбурга - Ландау успешно применяется и сегодня.

Начнем с обсуждения тех обобщений, которые необходимо произвести в функционале (2.4) для того, чтобы он оставался верным и в присутствии магнитного поля. Прежде всего он должен быть инвариантным относительно градиентных преобразований, следовательно, оператор импульса $-i\nabla$ следует переписать в его градиентно-инвариантной форме $-i\nabla - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ³. Далее, присутствие магнитного поля в объеме приводит к появлению соответствующей плотности магнитной энергии под интегралом в (2.4). Наконец, сверхпроводник с протекающими в нем токами сам взаимодействует со внешним магнитным полем \mathbf{H} . Принимая во внимание указанные три обстоятельства, функционал (2.4), при наличии магнитного поля, можно обобщить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r})] = F_n + \int dV \left\{ a|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{b}{2}|\Psi(\mathbf{r})|^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m}|(-i\nabla - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{8\pi} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right\}.\end{aligned}$$

Уравнения теории сверхпроводимости Гинзбурга - Ландау получаются в результате минимизации функционала (2.10), по параметру порядка $\Psi^*(\mathbf{r})$ и векторному потенциалу $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Полученные таким образом уравнения описывают в общем виде распределение параметра порядка, токов и магнитного поля в сверхпроводнике, помещенном во внешнее магнитное поле \mathbf{H} и пребывающем в состоянии равновесия.

На протяжении нашего дальнейшего изложения мы будем, главным образом, интересоваться учетом флюктуационных эффектов, т. е. рассматривать отклонения от такого равновесия. Для этого мы будем проводить функциональное интегрирование соответствующих выражений по флюктуационным полям. Тем не менее, для удобства дальнейшего чтения, мы начнем со ставшего уже классическим, вывода уравнений Гинзбурга Ландау.

Начнем с вычисления вариации функционала (2.10) возникающей при варьировании $\Psi^*(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}\delta_\Psi \mathcal{F} = \int dV \left\{ a\Psi(\mathbf{r})\delta\Psi^*(\mathbf{r}) + b\Psi(\mathbf{r})|\Psi(\mathbf{r})|^2\delta\Psi^*(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4m}[i\nabla\delta\Psi^*(\mathbf{r}) - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\delta\Psi^*(\mathbf{r})][-i\nabla\Psi(\mathbf{r}) - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})] \right\} = 0\end{aligned}$$

³ Точное значение эффективного заряда $q^* = -2e$ (e - положительно) в рамках феноменологии Гинзбурга - Ландау определено быть не может. Оно было найдено Горьковым позже, при выводе их уравнений как предельного случая микроскопической теории сверхпроводимости БКШ [34].

Для того, чтобы вынести $\delta\Psi^*(\mathbf{r})$ за скобки, можно воспользоваться тождеством:

$$\operatorname{div}(\delta\Psi^* \cdot \mathbf{a}) = \delta\Psi^* \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}(\delta\Psi^*(\mathbf{r}))$$

где $\mathbf{a} = -i\nabla\Psi(\mathbf{r}) - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})$, и представить соответствующий интеграл во второй строке (2.11) как

$$\int dV (\nabla\delta\Psi^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}) = - \int dV \delta\Psi^* \operatorname{div} \mathbf{a} + \int dV \operatorname{div}(\delta\Psi^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}).$$

Последний интеграл может быть преобразован по теореме Гаусса в поверхностный, что дает:

$$\begin{aligned} \delta_\Psi \mathcal{F} = \int dV & \left\{ a\Psi(\mathbf{r}) + b\Psi(\mathbf{r})|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{4m}(i\nabla - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2\Psi(\mathbf{r}) \right\} \delta\Psi^*(\mathbf{r}) + \\ & + \oint_S \{-i\nabla\Psi(\mathbf{r}) - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\} \delta\Psi^*(\mathbf{r}) dS \end{aligned}$$

Это выражение может быть тождественно равно нулю при произвольной $\delta\Psi^*(\mathbf{r})$ только в том случае, когда оба выражения в фигурных скобках равны нулю. Такое требование приводит к получению первого из системы уравнений Гинзбурга — Ландау, а также граничного условия к нему:

$$\begin{aligned} a\Psi(\mathbf{r}) + b\Psi(\mathbf{r})|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{4m}(i\nabla - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2\Psi(\mathbf{r}) &= 0 \\ [-i\nabla\Psi(\mathbf{r}) - 2e\mathbf{A}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности сверхпроводника. Минимизация функционала (2.10) по $\Psi(\mathbf{r})$ приводит к уравнению на $\Psi^*(\mathbf{r})$, которое является комплексно сопряженным с (2.14).

Полученное уравнение содержит две переменных: параметр порядка и векторный потенциал магнитного поля. Для того, чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений Гинзбурга - Ландау, следует повторить вариационную процедуру по оставшейся переменной $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Это приводит к появлению уравнения максвелловского типа, связывающего вектор-потенциал магнитного поля со сверхпроводящим током:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= 4\pi \mathbf{j}_s \\ \mathbf{j}_s &= -\frac{ie}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) - \frac{2e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

В однородном случае параметр порядка $\Psi = \tilde{\Psi} = \text{const}$ не зависит от координат, и система уравнений (2.16)-(2.17) сводится к:

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{j}_s &= \lambda^{-2} \mathbf{A} \\ \lambda^{-2} &= \frac{8\pi e^2}{m} |\tilde{\Psi}|^2 \end{aligned}$$

Величина $|\tilde{\Psi}|^2$ в этом случае определяется выражением (2.7). Выбирая в нем коэффициент α согласно (A.12), можно убедиться, что равновесное значение параметра порядка $|\tilde{\Psi}|^2$ совпадает с величиной сверхтекучей плотности n_s^4 , которая связывает в микроскопической теории сверхпроводимости сверхток \mathbf{j}_s с вектор-потенциалом \mathbf{A} [19]:

$$\mathbf{j}_s = -n_s \frac{(2e)^2}{2m} \mathbf{A}$$

Заметим, что применяя оператор $\nabla \times$ к обоим частям уравнения (2.16), можно воспроизвести уравнение теории братьев Лондонов:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \lambda^{-2} \mathbf{B}.$$

Вошедшая в него величина λ есть глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник и она связана со сверхтекущей плотностью соотношениями (2.18) – (2.20).

Система уравнений Гинзбурга - Ландау (2.14), (2.16), (2.17) принимает особенно простой вид для обезразмеренного параметра порядка, отнормированного на его равновесное значение в однородном случае (2.7) $\psi(r) = \Psi(\mathbf{r})/\tilde{\Psi} = (b/|a|)^{1/2}\Psi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \xi^2(T) \left(i\nabla - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \psi - \psi + \psi |\psi|^2 &= 0 \\ \text{rot rot } \mathbf{A} &= -\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2} \mathbf{A}, \\ \left[i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right] \psi \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

11.2 2.2. Вклад флюктуаций в теплоемкость

11.2.1 2.2.1. Точное решение задачи в случае размерности $D = 0$

В системе с конечным размером флюктуации размывают скачок в теплоемкости. Убедимся в этом на примере малого сверхпроводящего образца с характерным размером $d \ll \xi(T)$. В этом случае главный вклад во флюктуационную часть свободной энергии вносит координатно-независимая мода $\Psi_0 = \Psi\sqrt{V}$:

$$\begin{aligned} Z_{(0)} &= \int d^2\Psi_0 \exp \left(-\frac{\mathcal{F}[\Psi_0]}{T} \right) = \pi \int d|\Psi_0|^2 \exp \left(-\frac{(a|\Psi_0|^2 + \frac{b}{2V}|\Psi_0|^4)}{T} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 VT}{2b}} \exp(x^2) (1 - \text{erf}(x)) \Bigg|_{x=a\sqrt{\frac{V}{2bT}}} \end{aligned}$$

Вычисляя вторую производную этого точного выражения [42], можно найти температурную зависимость теплоемкости сверхпроводящей гранулы в окрестности фазового перехода (см. рис. 2.1). Легко видеть, что эта функция аналитична по температуре, так что в нульмерной системе флюктуации устраниют фазовый переход. Скачок теплоемкости оказывается размытым вблизи температуры T_{c0} в области ширины порядка $x \sim 1$, т. е.

$$\epsilon_{\text{cr}} = Gi_{(0)} = \frac{\sqrt{7\zeta(3)}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\nu T_c V}} \approx 13,3 \left(\frac{T_{c0}}{E_F} \right) \sqrt{\frac{\xi_0^3}{V}}$$

Мы предположили здесь, что гранула является чистой; T_{c0} - критическая температура перехода, вычисленная в приближении среднего поля, ξ_0 -

⁴ Плотность сверхтекущей компоненты $n_s = 12/N_s$, где N_s - плотность сверхпроводящих электронов в теории Лондонов.

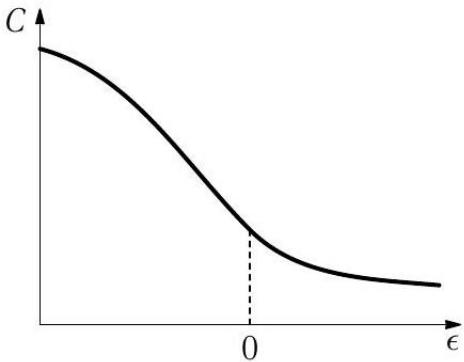


Рис. 2.1. Температурная зависимость теплоемкости сверхпроводящей гранулы вблизи точки фазового перехода

корреляционная длина при нуле температур (см. Приложение А) для соответствующего материала в массивном образце. Отметим, что ширина размытия не зависит от концентрации примесей. Из найденной формулы видно, что размытие перехода остается весьма узким ($\epsilon_{\text{cr}} \ll 1$) до тех пор, пока объем гранулы $V \gg (\nu T_c)^{-1}$. Этот критерий означает, что среднее расстояние между уровнями размерного квантования в грануле (так называемый спэйсинг)

$$\delta = (\nu V)^{-1}$$

все еще остается много меньшим величины критической температуры перехода T_{c0} , вычисленной в приближении среднего поля.

Вне критической области, где $G_{(0)} \ll \epsilon \ll 1$, можно воспользоваться асимптотическим выражением для функции $\text{erf}(x)$ и получить

$$F_{(0)} = -T \ln Z_{(0)} = -T \ln \frac{\pi}{\alpha \epsilon}.$$

Вычисление соответствующей второй производной приводит к выражению для флюктуационной части теплоемкости в этой области температур:

$$\delta C_{(0)} = \frac{1}{V \epsilon^2}.$$

Экспериментальное исследование теплоемкости малых оловянных частиц вблизи сверхпроводящего перехода было выполнено в [43].

11.2.2 2.2.2. Произвольная размерность: случай $T \geq T_c$

Перейдем к обсуждению флюктуационного вклада в теплоемкость сверхпроводника для пространства произвольной размерности. В этом случае функциональный интеграл в выражении (2.3) со свободной энергией в форме (2.4) в экспоненте вычислить точно не представляется

возможным из-за наличия члена, зависящего от $\nabla \Psi$; задача оказывается гораздо сложнее только что решенной нульмерной. Однако, это можно сделать в области слабых флюктуаций, где их взаимодействие слабо и соответствующим ему членом четвертого порядка можно пренебречь. Мы это сделаем ниже, а пока покажем, как можно легко оценить флюктуационный вклад в теплоемкость для образца произвольной размерности на основании полученного только что результата для гранулы. Действительно, объем образца можно разделить на области размером в $\xi(T)$, которые в смысле сверхпроводимости слабо коррелированы между собой. Тогда полная свободная энергия образца может быть оценена как свободная энергия одной такой гранулы (2.27), умноженная на их полное число $N_{(D)} = V \xi^{-D}(T)$:

$$F_{(D)} = -TV\xi^{-D}(T) \ln \frac{\pi}{\alpha\epsilon}.$$

ак мы увидим, эта формула дает правильную температурную зависимость для свободной энергии в случае четных размерностей. Более аккуратное рассмотрение устраниет из нее зависимость $\ln \epsilon$ для нечетного числа измерений.

Перейдем к вычислению флюктуационного вклада в теплоемкость сверхпроводника в его нормальной фазе, не заходя в критическую область (количественную оценку ее ширины мы приведем ниже). При таких температурах величина флюктуационного параметра порядка достаточно мала для того, чтобы можно было пренебречь членом четвертого порядка по $\Psi(\mathbf{r})$ в сравнении с соответствующим квадратичным вкладом. После разложения параметра порядка в ряд Фурье функционал Гинзбурга - Ландау приобретает вид суммы энергий независимых флюктуационных мод:

$$F[\Psi_{\mathbf{k}}] = F_N + \sum_{\mathbf{k}} \left[a + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \right] |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 = F_N \alpha T_c \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon + \xi^2 \mathbf{k}^2) |\Psi_{\mathbf{k}}|^2$$

Здесь $\Psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV$, а суммирование проводится по волновым векторам \mathbf{k} (флюктуационные моды). В образце с размерами L_x, L_y, L_z $k_i L_i = 2\pi n_i$. Функциональный интеграл в соответствующей статистической сумме (2.3) факторизуется в произведение интегралов гауссового типа по таким модам:

$$Z = \prod_{\mathbf{k}} \int d^2 \Psi_{\mathbf{k}} \exp \left\{ -\alpha \left(\epsilon + \frac{\mathbf{k}^2}{4m\alpha T_c} \right) |\Psi_{\mathbf{k}}|^2 \right\}$$

Вычисляя их, можно найти флюктуационный вклад в свободную энергию:

$$F(\epsilon > 0) = -T \ln Z = -T \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi}{\alpha \left(\epsilon + \frac{\mathbf{k}^2}{4m\alpha T_c} \right)}.$$

Имея это выражение, уже несложно вычислить флюктуационную поправку к теплоемкости сверхпроводника в указанной области температур выше точки перехода. Поскольку мы будем интересоваться лишь наиболее сингулярным вкладом по ϵ^{-1} , дифференцирование по температуре можно заменить дифференцированием по ϵ :

$$\delta C_+ = -\frac{1}{VT_c} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2} \right) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\left(\epsilon + \frac{\mathbf{k}^2}{4m\alpha T_c} \right)^2}$$

Результат дальнейшего суммирования по \mathbf{k} существенно зависит от величины линейных размеров образца, а именно, от его эффективной размерности. как это видно из (2.33), масштаб, с которым следует сравнивать эти размеры, определяется величиной $(4m\alpha T_c \epsilon)^{-\frac{1}{2}}$, которая, как уже отмечалось, определяет эффективный размер флюктуационной куперовской пары $\xi(T)$. Таким образом, в случае, когда все размеры образца существенно превышают $\xi(T)$, суммирование по n_x, n_y, n_z может быть заменено интегрированием по $(2\pi)^{-3} L_x L_y L_z dk_x dk_y dk_z$. В случае произвольной размерности флюктуационная поправка к теплоемкости может быть записана как

$$\delta C_+ = \frac{V_D}{V} \int \frac{1}{\left(\epsilon + \frac{\mathbf{k}^2}{4m\alpha T_c} \right)^2} \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} = \vartheta_D \frac{V_D}{V} \frac{(4m\alpha T_c)^{\frac{D}{2}}}{\epsilon^{2-\frac{D}{2}}},$$

где $V_D = V, S, L, 1$ для $D = 3, 2, 1, 0$. Имея ввиду последующие применения, коэффициент ϑ_D удобно записать в форме, справедливой для произвольной размерности D , включая

дробные. При этом под пространством дробной размерности мы подразумеваем лишь соответствующее правило вычисления интеграла по импульсам в сферических координатах: $\int d^D \mathbf{k} / (2\pi)^D = \mu_D \int k^{D-1} dk$, где

$$\mu_D = \frac{D}{2^D \pi^{D/2} \Gamma(D/2 + 1)}$$

а $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера. Коэффициент в (2.34) может также быть выражен посредством гамма-функции:

$$\vartheta_D = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{2^D \pi^{D/2}}$$

что дает $\vartheta_1 = 1/4$, $\vartheta_2 = 1/4\pi$ и $\vartheta_3 = 1/8\pi$.

В случае малых частиц с характерным размером $d \lesssim \xi(\epsilon)$ соответствующие флюктуационные вклады в свободную энергию и теплоемкость совпадают с асимптотиками точных результатов (2.27) и (2.28). Из приведенных выше формул легко видеть, что роль флюктуаций возрастает с уменьшением эффективного размера образца или параметра $t\alpha$. Как следует из микроскопической теории, такое уменьшение $t\alpha$ происходит в грязных сверхпроводниках с малой длиной свободного пробега электронов.

11.2.3 2.2.3. Произвольная размерность: случай $T < T_c$

Общие выражения (2.2) и (2.4) позволяют найти флюктуационный вклад в теплоемкость сверхпроводника не только выше, но и ниже T_c . Для вычисления последнего вновь ограничимся областью температур не слишком близких к T_c снизу, где флюктуации достаточно слабы. Параметр порядка может быть представлен в виде суммы равновесной $\tilde{\Psi}$ (см. (2.7)) и флюктуирующей $\psi(\mathbf{r})$ частей:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \tilde{\Psi} + \psi(\mathbf{r})$$

Удерживая в (2.4) члены вплоть до второго порядка по $\psi(\mathbf{r})$ и вплоть до четвертого по $\tilde{\Psi}$, можно найти:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\tilde{\Psi}] = & \exp\left(-\frac{a\tilde{\Psi}^2 + b/2\tilde{\Psi}^4}{T}\right) \prod_{\mathbf{k}} \int d\text{Re } \psi_{\mathbf{k}} d\text{Im } \psi_{\mathbf{k}} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{T} \left[\left(3b\tilde{\Psi}^2 + a + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}\right) \text{Re}^2 \psi_{\mathbf{k}} + \left(b\tilde{\Psi}^2 + a + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}\right) \text{Im}^2 \psi_{\mathbf{k}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Напомним, что $\tilde{\Psi}$ мы выбрали вещественной. Выполняя интегрирование по вещественной и мнимой частям параметра порядка, можно получить следующее выражение для флюктуационной части свободной энергии:

$$F = -\frac{T}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \ln \frac{\pi T_c}{3b\tilde{\Psi}^2 + a + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}} + \ln \frac{\pi T_c}{b\tilde{\Psi}^2 + a + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}} \right\}$$

Обсудим полученный результат. Он справедлив как выше, так и ниже T_c . Два слагаемых в нем соответствуют вкладам флюктуаций модуля и фазы параметра порядка. Выше $T_c \tilde{\Psi} \equiv 0$ и эти вклады оказываются равными: флюктуации модуля и фазы в отсутствие $\tilde{\Psi}$ представляют собой просто колебания двух равнозначных степеней свободы комплексного скаляра, которым является параметр порядка. Ниже T_c , симметрия системы понижается (см. (2.7)). Флюктуации модуля порядка остаются того же типа, что и выше T_c , в то

время как характер колебаний фазы, в соответствии с теоремой Голдстоуна, кардинально меняется. Энергия этих флуктуаций стремится к нулю при $k \rightarrow 0$, и в этом пределе она перестает зависеть от фазы ψ .

Подстановка (2.7) в (2.39) приводит к исчезновению температурной зависимости вклада, порожденного фазовыми флуктуациями. Так как флуктуационный вклад в теплоемкость определяется второй производной по температуре от (2.39), то легко убедиться, что он зависит только от флуктуаций модуля параметра порядка. В результате флуктуационная поправка к теплоемкости ниже T_c оказывается пропорциональной той же величине, вычисленной выше точки перехода:

$$\delta C_- = 2^{\frac{D}{2}-1} \delta C_+$$

Таким образом, в рамках предложенной теории мы нашли, что теплоемкость сверхпроводника стремится к бесконечности с обеих сторон сверхпроводящего перехода. Однако, наложенные выше ограничения не позволяют говорить всерьез о расходимости флуктуационного вклада в теплоемкость в самой точке перехода. Наши вычисления справедливы лишь при тех температурах, где поправка остается малой по сравнению со скачком теплоемкости, вычисленным в приближении среднего поля. Ниже мы обсудим количественный критерий применимости предложенной теории возмущений.

11.3 2.3. Флуктуационный диамагнетизм

11.3.1 2.3.1. Предварительные замечания

В этом разделе мы обсудим влияние флуктуаций на намагниченность и магнитную восприимчивость сверхпроводника, находящегося при температуре несколько выше перехода. Будучи предвестником мейснеровского диамагнетизма, флуктуационная поправка к восприимчивости даже вне критической области может быть сравнима, а то и превышать диамагнитную или парамагнитную восприимчивость нормального металла и, следовательно, может быть обнаружена экспериментально. Как уже было продемонстрировано во Введении, температурная зависимость флуктуационной диамагнитной восприимчивости может быть качественно найдена даже на основании простых рассуждений, подобных выводу атомного диамагнетизма Ланжевена. Однако, применять их к низкоразмерным образцам следует с осторожностью, и ниже мы покажем, как это делается.

Что касается трехмерных образцов, то следует отметить, что выражение (1.10), будучи представленным посредством корреляционной длины $\xi(T)$, оказывается справедливым в области более широкой, чем обсуждаемая выше область слабых флуктуаций (ГЛ-область). Действительно, в ГЛ-области ($|\epsilon| \gtrsim Gi$) $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-1/2}$ и такое представление тривиально. Ситуация изменяется в непосредственной близости точки перехода, где становится существенным взаимодействие флуктуаций. Здесь само присутствие куперовских пар начинает влиять на корреляционную длину. Согласно скэйлинговой гипотезе (которую мы подробно обсудим ниже) вблизи перехода единственным масштабом в системе остается корреляционная длина, по-прежнему степенным образом зависящая от температуры: $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-\nu}$, однако взаимодействие флуктуаций изменяет критический индекс по сравнению с его ГЛ-величиной $\nu = 1/2$. Та же скэйлинговая гипотеза позволяет записать для диамагнитной восприимчивости общее соотношение:

$$\chi_{(3)} \sim -e^2 T \xi(T) \sim -\chi_P \epsilon^{-1/2} \begin{cases} 1, & \epsilon \gtrsim Gi \\ \left(\frac{\epsilon}{Gi}\right)^{1/2-\nu}, & \epsilon \lesssim Gi, \end{cases}$$

которое оказывается справедливым также и в непосредственной окрестности точки перехода. Здесь для того, чтобы определить масштаб флуктуационных эффектов, мы

ввели паулиевскую парамагнитную восприимчивость $\chi_P = e^2 v_F / 4\pi^2$.

Далее, формула Ланжевена позволяет расширить оценку флуктуационного диамагнитного эффекта и в другую сторону от ГЛ-области: на температуры $T \gg T_c$. Вдали от перехода корреляционная длина становится медленной функцией температуры, поэтому для чистого сверхпроводника, где $\xi(T) \sim v_F/T$, можно записать

$$\chi_{(3c)}(T \gg T_c) \sim -e^2 T \xi(T) \sim -\chi_P$$

и убедиться, что флуктуационный магнетизм дает вклад порядка паулиевского даже вдали от перехода. Более точные микроскопические вычисления $\chi_{(3)}(T \gg T_c)$ приводят к появлению $\ln^2(T/T_c)$ в знаменателе выражения (2.41).

В двумерном случае выражение (1.10) применимо для оценки $\chi_{(2)}$, когда магнитное поле приложено перпендикулярно плоскости, позволяя флуктуационным куперовским парам вращаться в ней:

$$\chi_{(2c)}(T) \sim e^2 \frac{n}{m} < R^2 > \sim e^2 T \xi^2(T) \sim -\chi_P \frac{E_F}{T - T_c}.$$

Этот результат справедлив в широком диапазоне температур и в чистом случае, даже вдали от перехода, превышает паулиевский парамагнетизм по параметру $\frac{E_F}{T}$.

Флуктуационные куперовские пары ведут себя как двумерные роторы также и в тонкой пленке ($d \ll \xi(T)$), помещенной в перпендикулярное магнитное поле. Так что формула (1.10) остается верной и тут, хотя следует принять во внимание, что в этом случае восприимчивость вычисляется на единицу площади пленки. Таким образом, для реалистического с экспериментальной точки зрения случая грязной пленки достаточно подставить в (2.42) явное выражение (A.4) для корреляционной длины:

$$\chi_{(2d)} \sim \frac{e^2 T}{d} \xi^2(T) \sim -\chi_P \left(\frac{l}{d} \right) \frac{T_c}{T - T_c}.$$

Перейдем к обсуждению важного случая слоистого сверхпроводника (к которым относятся, например, высокотемпературные сверхпроводники). Здесь обычно предполагается, что электроны двигаются свободно в проводящих плоскостях, разнесенных на расстояние s между собой. Движение электронов в поперечном направлении носит туннельный характер с эффективной энергией J . Соответствующая скорость и длина когерентности могут быть оценены в чистом случае как $v_z = \partial E(\mathbf{p})/\partial p_\perp \sim J/p_\perp \sim SJ$ и $\xi_{z,(c)} \sim SJ/T$. В грязном случае анизотропия электронного спектра может быть учтена в духе формулы (A.4), что приводит к $\xi_{z,(d)} \sim \sqrt{D_\perp/T} \sim sJ\sqrt{\tau/T}$, где $D_\perp \sim s^2 J^2 \tau$ есть коэффициент диффузии в направлении поперек слоев.

Начнем со случая слабого магнитного поля, приложенного перпендикулярно проводящим плоскостям слоистого сверхпроводника. Эффективная площадь, заметаемая вращающейся флуктуационной парой, есть $\xi_x(\epsilon)\xi_y(\epsilon)$. Концентрация таких куперовских пар в проводящем слое (1.8) также должна быть модифицирована по сравнению со своим значением в изотропном 3D металле. Если последняя пропорциональна $1/\xi(\epsilon)$, то наличие анизотропии модифицирует этот результат как $\sim 1/\sqrt{\xi_x(\epsilon)\xi_y(\epsilon)}$. Можно сказать, что анизотропия электронного движения приводит к концентрации флуктуационных куперовских пар в проводящих плоскостях и, следовательно, к возрастанию эффективной плотности пар в $\sqrt{\xi_x(\epsilon)\xi_y(\epsilon)}/\xi_z(\epsilon)$ раз по сравнению с ее значением в изотропном случае. Этот рост прекращается, когда $\xi_z(\epsilon)$ достигает величины межплоскостного расстояния s , так что окончательно фактор анизотропии принимает вид: $\sqrt{\xi_x(\epsilon)\xi_y(\epsilon)}/\max\{s, \xi_z(\epsilon)\}$. При его подстановке в формулу Ланжевена (1.10) корень в числителе сокращает такой же корень, происходящий из концентрации флуктуационных пар, приводя к:

$$\chi_{(\text{layer}, \perp)}(\epsilon, H \rightarrow 0) \sim -e^2 T \frac{\xi_x(\epsilon) \xi_y(\epsilon)}{\max\{s, \xi_z(\epsilon)\}}$$

Из этой формулы очевидно существование кроссовера между $2D$ и $3D$ температурными режимами: по мере того, как температура приближается к T_c , зависимость диамагнитной восприимчивости от ϵ меняется с $1/\epsilon$ на $1/\sqrt{\epsilon}$. Это происходит тогда, когда приведенная температура достигает значения $\epsilon_{\text{cr}} = r (\xi_z(\epsilon_{\text{cr}}) \sim s)$. Параметр анизотропии:

$$r = \frac{4\xi_z^2(0)}{s^2} = \frac{J^2}{T} \begin{cases} \frac{\pi\tau}{4}, & T\tau \ll 1 \\ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T}, & T\tau \gg 1 \end{cases}$$

играет важную роль в теории слоистых сверхпроводников⁵.

Отметим, что этот внутренний кроссовер, присущий системе ввиду анизотропии электронного спектра, носит характер прямо противоположный тому геометрическому кроссоверу, который имеет место в достаточно толстых пленках, когда $\xi(T)$ достигает d . Тогда характерная для $3D$ случая $1/\sqrt{\epsilon}$ зависимость имеет место достаточно далеко от T_c (там, где $\xi(T) \ll d$). Она сменяется на $2D 1/\epsilon$ закон (см. (2.43)) в окрестности перехода (где $\xi(T) \gg d$) [44].

Укажем еще раз, что в сильно анизотропных слоистых сверхпроводниках флюктуационная восприимчивость может существенно превышать диа- и парамагнитный эффекты нормального металла даже относительно далеко от T_c [45, 46].

Перейдем к рассмотрению случая, когда магнитное поле приложено вдоль проводящих слоев. Прежде всего заметим, что флюктуационный диамагнетизм здесь исчезает в пределе $J \sim \xi_z \rightarrow 0$. Действительно, для создания кругового тока флюктуационным парам необходимо как минимум дважды протуннелировать сквозь межплоскостные барьеры, так что:

$$\chi_{(\text{layer}, \parallel)} \sim -e^2 T \frac{\xi_z^2}{\max\{s, \xi_z(T)\}} \sim -\chi_P \left(\frac{sJ}{v_F} \right) \frac{J/T}{\sqrt{\epsilon} \max\{\sqrt{\epsilon}, J/T\}}.$$

В общем случае анизотропного сверхпроводника, выбирая ось z вдоль направления магнитного поля H , для диамагнитной флюктуационной восприимчивости можно записать следующее экстраполяционное выражение:

$$\chi \sim -e^2 T \frac{\xi_x^2(\epsilon) \xi_y^2(\epsilon)}{\max\{\mathfrak{a}, \xi_x(\epsilon)\} \max\{\mathfrak{b}, \xi_y(\epsilon)\} \max\{\mathfrak{s}, \xi_z(\epsilon)\}}.$$

Эта формула оказывается полезной для анализа флюктуационного диамагнетизма в анизотропных сверхпроводниках и образцах пониженной размерности. Она также применима в случае тонкой пленки ($d \ll \xi_z(\epsilon)$), помещенной в перпендикулярное магнитное поле: достаточно заменить в (2.46) $\xi_z(\epsilon)$ на d .

В то же время формула (2.46) неверна в случаях тонкой пленки в параллельном поле, для проволок и гранул. Для этих случаев, тем не менее, по-прежнему можно пользоваться формулой Ланжевена (1.10) с заменой $\langle R^2 \rangle \rightarrow d^2$:

$$\chi_{(D)} \sim -\chi_P \left(\frac{T}{v_F} \right) \xi^{2-D} d^{D-1} \sim \epsilon^{\frac{D}{2}-1}$$

Зависимость флюктуационной части свободной энергии от магнитного поля в этих случаях сводится лишь к учету квадратичного сдвига критической температуры с магнитным полем⁶. Поэтому формула (2.46) может применяться для описания соответствующих

⁵ Мы воспользовались здесь определением r , соответствующим результатам микроскопического рассмотрения (см. раздел 7.3).

диамагнитных восприимчивостей только в достаточно слабых полях $H \ll \Phi_0 / [\xi_x(\epsilon)\xi_y(\epsilon)] = H_{c2}(\epsilon) \ll \ll H_{c2}(0)$.

11.3.2 2.3.2. Флуктуационный диамагнетизм нульмерного образца

Количественный анализ флуктуационного диамагнетизма мы начнем с функционала Гинзбурга - Ландау в присутствии магнитного поля (см. (2.10)).

Флуктуационный вклад в диамагнитную восприимчивость в простейшем случае «нульмерного сверхпроводника»-сферической сверхпроводящей гранулы диаметра $d \ll \xi(\epsilon)$ - был впервые рассмотрен В.В.Шмидтом [42]. В этом случае параметр порядка не зависит от пространственных переменных, и флуктуационный вклад в свободную энергию может быть вычислен точно во всей области перехода, включая критическую, как это было сделано для теплоемкости в отсутствие магнитного поля. Ввиду малости размера гранулы по сравнению с ГЛ-длиной когерентности параметр порядка Ψ не зависит от координат. Далее, принимая благодаря малости размера гранулы по сравнению с глубиной проникновения λ , среднее магнитное поле в металле В равным внешнему \mathbf{H} , можно опустить и два последних слагаемых в (2.10): они, в сделанном приближении, от флуктуаций не зависят. Поэтому формально все влияние магнитного поля в этом случае сводится к перенормировке коэффициента a , или, другими словами, к подавлению критической температуры:

$$T_c(H) = T_c(0) \left(1 - \frac{4\pi^2\xi^2}{\Phi_0^2} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right)$$

(здесь $\Phi_0 = \frac{\pi}{e}$ есть квант магнитного потока, в то время как $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по объему образца). По этой причине для описания сверхпроводящей гранулы в магнитном поле можно воспользоваться статистической суммой в той же форме (2.25), как и в его отсутствие, но с перенормированным параметром $a(H) = a + \frac{e^2}{m} \langle \mathbf{A}^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} Z_{(0)}(H) &= \pi \int d|\Psi_0|^2 \exp \left(- \frac{[a + \frac{e^2}{m} \langle \mathbf{A}^2 \rangle] |\Psi_0|^2 + \frac{b}{2V} |\Psi_0|^4}{T} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 V T}{2b}} \exp \left[\frac{a^2(H)V}{2bT} \right] \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[a(H) \sqrt{\frac{V}{2bT}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Столь тривиальная зависимость свойств 0D образца от магнитного поля позволяет сразу же понять его влияние на теплоемкость сверхпроводящей гранулы. Действительно, в этом случае температурная зависимость теплоемкости в окрестности перехода, показанная на рис. 2.1, с ростом магнитного поля будет просто сдвигаться в направлении низких температур.

В области слабых флуктуаций $G_{(0)} \lesssim \epsilon$ для свободной энергии можно выписать асимптотическое выражение (2.27):

$$F_{(0)}(\epsilon, H) = -T \ln \frac{\pi}{\alpha \left(\epsilon + \frac{4\pi^2\xi^2}{\Phi_0^2} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right)}$$

В случае частицы сферической формы калибровку вектор-потенциала следует выбрать в виде $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}$, что дает: $\langle \mathbf{A}^2 \rangle = \frac{1}{40}H^2d^2$ (вычисление этого среднего аналогично вычислению момента инерции шара). Таким образом, мы находим выражение для флуктуационной части намагниченности 0D сферы, справедливое для всех полей $H \ll H_{c2}(0)$:

⁶ Отметим, что в случае 3D системы или пленки, помещенной в перпендикулярное магнитное поле, критическая температура зависит от H линейно, в то время как зависящая от магнитного поля часть свободной энергии для $H \ll H_{c2}^*(-\epsilon)$ (прямая $H_{c2}^*(-\epsilon)$ зеркальносимметрична прямой $H_{c2}(\epsilon)$ по отношению к вертикальной оси y , проходящей через точку $T = T_c$, оказывается пропорциональной H^2).

$$M_{(0)}(\epsilon, H) = -\frac{1}{V} \frac{\partial F_{(0)}(\epsilon, H)}{\partial H} = -\frac{6\pi T \xi^2}{5\Phi_0^2 d} \frac{H}{\left(\epsilon + \frac{\pi^2 \xi^2}{10\Phi_0^2} H^2 d^2\right)}$$

Легко видеть, что флуктуационная намагниченность отрицательна и линейно возрастает по абсолютной величине вплоть до некоторого поля кроссовера, при котором она достигает минимума. Это поле мы назовем температурно зависящим критическим полем гранулы $H_{c2(0)}(\epsilon) \sim \frac{\Phi_0}{d\xi(\epsilon)} \sim \sim \frac{\xi}{d} H_{c2}(0) \sqrt{\epsilon}$ ⁷.

⁷ Для частицы сферической формы $H_{c2(0)}^{\text{sph}}(\epsilon) = \frac{\Phi_0}{\pi d \xi} \sqrt{10\epsilon}$.

При полях $H_{c2(0)}(\epsilon) \lesssim H \ll H_{c2}(0)$ флуктуационная намагниченность $0D$ гранулы убывает, как $1/H$. В области слабых полей $H \ll H_{c2(0)}(\epsilon)$ диамагнитная восприимчивость

$$\chi_{(0)}(\epsilon, H) = -\frac{6\pi T \xi_0^2}{5\Phi_0^2 d} \frac{1}{\epsilon} \approx -10^2 \chi_P \left(\frac{\xi}{d}\right) \frac{1}{\epsilon}$$

совпадает с нашими предыдущими качественными оценками по в своей температурной зависимости, однако, найденный численный коэффициент оказывается на удивление большим. Подчеркнем, что температурная зависимость $0D$ флуктуационной восприимчивости оказалась менее сингулярной, чем $0D$ поправка к теплоемкости: ϵ^{-1} вместо ϵ^{-2} .

Выражение для флуктуационной части свободной энергии (2.32) также применимо и для проволоки или пленки, помещенных в параллельное поле: как уже отмечалось, вся ее зависимость от магнитного поля в этих случаях проявляется лишь в перенормировке критической температуры (2.47). В случае проволоки в параллельном поле калибровку вектор-потенциала следует выбрать в той же форме, что дает $\langle \mathbf{A}^2 \rangle_{(\text{wire}, \parallel)} = \frac{H^2 d^2}{32}$. Для проволоки в перпендикулярном поле, или для пленки в параллельном, калибровку вектор-потенциала следует выбрать в виде $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$. Таким образом можно найти $\langle \mathbf{A}^2 \rangle_{(\text{wire}, \perp)} = \frac{H^2 d^2}{16}$ для проволоки и $\langle \mathbf{A}^2 \rangle_{(\text{film}, \parallel)} = \frac{H^2 d^2}{12}$ для - пленки.

Вычисляя вторую производную от выражения (2.32) с соответствующими зависимостями критической температуры от магнитного поля, можно найти следующие выражения для флуктуационных поправок к диамагнитной восприимчивости:

$$\chi_{(D)}(\epsilon) = -2\pi \frac{\xi T}{v_F} \chi_P \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, & \text{проводолока в параллельном} \\ \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}, & \text{поле,} \\ \frac{d}{3\xi} \ln \frac{1}{\epsilon}, & \text{проводолока в перпендикулярном} \end{cases}$$

11.3.3 2.3.3. Флуктуационный диамагнетизм в двумерном случае

Перейдем к изучению флуктуационного диамагнетизма двумерной сверхпроводящей системы, помещенной в перпендикулярное магнитное поле при температуре выше критической. Эта задача не может быть решена точно для всей области перехода, как это было сделано выше в случае гранулы, однако, ограничивая себя областью слабых флуктуаций и пренебрегая членом четвертого порядка в функционале для свободной энергии, можно получить решение, справедливое в широком диапазоне магнитных полей и отражающее нетривиальное поведение намагниченности как функции магнитного поля. До тех пор, пока флуктуационные эффекты относительно малы, будем, как и выше, считать среднее магнитное поле в металле \mathbf{B} равным внешнему \mathbf{H} , что позволяет опустить два последних слагаемых в (2.10).

Начнем с выражения для флуктуационного вклада в свободную энергию трехмерного образца (2.32). Отметим сразу, что импульсное представление, в котором эта формула записана, не подходит для описания движения заряженного объекта (такого, как куперовская пара) в однородном магнитном поле: как известно, наиболее подходящим в этом случае является представление Ландау [47]. Поскольку суммирование в (2.32) представляет собой

не что иное, как вычисление инвариантного следа, то суммирование по компонентам импульса в плоскости должно быть заменено суммированием по уровням Ландау с учетом их вырожденности ($k^2/4m \rightarrow \omega_c(n + 1/2)$):

$$F(\epsilon, H) = -\frac{SH}{\Phi_0} T \sum_{n, k_z} \ln \frac{\pi T}{\alpha T_c \epsilon + \omega_c(n + \frac{1}{2})}.$$

Здесь S есть площадь сечения, перпендикулярного полю, а учет вырожденности уровней привел к появлению множителя HS/Φ_0 , равного числу квантовых состояний, соответствующих определенной паре квантовых чисел n и k_z . Поскольку мы будем интересоваться лишь флуктуационным вкладом, сингулярным по степени близости системы к точке перехода, то, в интересующем нас случае тонкой пленки ($d \ll \xi_z(T)$), при суммировании по k_z в выражении (2.71) следует оставить лишь член с $k_z = 0$. Это приводит к появлению множителя $1/d$.

Выражение (2.51) удобно переписать, введя безразмерное магнитное поле:

$$h = \frac{\omega_c}{\alpha T_c} = \frac{eH}{2m\alpha T_c} = \frac{H}{\tilde{H}_{c2}(0)}$$

после чего флуктуационная часть свободной энергии $2D$ сверхпроводника принимает вид:

$$F_{(2)}(\epsilon, H) = -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2} h \sum_{n=0}^{n_c-1} \ln \frac{\pi}{\alpha [\epsilon + 2h(n + \frac{1}{2})]}$$

Мы ввели здесь удобное для нашего дальнейшего рассмотрения определение верхнего критического поля

$$\tilde{H}_{c2}(0) = \frac{2m\alpha T_c}{e} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}$$

как линейную экстраполяцию на ноль температур соответствующей формулы, полученной в теории Гинзбурга - Ландау для окрестности T_c ⁸.

Сумма в выражении (2.53) очевидно расходится. Для того, чтобы эту расходимость обрезать, мы ввели некоторый формальный параметр обрезания n_c , который следует понимать как номер того уровня Ландау, где суммирование должно быть прервано. Его величину мы оценим, вспоминая, что теория Гинзбурга - Ландау ограничена длинноволновым приближением в учете флуктуаций (при записи функционала свободной энергии предполагалось, что параметр порядка медленно изменяется в пространстве), т. е. $k \lesssim k_{\max}$, где:

$$\frac{k_{\max}^2}{4m} \sim \alpha T$$

В терминах суммирования по уровням Ландау это условие может быть переписано как

$$n_c \sim \frac{\alpha T}{\omega_c} \sim \frac{1}{h}$$

Отметим, что формальная расходимость флуктуационной свободной энергии никак не влияет на такие, наблюдаемые на эксперименте, величины, как теплоемкость и диамагнитная восприимчивость. Будучи вторыми производными свободной энергии, эти физические величины оказываются хорошо определенными, соответствующие суммы по импульсам, или уровням Ландау, вблизи перехода хорошо сходятся. Для наблюдаемых величин проблема

⁸ Напомним, что точное определение $H_{c2}(0)$, в сравнении с (2.54), содержит числовой коэффициент $A(0)$ (см. Приложение А).

возникает со флуктуационным вкладом в намагниченность трехмерного образца. Будучи лишь первой производной свободной энергии, она в этом случае расходится и должна быть обрезана. Подчеркнем еще раз, что возникающая в теории Гинзбурга - Ландау ультрафиолетовая расходимость флуктуационной свободной энергии является артефактом - результатом неприменимости данного подхода для описания коротковолновых флуктуаций. Показательно, что такая проблема даже не возникает в последовательной микроскопической теории, которая позволяет правильно учесть последние и, тем самым, расширить область описания флуктуаций на высокие температуры.

Возвращаясь к выражению (2.53) мы, следуя [48], выразим результат суммирования для флуктуационной части свободной энергии 2D системы посредством гамма-функции Эйлера (см. Приложение В). Пользуясь ее определением в форме (B.2), можно преобразовать сумму в (2.53) к произведению и найти

$$\begin{aligned} F_{(2)}(\epsilon, h) &= -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2}h \ln \prod_{n=0}^{n_c-1} \frac{\frac{\pi}{2h\alpha}}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right)} = \\ &= -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2}h \left[\ln \frac{n_c! n_c^{\frac{\epsilon}{2h}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right)} - n_c \ln \frac{\pi}{2h\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Появившийся под знаком гамма-функции естественный безразмерный аргумент может быть выражен посредством размерных величин как

$$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h} = \frac{\epsilon + h}{2h} = \frac{1}{2H} (T - T_{c2}(H)) \left(-\frac{\partial H_{c2}(T)}{\partial T} \right) \Big|_{T=T_c-0}$$

Подставляя в выражение (2.57) факториал в его асимптотической форме Стирлинга (B.3) и принимая во внимание выражение (2.56), можно найти явное выражение для сингулярной по степени близости к переходу части флуктуационной свободной энергии:

$$\delta F_{(2)}(\epsilon, h) = -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2} \left[h \ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\epsilon}{2} \ln h \right]$$

Мы опустили здесь члены, возникшие в результате процедуры обрезания суммы, поскольку они оказались не зависящими от приведенной температуры и магнитного поля, а следовательно, не вносящими вклада в наблюдаемые величины.

Для слабых магнитных полей $h \ll \epsilon$ можно воспользоваться известной асимптотикой гамма-функции при больших аргументах (B.4) и выписать в явном виде флуктуационную часть свободной энергии, ответственную за сингулярные поправки к теплоемкости и диамагнитной восприимчивости

$$\delta F_{(2)}(h \ll \epsilon) = -\frac{TS}{2\pi\xi_{xy}^2} \left(\frac{\epsilon}{2} \ln \epsilon - \frac{h^2}{12\epsilon} \right).$$

Первый член этого точного выражения, очевидно, совпадает с полученной выше качественной оценкой (2.29), второй дает точный коэффициент для выражения (2.42).

В противоположном пределе сильных полей $h \gg \epsilon$

$$\delta F_{(2)}(\epsilon \ll h) = \frac{TS \ln 2}{4\pi\xi_{xy}^2} h.$$

Теперь уже несложно выписать искомое выражение для флуктуационной намагниченности на единицу площади тонкой пленки:

$$M_{(2)}(\epsilon, h) = -\frac{1}{\tilde{H}_{c2}(0)S} \frac{\partial}{\partial h} [\delta F_{(2)}(\epsilon, h)] = \frac{T}{\Phi_0} \left\{ \ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\epsilon}{2h} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right) - 1 \right] \right\}.$$

Здесь $\psi(z)$ является логарифмической производной гамма-функции Эйлера (см. Приложение В). Используя эту формулу, можно обнаружить кроссовер от режима линейного роста флуктуационной намагниченности в слабых полях к ее насыщению в полях достаточно сильных. Действительно, в слабом поле выражение (2.62) дает

$$M_{(2)}(h \ll \epsilon) = -\frac{h}{6\epsilon} \left(\frac{T}{\Phi_0} \right),$$

в то время как в сильном поле, в соответствии с результатом Клемма, Бизли и Лютера [49], намагниченность выходит на постоянное значение:

$$M_{(2)}(h \gg \epsilon) \rightarrow M_\infty = -\frac{\ln 2}{2} \left(\frac{T}{\Phi_0} \right) = -0,346 \left(\frac{T}{\Phi_0} \right).$$

Дальнейшее дифференцирование выражения (2.63) по магнитному полю приводит к выражению для флуктуационной диамагнитной восприимчивости тонкой пленки в слабом перпендикулярном магнитном поле:

$$\chi_{(2)}(h \ll \epsilon) = \chi_{(\text{film}, \perp)} = -\frac{e^2 T}{3\pi d} \frac{\xi_{xy}^2}{\epsilon}.$$

11.4 2.4. Слоистый сверхпроводник в магнитном поле

11.4.1 2.4.1. Модель Лоуренса - Дониака

Перейдем к количественному анализу температурной и полевой зависимостей флуктуационной намагниченности слоистого сверхпроводника. Как уже отмечалось, такая система имеет большое практическое значение ввиду ее непосредственного использования для описания свойств высокотемпературных сверхпроводников, где флуктуационные эффекты играют заметную роль. Более того, полученные общие результаты позволяют нам легко проанализировать в качестве предельных 3D, и уже изученный выше 2D случаи. Влияние магнитного поля проявляется наиболее ярко при его перпендикулярной ориентации к слоям, так что предположим здесь именно такую геометрию задачи (в разделе 3.5 на примере флуктуационной проводимости будет показано, как можно изучить случай произвольной ориентации поля).

Обобщение функционала Гинзбурга - Ландау на случай слоистого сверхпроводника (функционал Лоуренса - Дониака, ЛД-функционал [50]) в перпендикулярном магнитном поле может быть записано в виде

$$\mathcal{F}_{LD}[\Psi] = \sum_l \int d^2r \left(a |\Psi_l|^2 + \frac{b}{2} |\Psi_l|^4 + \frac{1}{4m} |(\nabla_{||} - 2ie\mathbf{A}_{||}) \Psi_l|^2 + \mathcal{J} |\Psi_{l+1} - \Psi_l|^2 \right),$$

где Ψ_l - параметр порядка в l -м сверхпроводящем слое, а феноменологический параметр \mathcal{J} пропорционален энергии джозефсоновской связи между соседними слоями. При написании выражения (2.66) выбрана калибровка $A_z = 0$. Вблизи T_c , где важны флуктуации с длинами волн, намного превышающими расстояние между плоскостями, разностный член в ЛД-функционале может быть записан в континуальном приближении в форме производной и сводится к анизотропному функционалу Гинзбурга - Ландау с эффективной массой

$M = (4\mathcal{J}s^2)^{-1}$ вдоль нормали к плоскостям (направление оси z, s - расстояние между плоскостями). Величину \mathcal{J} можно связать с сверхпроводящей длиной когерентности вдоль оси z : $\mathcal{J} = 2\alpha T_c \xi_z^2 / s^2$. Так как мы ограничили здесь рассмотрение областью слабых флюктуаций, то их взаимодействием (вкладом четвертого порядка в (2.66)) можно пренебречь.

Как уже упоминалось, представление Ландау является наиболее удобным для решения задач, связанных с движением заряженных частиц в однородном магнитном поле. Базисными волновыми функциями при этом могут быть выбраны произведения собственных функций состояний Ландау $\phi_n(\mathbf{r})$ с плоскими волнами, распространяющимися вдоль направления магнитного поля. Разложим параметр порядка $\Psi_l(\mathbf{r})$ по такому базису:

$$\Psi_l(\mathbf{r}) = \frac{SH}{\Phi_0} \sum_{n,k_z} \Psi_{n,k_z} \phi_n(\mathbf{r}) \exp(ik_z l)$$

В этой формуле возникшим перед суммой коэффициентом уже учтено вырождение состояний Ландау. Оставшееся суммирование проводится по номерам уровней n и волновым векторам плоских волн k_z вдоль направления магнитного поля. Подставляя это разложение в (2.66), можно найти выражение для ЛД-функционала в зависимости от коэффициентов разложения Ψ_{n,k_z} из (2.67) в качестве новых переменных:

$$\mathcal{F}_{LD} [\Psi_{\{n,k_z\}}] = \sum_{n,k_z} \left\{ \alpha T_c \epsilon + \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{J} (1 - \cos(k_z s)) \right\} |\Psi_{n,k_z}|^2$$

В полной аналогии со случаем изотропного спектра функциональный интеграл по всевозможным конфигурациям фурье-коэффициентов Ψ_{n,k_z} флюктуирующего параметра порядка в выражении для статистической суммы может быть сведен к произведению обычных гауссовых интегралов, после чего флюктуационная часть свободной энергии слоистого сверхпроводника в магнитном поле принимает вид:

$$F(\epsilon, H) = -\frac{SH}{\Phi_0} T \sum_{n,k_z} \ln \frac{\pi T}{\alpha T_c \epsilon + \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{J} (1 - \cos(k_z s))}.$$

Как видно, это выражение отличается от (2.51) только присутствием в знаменателе логарифма слагаемого соответствующего «кинетической энергии» движения вдоль магнитного поля.

В пределе слабых полей суммирование по уровням Ландау может быть произведено с помощью преобразования Эйлера - Маклорана:

$$\sum_{n=0}^N f(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(n) dn - \frac{1}{24} \left[f' \left(N + \frac{1}{2} \right) - f' \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$$

что приводит к

$$F(\epsilon, H) = F(\epsilon, 0) + \frac{\pi STH^2}{24m\Phi_0^2} \int_{-\frac{\pi}{S}}^{\frac{\pi}{S}} \frac{\mathcal{N} sdk_z}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha T_c \epsilon + \mathcal{J} (1 - \cos(k_z s))} \right\}$$

Здесь \mathcal{N} есть полное число слоев в образце. Проводя оставшееся интегрирование по поперечному импульсу, можно получить:

$$F(\epsilon, H) = F(\epsilon, 0) + \frac{TV}{24\pi s \xi_{xy}^2} \frac{h^2}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + r)}}$$

с параметром анизотропии определенным, как ⁹:

$$r = \frac{2\mathcal{J}}{\alpha T} = \frac{4\xi_z^2(0)}{s^2}$$

Флуктуационная диамагнитная восприимчивость слоистого сверхпроводника в слабом поле выражается как [51, 52]:

$$\chi_{(\text{layer }, \perp)} = -\frac{e^2 T}{3\pi s} \frac{\xi_{xy}^2}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + r)}}$$

Этот результат подтверждает нашу качественную оценку (2.44). Кроме определения в ней численного коэффициента он позволяет также точно описать температурную зависимость в области кроссовера между $2D$ и $3D$ режимами. В пределе $2D$ спектра $r \ll \epsilon$ этот результат соответствует (2.63), в то время как в пределе $r \gg \epsilon$ выражение (2.73) переходит во флуктуационную диамагнитную восприимчивость $3D$ анизотропного сверхпроводника [53]. Отметим, что выражение (2.73) предсказывает нетривиальный рост диамагнитной восприимчивости в чистых металлах [52]. Общепринятое утверждение, что флуктуационные эффекты проявляют себя более ярко в грязных системах с малой длиной свободного пробега электронов, не распространяется на диамагнитную восприимчивость. Здесь, ввиду участия в формуле Ланжевена площади, заметаемой куперовской парой при вращении, ξ оказывается в числителе, а не в знаменателе соответствующей флуктуационной поправки.

11.4.2 2.4.2. Общая формула для флуктуационного вклада в свободную энергию в произвольном магнитном поле

Сейчас мы продемонстрируем, что флуктуационная намагниченность, помимо наличия кроссовера в своей температурной зависимости, является также нелинейной функцией и от магнитного поля. Важно, что отклонение от линейной зависимости проявляется при относительно слабых полях. Этот, необычно ранний по отношению к ожидаемому масштабу полей $H_{c2}(0)$, нелинейный режим в проявлении флуктуационного диамагнетизма в начале семидесятых годов стал предметом интенсивных дебатов [53-62] (см. также прекрасный обзор В. Скокполя и М. Тинкхэма [63]), которые возобновились после открытия высокотемпературной сверхпроводимости [64-67]. Мы будем следовать в изложении недавнему обзору Мишонова и Пенева [48], а также работам Буздина с соавторами [68, 70]. В них была рассмотрена флуктуационная намагниченность слоистого сверхпроводника в самом общем случае, что позволило понять общую картину необычных кроссоверов между различными режимами в ее нефакторизующихся зависимостях от магнитного поля и температуры.

Вернемся к общему выражению (2.69) и проанализируем его без предположения о малости магнитного поля. Для того, чтобы получить общую формулу для флуктуационного вклада в свободную энергию в ЛД-модели, мы воспользуемся уже проделанным выше суммированием по уровням Ландау (см. переход от (2.51) к (2.57)), а затем усредним выражения (2.69) по поперечному к слоям движению куперовских пар:

$$F_{LD}(\epsilon, H) = -\frac{hTV}{2\pi\xi_{xy}^2} \int_{-\frac{\pi}{s}}^{\frac{\pi}{s}} \frac{\mathcal{N}dk_z}{2\pi} \sum_{n=0}^{n_c-1} \ln \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\tilde{\epsilon}(k_z) + 2h(n\frac{1}{2})} =$$

⁹ Подчеркнем различие между J и \mathcal{J} в двух определениях, (2.45) и (2.72), параметра анизотропии r . Первый был введен в качестве туннельного матричного элемента электрона, в то время как второй входит в ЛД-функционал в качестве характерной джозефсоновской энергии связи между слоями. Позже, в рамках микроскопической теории, будет показано, что, в соответствии с нашим качественным определением, $r \sim J^2$; в то время как \mathcal{J} также оказывается пропорциональным J^2 . В грязном случае он зависит также от времени упругой релаксации рассеяния электронов на примесях: $\mathcal{J} \sim \alpha J^2 \max\{\tau, 1/T\}$. Таким образом, оба определения (2.45), возникающие при качественном рассмотрении и (2.72) следующие из ЛД-модели, оказываются взаимно согласованными.

$$= V \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} F_{(2)}(\epsilon(\theta), H).$$

Здесь

$$sk_z = \theta, \quad \tilde{\epsilon}(\theta) = \epsilon + \frac{r}{2}(1 - \cos \theta)$$

и $V = S\mathcal{N}S$ - объем образца. Используя соотношение (2.59), выражение (2.74) можно свести к:

$$\begin{aligned} F_{\text{LD}}(\epsilon, h) &= \\ &= -\frac{TV}{2\pi s\xi_{xy}^2} \left[h \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \ln \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}(\theta)}{2h}\right)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{r}{2}\right) \ln h + \text{const} \right]. \end{aligned}$$

Это общее выражение верно для произвольного параметра анизотропии и, очевидно, сводится к 2D выражению (2.59) при $r \rightarrow 0$. В противоположном пределе $\max\{r, \epsilon\} \gg h$ гамма-функцию можно заменить ее асимптотическим выражением (B.4) и получить выражение описывающее сингулярный флуктуационный вклад в свободную энергию 3D образца:

$$\begin{aligned} \delta F_{(3)}(h \ll \max\{\epsilon, r\}) &= -\frac{TV}{2\pi s\xi_{xy}^2} \left[\left(\epsilon + \frac{r}{2}\right) \ln \frac{\sqrt{(\epsilon+h)} + \sqrt{\epsilon+h+r}}{2\sqrt{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\epsilon+h)(\epsilon+h+r)} + \frac{h+\epsilon+\frac{r}{2}}{2} + \frac{h^2}{6\sqrt{(\epsilon+h)(\epsilon+h+r)}} + \text{const} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что соответствующие асимптотики этого выражения воспроизводят обе формулы (2.60) и (2.61).

11.4.3 2.4.3. Флуктуационная намагниченность и ее кроссоверы

Имея явное выражение для флуктуационного вклада в свободную энергию в ЛД-модели, мы можем путем соответствующего дифференцирования легко найти и остальные термодинамические характеристики. Так, например, для флуктуационной намагниченности можно получить:

$$M_{\text{LD}}(\epsilon, h; r) = -\frac{T}{\Phi_0 S} \frac{2\pi}{\int^\pi} \frac{\pi/2}{d\phi} \left\{ \frac{\epsilon+r \sin^2 \phi}{2h} \left[\psi\left(\frac{\epsilon+r \sin^2 \phi}{2h} + \frac{1}{2}\right) - 1 \right] - \right. \\ \left. - \ln \Gamma\left(\frac{\epsilon+r \sin^2 \phi}{2h} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right\}.$$

В трехмерном случае ($\epsilon \ll r$) интеграл может быть вычислен посредством дзета-функции Гурвица. Соответствующая формула, справедливая для произвольного магнитного поля [48, 57]:

$$M_{(3)}(\epsilon; h \ll r) = 3 \frac{T}{\Phi_0 S} \left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{h} \left[\zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2h}\right) \frac{\epsilon}{2h} \right].$$

В противоположном случае высокой анизотропии или достаточно сильного магнитного поля $r < |\epsilon|, h \ll 1$ из приведенного выше общего выражения для намагниченности можно воспроизвести 2D формулу (2.62).

Обсудим полевую зависимость $M(\epsilon, H)$. Для этого зафиксируем температуру $\epsilon \ll r$. В этом случае поперечная корреляционная длина превышает расстояние между слоями ($\xi_z \gg s$), и в отсутствие магнитного поля движение флуктуационных куперовских пар носит трехмерный характер. Пока поле слабо ($h \ll \epsilon$), намагниченность увеличивается с его ростом линейно, в соответствии с результатом нашего качественного рассмотрения:

$$M_{(3)}(\epsilon \ll r, h \rightarrow 0) = -\frac{e^2 TH}{6\pi} \xi_{xy}(\epsilon)$$

Однако этот линейный рост сменяется нелинейным $3D$ режимом $M \sim \sqrt{H}$ еще в области относительно слабых полей $H_{c2}(\epsilon) \lesssim H(\epsilon \lesssim h)$. Дальнейшее возрастание магнитного поля вплоть до $h \sim r$ приводит к последующему $3D \rightarrow 2D$ кроссоверу в эффективном размере флуктуаций. Предел сильных полей $\epsilon \ll h$ уже был охвачен выражением (2.62), и мы убедились выше, что при больших полях флуктуационный вклад в намагниченность насыщается, достигая значения M_∞ .

Подстановка в (2.77) $\epsilon = 0$ приводит к типичному для $2D$ случая результату (2.64). Следовательно, при $h \sim r$ в зависимости $M(H)$ имеет место кроссовер типа $3D \rightarrow 2D$, несмотря на тот факт, что при зафиксированной температуре размер флуктуационных куперовских пар существенно превышает все параметры решетки. Подчеркнем, что описываемый кроссовер имеет место в области уже сильно нелинейной зависимости $M(H)$, т. е., в приложении к высокотемпературным сверхпроводникам для весьма высоких полей.

Укажем на тот факт, что в случае магнитного поля, превышающего по величине параметр анизотропии ($\epsilon \ll h$), выражение (2.77) воспроизводит известный результат, полученный Пранге для изотропного сверхпроводника [55], с соответствующим коэффициентом, отражающим анизотропию образца [48] $\xi_{xy}(0)/\xi_z(0)$ ¹⁰:

$$-M_{(3)}(0, h) = \frac{0,32T}{\Phi_0^{3/2}} \frac{\xi_{xy}(0)}{\xi_z(0)} \sqrt{H}$$

Вдоль линии верхнего критического поля ($h_{c2}(\epsilon) = -\epsilon$) (см. рис. 2.2) вклад члена с $n = 0$ в сумму (2.69) становится определяющим, что приводит в этой области фазовой диаграммы к следующему выражению для флуктуационной намагниченности [68]:

$$M(h) = -0,346 \left(\frac{T}{\Phi_0 S} \right) \frac{h}{\sqrt{(h - h_{c2}(\epsilon))(h - h_{c2}(\epsilon) + r)}}.$$

Вблизи самой линии $h - h_{c2} \ll r$ поведение флуктуационной намагниченности носит $1D$ характер: она убывает с ростом поля, как $-M(h) \sim \sim 1/(\sqrt{h - h_{c2}})$. Последующее удаление от линии на «расстояния» ($r \ll h - h_{c2} \ll 1$) переводит систему в уже знакомый нам $0D$ режим, где намагниченность убывает еще быстрее: $-M(h) \sim 1/(h - h_{c2})$ (ср. с (2.49)).

Подобная аналогия наблюдается и в следующих порядках по числу G_i . В работе [69] это было показано на примере суммирования первых одиннадцати членов теории возмущения в $2D$ случае и девяти в $3D$. Суммирование методом Паде - Бореля рядов теории возмущений вплоть до членов высоких порядков показало, что температурная зависимость флуктуационной теплоемкости остается подобной $0D$ и $1D$ случаям без магнитного поля. Тем не менее, не следует забывать и о существенном

¹⁰ Мы воспользовались здесь величиной дзета-функции

$$\zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,06$$

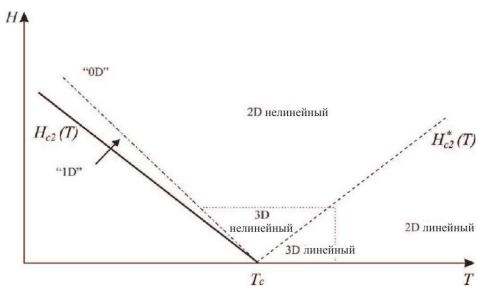


Рис. 2.2. Схематическое представление различных режимов во флуктуационной намагниченности на фазовой диаграмме (H, T). Линия $H^*(T)$ является зеркально-симметричной к линии $H_{c2}(T)$ по отношению к оси ординат, проходящей через точку $T = T_c$. Эта линия определяет область кроссовера между линейным и нелинейным поведением флуктуационной намагниченности выше T_c [68].

отличии: в 0D и 1D случаях в системе не происходит фазового перехода, в то время как в 2D и 3D случаях при наложении магнитного поля имеет место фазовый переход первого рода в состояние с вихревой решеткой Абрикосова.

Мы убедились, что флуктуационная намагниченность слоистого сверхпроводника вблизи перехода в сверхпроводящее состояние представляет собою сложную функцию температуры и магнитного поля, которая не может быть факторизирована по этим переменным. Сравнение экспериментальных данных с предложенной теорией оказывается весьма чувствительным к величине параметра анизотропии r , что позволяет определять его таким методом с большой точностью [70,71]. На рис. 2.3 представлен пример такого успешного количественного сравнения теории с результатами прецизионных экспериментов на образце YBa₂Cu₃O₇ [72].

11.4.4 2.4.4. Флуктуационная теплоемкость в магнитном поле

Дифференцирование общего выражения для флуктуационного вклада в свободную энергию слоистого сверхпроводника (2.74) по приведенной температуре позволяет найти наиболее сингулярную часть флуктуационной теплоемкости в магнитном поле:

$$C_{LD}(\epsilon, h) = -\frac{1}{VT} \frac{\partial^2}{\partial^2 \epsilon} F_{LD}(\epsilon, h) = \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \frac{1}{2h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\epsilon}(\theta)}{2h} \right).$$

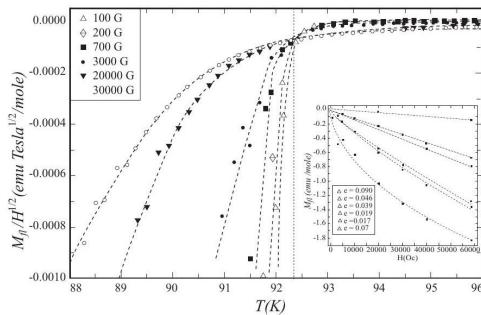


Рис. 2.3. Намагниченность образца YBaCO123, отнормированная на \sqrt{H} и представленная как функция температуры. В согласии с описанной теорией, кривые, измеренные при постоянном поле, пересекаются в одной точке $T = T_c(0) = 92,3$ К. Наилучшее согласие с экспериментом было найдено при параметре анизотропии $r = 0,09$. На вставке флуктуационная намагниченность показана как функция магнитного поля.

Для стремящегося к нулю поля можно воспользоваться асимптотикой (B.16) и легко получить

$$C_{LD}(\epsilon, r, h \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2(0)} \frac{1}{\sqrt{\epsilon(r + \epsilon)}}$$

Эта формула, очевидно, содержит в себе как 2D так и 3D режимы

$$C_{LD}(\epsilon, r, h \rightarrow 0) = \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2(0)} \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & r \ll \epsilon, \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon r}}, & r \ll h. \end{cases}$$

В самой точке перехода $T = T_{c0}$

$$\begin{aligned} C_{LD}(0, r, h) &= \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \frac{1}{2h} \int_0^\pi \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2h} \sin^2 \phi \right) \frac{d\phi}{\pi} = \\ &= \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{hr}}, & \epsilon \ll h \ll r; \\ \frac{\pi^2}{4h}, & r \ll h, \end{cases} \end{aligned}$$

теплоемкость в присутствии магнитного поля оказывается конечной, в то время как вдоль линии зависимости верхнего критического поля от температуры ($h_{c2}(\epsilon) = -\epsilon$) она расходится (аргумент $\psi^{(1)}$ -функции обращается в ноль при $\phi \rightarrow 0$). Характер этой расходимости тот же, что и в (2.81). Его можно найти, заменяя $\psi^{(1)}$ -функцию ее асимптотикой возле полюса:

$$\begin{aligned} C_{LD}(r, h \rightarrow h_{c2}(\epsilon)) &= \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \frac{1}{2h} \int_0^\pi \psi^{(1)} \left(\frac{h - h_{c2}(\epsilon)}{2h} + \frac{r}{2h} \sin^2 \phi \right) \frac{d\phi}{\pi} \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi s \xi_{xy}^2} \frac{1}{\sqrt{(h - h_{c2}(\epsilon) + r)(h - h_{c2}(\epsilon))}} \end{aligned}$$

11.5 2.5. Критерий Гинзбурга - Леванюка

11.5.1 2.5.1. Определение числа Гинзбурга - Леванюка по теплоемкости в отсутствие магнитного поля

Полученная выше флюктуационная поправка к теплоемкости сверхпроводника позволяет ответить количественно на вопрос: где находятся пределы применимости теории Гинзбурга - Ландау?

Как мы уже знаем, эта теория применима не слишком близко к точке перехода и не слишком далеко от нее. Вдали от T_c , когда размер флюктуационной куперовской пары $\xi(T)$ приближается к ξ_0 , сделанное при построении функционала Гинзбурга - Ландау разложение по градиенту параметра порядка перестает адекватно описывать ситуацию: становятся важными коротковолновые флюктуации. Таким образом, ограничение на температуры сверху очевидно: $\epsilon \ll 1$. Вблизи точки перехода эта теория верна до тех пор, пока флюктуационные поправки остаются малыми по сравнению с характерными значениями соответствующих физических величин. Исторически впервые в качестве такого критерия было выбрано сравнение соответствующей флюктуационной поправки к теплоемкости с величиной ее скачка в точке перехода следующей из теории фазовых переходов Ландау. Соответственно, так называемое число Гинзбурга - Леванюка $Gi_{(D)}$ определяется, как то значение приведенной температуры, при которой флюктуационная поправка (2.34) сравнивается с $\Delta C(2.9)$:

$$Gi_{(D)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{V_D}{V} \vartheta_D b(4m)^{\frac{D}{2}} T_c^{\frac{D}{2}-1} \right]^{\frac{2}{4-D}}.$$

11.5.1 2.5.1. Определение числа Гинзбурга - Леванюка по теплоемкости в отсутствие магнитного поля

Подставляя в эту формулу следующие из микроскопического рассмотрения значения параметров теории Гинзбурга - Ландау (2.6), можно найти

$$Gi_{(D)} = \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{1}{\nu_D T_c \xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

Для дальнейшего нам будет полезно выписать число Гинзбурга - Леванюка для $3D$ и $2D$ случаев в явном виде:

и

$$Gi_{(3)} = \left[\frac{7\zeta(3)}{64\pi^3} \frac{1}{\nu_3 T_c \xi^3} \right]^2$$

$$Gi_{(2)} = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^3} \frac{1}{\nu_2 T_c \xi^2}$$

Так как $\nu_D T_c \sim \nu_D v_F / \xi_c \sim p_F^{D-1} \xi_c^{-1} \sim \alpha^{1-D} \xi_c^{-1}$, то эту формулу можно преобразовать к виду

$$Gi_{(D)} \sim \left[\frac{7\zeta(3)\vartheta_D}{8\pi^2} \left(\frac{V_D}{V} \right) \frac{\xi_c \alpha^{D-1}}{\xi^D} \right]^{\frac{2}{4-D}}$$

где α есть межатомное расстояние. Как уже упоминалось, в массивных традиционных сверхпроводниках ввиду большой величины корреляционной длины ($\xi_c \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ см), которая намного превышает межатомное расстояние ($\alpha \sim 10^{-8}$ см), флюктуационная поправка к теплоемкости оказывается чрезвычайно малой. Однако этот флюктуационный эффект возрастает с уменьшением эффективной размерности образца или длины свободного пробега электронов в нем. Так, например, особенности флюктуационной теплоемкости системы сверхпроводящих гранул вполне доступны экспериментальному исследованию.

Зная микроскопическое выражение для корреляционной длины (A.2), можно вычислить число Гинзбурга - Леванюка (2.87) для различных случаев: чистого (c) и грязного (d) сверхпроводников, образцов различных размерностей и форм - пленок, проволок, вискеров и гранул (материал из которых они изготовлены при этом предполагается имеющим $3D$ электронный спектр). Соответствующие значения числа Гинзбурга Леванюка приведены в Таблице 2.1:

Можно убедиться, что для трехмерного чистого случая полученный результат совпадает с оценкой Гинзбурга и подтверждает пренебрежимую малость флюктуационных эффектов в чистых массивных образцах.

Таблица 2.1. Значения числа Гинзбурга - Леванюка для различных сверхпроводящих систем

$Gi_{(3)}$	$Gi_{(2)}$
$80 \left(\frac{T_c}{E_F} \right)^4, (c)$	$\left(\frac{T_c}{E_F} \right), (d)$
$\frac{1,6}{(p_F l)^3} \left(\frac{T_c}{E_F} \right), (d)$	$\frac{0,27}{p_F l}, (d)$
$Gi_{(1)}$	$\frac{1,3}{p_F^2 l d}, (d)$ film
$Gi_{(0)}$	
0, 5, (d)	
$1, 3 (p_F^2 S)^{-2/3} (T_c \tau)^{-1/3}, (d)$ wire	$\frac{\sqrt{7\zeta(3)}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\nu T_c V}} \approx$
$2, 3 (p_F^2 S)^{-2/3}, (d)$ whisker	

Укажем на существующую связь между найденным числом Гинзбурга - Леванюка для грязного $2D$ случая $Gi_{(2)}^{(d)}$ и безразмерным кондактансом

$$G_{\square} = \frac{\hbar}{e^2 R_{\square}},$$

где R_{\square} – сопротивление, отнесенное на единицу площади пленки. Действительно, из формулы Друде для $2D$ проводимости нетрудно найти:

$$\begin{aligned} G_{\square}^{(2)} &= \nu_{(2)} \mathcal{D}_{(2)} = \frac{p_F l}{2\pi} = \frac{E_F \tau}{\pi}, \\ G_{\square}^{(\text{film})} &= \nu_{(3)} \mathcal{D}_{(3)} = \frac{p_F^2 l d}{3\pi^2}, \end{aligned}$$

и убедиться, что оба числа Гинзбурга - Леванюка $Gi(d)$ из Таблицы (2.1) могут быть единым образом выражены посредством G_{\square} :

$$Gi_{(2)}^{(d)} \approx \frac{1}{23G_{\square}}$$

11.5.2 2.5.2. Другие определения

Способ, которым мы ввели число Гинзбурга - Леванюка, очевидно, не единственен. Например, его часто вводят (см. [73]), сравнивая энергию флуктуаций с магнитной энергией при критическом значении поля $\tilde{H}_{c2}^2(0)\xi^3$:

$$Gi_{(3,H)} = \frac{16\pi^3 \kappa^4 T_c^2}{\Phi_0^3 \tilde{H}_{c2}(0)} = \frac{32e^4 \lambda^4 T_c^2}{\xi^2}$$

Здесь $\kappa = \lambda/\xi$ – безразмерный параметр теории Гинзбурга - Ландау. Глубина проникновения магнитного поля λ связана со сверхтекучей плотностью и может быть выражена посредством микроскопических параметров (см. Приложение А)

$$(2e\lambda)^2 = \frac{m}{2\pi n_s} = \frac{7\zeta(3)}{128\pi^3} \frac{1}{\nu_3 T_c^2 \xi^2}$$

Такое определение дает величину для числа Гинзбурга - Леванюка отличающуюся лишь вдвое по сравнению с предыдущим:

$$Gi_{(3,H)} = \frac{2(2e\lambda)^4 T_c^2}{\xi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\nu T_c \xi^3} \right)^2 = \frac{1}{2} Gi_{(3)}(0).$$

Еще одним способом введения числа Гинзбурга - Леванюка является его определение в качестве той приведенной температуры, при которой поправка Асламазова - Ларкина к проводимости сравнивается с нормальным ее значением (например, такое определение используется в [74, 75]). Подобный подход также приводит к лишь к изменению численного множителя в числе Gi :

$$Gi_{(2,\sigma)} = 1,44 Gi_{(2)}(0).$$

11.5.3 2.5.3. Уширение критической области магнитным полем

2.5.3.1. Окрестность T_c . Рассмотрим теперь, как наличие достаточно сильного магнитного поля влияет на ширину области критических флюктуаций. Начнем с общего анизотропного $3D$ случая, а затем проанализируем его в $2D$ и $3D$ пределах. Для этого достаточно повторить наши предыдущие вычисления флюктуационного вклада в теплоемкость в присутствии магнитного поля с использованием выражения для свободной энергии (2.69). Предположим магнитное поле столь сильным, что существенным оказывается лишь вклад в свободную энергию от первого

уровня Ландау в квантованном движении флюктуационных куперовских пар:

$$F(\epsilon, H) = -\frac{SH}{\Phi_0} T \int_{-\pi/s}^{\pi/s} \frac{dk}{2\pi} \ln \frac{\pi T}{\alpha T_c \epsilon + \frac{H}{4m\Phi_0} + J(1 - \cos(k_z s))}$$

$$\delta C(\epsilon, H) = -\frac{1}{VT_c} \left(\frac{\partial^2 F(\epsilon, H)}{\partial \epsilon^2} \right) = \frac{H}{\Phi_0 S} \left(-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{\epsilon(H)[\epsilon(H) + r]}}$$

(см. Приложение C).

В $3D$ и $2D$ случаях можно получить:

$$\delta C_{(3)}(\epsilon \ll r, H) = \frac{H}{2\Phi_0 S} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\epsilon^{3/2}(H)},$$

$$\delta C_{(2)}(r \ll \epsilon, H) = \frac{H}{\Phi_0 S} \frac{1}{\epsilon^2(H)}.$$

Сравнивая выражение (2.97) с величиной скачка теплоемкости (2.9) и принимая во внимание соотношение (2.6), можно найти:

или [76]

$$Gi_{(2)}(H) = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu_2 T_c = \frac{H}{\Phi_0 S} \frac{1}{\epsilon_{cr}^2(H)}$$

$$Gi_{(2)}(H) = \epsilon_{cr}(H) = \sqrt{Gi_{(2)}(T_c, 0) \frac{2H}{\tilde{H}_{c2}(0)}}.$$

Такое же рассмотрение можно повторить и для $3D$ спектра

$$\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \nu_3 T_c = \frac{H}{\Phi_0 S} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\epsilon_{cr}^{3/2}(H)}$$

$$\epsilon_{cr}^{3/2}(H) = \left(\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\nu_3 T_c \xi^3} \right) \frac{H}{\Phi_0 S} \frac{8\pi \xi^3}{\sqrt{r}} = \frac{2H}{\tilde{H}_{c2}(0)} \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{Gi_{(3)}(0)}$$

(мы воспользовались здесь определением (2.72) для параметра анизотропии). В результате

$$Gi_{(3)}(H) = \left(\frac{2H}{\tilde{H}_{c2}(0)} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{Gi_{(3)}(T_c, 0)}$$

Мы видим, что наличие магнитного поля приводит к уширению критической области по закону $H^{1/2}$ в $2D$ и $H^{2/3}$ в $3D$ случаях. Напомним, что наше рассмотрение было выполнено для достаточно сильных полей.

2.5.3.2. Ноль температур: окрестность $\mathbf{H}_{c2}(0)$. Для того, чтобы иметь полное представление о форме области критических флюктуаций на фазовой диаграмме $H - T$, перейдем к

обсуждению случая низких температур $t = T/T_c \ll 1$ и высоких полей $H \sim H_{c2}(0)$. Флуктуации здесь имеют чисто квантовую природу и количественно будут описаны ниже, в части III этой книги. Здесь же мы воспользуемся оригинальными результатами работы [76] лишь для оценки ширины критической области. Мы оценим соответствующее число Гинзбурга - Леванюка, сравнивая первую флуктуационную поправку к диамагнитной восприимчивости с ее скачком между нормальной и сверхпроводящей фазами. Мы будем обсуждать здесь свойства грязного сверхпроводника существенно второго рода, так что будем считать параметр $\kappa \gg 1$.

Намагниченность такой сверхпроводящей системы была детально изучена во всем диапазоне температур еще в середине шестидесятых годов [77, 78]. Соответствующая температурная зависимость диамагнитной восприимчивости определяется выражением [79]

$$\chi(T) = \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{1}{4\pi\beta_A [2\kappa_2^2(T) - 1]}$$

где $\beta_A = 1.18$ - параметр теории сверхпроводников второго рода Абрикосова. Параметр $\kappa_2(T)$ впервые был введен Маки [80] и является ни чем иным, как обобщением параметра феноменологической теории Гинзбурга - Ландау κ на весь диапазон температур ниже T_c . Для интересующего нас случая сильно грязного сверхпроводника было показано [78], что

$$\kappa_2(0) \approx 1,2 \kappa_d = 1,2 \frac{3c}{2\pi^2 ev_F l} \left[\frac{7\zeta(3)}{\pi\nu} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где значение параметра κ в грязном пределе

$$\kappa_d = \frac{3c}{2\pi^2 ev_F l} \left[\frac{7\zeta(3)}{\pi\nu} \right]^{\frac{1}{2}}$$

было вычислено Горьковым [81]. Напомним, что для хорошего металла кулоновская энергия электрона оказывается порядка его кинетической энергии: $e^2/v_F \sim p_F e^2/E_F \sim (e^2/a)/E_F \sim 1$. Поэтому скачок диамагнитной восприимчивости грязного сверхпроводника второго рода между его нормальной и сверхпроводящей фазами при абсолютном нуле температуры (т. е. вблизи $H_{c2}(0)$) может быть оценен как

$$\Delta\chi(0) \approx \frac{v_F^2}{c^2} (p_F l)^2 \frac{\pi^2}{63\zeta(3) \cdot 2,88 \cdot \beta_A} \frac{e^2}{v_F} \approx 0,034 \frac{v_F^2}{c^2} (p_F l)^2 \frac{e^2}{v_F}.$$

Естественно, эта величина оказывается намного меньше скачка, соответствующего полному эффекту Мейснера $(4\pi)^{-1}$.

В части III будет показано, что флуктуационная восприимчивость грязной сверхпроводящей пленки толщины d при низких температурах ($t \ll \tilde{h}$) определяется выражением [76]:

$$\chi_{\text{fl}}(t \ll \tilde{h}) = -\frac{e^2}{\pi^2 c^2} \frac{v_F^2 \tau}{d} \frac{1}{\tilde{h}},$$

где приведенное магнитное поле

$$\tilde{h} = \frac{H - H_{c2}(T)}{H_{c2}(T)}$$

играет роль приведенной температуры ϵ в нашем предыдущем рассмотрении ситуации при температурах выше T_c . Сравнивая выражение (2.106) с (2.105): $\chi_{\text{fl}}(\tilde{h}_{\text{cr}}) = \Delta\chi(0)$, можно найти:

$$Gi_{(\text{film})}(t \ll \tilde{h}) = \tilde{h}_{\text{cr}}(t \ll \tilde{h}) = \frac{2,65}{p_F^2 l d} \approx 2Gi_{(\text{film})}(T_c, H = 0).$$

Ту же самую процедуру можно повторить и для температур \tilde{t} по прежнему малых, однако, существенно превышающих величину приведенного поля \tilde{h} , где (см. (8.61))

$$\chi_{\text{fl}}(t \gg \tilde{h}) = -\frac{e^2}{\pi^2 c^2} \frac{v_F^2 \tau}{d} \frac{\gamma_E t}{\tilde{h}^2}$$

Сравнивая это выражение с (2.105), можно найти число Гинзбурга - Леванюка в области температур $\tilde{h} \ll t \ll 1$:

$$Gi_{(\text{film})}(t \gg \tilde{h}) \approx 2\sqrt{t Gi_{(\text{film})}(T_c, H=0)}$$

Теперь мы имеем все необходимое для обсуждения формы критической области вдоль линии $H_{c2}(T)$ на фазовой диаграмме H - T для всего интервала температур. Вблизи критической температуры T_c при нулевом магнитном поле ширина критической области:

$$Gi_{(\text{film})}(T_c, H=0) = \frac{1,3}{p_f^2 l d}$$

По мере того, как мы двигаемся вдоль линии $H_{c2}(T)$ вниз по температуре, критическая область расширяется согласно выражению (2.99).

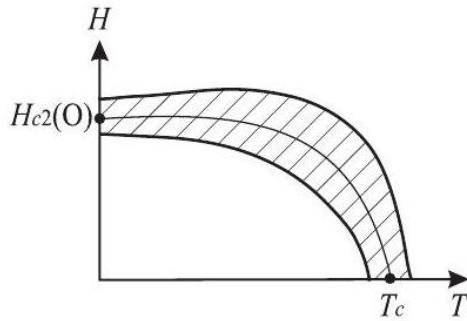


Рис. 2.4. Схематическое изображение области критических флуктуаций для температур ниже критической

Легко убедиться, что в промежуточной области $T_c(H) \sim T_c/2$ и $H_{c2}(T) \sim \sim H_{c2}(0)/2$ формулы, полученные со стороны высоких (см (2.99)) и низких температур (см. (2.110)), сшиваются с точностью до численного множителя $\sqrt{2}$.

При низких температурах в окрестности поля $H_{c2}(0)$ критическая область вновь сужается до ширины (2.108), уже знакомой нам по таблице 2.1. Эскиз описанного поведения критической области представлен на рис. 2.4. Интересно отметить немонотонность ширины критической области вдоль кривой $H_{c2}(T)$: она узка ($Gi_{(\text{film})}(T_c, H=0)$) вблизи T_c , затем расширяется вплоть до $\sqrt{Gi_{(\text{ilm})}(T_c, H=0)}$ в области промежуточных температур и, наконец, возвращается к начальной ширине $Gi_{(\text{ilim})}(T_c, H=0)$ при нуле температуры вблизи поля $H_{c2}(0)$.

11.6 2.6. Скэйлинг и ренормализационная группа

Применимость вышеизложенной теории флуктуационной теплоемкости ограничено областью температур вне непосредственной окрестности самого перехода: $|\epsilon| \gtrsim Gi_{(D)}$. Как мы видели, флуктуации в этой области температур оказываются достаточно слабыми, чтобы оправдать пренебрежение их взаимодействием. В настоящем разделе мы обсудим поведение флуктуаций именно в непосредственной окрестности критической температуры ($|\epsilon| \lesssim Gi_{(D)}$), где это взаимодействие играет главную роль.

Начнем с обсуждения гипотезы скэйлинга (подобия), т. е. с предположения о том, что в непосредственной окрестности перехода единственным описывающим свойства системы

параметром является корреляционная длина $\xi(T)$. Температурные зависимости всех остальных физических величин могут быть выражены посредством $\xi(T)$. Эта гипотеза означает, например, что формула для флюктуационной части свободной энергии (2.29) с опущенным логарифмом остается верной и в области критических флюктуаций¹¹:

$$F_{(D)} \sim -\xi^{-D}(\epsilon)$$

Корреляционная длина является степенной функцией приведенной температуры: $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-\nu}$, так что соответствующая формула для флюктуационной части теплоемкости может быть представлена в виде

$$\delta C \sim -\frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon^2} \sim \epsilon^{D\nu-2}$$

ак было показано во Введении, в рамках подхода, основанного на функционале Гинзбурга - Ландау, где температурная зависимость корреляционной длины определяется лишь диффузией формирующих куперовскую пару электронов, $\xi(\epsilon) \sim \epsilon^{-1/2}$ и $\delta C \sim \epsilon^{-1/2}$. Эти результаты действительно верны в ГЛ-области температур ($|\epsilon| \gtrsim G_i$), где взаимодействием между флюктуациями можно пренебречь. В непосредственной окрестности перехода $|\epsilon| \lesssim G_i$, так называемой критической области, взаимодействие флюктуаций оказывается определяющим. Здесь флюктуационные куперовские пары начинают сами влиять на величину корреляционной длины, изменения температурные зависимости как $\xi(\epsilon)$, так и $\delta C(\epsilon)$. Для того, чтобы найти правильную температурную зависимость теплоемкости сверхпроводника в критической области, следует вычислить функциональный интеграл с учетом описывающего взаимодействие флюктуаций вклада четвертой степени, так как это было проделано для $0D$ случая. К сожалению, на сегодняшний день для $3D$ случая известно только, как вычислять функциональные интегралы гауссового типа. Это уже было проделано выше, в ГЛ-области, где в функционале (2.4) мы пренебрегли членом четвертого порядка.

Первым очевидным шагом включения в рассмотрение критической области могло бы стать построение ряда теории возмущений по параметру b ¹². Каждый член в таком ряду имеет форму гауссового интеграла и может быть представлен диаграммой, в которой сплошными линиями представлены корреляторы $\langle \Psi(r)\Psi^*(r') \rangle$. «Взаимодействия» b на диаграмме представляются точками, в которых пересекаются четыре линии корреляторов (см. рис. 2.5).

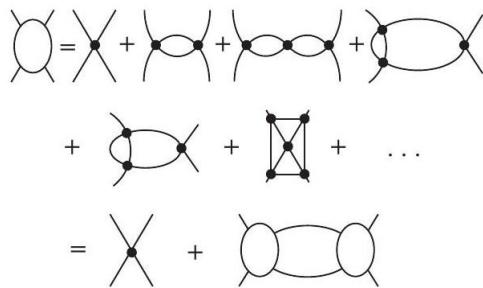


Рис. 2.5. Примеры диаграмм для вычисления флюктуационного вклада в b . Этот ряд может быть представлен как

¹¹ Логарифм в выражении (2.29) играет особую роль в случае размерности $D = 2$. Этот случай мы обсудим ниже.

¹² Отметим, что этот ряд оказывается асимптотическим, т. е. он не сходится даже для малых b . В этом легко убедиться на примере какого-либо малого отрицательного b , когда интеграл для статистической суммы очевидно расходится. Это наблюдение подтверждается и найденным точным $0D$ решением (2.25).

$$C \sim \sum_{n=0} c_n \left(\frac{Gi_{(D)}}{\epsilon} \right)^{\frac{4-D}{2}n}$$

В случае $\epsilon \gtrsim Gi$ для воспроизведения полученных выше результатов теории возмущений достаточно удержать в этом ряду лишь два первых члена. Для температур в пределах критической области $\epsilon \lesssim Gi$ следует отсуммировать все члены ряда. Оказывается, что коэффициенты c_n могут быть аналитически вычислены только в случае пространства с размерностью $D \rightarrow 4$. В этом случае сложные диаграммы с рис. 2.5 (типа диаграмм похожих на конверты) оказываются малыми по параметру $\varepsilon = 4 - D$, и для вычисления c_n оказывается достаточным просуммировать относительно простые диаграммные ряды типа «паркета». Такое суммирование приводит к замене «затравочной» вершины b некоторым, меньшим по величине, эффективным взаимодействием \tilde{b} , которое стремиться к нулю по мере того, как температура подходит к точке перехода. Этот метод был первоначально разработан в квантовой теории поля [82-84]. В приложении к проблеме фазового перехода подобное суммирование паркетных диаграмм было впервые выполнено в работе [12]. В результате была точно найдена форма особенности вблизи фазового перехода в конкретной трехмерной системе. А именно, было показано, что теплоемкость одноосного сегнетоэлектрика или ферромагнетика с диполь-дипольным взаимодействием вблизи точки перехода имеет вид:

$$C \sim (-\ln |T - T_c|)^{\frac{1}{3}}.$$

Вскоре это теоретическое предсказание было подтверждено экспериментально [85].

Подчеркнем, что выражение (2.113) было выведено для фазового перехода типа «ферромагнетик-парамагнетик» в одноосном кристалле, при котором параметр порядка имеет простую однокомпонентную структуру. Так что к сверхпроводящему переходу, где параметр порядка является двухкомпонентным комплексным скаляром, полученный результат был уже неприменим. В той же самой работе [12], на примере фазового перехода в нефизическом случае четырехмерного пространства, было рассмотрено и влияние типа симметрии параметра порядка на вид особенности в критической точке. Было показано, что в случае фазового перехода, при котором параметр порядка является n -компонентным вектором, теплоемкость имеет особенность вида:

$$C \sim (-\ln |T - T_c|)^{\frac{(4-n)}{(n+8)}}$$

Вместо непосредственного суммирования диаграмм оказывается гораздо более удобным и физически прозрачным использовать так называемый метод мультипликативной ренормализационной группы. Он был известен в квантовой теории поля еще с начала пятидесятых годов [86, 87]. Этот метод по своей точности эквивалентен суммированию ряда паркетных диаграмм, однако, оказывается проще в вычислениях, благодаря чему и получил впоследствии широкое распространение в различных областях теории конденсированного состояния.

Идея метода ренормализационной группы состоит в разделении функционального интегрирования по «быстрым» ($\psi_{|k|>\Lambda}$) и «медленным» ($\psi_{|k|<\Lambda}$) флуктуационным модам. Если параметр обрезания Λ выбран достаточно большим, то вклад первых оказывается малым и интегрирование по ним сводится к гауссову. После того, как осуществлено интегрирование по быстрым переменным, полученный функционал остается зависимым лишь от медленных мод. Введя новый параметр обрезания, их, в свою очередь, можно разделить на медленные ($|k| < \Lambda_1$) и быстрые ($\Lambda_1 < |k| < \Lambda$), после чего процедура повторяется. Двигаясь этим путем шаг за шагом, можно вычислить статистическую сумму системы вблизи фазового перехода.

В качестве примера первого шага ренормализационной процедуры можно напомнить вычисление флуктуационной статистической суммы ниже T_c . Идея метода была та же

- параметр порядка был разделен на координатно-независимую часть $\tilde{\Psi}$ («медленная» мода) и флюктуирующую часть $\psi(r)$ («быстрая» мода), которая предполагалась малой по величине. Находясь в ГЛ-области слабых флюктуаций, было достаточно провести усреднение по быстрым переменным всего лишь один раз, в то время как в критической области ренормализационная процедура требует и последующих приближений.

Краеугольный камень метода - это сохранение в критической области температур функционалом свободной энергии своей формы при каждом последующем шаге в процедуре ренормализации. При размерности пространства близкой к 4 эта форма совпадает с начальным функционалом свободной энергии Гинзбурга - Ландау, но с коэффициентами a_Λ и b_Λ , зависящими от Λ . Проведем соответствующие вычисления методом полной математической индукции. Для этого предположим, что после $(n-1)$ -го шага функционал свободной энергии принял форму:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}}] = F_{N,\Lambda_{n-1}} + \int dV \left\{ a_{\Lambda_{n-1}} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{b_{\Lambda_{n-1}}}{2} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}} \right|^4 + \frac{1}{4m} \left| \nabla \tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Записывая $\tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}}$ в виде $\tilde{\Psi}_{\Lambda_{n-1}} = \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} + \psi_{\Lambda_n}$ и выбирая Λ_n достаточно близкой к Λ_{n-1} , можно сделать ψ_{Λ_n} столь малым, что в функционале окажется достаточным ограничиться лишь квадратичными членами по ψ_{Λ_n} , после чего уже можно выполнить гауссово интегрирование в полной аналогии с (2.38). Важным свойством пространств с размерностью близкой к 4 является возможность выбрать $\Lambda_n \gg \Lambda_{n-1}$ при $\psi_{\Lambda_n} \ll \tilde{\Psi}_{\Lambda_n}$. В этом случае $\tilde{\Psi}_{\Lambda_n}$ может быть выбрана координатно-независимой, и мы можем воспользоваться результатом, непосредственно следующим из (2.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\tilde{\Psi}_{\Lambda_n}] = F_{N,\Lambda_{n-1}} + \int dV \left\{ a_{\Lambda_n} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} \right|^2 + \frac{b_{\Lambda_n}}{2} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} \right|^4 + \frac{1}{4m} \left| \nabla \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} \right|^2 \right\} - \\ - \frac{T}{2} \sum_{\Lambda_n < |\mathbf{k}| < \Lambda_{n-1}} \left\{ \frac{\pi T_c}{\left(3b_{\Lambda_n} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} \right|^2 + a_{\Lambda_n} + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \right)} + \right. \\ \left. + \ln \frac{\pi T_c}{b_{\Lambda_n} \left| \tilde{\Psi}_{\Lambda_n} \right|^2 + a_{\Lambda_n} + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}} \right\} \end{aligned}$$

Раскладывая последнее слагаемое в (2.115) в ряд по $\tilde{\Psi}_{\Lambda_n}$ для $\mathcal{F} [\tilde{\Psi}_{\Lambda_n}]$, можно получить то же выражение (2.114), но с заменой $\Lambda_{n-1} \rightarrow \Lambda_n$.

Из (2.115) следует, что

$$\begin{aligned} F_{n,\Lambda_n} &= F_{n,\Lambda_{n-1}} - T \sum_{\Lambda_n < |\mathbf{k}| < \Lambda_{n-1}} \ln \frac{\pi T_c}{\left(a_{\Lambda_n} + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \right)}, \\ a_{\Lambda_n} &= a_{\Lambda_{n-1}} + 2T \sum_{\Lambda_n < |\mathbf{k}| < \Lambda_{n-1}} \frac{b_{\Lambda_n}}{\left(a_{\Lambda_n} + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \right)} \\ b_{\Lambda_n} &= b_{\Lambda_{n-1}} - 5T \sum_{\Lambda_n < |\mathbf{k}| < \Lambda_{n-1}} \frac{b_{\Lambda_n}^2}{\left(a_{\Lambda_n} + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \right)^2}. \end{aligned}$$

Переходя к непрерывной переменной $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$, можно переписать эти рекурсивные уравнения в форме системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\Lambda)}{\partial \Lambda} &= -T\mu_D \Lambda^{D-1} \ln \frac{\pi T_c}{\left(a(\Lambda) + \frac{\Lambda^2}{4m}\right)}, \\ \begin{cases} \frac{\partial a(\Lambda)}{\partial \Lambda} = -2T\mu_D \frac{b(\Lambda)\Lambda^{D-1}}{\left(a(\Lambda) + \frac{\Lambda^2}{4m}\right)}, \\ \frac{\partial b(\Lambda)}{\partial \Lambda} = 5T\mu_D \frac{b^2(\Lambda)\Lambda^{D-1}}{\left(a(\Lambda) + \frac{\Lambda^2}{4m}\right)^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти уравнения, называемые уравнениями ренормализационной группы, очевидно, верны лишь для достаточно малых Λ , где может быть оправдан переход от дискретных к непрерывным переменным. Это, по крайней мере, означает, что:

$$\Lambda^2/4m \ll T_{c0}Gi_{(D)}$$

для того, чтобы можно было совершить хотя бы первые шаги рекурсационной процедуры.

Напомним, что в рамках теории фазовых переходов Ландау коэффициент a обращается в ноль в самой точке перехода ($a(T_{c0}) = 0$). Это равенство может рассматриваться как MFA определение критической температуры T_{c0} . В рамках метода ренормализационной группы то же условие на функцию $a = a(\Lambda)$ может быть записано как $a(T_{c0}, \Lambda \sim \xi^{-1}) = 0$. С уменьшением Λ все больше и больше учитывается влияние критических флуктуаций, что приводит к понижению перенормированной флюктуацией критической температуры, которая определяется уравнением:

$a(T_c(\Lambda), \Lambda) = 0$. Наконец, после проведения ренормализационной процедуры полностью можно найти истинную температуру перехода T_c из уравнения:

$$a(T_c, \Lambda = 0) = 0$$

Понятно, что благодаря влиянию флюктуаций она оказывается сдвинутой вниз по сравнению со своим MFA значением T_{c0} . Этот сдвиг нетрудно найти в первом приближении. Действительно, проинтегрируем первое уравнение системы (2.118) по Λ в пределах $[0, \xi^{-1}]$. Главный вклад в интеграл определяется областью, где $a(\Lambda) \ll \frac{\Lambda^2}{4m}$. Находясь достаточно далеко от критической точки, можно принять коэффициент $b = \text{const}$ и получить

$$a(\xi^{-1}) = \alpha \delta T_c = \int_{a(0)}^{a(\xi^{-1})} da = -8mT\mu_Db \int_0^{1/\xi} \Lambda^{D-3} d\Lambda$$

В трехмерном случае такое рассмотрение приводит к флюктуационному сдвигу критической температуры ¹³:

$$\frac{\delta T_c^{(3)}}{T_c} \sim -\frac{2mb}{\pi\alpha\xi} = -\frac{b}{2\pi T_c \alpha^2} \frac{1}{\xi^3} = -\frac{7\zeta(3)}{16\pi^3 \nu T_c \xi^3} = -\frac{8}{\pi} \sqrt{Gi_{(3)}}.$$

Вернемся к изучению свойств системы уравнений (2.118). При $T = T_c$ можно найти ее частное решение в виде:

$$\begin{aligned} a(T_c, \Lambda) &= \frac{4-D}{4m[5+(4-D)]} \Lambda^2 \\ b(T_c, \Lambda) &= \frac{5}{16m^2 T \mu_D} \frac{4-D}{[5+(4-D)]^2} \Lambda^{4-D} \end{aligned}$$

Эти степенные решения остаются справедливыми в области, в которой верна сама система уравнений (2.118), т. е. для достаточно малых Λ , определяющихся условием (2.119). Тем не менее в пространстве размерности, близкой к 4 ($D = 4 - \varepsilon, \varepsilon \ll 1$), их применимость можно распространить вплоть до области слабых флюктуаций и проследить их переход в результаты теории Гинзбурга - Ландау: $a(T_c) = 0; b(T_c) = b_0 = \text{const}$.

Действительно, в этом случае благодаря пропорциональности $a(\Lambda) \propto \varepsilon \rightarrow 0$ можно пренебречь ею в знаменателях правой части системы (2.118) и переписать второе уравнение в виде:

$$\frac{\partial b}{\partial \ln \Lambda^{-1}} = 5(4m)^2 T \mu_D \frac{b^2}{\Lambda^{4-D}}$$

Введем безразмерную, характеризующую взаимодействие флюктуаций величину γ

$$\gamma = b \frac{\Lambda^{4-D}}{5(4m)^2 T \mu_D}$$

и запишем для нее уравнение:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \ln \Lambda^{-1}} = f(\gamma)$$

где для нашего случая,

$$f(\gamma) = (4 - D)\gamma - \gamma^2$$

Уравнение (2.126) было впервые получено в посвященных проблемам квантовой теории поля работах Геллмана и Лоу [86, 87] и представляет собой центральный результат теории ренормализационной группы. Тот факт, что γ^2 входит в него с отрицательным знаком, приводит к появлению для больших $\Lambda^{-1} \rightarrow \infty$ точки сходимости $\gamma \rightarrow \gamma_c = 4 - D$, в которой $f(\gamma_c) = 0$. В случае четырехмерного пространства $\gamma_c = 0$, и ситуация оказывается аналогичной нулю заряда в квантовой электродинамике [82]. В случае $4 - D \ll 1$ в функции $f(\gamma)$ можно ограничиться всего двумя слагаемыми, как и было сделано выше (см. (2.127)). Можно думать, что качественная картина явления остается неизменной даже для $D = 3$.

Решение второго уравнения системы (2.118) (или (2.126), что то же самое) имеет вид

$$b^{-1}(T_c, \Lambda) = b_0^{-1} + \frac{80m^2}{(4 - D)} T \mu_D (\Lambda^{D-4} - \xi^{4-D})$$

Постоянную интегрирования мы выбрали равной $b_0^{-1} - \frac{80m^2}{(4 - D)} T \mu_D \xi^{4-D}$. Таким образом, при $\Lambda = \Lambda_{\max} \sim \xi^{-1}$ удается сплить результаты ренормгруппового и ГЛ-подходов.

Перейдем теперь к изучению функции $a(T, \Lambda)$ для того же интересного случая пространства размерности $D \rightarrow 4$. При температурах, несколько отличающихся (но все же достаточно близких) от T_c , можно записать

$$a(T, \Lambda) = a(T_c, \Lambda) + \alpha(T_c, \Lambda) T_c \epsilon$$

¹³ Точно таким же способом можно проанализировать и сдвиг критической температуры в 2D случае, что приводит к:

$$\frac{\delta T_c^{(2)}}{T_c} = -2G_{i(2)} \ln \frac{1}{4G_{i(2)}}$$

ак мы покажем ниже, оба полученные таким способом результата (3D и 2D) для δT_c совпадают с соответствующими результатами, полученными путем анализа сверхтекущей плотности в рамках теории возмущений.

Первое слагаемое в правой части определяется уравнением (2.123). Для нахождения $\alpha(T_c, \Lambda)$ разложим первое уравнение системы (2.118) по степеням ϵ

$$\frac{\partial \alpha(T_c, \Lambda)}{\partial \Lambda} = 2T\mu_D \frac{b(T_c, \Lambda) \Lambda^{D-1}}{\left(a(T_c, \Lambda) + \frac{\Lambda^2}{4m}\right)^2} \alpha(T_c, \Lambda)$$

Для

$$\Lambda^2/4m \gtrsim \alpha(T_c, \Lambda) T_c \epsilon$$

можно снова воспользоваться решением (2.128) для $b(T_c, \Lambda)$ и пренебречь $a(T_c, \Lambda)$ в знаменателе правой части уравнения (2.129). Постоянная интегрирования, возникшая в процессе решения уравнения (2.129), выбирается в соответствии с условием, что при $\Lambda = \Lambda_{\max} \sim \xi^{-1}$ оно спивается со значением соответствующего параметра теории Гинзбурга - Ландау: $\alpha(T_c, \Lambda) = \alpha(T_{c0}, \xi^{-1}) = \alpha_0$. В результате:

$$\alpha(T_c, \Lambda) = \alpha_0 \left[1 + \frac{80m^2 b_0}{(4-D)} T \mu_D (\Lambda^{D-4} - \xi^{4-D}) \right]^{-2/5}.$$

Условие (2.130) может быть переписано как $\Lambda \gtrsim \xi^{-1}(T)$, где $\xi(T)$ есть обобщенная корреляционная длина, определяемая уравнением:

$$\xi^{-2}(T) = 4m\alpha(T_c, \xi^{-1}(T)) T_c \epsilon$$

Такое определение верно при любой температуре. Например, достаточно далеко от критической точки, в области Гинзбурга - Ландау, $\alpha(T_c, \xi^{-1}(T)) = \alpha_0$, и наше определение воспроизводит формулу (1.4). Наоборот, в критической области главный вклад в правую часть уравнения (2.131) происходит от второго слагаемого, содержащего Λ^{D-4} . Таким образом, положив $\xi^{-1}(T) = \Lambda$, можно записать уравнения самосогласования на $\xi(T)$ и в результате его решения получить

$$\xi(T) = (4m)^{\frac{1-D}{2}} \frac{4-D}{20b_0 T \mu_D \sqrt{T_c \alpha_0}} \epsilon^{-\nu}$$

где $2\nu = [1 - (4-D)/5]^{-1}$. Как уже было отмечено, строго говоря, этот результат был выведен применительно к случаю $\varepsilon = 4 - D \ll 1$, следовательно им можно пользоваться лишь с точностью до первого порядка

в разложении по ε : $\nu = 1/2 + \varepsilon/10$. Тем не менее, расширяя область применимости вплоть до $\varepsilon = 1$ ($D = 3$), можно получить величину $\nu_3 = 3/5$.

Перейдем к вычислению критического индекса для температурной зависимости теплоемкости в непосредственной близости точки перехода. Для этого следует дважды продифференцировать по ϵ уравнение (2.117):

$$\frac{\partial C(\Lambda)}{\partial \Lambda} = T^2 \mu_D \frac{\Lambda^{D-1} \alpha^2(\Lambda)}{\left(\alpha(\Lambda) T_c \epsilon + \frac{\Lambda^2}{4m}\right)^2}$$

Перенормированная флюктуациями теплоемкость соответствует значению $C(\Lambda = 0)$, являющимся результатом интегрирования по всем флюктуационным модам. Проводя интегрирование выражения (2.133) по области $\Lambda \lesssim \xi^{-1}$, ее можно разделить на две: $\Lambda \lesssim \xi^{-1}(T)$ и $\xi^{-1}(T) \lesssim \Lambda \lesssim \xi^{-1}$. При вычислении интеграла по интервалу $\xi^{-1} > \Lambda \gtrsim \xi^{-1}(T)$ имеет место неравенство $\alpha(\Lambda) T_c \epsilon \ll \frac{\Lambda^2}{4m}$, ввиду которого функция $\alpha(\Lambda)$ в знаменателе может быть опущена. В числителе же (2.133) для $\alpha(\Lambda)$ можно воспользоваться решением (2.131). В области $\Lambda \lesssim \xi^{-1}(T)$, наоборот, для $\alpha(\Lambda)$ следует воспользоваться частным решением (2.123). В результате оказывается, что ее вклад в теплоемкость имеет ту же

особенность, что и вклад от области $\Lambda \gtrsim \xi^{-1}(T)$, однако с коэффициентом пропорциональным $(4 - D)^2 = \varepsilon^2$ и, следовательно, может быть опущен в нашем приближении. В результате:

$$C(\Lambda = 0) = \alpha_0^2 \left[(4mT)^2 \mu_D \right]^{\frac{1}{5}} \left[\frac{4}{5} \frac{(4 - D)}{b_0} \right]^{\frac{4}{5}} \frac{5}{4 - D} \xi^{\frac{4-D}{5}}(T)$$

Подставляя сюда выражение для $\xi(T)$, можно найти окончательно:

$$C = 2^{\frac{12}{5}} \alpha_0^2 \left[5\mu_D \frac{m^2 T^2}{b_0^4 (4 - D)} \right]^{\frac{1}{5}} \epsilon^{-\alpha}$$

Полученное выражение подтверждает гипотезу скэйлинга и найденное с ее помощью соотношение (2.112). Критический индекс в (2.135):

$$\alpha = \frac{(4 - D)}{10 \left[1 - \frac{(4 - D)}{5} \right]} \approx \frac{\varepsilon}{10}$$

Как видно, в общем случае критические индексы ν и α представляются рядами по степеням ε . Более громоздкие вычисления позволяют найти и следующие приближения по $\varepsilon = 4 - D$. Тем не менее следует отметить,

что уже первое приближение, дающее $\nu_3 = 3/5$ и $\alpha_3 = 1/10$ для $\varepsilon = 1$, оказывается слабо зависящим от учета последующих членов разложения по степеням ε [88].

В заключение этого раздела сделаем замечание общего характера. В зависимости от знака функции Геллмана - Лоу уравнение ренормализационной группы может иметь два типа различных решений. В квантовой электродинамике константа взаимодействия убывает на больших расстояниях (т. н. «ноль заряда»). В квантовой хромодинамике, наоборот, константа взаимодействия оказывается малой на малых расстояниях («асимптотическая свобода»), но возрастает с увеличением расстояния между частицами («конфайнмент»). Выше мы продемонстрировали, что $4D$ теория фазового перехода относится к типу «ноль заряда» с убыванием эффективного взаимодействия на больших расстояниях.

ак мы убедились, абстрактный с точки зрения описания реального трехмерного мира четырехмерный случай является весьма специальным для теории ренормализационной группы: ситуация здесь оказывается логарифмической. Замечательно, что реальные $3D$ задачи с диполь-дипольным взаимодействием оказываются эквивалентными этой хорошо решаемой $4D$ задаче. Дело, оказывается, в том, что на больших расстояниях такое взаимодействие зависит от угла между \mathbf{r} и \mathbf{d} . Этот угол и играет роль той самой четвертой координаты, которой недоставало, чтобы сделать ситуацию логарифмической. Как мы уже говорили, именно такого типа взаимодействие позволило описать фазовый переход в ферроэлектрике. То же самое относится и к сложнейшей задаче о пиннинге волны зарядовой плотности, где именно диполь-дипольное взаимодействие помогло решить уравнение ренормализационной группы и вычислить экспоненциально большую диэлектрическую восприимчивость [89]. Ниже (раздел 4.2) мы покажем, что подобная ситуация возникает и в задаче о пиннинге взаимодействующих вихрей в сверхпроводнике. Здесь диполь-дипольное взаимодействие имеет место на расстояниях $r \lesssim \lambda$, и в случае достаточно сильных магнитных полей, когда оно оказывается существенным, ренорм-групповой подход позволяет вычислить экспоненциально малую величину критического тока.

11.7 2.7. Влияние флуктуаций на сверхтекущую плотность и критическую температуру

Среди важнейших термодинамических свойств сверхпроводника находится глубина проникновения в него магнитного поля $\lambda(T)$. Ее температурная зависимость, очевидно,

асимметрична по отношению к точке

перехода: $\lambda(T)$ возрастает по мере приближения к T_c из сверхпроводящей фазы и, очевидно, бесконечна в фазе нормальной. Простейшая электродинамика сверхпроводника связывает плотность сверхпроводящего тока \mathbf{j} , глубину проникновения $\lambda(T)$ и сверхтекущую плотность (в терминах теории Лондонов - «плотность сверхпроводящих электронов») n_s :

$$\mathbf{j} = -n_s \frac{2e^2}{m} \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\lambda^2(T)} \mathbf{A}, \quad \lambda^2(T) = \frac{m}{8\pi n_s e^2}$$

Теория Гинзбурга — Ландау позволяет вычислить температурную зависимость $\lambda(T)$ в окрестности критической температуры, отождествляя сверхтекущую плотность со средним значением параметра порядка:

$$n_s = \tilde{\Psi}^2 = -\frac{a}{b}$$

и таким образом приводит к заключению о ее корневой расходимости в точке сверхпроводящего перехода:

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m}{8\pi e^2} \frac{b}{\alpha T_c |\epsilon|}}.$$

Рассмотрим как возникновение в окрестности перехода флюктуационных куперовских пар влияет на выталкивание приложенного магнитного поля. Так как сверхтекущая плотность при приближении к точке перехода снизу обращается в ноль, а именно ее величина определяет глубину проникновения $\lambda(T)$, то следует ожидать, что роль флюктуаций в этом случае может оказаться ярко выраженной.

Для начала убедимся, что присутствие флюктуационных куперовских пар не приводит к возникновению сверхтекущей плотности выше T_c . Флюктуационную часть сверхпроводящего тока можно вычислить как [90, 91]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}_f \rangle &= -\frac{\partial F_f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = T \frac{\partial \ln Z(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \\ &= -\frac{\int \mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \mathcal{D}\Psi^*(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r}), \mathbf{A}]}{\partial \mathbf{A}} \exp\left(-\frac{\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r}), \mathbf{A}]}{T}\right)}{\int \mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \mathcal{D}\Psi^*(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{\mathcal{F}[\Psi(\mathbf{r}), 0]}{T}\right)} \end{aligned}$$

Это выражение может быть представлено в форме суммы двух вкладов:

$$\langle \mathbf{j}_{f1} \rangle = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = -\frac{2e^2}{m} \mathbf{A} \langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle_{\mathbf{A}=0} - \frac{e}{m} \langle \text{Im} [\Psi(\mathbf{r}) \nabla \Psi^*(\mathbf{r})] \rangle_{\mathbf{A}}$$

Первый из них, \mathbf{j}_1 , просто воспроизводит лондоновское выражение с заменой n_s на $\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$. При вычислении соответствующего среднего может быть использовано выражение для свободной энергии Гинзбурга — Ландау с $\mathbf{A} = 0$. Второй вклад, \mathbf{j}_2 , имеет более сложное происхождение. Для того, чтобы получить его отличным от нуля, следует включить полевую зависимость в само выражение для ГЛ свободной энергии и только после этого проводить усреднение по флюктуационным полям. Предполагая магнитное поле достаточно слабым, гиббсовскую экспоненту можно разложить по степеням вектор-потенциала \mathbf{A} и получить:

$$\mathbf{j}_2 = -\frac{e^2}{m^2 T} \left\langle \text{Im} [\Psi(\mathbf{r}) \nabla \Psi^*(\mathbf{r})] \int dV_1 \text{Im} [\Psi(\mathbf{r}_1) \nabla \Psi^*(\mathbf{r}_1)] \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \right\rangle_{\mathbf{A}=0}$$

В последующем рассмотрении мы ограничимся случаем сверхпроводника существенно второго рода с ($\varkappa \gg 1$). В этом случае характерный масштаб пространственного изменения

$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ оказывается гораздо большим соответствующего масштаба для параметра порядка, в результате чего вектор-потенциал в (2.139) может быть вынесен из-под знака интеграла. Имея ввиду область слабых флуктуаций при температурах выше T_c , параметр порядка можно разложить в ряд Фурье и свести усреднение к вычислению выражения:

$$\mathbf{j}_2 = \frac{2e^2}{m} \sum_k \mathbf{k} \left(\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \langle |\Psi_k|^2 \rangle$$

которое приводит к $\langle \mathbf{j}_1 \rangle = 0$, как это интуитивно и ожидалось.

Ниже T_c ситуация оказывается сложнее. В целях вычисления \mathbf{j}_2 в области слабых флуктуаций ниже точки перехода давайте отделим от равновесного значения параметра порядка его флуктуирующие вещественную и мнимую части: $\Psi(\mathbf{r}) = \tilde{\Psi} + \psi_r + i\psi_i$. Это позволяет нам вычислить пространственный интеграл в выражении (2.139):

$$\int dV_1 \operatorname{Im} [\Psi(\mathbf{r}_1) \nabla \Psi^*(\mathbf{r}_1)] = 2i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \psi_{r\mathbf{k}} \psi_{i,-\mathbf{k}}$$

Последующее функциональное интегрирование может быть выполнено в духе представленных выше вычислений флуктуационного вклада в теплоемкость сверхпроводника ниже T_c , что приводит к

$$\langle \mathbf{j} \rangle = -\frac{2e^2}{m} \mathbf{A} \left[\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle_{\mathbf{A}=0} - \sum_{\mathbf{k}} \frac{T}{(2\alpha T_c |\epsilon| + \mathbf{k}^2/4m)} \right]$$

Отделим равновесную и флуктуирующую части и вычислим $\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \tilde{\Psi}^2 + \langle \psi_r^2 \rangle + \langle \psi_i^2 \rangle + 2\tilde{\Psi} \langle \psi_r \rangle$. Усреднение первых двух слагаемых сложностей не представляет:

$$\begin{aligned} \langle \psi_r^2 \rangle &= \frac{T}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\alpha T_c |\epsilon| + \frac{\mathbf{k}^2}{4m}} \\ \langle \psi_i^2 \rangle &= \frac{T}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\mathbf{k}^2}{4m}} \end{aligned}$$

Для того же, чтобы провести правильное усреднение в $\langle \psi_r \rangle$ следует учесть ангармонические по флуктуирующему полям слагаемые в функционале Гинзбурга - Ландау, происходящие из члена четвертого порядка:

$$\langle \psi_r \rangle = -\frac{1}{2\tilde{\Psi}} (3\langle \psi_r^2 \rangle + \langle \psi_i^2 \rangle)$$

Окончательно в ГЛ-области ниже T_c сверхпроводящий ток представляется в виде:

$$\langle \mathbf{j}_i \rangle = -\frac{2e^2}{m} \mathbf{A} \left[\tilde{\Psi}^2 - 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{T}{(2\alpha T_c |\epsilon| + \frac{\mathbf{k}^2}{4m})} \right]$$

ак видно, флуктуации ослабляют его по сравнению с величиной, следующей из теории среднего поля Гинзбурга - Ландау.

Соответствующее, с учетом флуктуаций, выражение для сверхтекущей плотности принимает вид:

$$n_S(T) = \frac{\alpha}{b} \left[T_c |\epsilon| - \frac{2b}{\alpha^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2|\epsilon| + \frac{\mathbf{k}^2}{4m} \alpha T_c)} \right]$$

В приближении среднего поля $\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \tilde{\Psi}^2 = n_s(T)$. Вычисляя $\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \tilde{\Psi}^2 - 2 \langle \psi_r^2 \rangle$, можно увидеть, что:

$$\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \frac{\alpha}{b} \left[T_c |\epsilon| - \frac{b}{\alpha^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(2|\epsilon| + \frac{k^2}{4m} \alpha T_c)} \right]$$

и следовательно учет флуктуаций приводит к различию между $\langle |\Psi(\mathbf{r})|^2 \rangle$ и $n_s(T)$ уже в первом порядке.

Легко видеть, что в обоих 3D и 2D случаях сумма по импульсам в (2.143) формально расходится на верхнем пределе. Это уже не первый раз, когда мы сталкиваемся с проблемой расходимости флуктуационных вкладов и мы знаем, как она решается. Будучи связанной с выходом за пределы применимости функционала Гинзбурга - Ландау при $|\mathbf{k}| \gtrsim \xi^{-1}$, эта ультрафиолетовая катастрофа обрезается на $\xi \cdot |\mathbf{k}| = C_{(D)} \sim 1$.

В 3D случае простейшим способом регуляризации суммы является разделение вкладов от верхнего и нижнего пределов суммирования, имеющих различный физический смысл, что достигается добавлением и вычитанием контр-члена $\sim \sum |\mathbf{k}|^{-2}$. В результате возникает два слагаемых: первое, независимое от $|\epsilon|$, происходит в результате обрезания проведенного на верхнем пределе. Второе оказывается пропорциональным $\sqrt{|\epsilon|}$ и происходит от нижнего предела. Используя микроскопические значения и соотношения между параметрами теории Гинзбурга - Ландау $\alpha^2/b = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\nu$ и $4m\alpha T_c = \xi^{-2}$, можно окончательно найти:

$$n_{s3}(T) = \frac{64m\pi^2}{7\zeta(3)}\nu T_c \xi^2 \left[T_c - T - \frac{7\zeta(3)}{32\pi^3\nu\xi^3}C_{(3)} + \frac{7\zeta(3)}{32\pi^2\nu\xi^3}\sqrt{2\frac{T_c - T}{T_c}} \right].$$

Обсудим второе слагаемое выражения (2.145). Оно, очевидно, определяет флуктуационный сдвиг критической температуры $\delta T_c = T_c - T_{c0}$, где T_{c0} есть значение критической температуры, вычисленное в приближении теории среднего поля (БКШ). Этот сдвиг равен:

$$\frac{\delta T_c^{(3)}}{T_{c0}} \sim -\frac{7\zeta(3)}{16\pi^3\nu T_{c0}\xi^3} \approx -\frac{8}{\pi}\sqrt{Gi_{(3)}}$$

и совпадает с величиной, которую мы уже нашли выше в рамках ренормгруппового подхода (см. выражение (2.122)). В дальнейшем мы включим этот сдвиг в $|\epsilon|$, обозначая перенормированную критическую температуру посредством T_c и отождествляя последнюю с экспериментально наблюдаемой величиной. Учет поправок следующего порядка показывает, что замену $T_{c0} \rightarrow T_c$ следует произвести и в последнем слагаемом выражения (2.145), так что для сверхтекущей плотности можно записать окончательно:

$$n_{s3}(T) = \frac{64m\pi^2}{7\zeta(3)}\nu T_c^2 \xi^2 \left[|\epsilon| + 8\sqrt{2Gi_{(3)}|\epsilon|} \right]$$

Несмотря на более медленную зависимость флуктуационной поправки к сверхтекущей плотности, при стремлении температуры к критической по сравнению с температурной зависимостью основного вклада ($\sqrt{|\epsilon|}$ вместо $|\epsilon|$), она проявляет себя лишь при $|\epsilon| \sim Gi_{(3)}$.

В 2D случае вопрос об ультрафиолетовой расходимости флуктуационного вклада менее существен, ибо параметр обрезания оказывается под логарифмом:

$$n_{s2}(T) = \frac{32m\pi^2}{7\zeta(3)}\nu T_c \xi^2 \left[T_c |\epsilon| - \frac{7\zeta(3)}{16\pi^3\nu\xi^2} \ln \frac{C_2}{|\epsilon|} \right]$$

Эта формула, полученная в рамках теории возмущений, справедлива лишь для $|\epsilon| \gtrsim Gi_{(2)}$, что позволяет нам определить положение истинной температуры перехода с точностью

порядка $Gi_{(2)}$. Однако, к счастью, найденная таким образом флуктуационная поправка содержит большой логарифм:

$$\frac{\delta T_c^{(2)}}{T_{c0}} = -2Gi_{(2)} \ln \frac{C_2}{Gi_{(2)}}$$

что, как мы увидим в главе 15, делает ее главной в определении критической температуры фазового перехода а $2D$ сверхпроводящей системе.

$2D$ сверхтекучая плотность (2.148) может быть также выражена посредством перенормированной флуктуациями критической температуры. Для этого достаточно включить параметр обрезания во флуктуационный сдвиг T_c (сравните с ренорм-групповой оценкой (2.121)), что приводит К¹⁴:

$$n_{s2}(T) = \frac{mT_c}{\pi Gi_{(2)}} \left[|\epsilon| - 2Gi_{(2)} \ln \frac{Gi_{(2)}}{|\epsilon|} \right]$$

Специфические особенности поведения сверхтекущей плотности $2D$ системы будут подробно обсуждены в главе 15. Там же будет приведена и интерполяционная формула для $n_{s2}(T)$, справедливая для всего интервала температур в окрестности истинной температуры перехода.

Следует отметить, что в $2D$ сверхпроводнике существенную роль могут играть не только флуктуации сверхпроводящего параметра порядка, но и флуктуации қулоновского потенциала. Правда, вклад последнего оказывается важным лишь в очень тонких пленках (с толщиной $d \ll \xi$), где экранирование носит $2D$ характер. Такие флуктуации также сдвигают критическую температуру вниз, на величину [92-95]:

$$\frac{\delta T_c^{(Cl)}}{T_{c0}} \sim -Gi_{(2)} \ln^3 \left(\frac{\xi}{d} \right)$$

ак видно, полученный флуктуационный сдвиг $\delta T_c^{(2)}$ оказывается логарифмически большим по сравнению с шириной критической области $Gi_{(2)}T_c$, однако выражение (2.151) справедливо лишь до тех пор, пока он остается малым по сравнению с самой величиной T_c .

Отметим, что высокочастотные квантовые флуктуации с $\Omega \gg T_c$ также приводят к малому сдвигу критической температуры [96], который эквивалентен изменению численного фактора при ω_D под логарифмом в формуле БКШ.

11.8 2.8. Флуктуации магнитного поля

Выше нами было рассмотрено влияние флуктуаций параметра порядка на термодинамические свойства сверхпроводника в предположении постоянства магнитного поля, в которое он помещен. Может возникнуть естественный вопрос: а каково влияние на свойства сверхпроводника обычных флуктуаций векторного потенциала типа излучения черного тела? Априори, эффект таких флуктуаций должен быть малым при низких температурах. Однако, как было показано выше, и вклад флуктуаций параметра порядка в массивных образцах ничтожно мал. В сверхпроводниках первого рода корреляционная длина ξ может значительно превышать глубину проникновения магнитного поля λ . Это означает, что флуктуации магнитного поля могут происходить в масштабе, гораздо меньшем характерного для сверхпроводимости, что приведет к изменению свойств самого сверхпроводника. Так, в этом разделе мы покажем, что флуктуации магнитного поля, слабо влияя на термодинамические свойства сверхпроводника, тем не менее, могут изменить род происходящего в нем фазового перехода.

¹⁴ Для упрощения записи мы по прежнему будем называть $\frac{T_c-T}{T_c}$ приведенной температурой ϵ .

Флуктуации магнитного поля можно учесть воспользовавшись тем же формализмом функционала Гинзбурга - Ландау [97]. Предположим, что внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = 0$, система находится ниже точки сверхпроводящего перехода, равновесное значение параметра порядка есть $\tilde{\Psi}$ и мы пренебрегаем его флуктуациями. Дальнейший расчет может быть выполнен в духе учета флуктуаций параметра порядка. А именно, можно воспользоваться тем же выражением для функционала свободной энергии (2.10), однако, понимая его теперь как функционал от флуктуирующего векторного потенциала. Выбирая калибровку последнего в форме $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, переходим к фурье-представлению, проводим интегрирование по пространственным переменным и получаем функционал типа Гинзбурга - Ландау, зависящий уже от фурье-компонент вектора потенциала в качестве новых переменных:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathbf{A}(\mathbf{r})] &= F_n + \int dV \left[a|\tilde{\Psi}|^2 + \frac{b}{2}|\tilde{\Psi}|^4 + \frac{e^2|\tilde{\Psi}|^2}{m}\mathbf{A}^2 + \frac{\mathbf{k}^2\mathbf{A}^2}{8\pi} \right] = \\ &= F_s[\tilde{\Psi}, 0] + \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{e^2|\tilde{\Psi}|^2}{m} + \frac{\mathbf{k}^2}{8\pi} \right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^2\end{aligned}$$

Соответствующая свободная энергия запишется в виде:

$$\begin{aligned}F &= F_s[\tilde{\Psi}, 0] + \ln \int \mathfrak{D}A_x \mathfrak{D}A_y \exp \left(-\frac{1}{T} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{e^2|\tilde{\Psi}|^2}{m} + \frac{\mathbf{k}^2}{8\pi} \right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^2 \right) = \\ &= F_s[\tilde{\Psi}, 0] + T \sum_{\mathbf{k}} \ln \frac{\pi T}{\frac{e^2|\tilde{\Psi}|^2}{m} + \frac{\mathbf{k}^2}{8\pi}}.\end{aligned}$$

Сумма по флуктуационным модам в (2.152), очевидно, сильно расходится. При этом наиболее расходящийся вклад в свободную энергию связан ни с чем иным, как с классической ультрафиолетовой катастрофой в релей-джинсовском смысле. Его, как всегда, можно устраниТЬ, изменяя точку отсчета свободной энергии. Следующий, пропорциональный $|\tilde{\Psi}|^2$, результат суммирования в (2.152) также оказывается расходящимся. С этой расходимостью мы обойдемся таким же способом, как это было сделано выше: перенормируем критическую температуру сверхпроводящего перехода по отношению к ее значению, следующему из теории среднего поля. Регуляризованная таким образом свободная энергия окончательно может быть записана в виде:

$$F = F_n + a|\tilde{\Psi}|^2 - \frac{16T\sqrt{\pi}e^3}{m^{3/2}}|\tilde{\Psi}|^3 + \frac{b}{2}|\tilde{\Psi}|^4$$

Можно заметить, что благодаря флуктуациям векторного потенциала в найденном выражении для флуктуационной части свободной энергии появился необычный кубический член. Этот вклад, даже будучи малым по величине, изменяет род сверхпроводящего фазового перехода. Действительно, положив $a = 0$, можно увидеть, что минимум свободной энергии имеет место при положительном значении параметра порядка. А это означает, что уже при положительном a зависимость свободной энергии от модуля параметра порядка приобретает два минимума. Один, при $\tilde{\Psi} = 0$, соответствует нормальному, а второй, (при положительном значении $\tilde{\Psi}$) - сверхпроводящему состоянию.

С изменением температуры меняется величина свободной энергии во втором минимуме. Фазовый переход первого рода происходит тогда, когда эти величины в обоих минимумах сравниваются, т. е. при $\tilde{a} = 128\pi T^2 e^6 / b m^3$, или, используя микроскопические выражения для λ и α^2/b , при:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\alpha^2}{b} \frac{2^{13}\pi T^4 e^6}{(4\alpha mT)^3} = 2 \cdot (2\pi)^4 Gi_{(3)} \left(\frac{\xi(T)}{\lambda(T)} \right)^6$$

Из этого результата видно, что для сверхпроводника первого рода эта область температур оказывается заметно шире критической и фазовый переход в сверхпроводящее состояние благодаря флуктуациям магнитного поля становится переходом первого рода.

Для сверхпроводников второго рода область температур $\tilde{\epsilon}$, в которой важны флуктуации магнитного поля, оказывается находящейся в пределах критической области. Это означает, что такие флуктуации должны быть включены в уравнения ренормализационной группы. В результате оказывается, что благодаря флуктуациям магнитного поля фазовый переход меняет свой род и для сверхпроводников второго типа. Тем не менее, для температур вне критической области $|\epsilon| \gtrsim Gi_{(3)}$ эти эффекты пренебрежимо малы, и при дальнейшем рассмотрении мы не будем их принимать во внимание.

12 Высокотемпературная сверхпроводимость

(пока тут всё - загадка для меня)

№16, 2 часа.

Квазидвумерные и квазиодномерные системы.

Усиление электрон–фононного взаимодействия в системах с переменной валентностью.

Нефононные механизмы сверхпроводимости.

d-спаривание.

Высокотемпературная сверхпроводимость.

№17, 2 часа.

Высокотемпературные сверхпроводники на основе оксидов меди и их основные характеристики.

Аномалии нормального состояния купратов.

Температура сверхпроводящего перехода, длина когерентности и пространственная анизотропия.

Природа электронного спаривания и симметрия сверхпроводящего параметра порядка в ВТСП купратах.

№18, 2 часа.

Двухщелевая сверхпроводимость в MgB₂ и твердых растворах на его основе.

Пникиды железа – новый класс высокотемпературных сверхпроводников на основе слоистых соединений железа.

Сопоставление свойств ВТСП купратов, сверхпроводников на основе MgB₂ и железосодержащих сверхпроводников

13 Other theoretical models

13.1 Possibility of superconductivity type phenomena in a one-dimensional system

(почитаю потом, интересная статья)

13.2 Transition from metallic to tunneling regimes by Blonder Tinkham Klapwijk

Transition from metallic to tunneling regimes in SC microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion by Blonder Tinkham Klapwijk

Abstract

We propose a simple theory for the $I - V$ curves of normal-superconducting microconstriction contacts which describes the crossover from metallic to tunnel junction behavior. The detailed calculations are performed within a generalized semiconductor model, with the use of the Bogoliubov equations to treat the transmission and reflection of particles at the $N - S$ interface. By including a barrier of arbitrary strength at the interface, we have computed a family of $I - V$ curves ranging from the tunnel junction to the metallic limit. Excess current, generated by Andreev reflection, is found to vary smoothly from $4\Delta/3eR_N$ in the metallic case to zero for the tunnel junction. Charge-imbalance generation, previously calculated only for tunnel barriers, has been recalculated for an arbitrary barrier strength, and detailed insight into the conversion of normal current to supercurrent at the interface is obtained. We emphasize that the calculated differential conductance offers a particularly direct experimental test of the predictions of the model.

13.2.1 I. INTRODUCTION

In recent years there has been much experimental and theoretical work on small-area high-current-density superconducting junctions, since such junctions have advantages for certain practical applications. Although the properties (I-V curves, etc.) of classic (high-barrier) tunnel junctions have long been understood in great detail,¹ the properties of metallic (no-barrier) junctions have been studied only more recently²⁻⁴ and in less detail, and the transitional case (small barrier) has received practically no attention at all. Here, we present a new unified treatment which is sufficiently general to embrace both limits, as well as the intermediate regime.

In this paper, we confine our attention primarily to the $N - S$ interface in the context of a generalized Andreev reflection model. This avoids the complications of the Josephson effect, while allowing complete delineation of $I - V$ curves including the so-called "excess current" at high voltage, as it increases from zero in tunnel junctions to its limiting value in clean metallic contacts.

The paper begins with a careful clarification of the relation between a general semiconductor model of the superconducting energy levels and the excitations of the BCS model and the Bogoliubov equations. With this in hand, we are quickly led to complete $I - V$ curves for the case of arbitrary barrier strength. We also compute the generalization of the tunnel-injection results for the generation of charge imbalance in the superconductor, and give new insight into the detailed processes involved in the conversion from normal to supercurrent at an N - S interface. Some of the results which we obtain by our simple technique have been obtained earlier by other more mathematically complex theories, but our method gives greater physical insight. Moreover, the simplicity of our method has allowed us to treat a broader range of problems having direct experimental implications. We have also used this model in a previous publication⁵ to explain the origin of the excess current and of the subharmonic gap structure which is observed in metallic S - S contacts.

13.2.2 II. GENERALIZED SEMICONDUCTOR SCHEME

It has long been conventional to simplify the calculation of tunnel currents by taking advantage of the fact that the BCS coherence factors u_k and v_k drop out of the computation if excitations with the same energy E_k , but with $k < k_F$ and $k > k_F$, are grouped together. Then a very simple "semiconductor model" can be established, in which only the superconducting density of states $N_s(E)$ distinguishes the superconductor from the situation in the normal state. However, in combining $k_<$ and $k_>$ for each E_k , information is lost. For instance, the quasiparticle charge imbalance Q^*

refers specifically to the imbalance between the two branches $k > k_F$ and $k < k_F$ of the quasi-particle spectrum, a distinction which is completely suppressed in the simplest semiconductor model. Another shortcoming of the elementary semiconductor model is that the density-of-states factor makes no reference to the microscopic nature of the states. For example, it is clear that the current must be carried toward and away from the junction by waves traveling in the appropriate directions, yet this physical fact is obscured in the usual tunnel-Hamiltonian model.

Here, we describe a generalized semiconductor model specifically designed to avoid this loss of information. The key innovation is the use of the Bogoliubov equations⁶ to handle the interface; this treats all cases from a clean metallic interface to a tunnel junction in the same formal way by matching wave functions at the boundary. These results determine the probability current carried by the various excitations characterized by the semiconductor diagram. For simplicity, we restrict attention to metal clean enough to allow use of momentum as a good quantum number for labeling the various waves.

If one considers only energies $E > \Delta$, the Bogoliubov equation solutions (see Appendix for details) for the incident, transmitted, and reflected particles can be identified with the conventional BCS quasiparticle excitations with energy

$$E_k = (\Delta^2 + \epsilon_k^2)^{1/2} \quad (1)$$

with respect to the electrochemical potential for condensed pairs, where

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_F \quad (2)$$

Because only the square of ϵ_k enters the expression for E_k , there will be a pair of magnitudes of k associated with each energy, namely,

$$\hbar k^\pm = (2m)^{1/2} \left[\epsilon_F \pm (E_k^2 - \Delta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Moreover, because of the BCS pairing of k and $-k$, one must consider both signs of k together, so that there is a fourfold degeneracy of relevant states for each E , as sketched in Fig. 1. Of course there is an additional twofold spin degeneracy, but in the absense of spin-flip processes this affects only normalizations, and it need not concern us here.

The nature of one type of these BCS quasiparticle states is given by the usual Bogoliubov transformation⁷ as

$$\gamma_{k0}^* = u_k c_{k\uparrow}^* - v_k c_{-k\downarrow} \quad (4)$$

where the BCS coherence factors are given by

$$u_k^2 = 1 - v_k^2 = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_k/E_k) \quad (5)$$

Although, in general, Eq. (5) determines the magnitudes of u_k and v_k (which can have phase factors), for simplicity we take them to be real and positive. For the $N - S$ case treated here, this involves no loss of generality; only in $S - S$ devices does phase play a role. The excitations described in Eq. (4) consist partly of electrons created at $+k$ (i.e., $u_k c_{k\uparrow}^*$) and partly of holes created at $-k$ (i.e., $v_k c_{-k\downarrow}$, the destruction of an electron at $-k$). Since either term increases the system momentum by $+k$, the subscript k in γ_{k0}^* is a well-defined momentum index suitable for labeling. From Eq. (5) we see that the excitations at $\pm k^+$ are predominantly electronlike, while those at $\pm k^-$ are predominantly holelike. The other members of the degenerate set are described by including the complementary BCS operator γ_{k1} and also including both senses of k .

In preparation for the application of boundary conditions, we note that the excitation described by Eq. (4) is described in the Bogoliubov-equation formalism (see Appendix for details) as a two-element column vector,

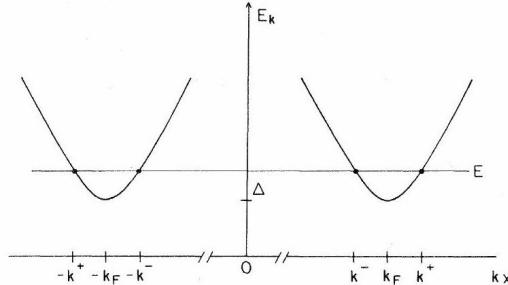


FIG. 1. Schematic plot of excitation energies E_k vs k along an axis passing through the center of the Fermi sphere in the superconducting state. The scale has been greatly expanded near $\pm k_F$.

$$\psi_{k0} = \begin{bmatrix} f_k(x, t) \\ g_k(x, t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Here f_k and g_k satisfy the differential equations

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu(x) + V(x) \right] f + \Delta g \\ &= i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow Ef \quad (7) \\ & - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu(x) + V(x) \right) g + \Delta f \\ &= i\hbar \frac{\partial g}{\partial t} \rightarrow Eg \end{aligned}$$

and they are proportional to u_k and v_k , respectively, when $V(x)$ is constant. The time derivatives may be replaced as indicated in solutions for stationary states of energy E .

As written in Eq. (4), the excitations γ_{k0}^* change the charge of the superconductor by the fractional electronic charge $q_k = u_k^2 - v_k^2 = \epsilon_k/E_k = \pm N_s(E)^{-1}$. Since physically allowable operators must conserve charge exactly, it is convenient⁷ to introduce operators of the form

$$\gamma_{ek0}^* = u_k c_{k\uparrow}^* - v_k S^* c_{-k\downarrow}, \quad (8a)$$

$$\gamma_{hk0}^* = u_k S c_{k\uparrow}^* - v_k c_{-k\downarrow} = S \gamma_{ek0}^* \quad (8b)$$

where S^* adds a pair to the condensate and S destroys one. These operators create excitations while changing the charge by exactly $\pm e$, corresponding to the subscripts e and h for electron and hole, respectively. Accordingly, they are better adapted to describe the energy levels analogous to those of ordinary electrons. The excitations described by Eqs. (8a) and (8b) are identical, and in no sense cancel as one might suppose for electron and hole operators. The systems resulting from (8a) and (8b) differ only by one condensed pair from the reservoir at the chemical potential.

Now for any system with fermion excitations such as these, the total system energy can be written as

$$E = E_G + \sum_k E_k \gamma_k^* \gamma_k + \mu N \quad (9)$$

where E_G is the ground-state energy, and the sum runs over all the excitations, which have $E_k \geq 0$. The electrochemical potential μ must be introduced explicitly since we are interested in treating processes which change the number N of electrons in a subsystem at given μ by ± 1 . In fact, the energy required to make an excitation with charge e is

$$E_{ek} = \mu + E_k, \quad (10a)$$

while that to make an excitation with charge $-e$ differs by 2μ and is

$$E_{hk} = -\mu + E_k = -(\mu - E_k) \quad (10b)$$

We can now tabulate (see Table I) the possible charge-conserving processes involving subsystems 1 and 2, and write down the corresponding condition set by the conservation of energy. There are four distinct cases, each of which conserves energy equally well in reverse, making eight cases in all. As is evident from Table I, all these energetically allowed transitions occur as "horizontal" ones only if we plot both $\pm E_{ki}$ symmetrically about each μ_i , as is motivated by recalling that $\mu - E_k = -E_{hk}$ (see Fig. 2). Further, the four cases of Table I include all the combinations of $\pm E_k$, so that all horizontal transitions in such a "reflected" or semiconductor-model diagram are energetically allowed.

There is, however, another constraint on the system; namely, a particle incident from the left can only produce transmitted particles with positive group velocity ($dE/d\hbar k$) and reflected ones with negative group velocities. In general, there is a finite probability of all the transfers allowed by these considerations to occur, but in the special case of zero barrier and no discontinuity in electronic-band parameters across the $N - S$ interface, it turns out that there is essentially zero crossover between channels inside and outside the Fermi surface, even near the gap edge. It is here that the Bogoliubov equations prove most useful: The semiconductor diagram shows which transitions are energetically allowed; the Bogoliubov equations provide the

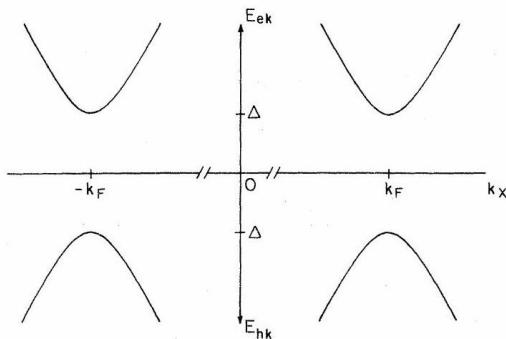


FIG. 2. Semiconductor version of Fig. 1. Inclusion of the quasiparticle branches in the lower half plane allows all the transitions in Table I to be "horizontal."

TABLE I. Processes involving transfer of a single electronic charge.

	Process	Energy condition
1. Electron from 1 \rightarrow 2 (or reverse)		$\mu_1 + E_{k1} = \mu_2 + E_{k2}$
2. Hole from 1 \rightarrow 2 (or reverse)		$\mu_1 - E_{k1} = \mu_2 - E_{k2}$
3. Create electron in 1 and hole in 2 (or destroy both)		$\mu_1 + E_{k1} = \mu_2 - E_{k2}$
4. Create hole in 1 and electron in 2 (or destroy both)		$\mu_1 - E_{k1} = \mu_2 + E_{k2}$

quantitative probability that each will occur.

As a final preliminary, we consider the special case of the normal metal, obtained by letting $\Delta \rightarrow 0$ in the expressions for the superconducting case. Here the situation simplifies from the superconducting case shown in Fig. 2 because electronlike excitations cannot be made inside the Fermi sphere, since the states there are fully occupied in the ground state, and excitations must be orthogonal to the ground state. Similarly, hole excitations are possible only outside the Fermi sphere. As a result, in the normal metal only the branches shown in Fig. 3 exist.

13.2.3 III. THE N-S BOUNDARY IN EQUILIBRIUM

We start by considering the dynamic equilibrium which exists at an N - S interface with no applied voltage, as sketched in Fig. 4. In this equilibrium situation, all relevant quasiparticle states (such as those labeled 0, 1, 2, 3, 4, and 5 in the figure) are occupied with the same probability $f_0(E)$, which also gives the probability of a hole in the state 6 at $-E$. Viewed kinematically in a semiclassical ap-

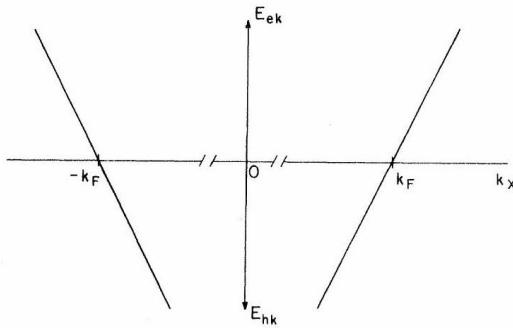


FIG. 3. E_k vs k for the normal state. Approximation, however, particles approach the interface and are transmitted and reflected with certain probabilities, which are given by the products of squared amplitudes of Bogoliubov-equation solutions times their appropriate group velocities. The self-consistency of the equilibrium state provides a useful check on the computed probability coefficients.

To be concrete, consider an electron incident on the interface from the normal state with energy $E > \Delta$, as indicated by the arrow at the state labeled 0 in Fig. 4. By matching slope and value of the wave function across the interface, one finds the probabilities $A(E)$, $B(E)$, $C(E)$, and $D(E)$ for the four processes indicated by those labels in Fig. 4, i.e., outgoing particles at points 6, 5, 4, and 2, respectively. In words, $C(E)$ is the probability of transmission through the interface with a wave vector on the same side of the Fermi surface (i.e., $q^+ \rightarrow k^+$, not $-k^-$), while $D(E)$ gives the probability of transmission with crossing through the Fermi surface (i.e., $q^+ \rightarrow -k^-$). $B(E)$ is the probability of ordinary reflection, while $A(E)$ is the probability of Andreev⁸ reflection as a hole on the other side of the Fermi surface. The latter process

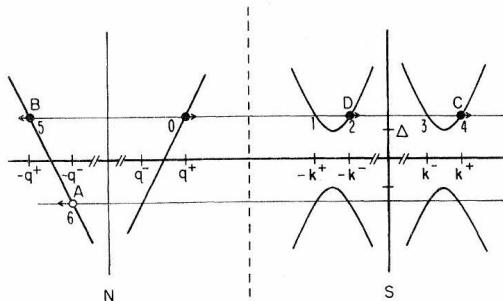


FIG. 4. Schematic diagram of energy vs momentum at $N - S$ interface. The open circles denote holes, the closed circles electrons, and the arrows point in the direction of the group

velocity. This figure describes an incident electron at $|0\rangle$, along with the resulting transmitted $|2, 4\rangle$ and reflected $|5, 6\rangle$ particles.

is not included in Table I, since it involves a transfer of a pair carrying $2e$ across the interface, while the processes in Table I transfer only a single electronic charge. The energy conservation condition appropriate for Andreev reflection is found by equating the energy of the initial electronlike excitation with that of the final holelike excitation plus a Cooper pair at the chemical potential. That is, $E_{ek} = E_{hk} + 2\mu$, from which it follows that

$$|E_e| = |E_h| \quad (11)$$

In other words, the hole is generated as far below μ as the electron was above, as drawn in Fig. 4. Of course, this result is obvious in the excitation representation.

It should be clearly understood that the probabilities A, B, C , and D (and the similar set A', B', C' , and D' for quasiparticles incident from the superconducting side) are those appropriate for probability current, taking account of the cancelling effects of state density and group velocity. For example, consider the flow of particles across the interface in the energy range E to $E + dE$, and including only states outside the Fermi surface. From left to right, the current from states at 0 to those at 4 in Fig. 4 is proportional to $v_F C(E) f_0(E) dE$; the balancing current from right to left, i.e., from states at 1 to those at 5, is proportional to $v_F C'(E) f_0(E) N_s(E) dE$, where $N_s(E)$ is the normalized density of states in the superconductor. In equilibrium these flows are exactly equal, so that

$$C'(E) N_s(E) = C(E) \quad (12a)$$

and similarly

$$D'(E) N_s(E) = D(E) \quad (12b)$$

governs the branch-crossing transfers. The results of Eqs. (12) can be derived by direct computation, or by appeal to time-reversal symmetry. For simplicity, in the remainder of the paper we write all expressions in terms of $C(E)$ and $D(E)$, avoiding the need for explicit inclusion of the density-ofstates factor $N_s(E)$ or the quasiparticle group velocity $v_g = N_s^{-1} v_F$ in integrations over energy.

Recognizing the symmetry of the problem about μ , we see that $A(E)$ and $B(E)$ are even functions of E . Similarly, $C(E)$ and $D(E)$ are also even functions of E , provided one uses the convention that $D(E)$ describes processes in which the transmission involves branch crossing, while $C(E)$ governs transmission processes in which the particle stays on the same branch. It is important to note that the conservation of probability requires that

$$A(E) + B(E) + C(E) + D(E) = 1 \quad (13)$$

This result is particularly useful in simplifying expressions for energies below the gap, $|E| < \Delta$, where there can be no transmitted quasiparticles, so that $C = D = 0$. Then, Eq. (13) reduces simply to $A(E) = 1 - B(E)$, so that a single function of energy is all that is needed.

Now, in general, A, B, C , and D depend on the angle of incidence of the trajectory and on the detailed shape of the scattering potential. For simplicity, we restrict ourselves to a one-dimensional (1D) geometry. For the purposes of this paper, the actual three-dimensional (3D) geometry is invoked only to enforce three boundary conditions on the 1D model: that the junction is well-cooled, and that the energy gap and the electric potential both rise to their full asymptotic values on a scale shorter than ξ on either side of the neck.

To capture the essential effect of any interfacial scattering with a single parameter, we model it by a repulsive potential $H\delta(x)$ located at the interface. This is meant to represent the effect of the typical oxide layer in a point contact, the localized disorder in the neck of a

short microbridge, or the intentional oxide barrier in a high-current-density tunnel junction. The calculations with the Bogoliubov equations are quite straightforward, but are given in the Appendix to avoid a digression at this point. The results of the calculations are values of the four coefficients A, B, C , and D as functions of energy and barrier strength. To simplify the formulas, we have introduced a dimensionless barrier strength $Z = k_F H / 2\epsilon_F = H/\hbar v_F$. The significance of this Z is illuminated by noting that the transmission coefficient in the normal state is simply $(1 + Z^2)^{-1}$, and the corresponding reflection coefficient is $Z^2 / (1 + Z^2)$.

The expressions for the energy dependences of A, B, C , and D for $E > \Delta$ can be conveniently written in terms of u_0 and v_0 , the BCS parameters u and v evaluated on the branch outside the Fermi surface. The results are as given in Table II. For convenience, in addition to the general results we also list the limiting forms of the results for zero barrier ($Z = 0$) and for a strong barrier [$Z^2(u^2 - v^2) \gg 1$], as well as for $\Delta = 0$ (the normal-metal case). Curves computed using the general results are plotted in Fig. 5 for $Z = 0, 0.3, 1$, and 3 . In the special case of $E = \Delta$, one notes from Table II that $A = 1$ and $B = C = D = 0$, independent of Z .

TABLE II. Transmission and reflection coefficients. A gives the probability of Andreev reflection (i.e., reflection with branch crossing), B of ordinary reflection, C of transmission without branch crossing, and D of transmission with branch crossing (see text). $(\gamma^2 = [u_0^2 + Z^2(u_0^2 - v_0^2)]^2, u_0^2 = 1 - v^2)$ and $N_s(E) = (u_0^2 - v_0^2)^{-1}$.

	A	B	C	D
Normal state	0	$\frac{Z^2}{1+Z^2}$	$\frac{1}{1+Z^2}$	0
General form				
$E < \Delta$	$\frac{\Delta^2}{E^2 + (\Delta^2 - E^2)(1 + 2Z^2)^2}$	$1 - A$	0	0
$E > \Delta$	$\frac{u_0^2 v_0^2}{\gamma^2}$	$\frac{(u_0^2 - v_0^2)^2 Z^2 (1 + Z^2)}{\gamma^2}$	$\frac{u_0^2 (u_0^2 - v_0^2) (1 + Z^2)}{\gamma^2}$	$\frac{v_0^2 (u_0^2 - v_0^2) Z^2}{\gamma^2}$
No barrier ($Z = 0$)				
$E < \Delta$	1	0	0	0
$E > \Delta$	v_0^2/u_0^2	0	$1 - A$	0
Strong barrier [$Z^2(u^2 - v^2) \gg 1$]				
$E < \Delta$	$\frac{\Delta^2}{4Z^2(\Delta^2 - E^2)}$	$1 - A$	0	0
$E > \Delta$	$\frac{u_0^2 v_0^2}{Z^4 (u_0^2 - v_0^2)^2}$	$1 - \frac{1}{Z^2 (u_0^2 - v_0^2)}$	$\frac{u_0^2}{Z^2 (u_0^2 - v_0^2)}$	$\frac{v_0^2}{Z^2 (u_0^2 - v_0^2)}$

Accordingly, except for $Z = 0, A(E)$ has a sharp peak at the gap edge, although this peak becomes unobservably narrow for large values of Z .

Although we have developed this technique quite independently, other workers have also employed the Bogoliubov equations, and along similar lines. Andreev⁸ in 1964 used them to calculate the thermal-boundary resistance at an $N - S$ interface. Thus, he was essentially concerned with the restriction of quasiparticle flow from N to S caused by the gap. Kümmel⁹ expanded the equations to include the condensate phase, and then used them to calculate the momentum balance of electrical current flow near a vortex core. He emphasized the interchange of current between quasiparticles and the pairs in geometries where the gap varied with position. Then, in 1971 Demers and Griffin¹⁰ and Griffin and Demers,¹¹ calculated the transmission coefficients in $N - S - N$ and $S - N - S$ geometries and made the extension to a δ -function barrier at the interface. Surprisingly, this important work remained essentially unnoticed for a number of years but recently (1977) Entin-Wohlman¹² has drawn on it to develop boundary conditions that she used in solving the Gor'kov gap equation at an N - S interface. Thus, use of the Bogoliubov equations to determine the fraction and type of reflect-

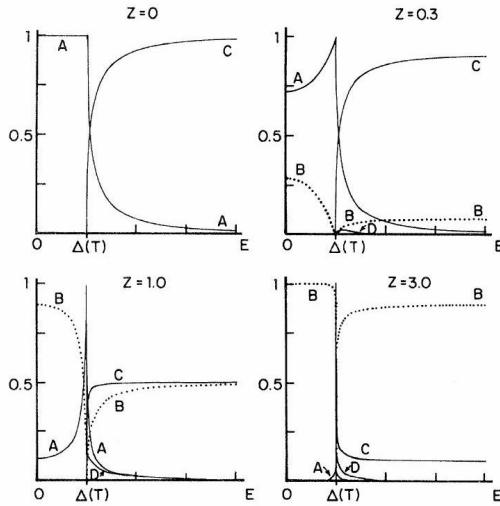


FIG. 5. Plots of transmission and reflection coefficients at N - S interface. A gives probability of Andreev reflection, B gives probability of ordinary reflection, C gives transmission probability without branch crossing, and D gives probability of transmission with branch crossing. The parameter Z measures the barrier strength at the interface.

ed particles is not new, though perhaps the technique remains underutilized. What is new is our extension of the method to calculations at finite bias voltage (as described in the next section) and our development of a framework that allows the physical consequences of these processes to emerge more clearly.

13.2.4 IV. THE N-S BOUNDARY AT FINITE VOLTAGE: $I - V$ CURVES

When a voltage is applied, nonequilibrium quasiparticle populations will be generated, which can in general be found only by obtaining a self-consistent solution to a suitable Boltzmann equation. This solution is greatly simplified if one can assume ballistic acceleration of the particles without scattering. This is a good approximation for our case of a small orifice connecting massive electrodes, so long as the diameter of the orifice is small compared to a mean-free path. Moreover, in this regime, Bogoliubov-equation solutions neglecting scattering potentials except at the interface should also be usable.¹³ The physical assumption which we use to define the problem is then that the distribution functions of all incoming particles are given by equilibrium Fermi functions, apart from the energy shift due to the accelerating potential. It is convenient to choose the electrochemical potential of the pairs in the superconductor as our reference level, since that remains a welldefined quantity even when the quasiparticle populations are far from equilibrium. Moreover, it is the quantity which defines the location of the "mirror plane" of the semiconductor diagram. With this convention, all incoming electrons from the S side have the distribution function $f_0(E)$, while those coming in from the N side are described by $f_0(E - eV)$.

Since the current must be conserved, it can be calculated in any plane. It is particularly convenient to do so on the N side of the interface, where all current is carried by single particles, and none as a supercurrent. To find the current in our 1D model, we take the difference between $f_{\rightarrow}(E)$ and $f_{\leftarrow}(E)$, the distribution functions at points such as 0 and 5 on Fig. 4, and integrate over E . That is,

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{A} J \\ &= 2N(0)e v_F \mathcal{A} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{\rightarrow}(E) - f_{\leftarrow}(E)] dE \end{aligned} \quad (14)$$

where \mathcal{A} is an effective-neck cross-sectional area, including a numerical factor for angular

averaging which will depend on the actual 3D geometry. For example, in the orifice model of a point contact, $\mathcal{A} = \pi a^2/4$, where a is the radius of the orifice.¹⁴ As usual, $N(0)$ refers to the one-spin density of states at ϵ_F .

With our assumption about incoming populations, it follows that

$$f_{\rightarrow}(E) = f_0(E - eV) \quad (15)$$

while

$$\begin{aligned} f_{\leftarrow}(E) = & A(E) [1 - f_{\rightarrow}(-E)] + B(E)f_{\rightarrow}(E) \\ & + [C(E) + D(E)]f_0(E) \end{aligned} \quad (16)$$

In writing Eq. (16), we have chosen to write $f_{\rightarrow}(E)$ instead of $f_0(E - eV)$ in anticipation of later dealing with more complicated problems where $f_{\rightarrow}(E)$ and $f_{\leftarrow}(E)$ must be found self-consistently. Even in such cases, Eq. (16) remains valid as it stands, and serves as a boundary condition for a Boltzmann equation, whose solution would be inserted into the general expression (14) to find the current. However, in the present simple case, we can simply substitute Eqs. (15) and (16) into Eq. (14), obtaining

$$\begin{aligned} I_{NS} = & 2N(0)e v_F \mathcal{A} \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(E - eV) - \{ A(E)f_0(E + eV) + B(E)f_0(E - eV) \\ & + [1 - A(E) - B(E)]f_0(E) \}) dE \\ = & 2N(0)e v_F \mathcal{A} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - ev) - f_0(E)] [1 + A(E) - B(E)] dE \end{aligned} \quad (17)$$

In obtaining the final form, we have used the properties that $A + B + C + D = 1$, $A(E) = A(-E)$, and $f_0(-E) = 1 - f_0(E)$. The quantity $[1 + A(E) - B(E)]$ in Eq. (17) can be referred to as the "transmission coefficient for electrical current." Its form shows that while ordinary reflection [described by $B(E)$] reduces the current, Andreev reflection [described by $A(E)$] increases it by giving up to two transferred electrons (a Cooper pair) for one incident one.

If both sides of the interface are normal metal, $A = 0$ since there is no Andreev reflection, and

$1 - B = C = (1 + Z^2)^{-1}$ as noted above, so that Eq. (17) reduces to the simple form

$$I_{NN} = \frac{2N(0)e^2 v_F \mathcal{A}}{1 + Z^2} V \equiv \frac{V}{R_N} \quad (18)$$

Note that even in the absence of a barrier ($Z = 0$), there is still a nonzero normal-state resistance. This is the spreading resistance typical of a twodimensional (2D) or 3D geometry, often referred to as the Sharvin resistance¹⁴ in the present case of a point-contact geometry with infinite mean free path relative to orifice size.

For the more interesting $N - S$ case, we have integrated (17) numerically to obtain $I - V$ curves for a number of barrier strengths at $T = 0$. The results are shown in Fig. 6. The effect of changing the barrier strength is even more dramatic in the differential conductance dI/dV , plotted versus V in Fig. 7, again at $T = 0$. From Figs. 6 and 7, it is clear that barrier strengths $Z \gtrsim 10$ give results essentially indistinguishable from those for classical tunnel junctions, although, as our model demonstrates, there is a continuous variation from the metallic to the tunneling limit. To facilitate the interpretation of experimental dI/dV curves, it is useful to note at $T = 0$, Eq. (17) implies that dI/dV is proportional to the transmission coefficient for electrical current, $1 + A(eV) - B(eV)$, while at $T \neq 0$, dI/dV is proportional to a thermally smeared version of the same quantity.

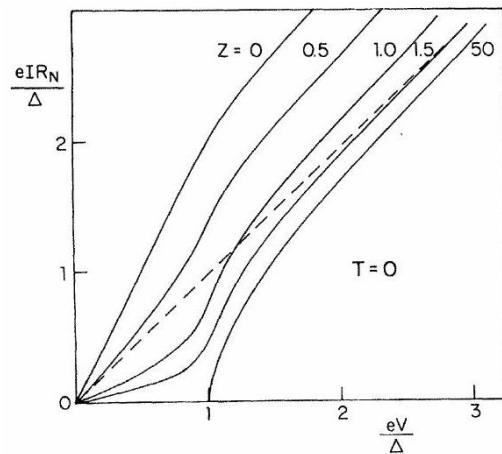


FIG. 6. Current vs voltage for various barrier strengths Z at $T = 0$. These curves attain their asymptotic limits only for very high voltages. For example, the tunnel junction ($Z = 50$) curve will be within 1% of the normal-state curve (dotted line) only when $eV \geq 7\Delta$.

13.2.5 V. RELATION TO TRANSFER HAMILTONIAN APPROACH

With the arbitrary barrier case well in hand, we are in a position to contrast our technique with the more conventional transfer Hamiltonian approach. If one assumes a thick oxide between two banks, to lowest order one can consider the two sides as noninteracting systems, containing electrons in standing-wave states labeled by quantum numbers k_L or k_R . Of course, they are not truly unconnected and there is a small probability that an electron from one side can tunnel to the other side; thus the wave function must actually penetrate through the barrier. Since this penetration will change the energy of the system, many workers have tried to model the resulting change by adding a "transfer" term to the Hamiltonian, although this phenomenological model has never been fully justified.¹⁵ The tunneling transfer matrix element T is tricky to evaluate, since it is a function of the amplitude of the small tail on the penetrating wave and requires some microscopic knowledge of the system. Nonetheless, many workers have calculated T , and the result, for eV much smaller than the barrier height, is an essentially featureless matrix element much like that for an $N - N$ contact.

By treating the tunneling as a perturbation, one can calculate the current by using the Golden Rule, and find the electron-transfer rate proportional to a squared matrix element times the number density of unoccupied final states. This is in the origin of the BCS density-of-states factor times the thermal weighting factor $[1 - f(E - eV)]$

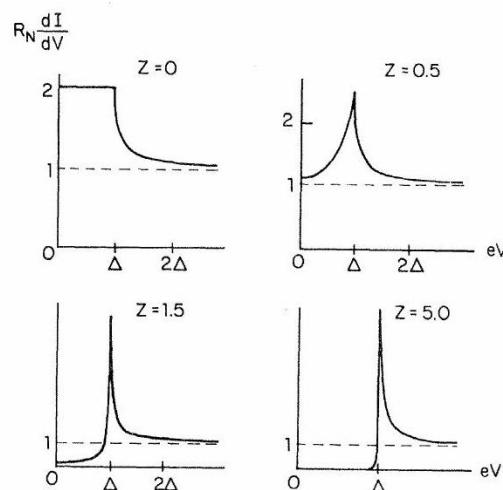


FIG. 7. Differential conductance vs voltage for various barrier strengths Z at $T = 0$. This quantity is proportional to the transmission coefficient for electric current for particles at $E = eV$.

which appears in the tunneling current, for particles from L to R . When we integrate over all states on the left, an additional $N_L(E)f(E)$ appears, for a total probability (per unit energy) of

$$|T|^2 N_L(E) N_R(E - eV) f(E) [1 - f(E - eV)].$$

The latter two factors reflect the view that this is a stochastic process involving two independent banks, so that the joint probability for tunneling is proportional to the probability of the initial states being occupied times the probability of final states being unoccupied (i.e., unblocked). When we combine currents in both directions, the cross terms involving products of Fermi functions cancel, and we are left with the usual tunneling result in which the current is proportional to an integral over

$$N_L(E) N_R(E - eV) [f(E - eV) - f(E)]$$

The Bogoliubov equation approach is quite different in spirit. As we saw above, the current transmission coefficient (in contrast to the matrix element squared in the tunnel calculation) varies rapidly for $|E| \approx \Delta$. This is the origin of the density-of-states factor in the final result. In no sense are the two banks decoupled; we associate a given set of wave vectors on the left ($q^+, -q^+, q^-$) with a specific set on the right (k^+, k^-), regardless of the barrier height. q^+ is not an "initial" state from which transfer can be blocked by an occupied "final" state k^+ . Rather, a wave packet describing an incident particle in q^+ evolves continuously into transmitted and reflected wave packets in the completely deterministic way described by Liouville's theorem without scattering. Thus, we associate one distribution function with this entire set of wave vectors. Combining currents originating from both sides gives a difference in Fermi functions just as the transfer Hamiltonian did (after cancellation of cross terms), but the rationale is entirely different in detail. Since we can achieve the same result with a model that has a larger range of validity and usefulness, we have chosen this latter point of view.

13.2.6 VI. EXCESS CURRENT

Although the high-voltage ($eV \gg \Delta$) portion of each $I - V$ characteristic in Fig. 6 is linear with slope R_N , it does not in general fall on the normal-state curve $V = IR_N$ (as it does in a tunnel junction). Rather, it is displaced by a constant amount referred to as the excess current, I_{exc} , which can be found by extrapolation back to the $V = 0$ axis. By manipulation of Eqs. (16) and (17), this I_{exc} can be written as

$$\begin{aligned} I_{\text{exc}} &\equiv (I_{NS} - I_{NN})|_{eV \gg \Delta} \\ &= \frac{1}{eR_N[1 - B(\infty)]} \\ &\quad \times \int_0^\infty [A(E) - B(E) + B(\infty)] dE \end{aligned} \tag{19}$$

where from Table II, $B(\infty) = Z^2 / (1 + Z^2)$ is the reflection coefficient at high energy or in the normal state. Using this expression and those in Table II, we have computed numerically the dependence of $I_{\text{exc}} R_N$ (the "insufficient voltage" referred to by Likharev²) upon barrier strength Z . Since this high-voltage limit depends on T only through the magnitude of Δ , the normalized quantity $I_{\text{exc}} R_N / \Delta$ is a function only of barrier strength. This dependence is plotted in Fig. 8. Note the rapid falloff with increasing Z ; clearly, excess current will be seen only in relatively barrier-free contacts.

More generally, one can define a voltage-dependent excess current,

$$I_{\text{exc}}(V) = I_{NS}(V) - I_{NN}(V) \quad (20)$$

which simply gives the extra current due to the superconductivity. Since $I_{NN}(V)$ is simply V/R_N , finding $I_{\text{exc}}(V)$ is equivalent to giving the entire $I - V$ curve, as was done in Fig. 6. However, it is worth noting that for $Z = 0$ and $\Delta \ll kT$, the calculation can be carried out analytically, with the result,

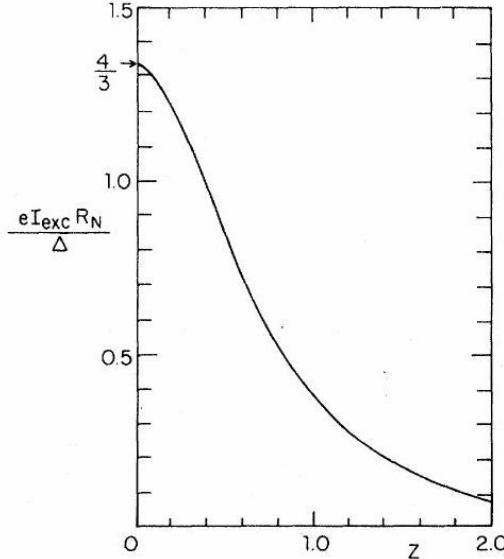


FIG. 8. Excess current (in units of Δ/eR_N) as a function of barrier strength Z . The temperature dependence of the curve is entirely contained within $\Delta(T)$.

$$I_{\text{exc}}(V) = (4\Delta/3eR_N) \tanh(eV/2kT), \quad \Delta \ll kT \quad (21)$$

As noted in our previous work, this result agrees in detail with that obtained by Zaitsev⁴ for a clean metallic NS contact, after correcting a factor of 2 in his result.

We can also calculate the excess current for an $S - S'$ contact, by using the $N - S$ result above. As we explained in a previous publication,⁵ in the highvoltage limit, the $S - S'$ device can be thought of as a series combination of an $S - N$ and a $N - S'$ microconstriction. The "insufficient voltages" of the two simply add, so that the excess current is the sum of the contributions from the two sides. For example, in the clean contact with $Z = 0$, we find

$$I_{\text{exc}} = 4(\Delta + \Delta')/3eR_N$$

While the excess current has a clear mathematical definition, it may be a difficult quantity to measure reliably, for at least two reasons. First, for voltages greater than the gap, heating will generally distort the $I - V$ curve away from its ideal isothermal shape.¹⁶ There may, in fact, be no linear region at high voltages until heating has driven the contact fully normal. Secondly, even in the absence of heating, care must be taken to carry the measurement to sufficiently high voltages to obtain a true asymptote. For example, the tunnel junction curve in Fig. 6 (i.e., $Z = 50$) appears to have a significant negative (rather than zero) excess current, even at a voltage as high as $eV = 3\Delta$. Of course, if one assumes our computed $I - V$ curves are correct and applicable to the contact at hand, one can determine a value of Z by fitting the measured curves at lower voltages.

13.2.7 VII. ANALYSIS OF CURRENTS AND CHARGE-IMBALANCE GENERATION

In this section we establish a formalism for separating the total current I_{NS} into parts differentiated according to the mechanism of charge transfer. In particular, we distinguish the part of the current I_{NS}^* associated with the creation of quasiparticle charge imbalance Q^* in the superconductor from the part that is converted directly into supercurrent. We also define linear-response coefficients giving the normalized differential conductance Y and its counterpart Y^* , describing quasiparticle charge injection, and evaluate them as functions of Z and T .

For tunnel junctions, the rate of generation of quasiparticle charge branch imbalance has been discussed in some detail by Tinkham and Clarke¹⁷ (TC), by Tinkham,¹⁸ by Pethick and Smith¹⁹ (PS), and by Clarke, et al.²⁰ (CESST). The latter authors reviewed carefully the interrelations of the definitions and conventions of the various treatments including the rather different conceptual approach of Schmid and Schön.²¹ Using our present method, we can generalize the tunnel results to arbitrary barrier strength, providing a description which covers all cases from the tunnel limit to the ideal metallic contact, and which gives very detailed insight into the process.

To minimize repetition, we refer the reader to CESST for an index of the earlier work, and only summarize the essential points. Noting that quasiparticles at k have a charge

$$q_k = u_k^2 - v_k^2 = \epsilon_k/E_k = \pm N_s(E_k)^{-1} \quad (22)$$

the total quasiparticle charge (per unit volume, in units of e) is

$$Q^* = \sum_k q_k f_k \quad (23)$$

where f_k is the actual occupation number in a nonequilibrium system. To retain electrical neutrality, there must be an equal and opposite change in the condensate charge, produced by a shift in μ_s . [The quantity Q defined earlier by TC differs from Q^* by replacement of q_k in Eq. (23) by $\text{sgn } q_k = \pm 1$, and represents the numerical population imbalance between the branches. Since Q^* appears to have more general physical significance, we confine our attention to it in this paper.]

To illuminate this problem, it is helpful to rewrite the expression (17) for the current in a form emphasizing the transmitted (rather than reflected) particles by using the sum rule (13) to replace $1 + A - B$ by $2A + C + D$. Thus, we write the total current as

$$\begin{aligned} I_{NS} = & 2N(0)e v_F \mathcal{A} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times [2A(E) + C(E) + D(E)] dE \end{aligned} \quad (24)$$

This can be decomposed into two parts by recognizing that the term $2A(E)$ represents the current

$$\begin{aligned} I_{NS}^A = & 2N(0)e v_F \mathcal{A} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times [2A(E)] dE \end{aligned} \quad (25)$$

due to Andreev reflection, in which the current in the superconductor is carried entirely by pairs. The remainder of I_{NS} is the current

$$\begin{aligned} I_{NS}^{\text{qp}} = & 2N(0)ev_F \mathcal{A} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times [C(E) + D(E)]dE \end{aligned} \quad (26)$$

due to quasiparticle transfer. But even I_{NS}^{qp} does not represent the rate of generation of quasiparticle charge at the interface, which we will call I_{NS}^* . To compute that, we must distinguish quasiparticles in the two channels, k^+ and k^- , and also take account of their fractional charge $q_k = \pm N_s(E)^{-1}$. Thus,

$$\begin{aligned} I_{NS}^* = & 2N(0)ev_F \mathcal{A} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times [C(E) - D(E)]N_s^{-1}(E)dE \end{aligned} \quad (27)$$

Finally, since experiments usually involve current bias rather than voltage bias, it has been useful to determine the ratio

$$F^* \equiv I^*/I \quad (28)$$

giving the charge imbalance generated as a fraction of the injected current. These quantities have been evaluated in the past for tunnel junctions, but now we can evaluate them for arbitrary barrier strength, as a function of V and T .

To make contact with the earlier work on tunnel injection, we note that for strong barriers the results in Table II show that $A \propto Z^{-4} \ll 1$, so I_{NS}^A is negligible and $I_{NS} \approx I_{NS}^{\text{qp}}$ reproduces the form of the usual expression for tunnel current, namely,

$$\begin{aligned} I_{NS}^{\text{qp}} = & \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times N_s(E)dE, \quad Z^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (29)$$

The density-of-states factor $N_s(E)$ is not inserted arbitrarily at this point; rather, it arises from the limiting form of $C + D$ given in Table II, namely $Z^{-2}(u^2 - v^2)^{-1}$. As is well known, Eq. (29) shows no excess current; the Andreev term is essential for that, but it is important only for weak barriers.

Again taking the strong barrier limit to evaluate I_{NS}^* , we note from Table II that $(C - D) = Z^{-2}$, so that Eq. (27) becomes

$$\begin{aligned} I_{NS}^* = & \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \\ & \times N_s^{-1}(E)dE, \quad Z^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (30)$$

again exactly equivalent to the standard tunneling result for \dot{Q}_{inj}^* .

For comparison, we now consider the same quantities in the other limiting case of no barrier, $Z = 0$. Then, as noted in Table II, $B = D = 0$ and $C = 1 - A$. In this case, the total current is

$$I_{NS} = \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \times [1 + A(E)] dE, \quad Z = 0$$

The Andreev portion of the current I_{NS}^A is still given by Eq. (25), but I_{NS}^{qp} can be rewritten in terms of $A(E)$ as

$$I_{NS}^{\text{qp}} = \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \times [1 - A(E)] dE, \quad Z = 0$$

while

$$I_{NS}^* = \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)] \times [1 - A(E)] \times N_s^{-1}(E) dE, \quad Z = 0 \quad (33)$$

Note that in Eqs. (32) and (33) there is no contribution to the integrals for $|E| < \Delta$, where $1 - A = 0$; but in Eq. (31), $1 + A = 2A = 2$ in the gap, where there is a large current derived entirely from the Andreev-reflection process. By contrast, in the strong-barrier limit, there is no current at all in the gap, all current being carried by quasiparticles above the gap. Since Q^* is generated only by quasiparticles, the ratio $F^* = I^*/I$ will in general be smaller for metallic contacts than for tunnel junctions.

In the important special case of very low voltages across the contact ($eV \ll kT$), we can replace the difference of Fermi functions in the expressions (24) - (27) and (29) - (33) by $eV(-\partial f_0/\partial E)$ and define generalized linear-response functions analogous to the Y and Z of CESST. These two functions are the ratios of I_{NS} and I_{NS}^* , respectively, to the current I_{NN} at the same small voltage. We now generalize these quantities to include a dependence on barrier strength as well. In doing so, we also change the notation from Y and Z to Y and Y^* to gain in suggestiveness and to avoid confusion with the use of Z for normalized barrier strength in this paper. Specifically, we define

$$Y(Z, T) = \left. \frac{I_{NS}(Z, T)}{I_{NN}(Z)} \right|_{eV \rightarrow 0} = (1 + Z^2) \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) [2A(E) + C(E) + D(E)] dE \quad (34)$$

and

$$Y^*(Z, T) = \left. \frac{I_{NS}^*(Z, T)}{I_{NN}(Z)} \right|_{eV \rightarrow 0} = (1 + Z^2) \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) [C(E) - D(E)] N_s^{-1}(E) dE \quad (35)$$

In the strong barrier limit, $A \sim Z^{-4} \sim 0$, and using the limiting forms of C and D from Table II as above, we obtain

$$Y(Z \gg 1, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) N_s(E) dE \quad (36)$$

and

$$Y^*(Z \gg 1, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) N_s^{-1}(E) dE \quad (37)$$

which are exactly the standard tunneling results given by CESST and others. In the zero barrier limit, $Z = 0, B = D = 0, C = 1 - A$, and we have

$$Y(Z = 0, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) [1 + A(E)] dE \quad (38)$$

$$\begin{aligned} Y^*(Z = 0, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) [1 - A(E)] \\ &\times N_s^{-1}(E) dE \end{aligned} \quad (39)$$

These coefficients Y and Y^* , and their ratio $F^* = Y^*/Y$, are plotted versus T for various values of Z in Figs. 9-11. Note that $Y^*(Z, T)$ is almost independent of the barrier strength Z .

13.2.8 VIII. APPLICATIONS AND DISCUSSION

A direct application of our results is to fit the temperature dependence of the differential conductance of a point contact at zero voltage, which should be simply $Y(Z, T)/R_N$. This quantity is easily measured, and, unlike the excess current, it is not subject to problems with heating effects.

Although the parameter Z plays a fundamental role in our theory, it cannot be independently determined, and must be inferred from the I - V curve. However, since both I_{exc} and $Y(Z, T)$ depend on Z , we can test the model by comparing these two experimentally accessible quantities against each other. Figure 12 shows $Y(Z, T = 0)$ vs $eR_N I_{\text{exc}}/\Delta$. They exhibit an approximately linear relationship to each other, as might be expected physically, since both depend linearly on the Andreev-reflection probability.

In addition to our theoretical curve, two other points are displayed in Fig. 12. The point marked Zaitsev-clean is the result found by Zaitsev⁴ for a microconstriction with no scattering in the bulk or in the neck, and it agrees exactly with our calculation for $Z = 0$. The point labeled AVZ-dirty is the the result of a calculation by Artemenko, Volkov, and Zaitsev³ for a microconstriction in the dirty limit ($\tau kT \ll \hbar$) where the neck is short compared to the nonequilibrium length $\xi(T)(1-t)^{1/4}$. Although our model is not intended to describe diffusive transport in the presence of distributed bulk scattering, a suitable value ($Z \sim 0.55$) of the strength of our 1D δ -function barrier potential gives results very close to those obtained by their

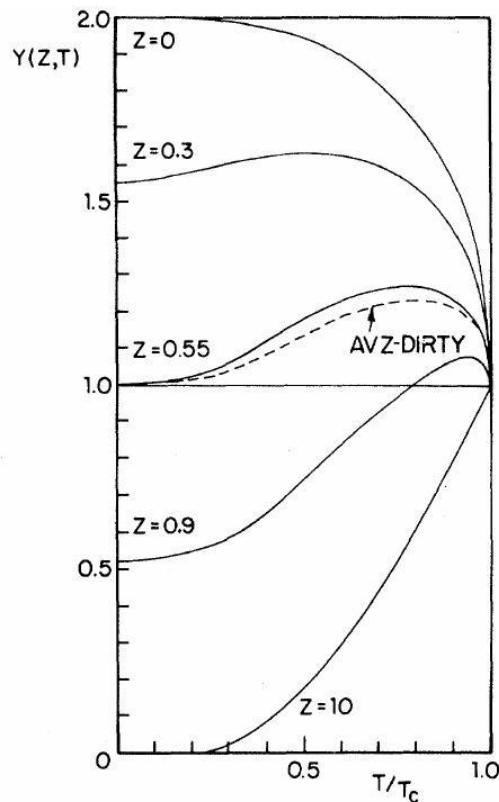


FIG. 9. Y , the zero-voltage differential conductance in units of the normal-state conductance, vs T , for various barrier strengths Z . The curve AVZ-dirty is described in the text.

13.2.9 Green's-function method.

Our charge-imbalance results may also provide a useful perspective on the work of Hsiang and Clarke²² on resistance due to charge-imbalance relaxation near an $N - S$ interface. By a physical argument, they reasoned that the appropriate F^* for a clean metallic interface could be approximated by what we call here $Y^*(Z \gg 1)$ as computed for a tunnel junction. Our calculation would instead give $F^* = Y^*(Z = 0)/Y(Z = 0)$. As just noted above, Y^* is almost independent of barrier strength Z , so $Y^*(Z \gg 1) \approx Y^*(Z = 0)$. But the denomina-

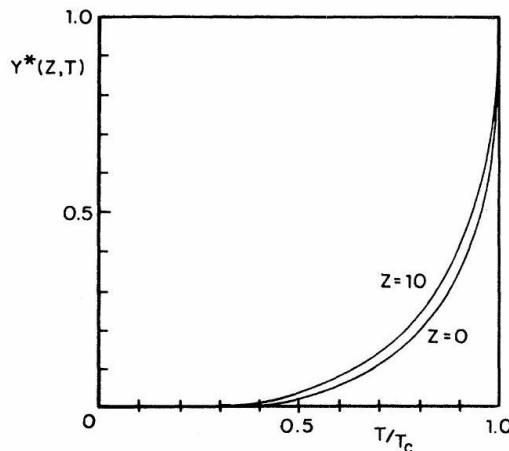


FIG. 10. Y^* , the normalized differential charge imbalance conductance at zero voltage, vs T , for various barrier strengths Z .

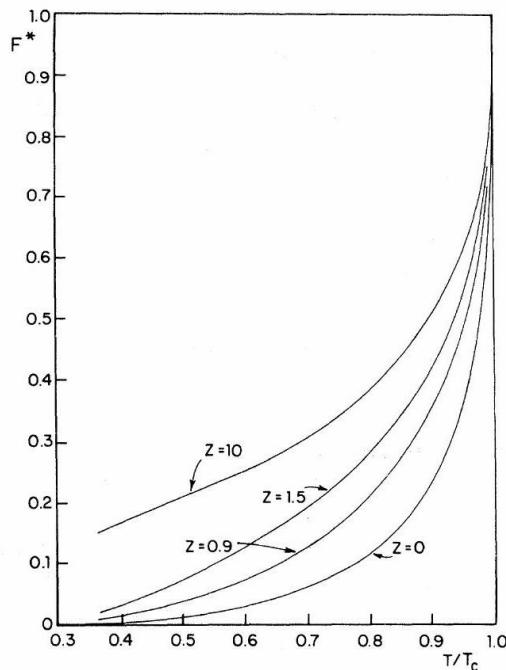


FIG. 11. F^* , the ratio of quasiparticle charge injected to total injected current, as a function of T for various barrier strengths Z .

tor factor $Y(Z = 0)$ varies from 1 at T_c to 2 at $T = 0$, so the resulting T dependence of our F^* is somewhat different from that used by Hsiang and Clarke, although it has the same qualitative shape. Because the interfaces studied by Hsiang and Clarke were not point contacts of the sort we have been treating, however, it is not clear that our results should be expected to describe their data in detail.

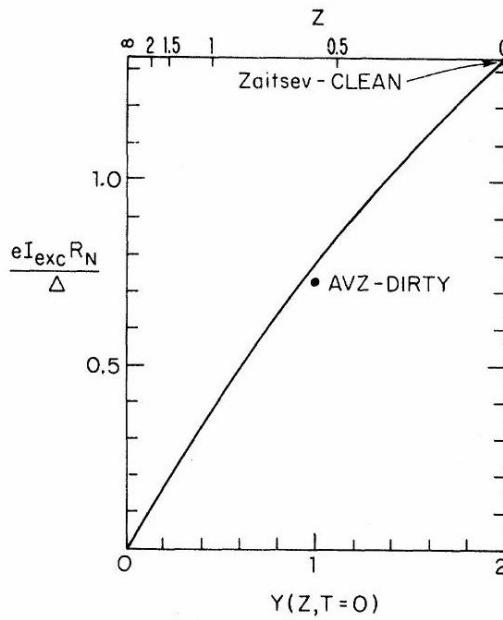


FIG. 12. $eI_{\text{exc}} R_N / \Delta$ vs $Y(T = 0)$ as the barrier strength parameter Z ranges from ∞ to 0. The points AVZ-dirty and Zaitsev-clean are discussed in Sec. VIII.

As noted above, the total current I_{NS} can be expressed as the sum of three terms: I_{NS}^A , the Andreev term with no quasiparticle transfer; I_{NS}^* , the injection rate of quasiparticle charge; and $(I_{NS}^{\text{qp}} - I_{NS}^*)$, the current carried by the pairs that must flow to compensate for the fractional charges of the quasiparticles. The current I_{NS}^* relaxes to supercurrent over a distance $\Lambda_{Q^*} = (D\tau_{Q^*})^{1/2}$, a diffusion length determined by τ_{Q^*} , the chargeimbalance relaxation time.

The picture described in the previous paragraph corresponds to the viewpoint of TC and PS, in which the current ($I - I^*$) is viewed as being converted discontinuously to supercurrent at the interface.²³ If one examines the problem more deeply, however, one can obtain a more microscopic view of the conversion process. The key point is that there are solutions of the Bogoliubov equations even for $|E| < \Delta$, but they are evanescent waves which decay in a distance

$$\hbar v_F / 2 (\Delta^2 - E^2)^{1/2} \sim \xi(T).$$

(See the Appendix for details.) Thus, even the Andreev current I_{NS}^A is carried for $\sim \xi$ as a quasiparticle current before decaying into a pair current, and the interference of k^+ and k^- waves causes a similar effect also for the current $I_{NS}^{qp} - I_{NS}^*$ above the gap. This two-step conversion process is shown schematically in Fig. 13. This point of view is reminiscent of that of Schmid and Schön, who treat the entire injected current as a source of

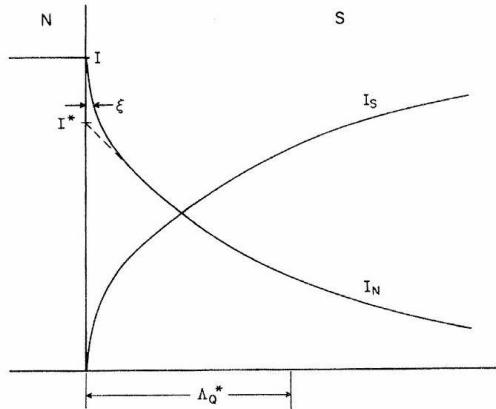


FIG. 13. Schematic diagram of conversion of normal current to supercurrent at $N - S$ interface. The evanescent waves due to Andreev reflection die out over a distance of order ξ , while the injected quasiparticle charge imbalance relaxes over a charge diffusion length Λ_{Q^*} . charge imbalance, but combine "conversion" terms with τ_{Q^*} relaxation to find a shorter effective relaxation time $\tau_R < \tau_{Q^*}$, which reproduces the same steady-state Q^* as found by the two-step analysis of Tinkham and Clarke^{17,18} and of Pethick and Smith.¹⁹ There seems to be a gain in physical insight, however, in distinguishing the two types of processes.

Recognition of the existence of a penetration depth of order ξ for the evanescent quasiparticle waves in the gap also provides a more clear-cut explanation for one aspect of the observations of Octavio et al.¹⁶ on subharmonic gap structure (SGS) in tin variable-thickness bridges (VTB's). They observed voltage-dependent shifts in the positions of the SGS which they attributed to heating. Using the gap shift as a thermometer, with $\Delta_{BCS}(T)$ as the calibration curve, they could infer temperature rises. These temperature increases were roughly proportional to the dissipated power P , but much

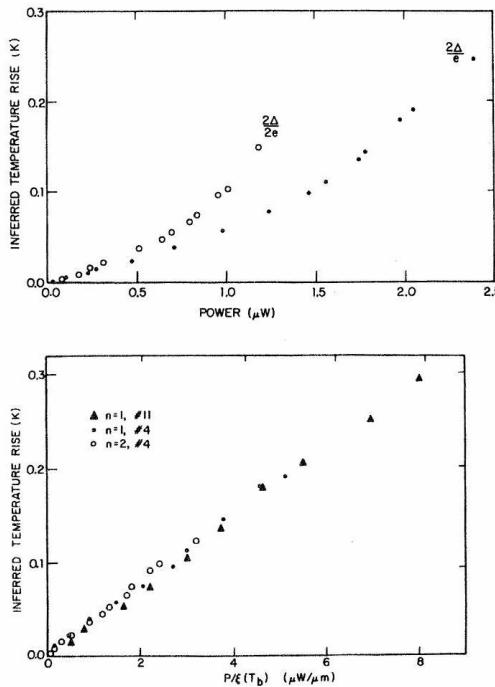


FIG. 14. Temperature rise in tin variable-thickness bridge inferred from depression of energy gap as found from subharmonic gap structure (after Octavio et al.). (a) depicts temperature rise vs power dissipated, P . (b) depicts temperature rise vs $P/\xi(T)$. The superior linear fit in (b) is consistent with observed gap being sensed at a distance $\sim \xi$ from center of bridge. more precisely proportional to $P/\xi(T)$, as shown by the comparison of Fig. 14(a) and 14(b). Given the 3D cooling of these VTB's, in which the temperature rise is proportional to P/r (where r is the distance from the center of the contact), this observation was interpreted as showing that the energy gap giving the SGS was that in the superconductor at a distance $\sim \xi$ from the center. In a recent paper,⁵ we have argued that the SGS arises from multiple Andreev reflections together with the sharp change in $A(E)$ at the gap edge. Given the penetration of the evanescent waves to a depth $\sim \xi(T)$, it is plausible that the gap reflected in the SGS should be that at a similar depth into the bank, as assumed by Octavio et al. on the basis of somewhat different reasoning.

13.2.10 IX. CONCLUSION

We have proposed a simple theory for the $N - S$ microconstriction or point contact that is general enough to describe the complete crossover from metallic to small-area tunnel-junction behavior. From this model, a deeper understanding of the semiconductor picture, excess currents, current conversion, and charge-imbalance processes have emerged, in addition to calculation of $I - V$ curves for arbitrary barrier strength. The latter results are directly accessible to experiment, and should be helpful in interpreting the wide variety of $I - V$ curve shapes observed in the laboratory. The application of this model to the $S - N - S$ case has been presented elsewhere,⁵ where it has been shown to offer an explanation of the SGS observed in metallic weak links.

13.2.11 ACKNOWLEDGMENTS

One of us (M.T.) would like to acknowledge stimulating discussions at the initial stage of this work with J. Clarke, U. Eckern, A. Schmid, G. Schön, and A. F. Volkov. The work was supported in part by the National Science Foundation, the Office of Naval Research, and the Joint Services Electronics Program. One of us (T.M.K.) would like to thank the Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek for a grant.

13.2.12 APPENDIX

The Bogoliubov equations may be written

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x) \right] f(x, t) + \Delta(x)g(x, t) \quad (\text{A1a})$$

$$i\hbar \frac{\partial g}{\partial t} = - \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu(x) + V(x) \right] g(x, t) + \Delta(x)f(x, t) \quad (\text{A1 b})$$

where $\Delta(x)$ is the energy gap and $\mu(x)$ is the chemical potential (specifically that of the condensate, in case of nonequilibrium conditions where μ is not uniquely defined). In the normal metal [$\Delta(x) = 0$], Eq. (A1a) is the Schrödinger equation for electrons, while Eq. (A1b) is the time-reversed Schrödinger equation for electrons. Since an electron satisfying the time-reversed Schrödinger equation behaves in many ways like a hole, we will adopt that terminology here.

For $\Delta \neq 0$, the electron and hole wave functions couple together, with two major consequences. First, a gap appears in the E vs k relation, just as it does in elementary BCS theory. To see this result more clearly, we solve Eq. (A1) for a specific geometry. The simplest example is one where $\mu(x)$, $\Delta(x)$, and $V(x)$ are all constant, and the solutions to Eq. (A1) are time-independent plane waves. Taking as our trial solutions $f = \tilde{u}e^{ikx-iEt/\hbar}$ and $g = \tilde{v}e^{ikx-iEt/\hbar}$, we find for $V = 0$

$$E\tilde{u} = \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right] \tilde{u} + \Delta\tilde{v} \quad (\text{A2a})$$

$$E\tilde{v} = - \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \tilde{v} + \Delta\tilde{u} \quad (\text{A2b})$$

Solving Eqs. (A2a) and (A2b) for E we obtain

$$E^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \quad (\text{A3})$$

There are two roots for E . We are concerned with excitations above the ground state ($E \geq 0$), and in this case

$$\tilde{u}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}}{E} \right] = 1 - \tilde{v}^2 \quad (\text{A4})$$

$$\hbar k^\pm = \sqrt{2m} \left[\mu \pm (E^2 - \Delta^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (\text{A5})$$

We also define

$$1 - v_0^2 = u_0^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}}{E} \right)$$

For $|E| < \Delta$, \tilde{u} and \tilde{v} will be complex conjugates. This definition differs from the usual BCS convention in which u_k and v_k are not defined for $E < \Delta$. Using the notation

$$\psi = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

the four types of quasiparticle waves for a given energy take the forms

$$\psi_{\pm k^+} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} e^{\pm ik^+ x} \quad (\text{A6a})$$

and

$$\psi_{\pm k^-} = \begin{bmatrix} v_0 \\ u_0 \end{bmatrix} e^{\pm ik^- x} \quad (\text{A6b})$$

The ψ 's are the position space representation of the $\gamma_{k0}^* = u_k c_{k\uparrow}^* - v_k c_{-k\downarrow}$ since $c_{k\uparrow}^*$ produces the wave e^{ikx} , while $c_{-k\downarrow}$ destroys an electron at $-k$, leaving the system with a net positive momentum represented by the creation of a hole wave e^{ikx} .

A second consequence, which follows from the $E(k)$ relation (A3), is that the group velocity $v_g = dE/d\hbar k$ goes to zero at the gap edge, even while the phase velocity remains near the normalstate value. This has some interesting consequences, as can best be illustrated by deriving conservation laws for probability and charge.

We define $P(x)$ to be the probability density for finding either an electron or a hole at a particular time and place. Thus, for a solution to Eq. (A1), $P(x, t) = |f|^2 + |g|^2$. Using Eq. (A1) to evaluate $\partial P/\partial t$, we find

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_P = 0 \quad (\text{A7})$$

where

$$\vec{J}_P = \frac{\hbar}{m} [\text{Im}(f^* \nabla f) - \text{Im}(g^* \nabla g)] \quad (\text{A8})$$

Note that the hole current enters Eq. (A8) with a sign opposite to that of the electron part, just as one expects for a "time-reversed" particle. One can also show that $J_P \propto v_g = \partial E / \partial \hbar k$. Thus, at the gap edge, it is zero.

We can also derive a conservation law for quasiparticle charge. Assigning a unit charge $+e$ to the electron and $-e$ to the hole, the net quasiparticle charge density in one of these excitation waves is $Q = e(|f|^2 - |g|^2)$. Using Eq. (A1), it is easy to show that

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q = \frac{4e\Delta}{\hbar} \text{Im}(f^* g) \quad (\text{A9})$$

where

$$\vec{J}_Q = \frac{e\hbar}{m} [\text{Im}(f^* \nabla f) + \text{Im}(g^* \nabla g)] \quad (\text{A10})$$

The term on the right in Eq. (A9) is a source (or drain) term connecting the quasiparticles with the condensate, and we will see an explicit interchange of currents when treating the $N-S$ case below. However, for now we concentrate on Eq. (A10). Both the electron and hole contribution to the quasiparticle current enter with the same sign, and a moment's thought shows this to be reasonable. An electron ($f \propto e^{ik^+ x}$), moves in the positive direction and carries a positive current. A hole, ($g \propto e^{ik^+ x}$), moves in the negative direction, but also carries a positive current due to the sign of its charge. Thus, while $J_P \propto v_g = 0$ at the gap edge, $J_Q = ev_F$, so one can view the charge current as traveling with the Fermi velocity. Of course, for the normal metal nothing so dramatic occurs, and we always find simply $J_Q = eJ_P$.

Starting from the basic Eq. (A1), it is a simple matter to work out the boundary conditions on steady-state plane-wave solutions at an $N-S$ interface. To model the elastic scattering that usually occurs in the orifice, we include a δ -function potential in Eq. (A1), i.e., $V(x) = H\delta(x)$.

The appropriate boundary conditions, for particles traveling from N to S are as follows.

(i) Continuity of ψ at $x = 0$, so $\psi_S(0) = \psi_N(0) \equiv \psi(0)$.

(ii) $(\hbar/2m)(\psi'_S - \psi'_N) = H\psi(0)$, the derivative boundary condition appropriate for δ functions.

(iii) Incoming (incident), reflected, and transmitted wave directions are defined by their group velocities. We assume the incoming electron produces only outgoing particles.

Thus,

$$\begin{aligned}\psi_{\text{inc}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{iq^+x}, \hbar q^\pm = \sqrt{2m} \sqrt{\mu \pm E} \\ \psi_{\text{refl}} &= a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{iq^-x} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-iq^+x} \\ \psi_{\text{trans}} &= c \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} e^{ik^+x} + d \begin{bmatrix} v_0 \\ u_0 \end{bmatrix} e^{-ik^-x}\end{aligned}$$

Applying the boundary conditions, and carrying out an algebraic reduction, we find

$$a = \frac{u_0 v_0}{\gamma} \quad (\text{A11a})$$

$$b = -\frac{(u_0^2 - v_0^2)(Z^2 + iZ)}{\gamma} \quad (\text{A11b})$$

$$c = \frac{u_0(1 - iZ)}{\gamma} \quad (\text{A11c})$$

$$d = \frac{iv_0 Z}{\gamma}$$

(A11d)

where

$$Z = \frac{mH}{\hbar^2 k_F} = H/\hbar v_F$$

and

$$\gamma = u_0^2 + (u_0^2 - v_0^2) Z^2$$

For simplicity, we have let $k^+ = k^- = q^+ = q^- = k_F$, whenever that substitution did not lead to a qualitative change. Note that in the absence of a barrier (i.e., $Z = 0$), $b = d = 0$. Physically speaking, this means that all reflection is Andreev reflection and all transmission occurs without branch crossing.

The quantities $A(E)$, $B(E)$, $C(E)$, and $D(E)$ used in the main body of the paper are actually the probability currents, for the particle, measured in units of v_F . For example, $A = J_P^A/v_F = a^*a$, and $D = d^*d(u_0^2 - v_0^2)$. Since plane-wave currents are spatially uniform, we need not specify the position at which they are evaluated. However, for $E < \Delta$, k^+ and k^- in the superconductor have small imaginary parts which lead to an exponential decay on a length scale λ , where

$$\lambda = \frac{\hbar v_F}{2\Delta} \left[1 - \left(\frac{E}{\Delta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A12})$$

Although right at the gap edge the length diverges, the characteristic length is $\hbar v_F / 2\Delta = 1.22\xi(T)$. Thus, in order of magnitude terms, one can say that the particles penetrate a depth $\sim \xi(T)$ before the current is converted to a supercurrent carried by the condensate. For clarity,

we have defined $C(E)$ and $D(E)$ as the probability currents at $x > \lambda$, measured in units of v_F . The changeover from full to zero current is described next.

As a simple example of quasiparticle current being converted to condensate current, we consider the case $H = 0$. Then, $b = d = 0$, $a = u_0/v_0$, and $c = 1/u_0$. For $E < \Delta$, $a^*a = 1$, which means the incident electron is totally reflected as a hole. Thus, the total charge carried in the normal metal equals $2ev_F$, but in the superconductor J_Q is exponentially small for $x \gg 0$. Explicitly,

$$J_Q^C = (e\hbar/m) \operatorname{Im} \left[\left(ce^{ik^+x} \right)^* \nabla \left(ce^{ik^+x} \right) \times (u_0^* u_0 + v_0^* v_0) \right]$$

Letting $k^+ \approx k_F + i\eta/\hbar v_F$, where $\eta = (\Delta^2 - E^2)^{1/2}$, we have

$$J_Q^C = \frac{|u_0|^2 + |v_0|^2}{|u_0|^2} ev_F e^{-2\eta x/\pi v_F}$$

Below the gap, $|u_0|^2 = |v_0|^2$, so

$$J_Q^C = 2ev_F e^{-2\eta x/\hbar v_F}$$

The "disappearing current" reappears as current carried by the condensate. Rewriting the drain term in Eq. (A9) as

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s \equiv (4e\Delta/\hbar) \operatorname{Im} (f^* g) \quad (\text{A13})$$

then

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{4e\Delta}{\hbar} \int_0^x \operatorname{Im} \left(c^* v_0^* e^{-ik'^*} c u_0 e^{ik+x'} \right) dx' \\ &= \frac{4e\Delta}{\hbar} \operatorname{Im} \left[\frac{v_0^* u_0}{u_0^* u_0} \right] \int_0^x e^{-2\eta x'/\hbar v_F} dx' \\ &= 2ev_F \left(1 - e^{-2\eta x/\pi v_F} \right) \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

This is the desired result, explicitly showing the supercurrent increasing to an asymptotic value as $x \rightarrow \infty$, at the same rate as the quasiparticle current dies away.

¹ See, for example, W. L. McMillan and J. M. Rowell, in Superconductivity, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1969), Vol. 1, p. 561. ² K. K. Likharev and L. A. Yakobson, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 68, 1150 (1975) [Sov. Phys.-JETP 41, 2301 (1975)]

³ S. N. Artemenko, A. F. Volkov, and A. V. Zaitsev, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 28, 637 (1978) [JETP Lett. 28, 589 (1978)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 76, 1816 (другие цитаты не выгружал)

14 Эксперименты по сверхпроводимости

14.0.1 теоретические эксперименты

эксперимент Мейсснера и Оксенфельда

15 Явления со сверхпроводниками

15.0.1 Левитация над сверхпроводником

????

Х3

Part V

Adds for Superconductivity

A Введение

A.1 Мотивация

Обсудим всю мотивацию, которая позволит нам познать предмет без проблем.

A.1.1 Множество приложений

Укажем приложения
(потом раскрою)

A.1.2 Польза в плане развития как профессионала

(потом раскрою)

A.1.3 Польза в плане саморазвития

(потом раскрою)

A.1.4 Резулььтаты

A.1.5 Удивительные факты

(потом раскрою)

A.1.6 Мотивация к разделам

(потом раскрою в параграфах)

A.2 Мышление профессионала в сверхпроводимости

(потом раскрою)

A.2.1 Суть сверхпроводимости

A.2.2 Способы заработать, зная предмет

A.2.3 Использование предмета в обычной жизни (!)

Укажем, как предмет используется в обычной жизни.

A.2.4 Актуальнейшие приложения

A.2.5 Построение с нуля

(потом раскрою, еще я не профессионал, а вопрос этот самый профессиональный)

A.2.6 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.
(потом раскрою)

A.2.7 Мышление для эффективного изучения

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоение предмета.

Способы изучения предмета

(потом раскрою)

Необходимые темы для

(потом раскрою)

Дополнительные темы для

(потом раскрою)

A.3 Литература

A.3.1 Основная

Основная обучающая

[1] В.В.Шмидт Введение в физику сверхпроводников

Большая книга, где многое разобрано, лучше книг для начала и общего обзора не знаю.

[2] Kittel C. Introduction to Solid State Physics, 8th 2005

Отличная книга, где есть раздел с основами сверхпроводимости, этих тем и достаточно для минимального знакомства.

Основная профессиональная

[3] Mineev, V.P. Samokhin, K. Introduction to Unconventional Superconductivity

Очень крутая книга, где описывается много явлений и методов, о которых ну уж очень сложно подумать, пройдя обычный вводный курс сверхпроводимости.

Задачники

Таких прямо отдельных задачников нет, но тут приведу книги, в которых много задач решено.

(потом напишу)

A.3.2 Дополнительная литература и статьи про разные явления и методы

Дополнительная обучающая

[4] Ya. V. Fominov, N. M. Shchelkachev The Josephson Effect: An educational and methodological guide

32 страницы про эффект Джозефсона, интересное изложение, описываются некоторые детали, которые мало кто обсуждает.

[5] Варламов Ларкин Теория флуктуаций в сверхпроводниках

Очень крутая книга, где много ответов и специфических явлений. Можно было бы брать ее основным учебником, но так не делают наверное, потому что слишком много информации появится. Но точно попробовать найти в ней ответ на какой-то вопрос - отличная идея.

[6] Li, Chuan Superconducting proximity effect in graphene and Bi nanowire based junctions

кандидатская просверхпроводящие контакты, очень хорошее изложение многое чего, наверняка еще многое прочту из нее.

[7] Gross, R. and Marx, A. and Deppe, F. Applied Superconductivity: Josephson Effect and Superconducting Electronics

В открытом доступе только 60 страниц 2005го года, полистал, понял, что много там деталей, которую минимум неделю учить пришлось бы. Просто много теории, может, на самом деле приложения и раскрыты, не знаю.

[8] Lifshitz, E.M. and Pitaevskii, L.P. Statistical Physics: Theory of the Condensed State

Типичный учебник по код. средам, в котором многому можно научиться, в том числе некоторым важным, но не супер актуальным вопросам про сверхпроводимость.

Дополнительная по теоретической сверхпроводимости

Reinhold Kleiner and Werner Buckel. Superconductivity: A An Introduction, Third Edition.

Книга из КУ Левена про сверхпроводимость. Очень большая, больше подходит как справочник, чем то, что нужно подробно прочитывать. В открытом доступе нет, чуть что просить знакомого нужно ее прислать, 110\$ я думаю она не стоит точно для тех, кто не зарабатывает.

[9] Blatter, G. and Feigel'man, M. V. and Geshkenbein, V. B. and Larkin, A. I. and Vinokur, V. M. Vortices in high-temperature superconductors

По сути книга про вихри в high-temperature superconductors, там очень много всякого, минимум месяца 4 изучал ее бы, если бы нужно было.

[10] Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity Bagwell, Philip F.

Мне показалось, что тут хорошо написано про Андреевские уровни, так что добавил эту статью, потом поизучаю, не на пару дней тема.

[11] McMillan, W. L. Transition Temperature of Strong-Coupled Superconductors

Статья с умными формулами и таблицами экспериментальных данных. Обычной подготовки по Левитову Шитову достаточно для понимания её, в ней всего 2 страницы сложных формул. Если буду заниматься теорией и будет свободное время - изучу её.

[12] Chamon, C. and Jackiw, R. and Nishida, Y. and Pi, S.-Y. and Santos, L. Quantizing Majorana fermions in a superconductor

Кирилл сказал, что там про Намбу базис и про Боголюбова де Жена хорошая теория, потом доучивать это по ней буду.

Статьи о других теоретических методах и особых моделях

[13] Likharev, K. K. Superconducting weak links

Очень известная статья на 60 страниц про сверхпроводимость и джозефсонику, когда-то поизучаю скорее всего.

[14] Yu. A. Bychkov and I. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinskii Possibility of superconductivity type phenomena in a one-dimensional system

Статья про 1Д сверхпроводимость, интересная, по идее учебник их как раз дает полностью к этому подготовку.

[15] Possibility of Synthesizing an Organic Superconductor Little, W. A.

Статья про 1Д сверхпроводимость, интересная и самая первая.

[16] Marsiglio, F. Eliashberg theory: A short review

Вроде хороший обзор этой теории, когда-то поизучаю, интересно, но не на пару дней.

Статьи про разные явления, специфические конструкции

[17] Doll, R. and N  bauer, M. Experimental Proof of Magnetic Flux Quantization in a Superconducting Ring

Кольцом можно доказать, что поток квантуется, на 2 страницы это написано, я так и не дошел разобраться в этом.

[18] Deaver B, Fairbank W. Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders

Самая известная и мб первая статья про квантование потока. Я так и не понял, потратив 15 минут, что там за странные графики есть? Потом когда-то еще почитаю, статья на 4 страницы.

[19] Andreev, A F Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors

Оригинальная небольшая статья Андреева про его связные состояния, наверняка есть много хороших идей.

[20] Ryazanov, V. V. et al. Coupling of Two Superconductors through a Ferromagnet: Evidence for a π Junction

Известная статья про SFS контакт, там вообще много статей про это, может, когда-то изучу, пока нечего сказать про это.

[21] Magnetization of Hard Superconductors Bean, C. P.

Очень цитируемая статья, видел из нее график, доступа к ней не нашел. Видимо, там какие-то явления интересные происходят.

[22] Magnetization of multiple-quanta vortex lattices Moshchalkov, V. V. et. al.

Там график, что типа намагниченность возрастает в некоторых точках скачками, когда число его квантов равно числу вихрей. Видел на лекции, статью не читал, не актуально.

[23] Wiedenmann, J. 4π -periodic Josephson supercurrent in HgTe-based topological Josephson junctions

Статья про особый эффект Джозефсона со многим про шаги Шапиро. Много интересных графиков, но нет времени в ней пока разбираться, все равно нужно основы доучивать.

[24], Giaever, Ivar Energy Gap in Superconductors Measured by Electron Tunneling

Статья на страницу, за которую автор получил часть Нобелевской премии, потому что предложил по производной мерить щель. Я доучу наконец-то, как конкретно это делать?

[25], Hamilton, Clark A Josephson voltage standards

Статья с обзором применений эф. Джозефсона, про схемы с тысячами СКВИД-ами, джозефсоновские стандарты. Я совсем мало что знаю про это, нужно будет - отдельно читать нужно будет несколько дней. Во многих статьях видел картинки из нее, видимо, известная.

[26] Schulz, R. Chesca, B. et.al. Design and realization of an all d-wave dc π -superconducting quantum interference device

Небольшая статья, где есть график тока от потока для пи-СКВИДов, а также умные мысли про них.

[27] Jaklevic, R. C. and Lambe, J. and Mercereau, J. E. and Silver, A. H. Macroscopic Quantum Interference in Superconductors

Одна из первых статей про СКВИД-ы, есть несколько графиков интерференции. Киттель потом его у себя тоже привел. Вообще, типичная теория про них там, основные идеи в ней уже в учебниках.

References from de Gennes

Macroscopic description of 1st type superconductors:

F. London, Superfluids (New York: Wiley, 1950), Vol. I.

L. Landau and I. M. Lifschitz, Electrodynamics of Continuous Media (Pergamon, 1960), Chap. 6.

Relation between current and vector potential:

A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. (London), A216, 547 (1953).

Measurements of penetration depths:

A. L. Schawlow and G. Devlin, Phys. Rev., 113, 120 (1959).

A. B. Pippard, Proc. 7th Intern. Conf. Low Temp. Phys. (Toronto: Toronto Univ. Press, 1960), p. 320.

Intermediate state:

Optical Observation of Domains:

W. De Sorbo, Phys. Rev. Letters, 4, 406 (1960).

W. De Sorbo, Proc. 7th Intern. Conf. Low Temp. Phys. (Toronto: Toronto Univ. Press, 1960), p. 370.

Measurement of Wall Energy:

A. L. Schawlow, Phys. Rev., 101, 573 (1956).

Kinetics of the normal → superconducting phase transition:

T. E. Faber and A. B. Pippard, Progress in Low Temp. Physics, edited by C. G. Gorter (Amsterdam: North Holland, 1959), Vol. I, Chap. 9.

Литература по другим наукам, использующим сверхпроводимость

Литература о приложениях

[28] Clarke, J. and Braginski, A.I The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems

Библия сквидов, какие только возможно придумать детали про них обсуждены в их книге. Много ссылок и картинок.

[29] Fagaly, R. L. Superconducting quantum interference device instruments and applications

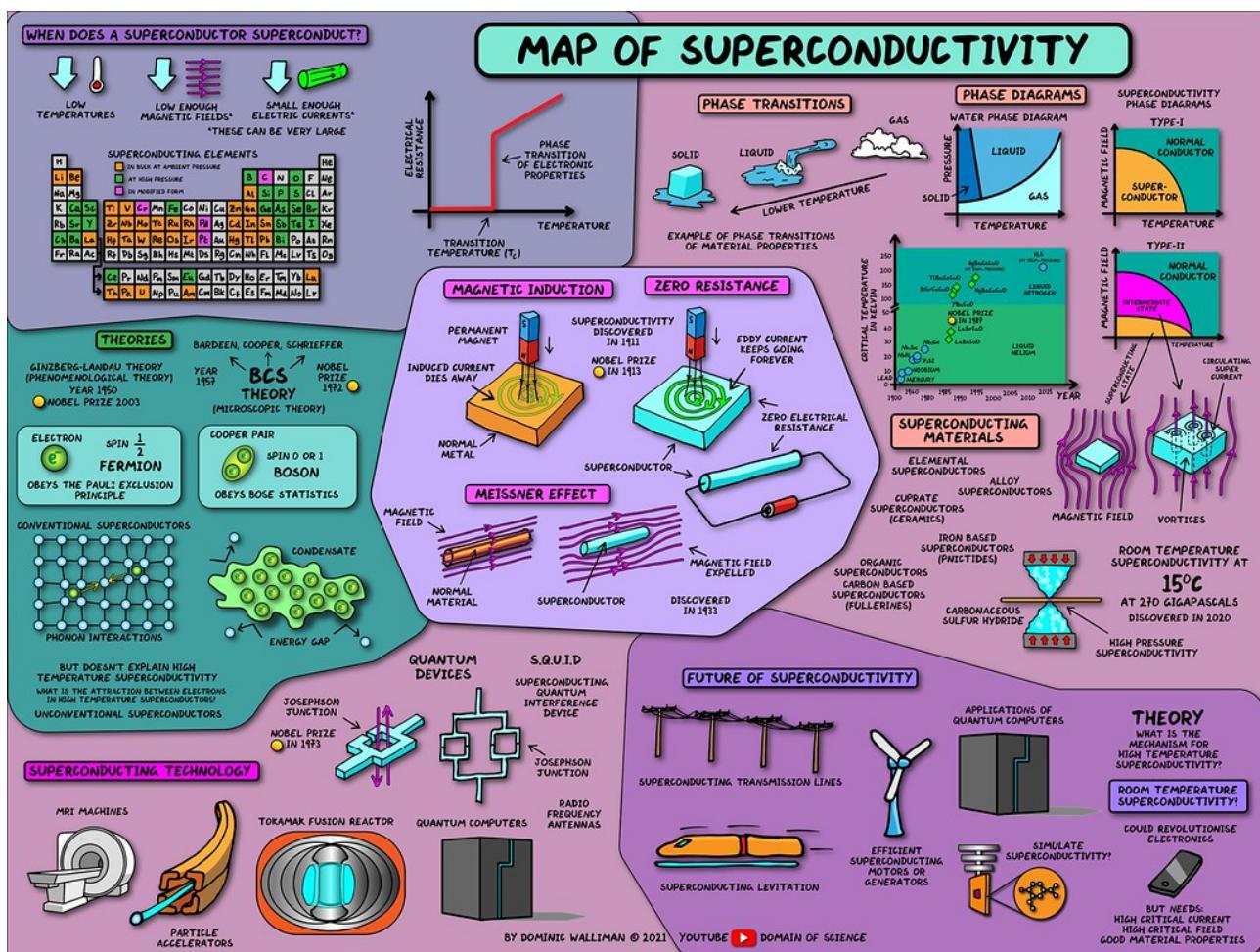
Обзор приложений СКВИД-ов с картинками. Нам на лекции в Левене из неё показывали пару картинок.

Литература в помощь по физике и математике

A.4 Обзор

(потом раскрою)

A.4.1 Популярное введение в сверхпроводимость



A.4.2 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

A.4.3 Обзор дальнейших развитий

A.4.4 Связи с другими науками

Обсудим связи с разделами
(потом раскрою)

A.4.5 Описание записи

Общее описание записи

Общие особенности записи

Особенности глав и разделов

Первая часть про предмет в двух словах

Вторая часть

Часть про приложения какие вообще приложения я разбирал?

Обозначения и константы

A.4.6 Об истории предмета

Обсудим вкратце историю развития ...

A.5 Головоломки

Обсудим в порядке интересности задачки и вопросы

A.5.1 Типичные головоломки

A.5.2 Бытовые головоломки

A.5.3 Принципиальные головоломки

A.5.4 Головоломки о деталях

A.5.5 Головоломки для освоения типичных понятий

Допустим, видим человека, который в принципе хотел бы понять суть, опишем, какие в какой последовательности будем задавать, чтобы в типичном случае ему было бы интереснее въезжать. В частности это могут быть младшие студенты или редко школьники.

Головоломки для освоения школьного уровня

Головоломки для освоения уровня теормина

Головоломки для освоения других особенностей

B Математика и физика в помощь

B.0.1 О квантовой механике для сверхпроводимости (??)

Особое понимание квантовой механики для сверхпроводимости

Волновая функция как очевидный ответ к природе сверхпроводимости (???????)
(??? почему выгодно пользоваться волновой функцией??? почему именно с ней решится задача??? напишу четко, пока что не понимаю, что такая макроскопическая волновая функция огромного количества электронов.)

B.0.2 О математике для сверхпроводимости (??)

(тут многое может быть)

C References

C.0.1 References from this note

References

- [1] Shmidt, V.V.: *The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications*. Springer, 1997, ISBN 9783540612438. https://books.google.be/books?id=808svNo_tWoC.
- [2] Kittel, C.: *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8th edition, 2004, ISBN 9780471415268. http://www.amazon.com/Introduction-Solid-Physics-Charles-Kittel/dp/047141526X/ref=dp_ob_title_bk.
- [3] Mineev, V.P, Samokhin K.: *Introduction to Unconventional Superconductivity*. Taylor & Francis, 1999, ISBN 9789056992095. <https://books.google.be/books?id=2BXYWT8m068C>.
- [4] Фоминов, Я. В., Щелкачёв, Н. М. : Эффект Джозефсона: Учебно-методическое пособие. МФТИ, page 32, 2010. https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/upload/b7f/Josephson-arpggmxhr7.pdf.
- [5] Larkin, A, Varlamov A.: *Theory of Fluctuations in Superconductors*. International Series of Monographs on Physics. OUP Oxford, 2009, ISBN 9780199564835. <https://books.google.be/books?id=ITyPPwAACAAJ>.
- [6] Li, Chuan: *Superconducting proximity effect in graphene and bi nanowire based junctions*. page 175, November 2014.
- [7] Gross, R, Marx A Deppe F.: *Applied Superconductivity: Josephson Effect and Superconducting Electronics*. De Gruyter Textbook Series. Walter De Gruyter Incorporated, 2016, ISBN 9783110417067. <https://books.google.be/books?id=4SIZrgEACAAJ>.
- [8] Lifshitz, E.M, Pitaevskii L.P.: *Statistical Physics: Theory of the Condensed State*. Number t. 9 in *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Science, 2013, ISBN 9780080503509. <https://books.google.be/books?id=lgiBDAAAQBAJ>.
- [9] Blatter, G, Feigel'man M. V Geshkenbein V. B Larkin A. I Vinokur V. M.: *Vortices in high-temperature superconductors*. Rev. Mod. Phys., 66:1125–1388, Oct 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.66.1125>.
- [10] Bagwell, Philip F.: *Suppression of the josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity*. Phys. Rev. B, 46:12573–12586, Nov 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.46.12573>.
- [11] McMillan, W. L.: *Transition temperature of strong-coupled superconductors*. Phys. Rev., 167:331–344, Mar 1968. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.167.331>.
- [12] Chamon, C, Jackiw R Nishida Y Pi S. Y Santos L.: *Quantizing majorana fermions in a superconductor*. Phys. Rev. B, 81:224515, Jun 2010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.224515>.
- [13] Likharev, K. K.: *Superconducting weak links*. Rev. Mod. Phys., 51:101–159, 1979.

- [14] Bychkov, Yu. A., P. Gor'kov l., and Dzyaloshinskii, I. E.: *Possibility of superconductivity type phenomena in a one-dimensional system*, pages 1–13. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814317344_0001.
- [15] Little, W. A.: *Possibility of synthesizing an organic superconductor.* Phys. Rev., 134:A1416–A1424, Jun 1964. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.134.A1416>.
- [16] Marsiglio, F.: *Eliashberg theory: A short review.* Annals of Physics, 417:168102, June 2020, ISSN 0003-4916. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2020.168102>.
- [17] Doll, R, N  bauer M.: *Experimental proof of magnetic flux quantization in a superconducting ring.* Phys. Rev. Lett., 7:51–52, Jul 1961. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.7.51>.
- [18] Deaver, Bascom S, Fairbank William M.: *Experimental evidence for quantized flux in superconducting cylinders.* Phys. Rev. Lett., 7:43–46, Jul 1961. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.7.43>.
- [19] Andreev, A F: *Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors.* Zh. Ekspерим. i Teor. Fiz., Vol: 46, May 1964. <https://www.osti.gov/biblio/4071988>.
- [20] Ryazanov, V. V, Oboznov V. A Rusanov A. Yu Veretennikov A. V Golubov A. A Aarts J.: *Coupling of two superconductors through a ferromagnet: Evidence for a π junction.* Phys. Rev. Lett., 86:2427–2430, Mar 2001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.2427>.
- [21] Bean, C. P.: *Magnetization of hard superconductors.* Phys. Rev. Lett., 8:250–253, Mar 1962. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.8.250>.
- [22] Moshchalkov, V. V, Baert M Metlushko V. V Rosseel E Van Bael M. J Temst K Jonckheere R Bruynseraeede Y.: *Magnetization of multiple-quanta vortex lattices.* Phys. Rev. B, 54:7385–7393, Sep 1996. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.7385>.
- [23] Wiedenmann, J, Bocquillon E Deacon R. S Hartinger S Herrmann O Klapwijk T. M Maier L Ames C Br  ne C Gould C Oiwa A Ishibashi K Tarucha S Buhmann H Molenkamp L. W.: *4π -periodic josephson supercurrent in hgte-based topological josephson junctions.* Nature Communications, 7(1), January 2016, ISSN 2041-1723. <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms10303>.
- [24] Giaever, Ivar: *Energy gap in superconductors measured by electron tunneling.* Phys. Rev. Lett., 5:147–148, Aug 1960. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.5.147>.
- [25] Hamilton, Clark A: *Josephson voltage standards.* Review of scientific instruments, 71(10):3611–3623, 2000.
- [26] Schulz, R, Chesca B Goetz B Schneider C Schmehl Andreas, Bielefeldt, H, Hilgenkamp Hans, Mannhart, Jochen, and Tsuei, C.: *Design and realization of an all d-wave dc π -superconducting quantum interference device.* Applied Physics Letters, 76:912–914, February 2000.
- [27] Jaklevic, R. C., Lambe J. Mercereau J. E. Silver A. H.: *Macroscopic quantum interference in superconductors.* Phys. Rev., 140:A1628–A1637, Nov 1965. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.A1628>.

- [28] Clarke, J, Braginski A.I.: *The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDS and SQUID Systems*. Wiley, 2006, ISBN 9783527604586. <https://books.google.bg/books?id=BsTTM-nU-JkC>.
- [29] Fagaly, R. L.: *Superconducting quantum interference device instruments and applications*. Review of Scientific Instruments, 77(10):101101, October 2006, ISSN 0034-6748. <https://doi.org/10.1063/1.2354545>.
- [30] Kleiner, R, Buckel W Huebener R.: *Superconductivity: An Introduction*. Wiley, 2016, ISBN 9783527411627. <https://books.google.be/books?id=eaUvCgAAQBAJ>.
- [31] Gennes, P.G. de: *Superconductivity of Metals and Alloys*. Frontiers in physics. W.A. Benjamin, 1966. <https://books.google.be/books?id=M8A8AAAAIAAJ>.
- [32] Bose, Sangita, García-García, Antonio M, Ugeda Miguel M Urbina Juan D Michaelis Christian H Brihuega Ivan, and Kern, Klaus: *Observation of shell effects in superconducting nanoparticles of sn*. Nature Materials, 9(7):550–554, May 2010, ISSN 1476-4660. <http://dx.doi.org/10.1038/nmat2768>.

C.0.2 References from Eliashberg Theory: a short review by F. Marsiglio

References

- [1] See, for example, Superconducting Quantum Levitation on a 3π Möbius Strip.
- [2] See, for example, Applications with Superconductivity.
- [3] R.D. Parks, in the Preface of *Superconductivity*, edited by R.D. Parks (Marcel Dekker, Inc., New York, 1969) page v.
- [4] This phrase was first used by an anonymous referee in appraising a colleague's understanding of the subject matter of his grant proposal (in 1990). I have plagiarized it ever since.
- [5] See the various articles in the Special Issue of Physica C, 'Superconducting Materials: Conventional, Unconventional and Undetermined', edited by J.E. Hirsch, M.B. Maple, and F. Marsiglio, *Physica C* 514, 1-444 (2015).
- [6] See, for example, P. P. Kong, V. S. Minkov, M. A. Kuzovnikov, S. P. Besedin, A. P. Drozdov, S. Mozaffari, L. Balicas, F.F. Balakirev, V. B. Prakapenka, E. Greenberg, D. A. Knyazev, M. I. Eremets, 'Superconductivity up to 243 K in yttrium hydrides under high pressure,' in <https://arxiv.org/abs/1909..>
- [7] Danfeng Li, Kyuho Lee, Bai Yang Wang, Motoki Osada, Samuel Crossley, Hye Ryoung Lee, Yi Cui, Yasuyuki Hikita and Harold Y. Hwang, 'Superconductivity in an infinite-layer nickelate', *Nature* 572, 624 (2019).
- [8] As summarized in F. London, In: *Superfluids Volume I: Macroscopic Theory of Superconductivity* (John Wiley and Sons, New York, 1950).
- [9] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.* 20, 1064 (1950).
- [10] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Microscopic Theory of Superconductivity*, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957); *Theory of Superconductivity* *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).

- [11] L.P. Gor'kov, *On the energy spectrum of superconductors*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **34** 735 (1958); [Sov. Phys. JETP **7** 505 (1958)]. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **34** 735 (1958); [Sov. Phys. JETP **7** 505 (1958)].
- [12] G.M. Eliashberg, *Interactions between Electrons and Lattice Vibrations in a Superconductor*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **38** 966 (1960); Soviet Phys. JETP **11** 696-702 (1960).
- [13] G.M. Eliashberg, *Temperature Green's Function for Electrons in a Superconductor*, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **38** 1437-1441 (1960); Soviet Phys. JETP **12** 1000-1002 (1961). Nambu independently formulated the same theory.[15]
- [14] Based on Web of Science, Oct. 1, 2019. These numbers are a little high, as a (very) few of these pertain to a mathematician with the same name.
- [15] Yoichiro Nambu, *Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity* Phys. Rev. **117** 648-663 (1960).
- [16] Based on Web of Science, Oct. 1, 2019. These numbers are a little high, as a (very) few of these pertain to a mathematician with the same name.
- [17] D.J. Scalapino, *The Electron-Phonon Interaction and Strong-coupling Superconductivity*, In: *Superconductivity*, edited by R.D. Parks (Marcel Dekker, Inc., New York, 1969)p. 449.
- [18] W.L. McMillan and J.M. Rowell, *Tunneling and Strong-coupling Superconductivity*, In: *Superconductivity*, edited by R.D. Parks (Marcel Dekker, Inc., New York, 1969)p. 561.
- [19] *Superconductivity in Two Volumes*, edited by R.D. Parks (Marcel Dekker, Inc., New York, 1969) p. 1-1412.
- [20] P.B. Allen and B. Mitrović, *Theory of Superconducting T_c* , in *Solid State Physics*, edited by H. Ehrenreich, F. Seitz, and D. Turnbull (Academic, New York, 1982) Vol. 37, p.1.
- [21] C.S. Owen and D.J. Scalapino, *S-state instabilities for retarded interactions*, Physica **55** 691 (1971).
- [22] G. Bergmann and D. Rainer, *The sensitivity of the transition temperature to changes in $\alpha^2 F(\omega)$* , Z. Physik **263** 59 (1973).
- [23] D. Rainer and G. Bergmann, *Temperature dependence of H_{c2} and κ_1 in strong coupling superconductors*, J. Low Temp. Phys. **14** 501 (1974).
- [24] P.B. Allen and R.C. Dynes, *Transition temperature of strong-coupled superconductors re-analyzed*, Phys. Rev. **B12** 905 (1975).
See also R.C. Dynes, *McMillan's equation and the T_c of superconductors*, Solid State Commun. **10**, 615 (1972).
- [25] J.M. Daams and J.P. Carbotte, *Thermodynamics of strong coupling superconductors including the effect of anisotropy*, J. Low Temp. Phys. **43** 263 (1981).
- [26] D. Rainer, *Principles of Ab Initio Calculations of Superconducting Transition Temperatures*, Progress in Low Temperature Physics Volume 10, edited by D.F. Brewer (North-Holland, 1986), Pages 371-424.
- [27] J.P. Carbotte and R.C. Dynes, *Superconductivity in Simple Metals*, Phys. Rev. **172**, 476-484 (1968).

- [28] Lilia Boeri, *Understanding Novel Superconductors with Ab Initio Calculations*, In: Andreoni W., Yip S. (eds) *Handbook of Materials Modeling*. Springer, Cham. pp. 1-41.
- [29] Antonio Sanna, *Introduction to Superconducting Density Functional Theory* E. Pavarini, E. Koch, R. Scalettar, and R. Martin (eds.) *The Physics of Correlated Insulators, Metals, and Superconductors Modeling and Simulation Vol. 7* Forschungszentrum Julich, 2017, ISBN 978-3-95806-224-5
- [30] F. Giustino, *Electron-phonon interactions from first principles*, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 015003 (2017).
- [31] M. Lüders, M. A. L. Marques, N. N. Lathiotakis, A. Floris, G. Profeta, L. Fast, A. Continenza, S. Massidda, and E. K. U. Gross, *Ab initio theory of superconductivity. I. Density functional formalism and approximate functionals*, *Phys. Rev. B* **72**, 024545 (2005).
- [32] M. A. L. Marques, M. Lüders, N. N. Lathiotakis, G. Profeta, A. Floris, L. Fast, A. Continenza, E. K. U. Gross, and S. Massidda, *Ab initio theory of superconductivity. II. Application to elemental metals*, *Phys. Rev. B* **72**, 024546 (2005).
- [33] J.P. Carbotte, *Properties of boson-exchange superconductors*, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 1027-1157 (1990).
- [34] F. Marsiglio and J.P. Carbotte, ‘Electron-Phonon Superconductivity’, Review Chapter in *Superconductivity, Conventional and Unconventional Superconductors*, edited by K.H. Bennemann and J.B. Ketterson (Springer-Verlag, Berlin, 2008), pp. 73-162. Note that an earlier version of this review was published by the same editors in 2003, but the author order was erroneously inverted, and one of the author affiliations was incorrect in that version.
- [35] W. Lee, D. Rainer and W. Zimmermann, *Holstein effect in the far-infrared conductivity of high T_c superconductors*, *Physica C* **159**, 535-544 (1989).
- [36] F. Marsiglio and J.P. Carbotte, *Aspects of Optical Properties in Conventional and Oxide Superconductors*, *Aust. J. Phys.* **50**, 975 (1997);
Quasiparticle Lifetimes and the Conductivity Scattering Rate *Aust. J. Phys.* **50**, 1011 (1997).
- [37] Giovanni A.C. Ummarino, *Eliashberg Theory*, In *Emergent Phenomena in Correlated Matter Modeling and Simulation Vol. 3* Forschungszentrum Julich, 2013, ISBN 978-3-89336-884-6, edited by E. Pavarini, E. Koch, and U. Schollwock.
- [38] A.B. Migdal, *Interaction between electrons and lattice vibrations in a normal metal*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 1438 (1958) [Sov. Phys. JETP **7**, 996 (1958)].
- [39] W.L. McMillan, *Transition Temperature of Strong-Coupled Superconductors*, *Phys. Rev.* **167**, 331 (1968).
- [40] M. Cohen and P.W. Anderson, in *Superconductivity in d- and f-Band Metals*, edited by D.H. Douglass (AIP, New York, 1972)p. 17.
- [41] Jonathan E. Moussa and Marvin L. Cohen, *Two bounds on the maximum phonon-mediated superconducting transition temperature*, *Phys. Rev. B* **74**, 094520 (2006).
- [42] I. Esterlis, S. A. Kivelson and D. J. Scalapino, *A bound on the superconducting transition temperature*, *npj Quantum Materials* (2018) 3:59, p1-4.

- [43] A.S. Alexandrov, *Breakdown of the Migdal-Eliashberg theory in the strong-coupling adiabatic regime*, *Europhys. Lett.*, **56**, 92 (2001). See also A.S. Alexandrov, *Superconducting Polarons and Bipolarons*, in *Polarons in Advanced Materials*, edited by A.S. Alexandrov, Springer, 2007, p. 257.
- [44] H. Fröhlich, *Electrons in Lattice Fields*, *Advances in Physics* **3**, 325 (1954)
- [45] J. Bardeen and D. Pines, *Electron-Phonon Interaction in Metals*, *Phys. Rev.* **99** 1140 (1955).
- [46] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, In: *Solid State Physics* (Saunders College Publishing, New York 1976) p. 518.
- [47] G. Rickayzen, In: *Theory of Superconductivity* (John Wiley and Sons, New York, 1965).
- [48] V. L. Berezinskii, *New model in the anisotropic phase of superfluid He-3*, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 628 (1974).
- [49] J. Linder and A.V. Balatsky, *Reviews of Modern Physics*, accepted, Sept. 2019.
- [50] Having said this, in the spirit of phenomenological exploration even the present author has used this formalism to explore other types of “bosonic glue.” See, for example, S. Verga, A. Knigavko and F. Marsiglio, *Inversion of angle-resolved photoemission measurements in high-T_c cuprates* *Phys. Rev. B* **67**, 054503 (2003).
- [51] This is not without irony, as one of the most celebrated electron-phonon-driven superconductors is MgB₂, with a $T_c \approx 39$ K. Ab initio calculations have explained this by finding considerable anisotropy in the coupling function. See Hyoung Joon Choi, David Roundy, Hong Sun, Marvin L. Cohen and Steven G. Louie, *The origin of the anomalous superconducting properties of MgB₂*, *Nature* **418**, 758-760 (2002). Not everyone agrees with this interpretation. See, for example, J.E. Hirsch and F. Marsiglio, *Electron-phonon or hole superconductivity in MgB₂*, *Phys. Rev. B* **64**, 144523 (2001).
- [52] F. Marsiglio, *Eliashberg Theory of the Critical Temperature and Isotope Effect. Dependence on Bandwidth, Band-Filling, and Direct Coulomb Repulsion*, *J. Low Temp. Phys.* **87** 659-682 (1992).
- [53] Vinay Ambegaokar and Ludwig Tewordt, *Theory of the Electronic Thermal Conductivity of Superconductors with Strong Electron-Phonon Coupling*, *Phys. Rev.* **134**, A805 (1964).
- [54] We could have elected to keep the area, $\int_0^\infty d\nu \alpha^2 F(\nu)$ constant as well, for example.
- [55] There are undoubtedly references that describe this procedure in more detail, but I learned it primarily from a mentor at the time, Ewald Schachinger, who was a frequent visitor at McMaster University during the course of my PhD.
- [56] F. Marsiglio, *Eliashberg theory in the weak-coupling limit*, *Phys. Rev. B* **98**, 024523 (2018).
- [57] D. Rainer first obtained the asymptotic result noted in the text in 1973 (private communication).
- [58] A. P. Drozdov, M. I. Eremets, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, S. I. Shylin, *Conventional superconductivity at 203 kelvin at high pressures in the sulfur hydride system*, *Nature* **525**, 73 (2015)

- [59] Maddury Somayazulu, Muhtar Ahart, Ajay K. Mishra, Zachary M. Geballe, Maria Baldini, Yue Meng, Viktor V. Struzhkin, and Russell J. Hemley, *Evidence for Superconductivity above 260 K in Lanthanum Superhydride at Megabar Pressures*, Phys. Rev. Lett. **122**, 027001 (2019).
- [60] D. Duan, Y. Liu, F. Tian, D. Li, X. Huang, Z. Zhao, H. Yu, B. Liu, W. Tian, and T. Cui, *Pressure-induced metallization of dense $(H_2S)_2H_2$ with high- T_c superconductivity*, Sci. Rep. **4**, 6968 (2014).
- [61] T. Holstein, *Studies of Polaron Motion Part I. The Molecular-Crystal Model*, Ann. Phys. **8**, 325-342 (1959).
T. Holstein, *Studies of Polaron Motion Part II. The “Small” Polaron*, Ann. Phys. **8**, 343-389 (1959).
- [62] J. Hubbard, *Electron Correlations in Narrow Energy Bands*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **276**, 238 (1963); see also **277**, 237 (1964); **281**, 401 (1964).
- [63] J.E. Hirsch and E. Fradkin, *Effect of Quantum Fluctuations on the Peierls Instability: A Monte Carlo Study*, Phys. Rev. Lett. **49** 402 (1982).
J.E. Hirsch and E. Fradkin, *Phase diagram of one-dimensional electron-phonon systems. II. The molecular-crystal model*, Phys. Rev. B **27** 4302 (1983).
- [64] R.T. Scalettar, N.E. Bickers and D.J. Scalapino, *Competition of pairing and Peierls-charge-density-wave correlations in a two-dimensional electron-phonon model*, Phys. Rev. B **40** 197 (1989).
R.M. Noack, D.J. Scalapino and R.T. Scalettar, *Charge-density-wave and pairing susceptibilities in a two-dimensional electron-phonon model*, Phys. Rev. Lett. **66** 778 (1991).
R.M. Noack and D.J. Scalapino, *Green’s function self-energies in the two-dimensional Holstein model*, Phys. Rev. B **47** 305 (1993).
- [65] F. Marsiglio, *Pairing and charge-density-wave correlations in the Holstein model at half-filling*, Phys. Rev. B **42** 2416 (1990);
see also F. Marsiglio, *Monte Carlo Evaluations of Migdal-Eliashberg Theory in two dimensions*, Physica C **162-164**, 1453 (1989).
- [66] F. Marsiglio, *Phonon Self-energy Effects in Migdal-Eliashberg Theory*, In: *Electron-Phonon Interaction in Oxide Superconductors*, edited by R. Baquero (World Scientific, Singapore, 1991) p.167. See also Figure 1 in Z. Li and F. Marsiglio, *The Polaron-Like Nature of an Electron Coupled to Phonons*, J Supercond Nov Magn **25**:1313 - 1317 (2012).
- [67] I. Esterlis, B. Nosarzewski, E.W. Huang, B. Moritz T.P. Devreux, D.J. Scalapino, and S.A. Kivelson, *Breakdown of the Migdal-Eliashberg theory: A determinant quantum Monte Carlo study*, Phys. Rev. B**97**, 140501(R) (2018).
- [68] J. Bauer, J.E. Han and O. Gunnarsson, *Quantitative reliability study of the Migdal-Eliashberg theory for strong electron-phonon coupling in superconductors*, Phys. Rev. B**84**, 184531 (2011).
J. Bauer, J.E. Han and O. Gunnarsson, *The theory of electron-phonon superconductivity: does retardation really lead to a small Coulomb pseudopotential?*, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 492202 (2012).
J. Bauer, J.E. Han and O. Gunnarsson, *Retardation effects and the Coulomb pseudopotential in the theory of superconductivity*, Phys. Rev. B**87**, 054507 (2013).
- [69] F. Marsiglio, *Pairing in the Holstein model in the dilute limit*, Physica C **244**, 21 (1995).

- [70] See the English translation of N.N. Bogoliubov, N.V. Tolmachev, and D.V. Shirkov in: *A New Method in the Theory of Superconductivity*, (Consultants Bureau, Inc., New York, 1959), p. 278-355, particularly Section 5.
- [71] P. Morel and P.W. Anderson, *Calculation of the Superconducting State Parameters with Retarded Electron-Phonon Interaction*, Phys. Rev. **125** 1263 (1962).
- [72] J. Bonča, S. A. Trugman, and I. Batistić, *Holstein polaron* Phys. Rev. B 60, 1633 (1999).
- [73] Li-Chung Ku, S. A. Trugman, and J. Bonča, *Dimensionality effects on the Holstein polaron*, Phys. Rev. B 65, 174306 (2002).
- [74] Z. Li and F. Marsiglio, *The Polaron-Like Nature of an Electron Coupled to Phonons*, J Supercond Nov Magn 25: 1313, (2012).
- [75] Zhou Li, D. Baillie, C. Blois, and F. Marsiglio, *Ground-state properties of the Holstein model near the adiabatic limit*, Phys. Rev. B**81**, 115114 (2010).
- [76] F. M. Peeters and J. T. Devreese, *Acoustical polaron in three dimensions: The ground-state energy and the self-trapping transition*, Phys. Rev. B 32, 3515 (1985).
W.B. da Costa and F.M. Peeters, *The polaron - bipolaron transition for acoustical three-dimensional polarons*, Journal of Physics: Condensed Matter, 8, 2173 (1996).
G. A. Farias, W. B. da Costa, and F. M. Peeters, *Acoustical polarons and bipolarons in two dimensions*, Phys. Rev. B 54, 12835 (1996).
- [77] Zhou Li, Carl J. Chandler, and F. Marsiglio, *Perturbation theory of the mass enhancement for a polaron coupled to acoustic phonons*, Phys. Rev. B 83, 045104 (2011).
- [78] Carl J. Chandler and F. Marsiglio, *BLF-SSH polarons coupled to acoustic phonons in the adiabatic limit*, Phys. Rev. B 90, 245149 (2014).
- [79] There is, however, a calculation that describes the “undressing” of polarons as the number of carriers is increased when those carriers are holes, but this occurs due to an inherent electron-hole asymmetry in the model that is not present in the Holstein model. See J.E. Hirsch, *Polaronic superconductivity in the absence of electron-hole symmetry*, Phys. Rev. B**47**, 5351 (1993), and J.E. Hirsch, *Electron-hole asymmetric polarons*, in “*Polarons and Bipolarons in High- T_c Superconductors and Related Materials*”, ed. by E.K.H. Salje, A.S. Alexandrov and W.Y. Liang, Cambridge University Press, Cambridge (1995), p. 234-257.
- [80] R. F. Gasparovic, B. N. Taylor and R. E. Eck, *Temperature dependence of the superconducting energy gap of Pb*, Solid State Communications **4**, 59-63 (1966).
- [81] J. R. Schrieffer, D. J. Scalapino, and J. W. Wilkins, *Effective Tunneling Density of States in Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **10**, 336 (1963).
- [82] D. J. Scalapino, J. R. Schrieffer, and J. W. Wilkins, *Strong-Coupling Superconductivity. I* Phys. Rev. **148**, 263 (1966).
- [83] H.J. Vidberg and J. Serene, *Solving the Eliashberg equations by means of N-point Padé approximants*, J. Low Temp. Phys. **29**, 179 (1977).
- [84] F. Marsiglio, M. Schossmann, and J. P. Carbotte, *Iterative analytic continuation of the electron self-energy to the real axis*, Phys. Rev. B **37**, 4965 (1988).

- [85] A.E. Karakozov, E.G. Maksimov and S.A. Mashkov, *Effect of the frequency dependence of the electron-phonon interaction spectral function on the thermodynamic properties of superconductors*, [ZhETF 68, 1937 (1975)] Sov. Phys. JETP **41** 971 (1976).
- [86] F. Marsiglio and J.P. Carbotte, *Gap function and density of states in the strong-coupling limit for an electron-boson system*, Phys. Rev. B **43** 5355 (1991).
- [87] An $\alpha^2 F(\nu)$ spectrum with $\lambda = 1.7$ and a large peak near 200 meV was used in J. P. Carbotte, E. J. Nicol, and T. Timusk, *Spectroscopic signatures of phonons in high pressure superconducting hydrides*, Phys. Rev. B 100, 094505 (2019).
- [88] Yuxuan Wang and Andrey Chubukov, *Quantum-critical pairing in electron-doped cuprates*, Phys. Rev. B **88**, 024516 (2013). See particularly Appendix A.
- [89] S. Mirabi and F. Marsiglio, unpublished (2019).
- [90] J.M. Rowell, P.W. Anderson, and D.E. Thomas, *Image of the Phonon Spectrum in the Tunneling Characteristic Between Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **10** 334 (1963).
- [91] W.L. McMillan and J.M. Rowell, *Lead Phonon Spectrum Calculated from Superconducting Density of States*, Phys. Rev. Lett. **14** 108 (1965).
- [92] B. Mitrović, H.G. Zarate, and J.P. Carbotte, *The ratio $\frac{2\Delta_0}{k_B T_c}$ within Eliashberg theory*, Phys. Rev. B **29** 184 (1984).
- [93] F. Marsiglio and J.P. Carbotte, *Strong-coupling corrections to Bardeen-Cooper-Schrieffer ratios*, Phys. Rev. B **33** 6141 (1986).
- [94] F. Marsiglio, *Eliashberg Theory and the High T_c Oxides*, PhD thesis, McMaster University (1988).
- [95] For example, contrast Figures 4 and 6 in G.W. Webb, F. Marsiglio and J.E. Hirsch, ‘Superconductivity in the elements, alloys and simple compounds’, Physica C **514**, 17-27 (2015).
- [96] A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth and M. Rozenberg, *Dynamical mean-field theory of strongly correlated fermion systems and the limit of infinite dimensions*, Reviews of Modern Physics. **68**, 13 (1996).
- [97] G.D. Mahan., In: *Many-Particle Physics*, Third Edition (Plenum Press, New York, 2000).