

# Thermodynamics

Yury Holubeu \*

September 30, 2024

This note is not intended for distribution.

Thermodynamics and applications are discussed in details. Link below show contents of solved problems. I used the following [literature](#).

Goals: 1) I just want to practice basics one week, because it is interesting. No need for this subject now.

## Contents

<b>1</b>	<b>Preface and main motivation</b>	<b>7</b>
<b>I</b>	<b>——Typical Thermodynamics in a Nutshell——</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Основные методы термодинамики</b>	<b>8</b>
1	Основы термодинамики и газовые модели в двух словах . . . . .	8
1.1	Основные уравнения термодинамики и свойства параметров . . . . .	8
1.2	Об идеальных газах . . . . .	11
1.3	О газе Ван-дер-Ваальса . . . . .	12
1.4	О скорости звука и истечении газов (!!!) . . . . .	12
1.5	О распределениях . . . . .	14
1.6	О флуктуациях . . . . .	15
1.7	Типичные конкретные газы . . . . .	20
2	Основные законы термодинамики . . . . .	20
2.1	Нулевое, первое, второе, третье начала термодинамики . . . . .	20
2.2	Meaning of energy, temperature, entropy, chem. potential, other parameters . . . . .	21
2.3	Термодинамические потенциалы и их преобразования . . . . .	24
2.4	О теории меры и математической термодинамике (???) . . . . .	28
3	Диффузия, теплопроводность и другие процессы переноса . . . . .	28
3.1	Длина свободного пробега . . . . .	28
3.2	Диффузия . . . . .	28
3.3	Теплопроводность . . . . .	28
3.4	Вязкость . . . . .	28
3.5	Броуновское движение . . . . .	28
3.6	Эффузия . . . . .	28
3.7	Эффект Джоуля-Томсона . . . . .	28
4	Другие модели термодинамики . . . . .	29
4.1	О теплоемкостях твердых тел . . . . .	29
4.2	О поверхностных явлениях . . . . .	29
4.3	Насыщенный пар . . . . .	29
4.4	О кипении . . . . .	29
4.5	О термодинамических циклах . . . . .	29
5	Типичные фазовые переходы . . . . .	30
5.1	О плавлении, кристаллизации и простых переходах агрегатного состояния . . . . .	30
5.2	Основное о фазовых переходах . . . . .	31
5.3	Другое о фазовых переходах . . . . .	31
6	О статистической физике в термодинамике (???) . . . . .	31
6.1	Распределения Максвелла, Больцмана . . . . .	32
<b>II</b>	<b>Main Laws of Thermodynamics</b>	<b>33</b>

---

\*yuri.holubev@gmail.com

<b>3</b>	<b>Основы термодинамики</b>	<b>33</b>
1	Философия и принципы термодинамики . . . . .	33
1.1	Философия термодинамики . . . . .	33
1.2	Идея статистических описаний систем . . . . .	34
1.3	уравнение состояния . . . . .	36
1.4	термодинамические функции . . . . .	37
1.5	первое начало термодинамики . . . . .	37
1.6	Второе начало термодинамики . . . . .	38
1.7	О дальнейшем построении термодинамики . . . . .	39
1.8	устойчивость термодинамического равновесия . . . . .	39
1.9	Абстрактные системы с многими параметрами . . . . .	39
1.10	Понятие температуры . . . . .	39
1.11	Измерение температуры . . . . .	41
1.12	Понятие энергии . . . . .	41
1.13	Другие подходы к термодинамике . . . . .	42
2	Элементарные термодинамические модели . . . . .	42
2.1	Цикл Карно . . . . .	42
2.2	Другие термодинамические циклы . . . . .	44
2.3	Распределение Максвелла . . . . .	44
2.4	О распределении Гиббса . . . . .	47
2.5	Уравнения молекулярно-кинетической теории . . . . .	48
2.6	Другое о молекулярно-кинетической теории . . . . .	48
2.7	скорости теплового движения . . . . .	48
2.8	Число Авогадро . . . . .	48
3	теплопроводность . . . . .	49
3.1	уравнение теплопроводности . . . . .	49
3.2	стационарные задачи . . . . .	49
3.3	нестационарные задачи . . . . .	49
3.4	различные явления с теплопроводностью . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Законы газовой динамики</b>	<b>49</b>
1	Идеальный газ . . . . .	49
1.1	формулы для разных количеств атомов в газе . . . . .	49
1.2	формулы для усреднения для приближения реальных объектов ИГ . . . . .	49
1.3	статистическое описание . . . . .	50
2	Газ Ван-дер-Ваальса . . . . .	50
2.1	свойства газа Ван-дер-Ваальса . . . . .	50
3	Другие газы . . . . .	55
3.1	насыщенный пар . . . . .	55
4	Процессы переноса в газах . . . . .	55
4.1	Длина свободного пробега . . . . .	55
4.2	Газокинетическое сечение молекулы . . . . .	56
4.3	Частота столкновений молекул газа . . . . .	57
4.4	Формула Сазерленда . . . . .	57
4.5	Ослабление потока частиц в газе . . . . .	58
4.6	Распределение молекул по длинам свободного пробега . . . . .	59
4.7	Другое о процессах переноса . . . . .	60
4.8	Параметры диффузии . . . . .	60
4.9	Вязкость . . . . .	63
4.10	процесс Джоуля-Томсона . . . . .	63
4.11	Другое о диффузии . . . . .	66
5	Уравнения диффузии и теплопроводности . . . . .	67
5.1	Уравнение диффузии . . . . .	67
5.2	Уравнение теплопроводности . . . . .	68

6	Броуновское движение . . . . .	71
6.1	Закон Эйнштейна-Смолуховского. . . . .	71
6.2	Связь подвижности и коэффициента диффузии . . . . .	72
6.3	Броуновское движение как случайные блуждания . . . . .	72
6.4	Скорость диффузии и теплопроводности . . . . .	74
6.5	Звук как адиабатический процесс (!?) . . . . .	75
7	Эффузия разреженного газа . . . . .	76
7.1	Эффект Кнудсена . . . . .	76
7.2	Эффузионное разделение газовых смесей . . . . .	76
7.3	Свободное молекулярное течение газа через трубу . . . . .	77
8	Равновесие фаз и фазовые переходы . . . . .	79
8.1	Общая теория фазовых переходов . . . . .	79
8.2	фазовые переходы для твердых тел . . . . .	79
8.3	Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний. . . . .	82
8.4	кинетическое описание . . . . .	83
8.5	переходы первого рода . . . . .	83
8.6	переходы второго рода . . . . .	84
8.7	построение кривых фазового равновесия . . . . .	85

### III Problems in Thermodynamics 86

9	Типичные задачи термодинамики . . . . .	86
9.1	Вопросы на понимание термодинамики (!!?!?) . . . . .	86
10	Задачи Коткина и Образовского . . . . .	86
10.1	Задачи на Повторение вопросов термодинамики . . . . .	86
10.2	1. Решения Повторение вопросов термодинамики . . . . .	87
10.3	Задачи на Микроканоническое и каноническое распределения . . . . .	91
10.4	2. Микроканоническое и каноническое распределения . . . . .	92
10.5	Задачи на Больцмановский газ . . . . .	97
10.6	Решения Больцмановский газ . . . . .	99
10.7	Задачи на Идеальный ферми-газ . . . . .	106
10.8	Решения Идеальный ферми-газ . . . . .	107
10.9	Задачи на Идеальный бозе-газ . . . . .	113
10.10	Решения Идеальный бозе-газ . . . . .	114
10.11	Задачи на Неидеальный газ. Фазовые переходы . . . . .	119
10.12	Решения Неидеальный газ. Фазовые переходы . . . . .	119
10.13	Задачи на Флуктуации . . . . .	126
10.14	Задачи на Уравнение диффузии . . . . .	134
10.15	Решения Уравнение диффузии . . . . .	134
10.16	Задачи на Кинетическое уравнение . . . . .	135
10.17	Решения Кинетическое уравнение . . . . .	137
11	Задачи общей физики . . . . .	144
11.1	Задачи на оценки явлений (!!?!?) . . . . .	144
11.2	Задачи Туймаады . . . . .	144
11.3	Задачи на идеальный газ . . . . .	173
11.4	Задачи на скорость звука истечение газов (!!?) . . . . .	181
11.5	Задачи на термодинамические циклы (???) . . . . .	184
11.6	Задачи на энтропию Клаузиуса . . . . .	188
11.7	Задачи на статистический смысл энтропии . . . . .	191
11.8	Задачи на обратимость процессов . . . . .	193
11.9	Задачи на термодинамические потенциалы . . . . .	195
11.10	Задачи на реальные газы и газ Ван-дер-Ваальса . . . . .	203
11.11	Задачи на распределение Максвелла . . . . .	211
11.12	Задачи на распределение Максвелла, 2 . . . . .	214

11.13	Задачи на распределение Больцмана (!!)	218
11.14	Задачи на Теплоемкость	227
11.15	Задачи на флуктуации в термодинамике	227
11.16	Задачи на явления переноса	234
11.17	Задачи на явление переноса 2	240
11.18	Задачи на явление переноса 3	245
11.19	Задачи на Теплопроводность	248
11.20	Задачи на Броуновское движение	248
11.21	Задачи на фазовые переходы	250
11.22	Задачи на фазовые переходы 2	255
11.23	Задачи на поверхностные явления	259

## IV —Special Thermodynamics in a Nutshell— 265

### 5 Термодинамика в технических приложениях в двух словах 265

### 6 Особые явления термодинамики в двух словах 265

0.1	О термодинамике в электромагнитных явлениях	265
-----	---	-----

### 7 Другие свойства термодинамики в двух словах 265

1	Парадоксы и мысленные эксперименты в двух словах	265
1.1	Парадоксы о вечных двигателях	265
1.2	Квантовые мысленные эксперименты	265

## V Другие темы термодинамики 266

### 8 Различные неочевидные явления 266

0.1	Теплоёмкость подвешенного шарика по Коткину, Образовскому	266
-----	---	-----

### 9 Другие вопросы термодинамики 269

1	термодинамика диэлектриков и магнетиков	269
1.1	термодинамика диэлектриков	269
1.2	термодинамика магнетиков	270
2	Применения термодинамики к задачам механики	272
2.1	Методы (??)	272
2.2	Механико-термодинамические свойства резины (??)	272
2.3	Упругие деформации (?)	275
2.4	Термодинамика вращающихся тел (!?!?!?)	276
3	Некоторые модели газовой динамики	276
3.1	динамика комнатного воздуха	276
3.2	о скорости звука	277
3.3	протекание газа сквозь сопло ракеты	277
3.4	вязкость	280
3.5	динамика атмосферы	280
4	Термодинамика тел при больших плотностях	280
4.1	Уравнение состояния вещества при больших плотностях	280
4.2	равновесие тел с большой массой	283
4.3	Энергия гравитирующего тела	287
4.4	Равновесие нейтронной сферы	289
4.5	температурные явления в гидродинамике	291
4.6	Термодинамика некоторых реальных тел	291
5	Термодинамика поверхностного натяжения и границ сред	292
5.1	Основные методы описания	292

5.2	термодинамика поверхностного натяжения . . . . .	292
<b>10</b>	<b>Эксперименты по термодинамике . . . . .</b>	<b>293</b>
<b>11</b>	<b>Введение в другие после термодинамики разделы физики . . . . .</b>	<b>293</b>
1	Введение в статистическую физику . . . . .	293
1.1	Основы статистической физики . . . . .	294
1.2	О гиббсовых системах . . . . .	299
1.3	квантовые основы и подсчет состояний . . . . .	300
1.4	Квантовые жидкости . . . . .	302
1.5	низкотемпературные явления . . . . .	303
2	Введение в кинетику . . . . .	303
2.1	Подробная теория флуктуаций . . . . .	303
2.2	Броуновское движение . . . . .	303
2.3	Соотношение Эйнштейна . . . . .	303
2.4	Фоккер-Планк . . . . .	303
3	Введение в физику твердого тела . . . . .	303
3.1	Случай нулевой температуры . . . . .	303
3.2	ферми жидкость . . . . .	303
3.3	сверхпроводимость . . . . .	303
4	О системах с многими элементами . . . . .	304
4.1	Абстрактный подход (???) . . . . .	304
4.2	О некоторых моделях (???) . . . . .	304
5	О нестандартных применениях термодинамики . . . . .	304
5.1	О теории информации . . . . .	304
5.2	Аналогии термодинамики и процессов в жизни (??) . . . . .	304
5.3	Техническая термодинамика и механизмы . . . . .	304
<b>VI</b>	<b>Appendix . . . . .</b>	<b>306</b>
<b>A</b>	<b>Введение и обзор термодинамики . . . . .</b>	<b>306</b>
1	Другая мотивация . . . . .	306
2	Мышление профессионалов в термодинамике . . . . .	307
2.1	Применения термодинамики в обычной жизни . . . . .	307
2.2	наиболее используемые темы термодинамики . . . . .	307
2.3	Способы догадаться до всех главных идей . . . . .	307
2.4	Дополнительные разделы науки для изучения термодинамики . . . . .	307
2.5	Особенности изучения термодинамики . . . . .	307
3	Обзор термодинамики . . . . .	308
3.1	Термодинамика в двух словах . . . . .	308
3.2	разные термодинамические подходы . . . . .	308
3.3	наиболее прикладные темы Предмета . . . . .	308
3.4	итоговые формулы и закономерности . . . . .	308
3.5	обзор теоретических подходов . . . . .	308
3.6	Удивительные факты . . . . .	309
3.7	Результаты Предмет . . . . .	309
3.8	Применения Предмет в других разделах физики . . . . .	309
3.9	Обзор дальнейших развитий термодинамики . . . . .	309
3.10	Связь термодинамики с другими разделами физики . . . . .	309
3.11	короткий исторический обзор . . . . .	309
4	Описание записи . . . . .	309
4.1	описание глав и разделов . . . . .	309
4.2	обозначения . . . . .	310

---

4.3	Константы . . . . .	310
5	Литература по термодинамике . . . . .	310
5.1	Основная литература . . . . .	310
5.2	Дополнительная литература . . . . .	311
6	Термодинамические головоломки . . . . .	312
6.1	Бытовые головоломки . . . . .	312
6.2	Вопросы о фундаментальных законах термодинамики . . . . .	312
6.3	Что может быть, а чего не может быть . . . . .	312
6.4	Головоломки для освоения типичных понятий . . . . .	313
<b>В</b>	<b>Некоторые математические методы</b>	<b>313</b>
1	конструкции теории вероятностей . . . . .	313
1.1	распределение Пуассона . . . . .	313
1.2	якобиан и соотношения из производных . . . . .	313
<b>С</b>	<b>моделирование</b>	<b>313</b>
<b>References</b>		<b>314</b>

# 1 Preface and main motivation



Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

## Мотивация к разделам

(потом раскрою в параграфах)

## Лучшие теоретические головоломки для мотивации

**А можно сделать так, чтобы был и лет и кипящая вода** (ага. напишу косвенно то, что известно как тройная точка)

**Почему температура линейно растёт?** (это глубокий вопрос, на него раздел в теории тоже создам.)

**Почему на самом деле невозможен вечный двигатель?** (ага, попробуй, докажи это?!)

## Лучшие задачи для мотивации

(потом раскрою, пока наreshивать задачи нужно.)

**Одинакова ли теплоёмкость твёрдого шарика в случае, если он подвешен, и в случае, если лежит?** (см. задачу Коткина, это очень не очевидно!)

## Part I

# Typical Thermodynamics in a Nutshell

## 2 Основные методы термодинамики

### 1 Основы термодинамики и газовые модели в двух словах

#### 1.1 Основные уравнения термодинамики и свойства параметров

Об основных уравнениях термодинамики

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

то тут и вводим мы теплоемкость при постоянном объеме  $C_V \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  и внутреннее давление  $P_{int} \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = l - P$ .

Вводят *показатель адиабаты*

$$\gamma := \frac{C_P}{C_V}$$

для идеального газа:

$$C_P = \nu \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad C_V = \nu \frac{R}{\gamma - 1}$$

Из  $dU = TdS - pdV + \mu dN$  поскольку, например,  $\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}$ , то

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_{V,N}$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial N} \right)_{S,V} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{V,N}$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial N} \right)_{S,V} = - \left( \frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{S,N}$$

$$d(TS) = d(pV)$$

### О термодинамических потенциалах

#### Свойства термодинамических потенциалов

Потенциалы задаются преобразованиями Лежандра

$$F(T, V, N) = U - TS$$

$$W(S, p, N) = U + pV$$

$$\Phi(T, p, N) = U + pV - TS \equiv F + pV \equiv \mu(T, p)V$$

$$\Omega(T, V, \mu) = U - TS - \mu N$$

После дифференцирования:

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$dW = Vdp + TdS + \mu dN$$

$$d\Phi = Vdp - SdT + \mu dN$$

$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu$$



$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V} &= -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{T,V} &= -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}\end{aligned}$$

Из них параметры систем:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{TN}, \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{TV}, \quad C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{VN} = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{VN}$$

### принцип минимальности термодинамических потенциалов

(пока не нужен, но в лекциях мфти есть, потом мб добавлю.)

### Идеальный газ в двух словах

приведем основные формулы.

**Обзор применений идеального газа** интересно разобраться, в каких реальных ситуациях он на самом деле будет применен?

четко пропишу потом с опытом.

**О политропическом процессе над газом** Энергия:

$$Q = \nu c(T_2 - T_1)$$

уравнение политропы

$$pV^\alpha = \text{const},$$

где степень политропы  $\alpha = \frac{c_p - c_v}{c_p}$ , где  $c_p, c_v$  известны.

подставим уравнение Менделеева-Клапейрона, получим

$$T_1 V_0^{\alpha-1} = T_2 n^{\alpha-1} V_0^{\alpha-1}$$

**Энтропия ИГ (!!!!????)**

**Средняя потенциальная энергия ИГ при квадратичном потенциале от расстояния** (задача для маги)

**Реальные газы в разных конструкциях** пар 6 овч

а я хз, в каких там конструкциях

**Газы в сосудах** часто задачи на это.

**Типичные истечения газов** пар 2 овч

**О задачах на циклы и графики**

(тоже типичный класс задач)

## Свойства теплоемкостей газов

### Основные формулы

#### Итоговые соотношения

$C_V = \frac{3}{2}R, \gamma = \frac{5}{3} = 1,67$  - для одноатомного газа;

$C_V = \frac{5}{2}R, \gamma = \frac{7}{5} = 1,4$  - для газа из двухатомных молекул;

$C_V = \frac{5}{2}R, \gamma = \frac{7}{5} = 1,4$  - для газа многоатомных линейных молекул;

$C_V = 3R, \gamma = \frac{4}{3} = 1,33$  - для газа многоатомных нелинейных молекул.

Однако даже эти значения часто заметно отличаются от значений, найденных экспериментально. Например, у водорода ( $H_2$ ) показатель адиабаты при комнатной температуре ( $T = 298\text{ K}$ ) составляет  $\gamma = 1,41$ , а у хлора ( $Cl_2$ )  $\gamma = 1,36$  - вместо теоретического  $\gamma = 1,4$ . В случае многоатомных молекул расхождение еще больше. Например, газ из нелинейных молекул  $SO_2$  имеет  $\gamma = 1,26$  вместо  $\gamma = 1,33$ , а в случае углекислого газа ( $CO_2$ ) с линейными молекулами оказалось  $\gamma = 1,29$  вместо значения  $\gamma = 1,4$ , предсказываемого классической теорией.

(???? и что делать, почему так???? хз.)

#### Теплоемкость для постоянного объема

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$$

**Теплоемкость для постоянного давления** Через энтальпию  $dH \equiv dU + PdV = d(U + PV)$ :

$$C_P = \frac{\partial H}{\partial T}$$

**газовые теплоемкости** научимся получать разные термодинамические тождества для газовых теплоемкостей

**Определение теплоемкости** то се, ясно итак.

**известные соотношения** ранее уже было получено многое для теплоемкости. повторим, что уже известно

(пока что тут просто формулы из Кирича)

$$\varepsilon_{\text{уп}} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2}$$

согласно распределению Гиббса

$$dW = A \exp\left(-\frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{2kT}\right) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

$$\overline{\omega_1^2} = \frac{kT}{I_1}, \quad \overline{\omega_2^2} = \frac{kT}{I_2}, \quad \overline{\omega_3^2} = \frac{kT}{I_3}$$

**колебательная энергия двухатомной молекулы**

$$\bar{\varepsilon}_{\text{xon}} = \frac{\int \varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma}{\int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma} = \frac{\int \varepsilon \exp(-\beta\varepsilon) d\gamma}{\int \exp(-\beta\varepsilon) d\gamma} = -\frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial \beta}$$

$$\tilde{Z} = \int \exp(-\beta\varepsilon) dv_{0\pi u} dx$$

$$\tilde{Z} = \int \exp\left(-\frac{\beta\mu v_{0m}^2}{2} - \frac{\beta\mu\omega^2 x^2}{2}\right) dv_{0tr1} dx =$$

$$\tilde{Z}_{\text{хат}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta\mu v_{0m}^2}{2}\right) dv_{0m} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta\mu}}$$

$$\tilde{Z}_{\text{нор}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta\mu\omega^2 x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta\mu\omega^2}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{ноч}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вр}} + \bar{\varepsilon}_{\text{кол}} = \frac{3}{2}kT + 2 \cdot \frac{1}{2}kT + k'I = \frac{7}{2}kT$$

$$C_V = \frac{7}{2}R$$

**многоатомная молекула** линейные молекулы:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{ноч}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вр}} + \bar{\varepsilon}_{\text{кол}} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 2 \cdot \frac{1}{2}kT + (3 \cdot 3 - 5)kT = \frac{13}{2}kT$$

нелинейные:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{ноч}} + \bar{\varepsilon}_{\text{вр}} + \bar{\varepsilon}_{\text{кол}} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 3 \cdot \frac{1}{2}kT + (3 \cdot 3 - 6)kT = 6kT$$

**1.2 Об идеальных газах**

(тут все самое основное про него для задач!)

**Теория (?)**

Энергия газа:

$$U = \frac{3}{2}\nu RT$$

для идеального газа формулы для теплоемкостей:

$$C_V = \frac{1}{\gamma - 1}\nu R; \quad C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\nu R;$$

и известное соотношение Майера

$$C_p - C_V = \nu R$$

Энтропия находится из  $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}$ . Здесь  $C_V$  — теплоемкость одного моля газа. Отсюда (при  $C_V = \text{const}$ ) следует

$$S = S_0 + \nu C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

Искать удобно просто по

$$\Delta S_V = \int_1^2 \frac{\delta Q_V}{T} = \int_1^2 \frac{C_V dT}{T}$$

$$\Delta S_P = \int_1^2 \frac{\delta Q_P}{T} = \int_1^2 \frac{C_P dT}{T} =$$

### 1.3 О газе Ван-дер-Ваальса

#### Уравнение Ван-дер-Ваальса

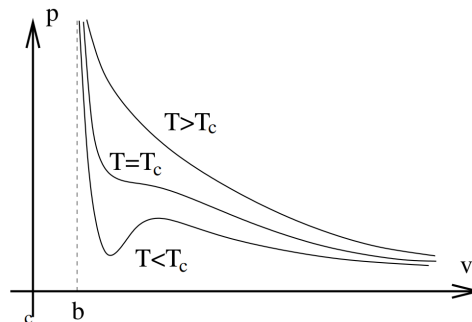
$$p = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2}$$

where  $v = V/N$  is the volume per particle. Sometimes it is in terms of the particle density  $\rho = 1/v$ .

(!?!? тут про физ смысл параметров!)

$$k_B T_c = \frac{8a}{27b}$$

comes from  $\frac{\partial p}{\partial v}$



#### Другие уравнения состояния

#### Изотермы газа Ван-дер-Ваальса

#### Приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса

#### Равновесие фаз газа Ван-дер-Ваальса

#### Правило Максвелла

#### О химическом потенциале газа Ван-дер-Ваальса

#### Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса

#### Свободное расширение газа в вакуум

### 1.4 О скорости звука и истечении газов (!!!)

(разедл Овча решаю про это скоро уже!)

#### Основные формулы про скорость звука (!?!?!?!?)

$$c_{зв} = [(\partial p / \partial \rho)_{ад}]^{1/2}.$$

Вводя плотность из (1.27) для адиабатического процесса имеем

$$(\partial p / \partial \rho)_{zA} = \gamma p / \rho = c_{3B}^2.$$

Для идеального газа из (1.10)

$$p = \rho RT / \mu.$$

$$c_z = \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_a \right]^{1/2} = \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{\gamma RT}{\mu} \right)^{1/2} = [(\gamma - 1) c_p T]^{1/2}.$$

1.2.11. Скорость звука в газах и жидкостях. Газы и жидкости обладают упругостью объема, но не формы. Поэтому в них могут распространяться только продольные (но не поперечные или сдвиговые) волны разрежения-уплотнения. Фазовая скорость продольных волн в бесконечной упругой среде равна  $c_{3B} = \sqrt{E_1 / \rho}$  где  $E_1$  — модуль одностороннего сжатия,  $\rho$  — плотность вещества. Из закона Гука следует  $E_1 = \sigma / \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \Delta l / l = \Delta V / V$ , где  $\sigma$  — натяжение. Заменяя  $\sigma \rightarrow -\Delta P$  и рассматривая бесконечно малые изменения объема  $\Delta V \rightarrow dV$  и давления  $\Delta P \rightarrow dP$ , получаем  $E_1 = -V \partial P / \partial V = \rho \partial P / \partial \rho$ . Отсюда  $c_{3B} = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)}$ .

Если за время прохождения звука на расстояние порядка длины волны  $\lambda$  тепло не успевает выйти за пределы объема  $V \sim \lambda^3$ , то такой процесс можно считать адиабатическим и  $c_{3B} = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_{\text{адиаб}}}$ . Если же теплообмен эффективен, то процесс изотермический и  $c_{3B} = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_T}$ . Критерий адиабатичности процесса рассмотрен в разделе 5.7.5. Для идеального газа уравнение адиабаты есть  $P \sim \rho^\gamma$ , откуда

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{адиаб}} = \frac{\gamma P}{\rho}.$$

С учетом уравнения состояния  $P = \rho RT / \mu$  отсюда следует выражение для скорости звука:

$$c = \sqrt{\gamma P / \rho} = \sqrt{\gamma RT / \mu}.$$

Для воздуха ( $\gamma = 1,4$ ;  $\mu = 28,8$ ) расчет по этой формуле дает значение  $c = 330$  м/с при  $T = 273$  К.

## Основные формулы про истечение газа (!?!?!!???)

### Истечение газа из отверстия.

уравнение непрерывности

$$rvS = \text{const}$$

уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + u + u_{\text{пот}} = \text{const}.$$

$$\frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + h_2.$$

где  $h = P / \rho + u$  — удельная энтальпия.

за из сосуда через малое В случае идеального газа молярная энтальпотверстие пия равна  $H = U + PV = C_V T + RT = C_P T$ , где  $C_P$  — молярная теплоемкость при постоянном давлении. Соответственно удельная энтальпия оказывается равной

$$h = \frac{H}{\mu} = \frac{C_P}{\mu} T$$

и для скорости истечения газа находим выражение

$$v = \sqrt{\frac{2C_P}{\mu} (T_1 - T_2)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_1}{\mu} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}.$$

Мы использовали формулу  $C_P = \gamma R/(\gamma - 1)$  (при  $\nu = 1$ ) из раздела 1.2.8. Обозначим  $c_{зв} = \sqrt{\gamma RT_1/\mu}$  — скорость звука в объеме сосуда. Это позволяет переписать последнюю формулу в виде

$$v = c_{зв} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}.$$

Пусть процесс истечения газа происходит адиабатически. Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

и, следовательно,

$$v = c_{зв} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}.$$

Максимальная скорость газа достигается при его истечении в вакуум,  $P_2 = 0$ , так что

$$v_{\max} = c_{зв} \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}.$$

Очевидно, что  $v_{\max} > c_{зв}$ . В частности, для одноатомного газа  $\gamma = 5/3$  и  $v_{\max} = c_{зв} \sqrt{3}$ . Для двухатомного газа  $\gamma = 7/5$  и  $v_{\max} = c_{зв} \sqrt{5}$ .

## 1.5 О распределениях

### Распределение Больцмана (барометрическая формула)

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$$

Получаем из следующего соображения. Выделим в газе элемент объема толщиной  $dz$  и площадью основания  $S$ . В этом элементе находится  $dN = nSdz$  частиц. Считаем, что давление меняется с высотой. Приравняем силу тяжести и силу от разности давлений:  $f_z dN + P(z)dS - P(z + dz)S = 0$  или

$$\frac{\partial P}{\partial z} = f_z n$$

Пусть сила  $f$  является потенциальной, то есть пусть  $f_z = -\partial u/\partial z$ . Воспользуемся  $P = nkT$  при  $T = \text{const}$ ,

$$\frac{\partial(\ln P)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{kT}\right) \rightarrow P = P_0 \exp\left(-\frac{u}{kT}\right)$$

начало отсчета потенциала выбрано так, что  $P = P_0$  при  $u = 0$ .

(?? граница применимости???)

$$P = nkT,$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$$

Число частиц, находящихся в элементе объема  $dV$ :

$$dN = n_0 \exp\left(-\frac{u}{kT}\right) dV$$

## 1.6 О флуктуациях

### теория флуктуаций

**термодинамические и квантовые флуктуации - сравнение** Различают термодинамические и квантовые флуктуации физических величин. Условием того, что флуктуация параметра  $x$  имеет термодинамический характер, является неравенство

$$kT \gg \frac{\hbar}{\tau}$$

где  $\tau$  — характерное время изменения параметра  $x$ . В этом случае плотность вероятности отклонения величины  $x$  от своего среднего значения, полагаемого равным нулю, имеет вид так называемого гауссового распределения:

$$w(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(\frac{-\alpha x^2}{2}\right)$$

Данное распределение нормированно на единицу,  $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$ , а средний квадрат флуктуации  $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$ .

**распределение нескольких термодинамических величин** При рассмотрении одновременного отклонения от равновесных значений нескольких термодинамических величин  $x_1, \dots, x_n$  выражение для плотности вероятности имеет вид

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{-\alpha_{ik} x_i x_k}{2}\right)$$

где  $\alpha$  — определитель, составленный из элементов симметричной матрицы  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ . Распределение (5.4) также нормировано на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n w(x_1 \dots x_n) = 1$$

Для средних значений флуктуации справедливо равенство

Распределения Гаусса для одной или нескольких термодинамических величин получены при учете только квадратичных членов в разложении энтропии в ряд Тейлора около равновесного значения.

$$\langle x_i x_j \rangle = \alpha_{ij}^{-1}$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  имеют смысл вторых производных от энтропии по  $x_i$  и  $x_j$ . Эти формулы позволяют вычислять только квадратичные по отклонениям термодинамических величин комбинации, например  $\langle (\Delta V)^2 \rangle, \langle \Delta V \Delta T \rangle$

Рассмотрим флуктуации в системе, которая может обмениваться с термостатом энергией в форме теплопередачи и совершения работы (в статистической физике она описывается изотермо-изобарическим ансамблем).

В этом случае средние значения давления  $p$  и температуры  $T$  определяются термостатом. В гауссовом приближении формула для плотности вероятности в отсутствие внешних полей в системе с фиксированным числом частиц  $N$  может быть записана следующим образом:

$$w \sim \exp \frac{\Delta p \Delta V - \Delta T \Delta S}{2kT}$$

**флуктуация температуры в заданном объеме**

$$\overline{(\Delta E)^2} = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = kT^2 C_V$$

$$\overline{(\Delta T)_V^2} = \frac{\overline{(\delta Q)^2}}{C_V^2} = \frac{\overline{(\Delta F)^2}}{C_V^2} = \frac{kT^2}{C_V}$$

**зависимость флуктуаций от числа частиц** (???? суть в том, что просто делим на корень из N???)

$$\bar{F} = \sum_i \bar{f}_i = N\bar{f}$$

$$\overline{F^2} = \overline{\left(\sum_i f_i\right)^2} = \sum_i \overline{f_i^2} + \sum_{i \neq k} \overline{f_i f_k}$$

$$\overline{F^2} = N\overline{f^2} + N(N-1)(\bar{f})^2$$

$$(\Delta F)^2 = (F - \bar{F})^2 = \overline{F^2} - (\bar{F})^2 = N\overline{f^2} + N(N-1)(\bar{f})^2 - N^2(\bar{f})^2 = N(\overline{f^2} - (\bar{f})^2) = N\sigma_f^2$$

$$\sqrt{(\Delta F)^2} = \sqrt{N}\sigma_f, \quad \delta_F = \frac{\sqrt{(\Delta F)^2}}{\bar{F}} = \frac{\delta_f}{\sqrt{N}}$$

$$G = \frac{1}{N} \sum_i g_i$$

$$\begin{aligned} \overline{(G - \bar{G})^2} &= \frac{1}{N^2} \left( \sum_i g_i \right)^2 - (\bar{G})^2 = \frac{1}{N^2} \left( \sum_i \overline{g_i^2} + \sum_{i \neq k} \overline{g_i g_k} \right) - (\bar{g})^2 = \\ &= \frac{1}{N^2} \left( N\overline{g^2} + N(N-1)(\bar{g})^2 \right) - (\bar{g})^2 = \frac{1}{N} \left( \overline{g^2} - (\bar{g})^2 \right) = \frac{\sigma_g^2}{N} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(\Delta G)^2} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{N}}, \quad \delta_G = \frac{\sqrt{(\Delta G)^2}}{\bar{G}} = \frac{\delta_g}{\sqrt{N}}$$

**О другом про флуктуации**

**тепловое расширение тел** Пусть атомы образуют одномерную цепочку.

типичный вид потенциала для каждого атома - парабола.

при температуре  $T = 0$  атомы находятся в состоянии равновесия на расстоянии  $d$  друг от друга. В этой координате сила, действующая на атом обращается в ноль, а потенциал имеет минимум.

$$V(r) = V(d) + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Cx^3 + \dots$$

Здесь

$$B = V''(d), \quad C = \frac{1}{2}V'''(d)$$

из минимума потенциала при  $r = d$  следует, что коэффициент  $B > 0$ .

Теперь повысим температуру.



$$B\bar{x} + C\bar{x}^2 = 0 \quad \text{или} \quad \bar{x} = -\frac{C}{B}\bar{x}^2$$

$$\bar{V} - V_0 \simeq \frac{1}{2}B\bar{x}^2 = \frac{1}{2}kT$$

$$\bar{x} = -\frac{c}{B}\bar{x}^2 = -\frac{C}{B^2}kT$$

$$\bar{r} = d(1 + \alpha'T) \quad \text{или} \quad L = L_0(1 + \alpha T)$$

$$\alpha = \frac{\bar{r} - d}{d} \frac{1}{T} = -\frac{C}{B^2 d} k$$

**погрешности измерения газового термометра**

$$\Delta T = \frac{P\Delta V}{kN} = \frac{T}{V}\Delta V$$

$$\Delta T = \frac{T}{V}\Delta V = \frac{T}{V}\sqrt{(\Delta V)^2} = \frac{T}{\sqrt{N}}$$

$$\sqrt{(\Delta T)_V^2} = \frac{T}{\sqrt{G_V/k}} \sim \frac{T}{\sqrt{N}}$$

**погрешности измерения пружинных весов**  $u = x(\Delta x)^2/2$

$$(\Delta x)^2 = kT/x$$

$$x = \sqrt{(\Delta x)^2}$$

$$m = \frac{x}{g}\sqrt{(\Delta x)^2} = \frac{\sqrt{kTx}}{g}$$

**Статистическая теория флуктуаций**

$$Q := \sum_l e^{-\beta E_l}$$

$$\langle E \rangle \equiv E = \frac{1}{Q} \sum_l E_l e^{-\beta E_l} = \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_l e^{-\beta E_l} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Q} \sum_l E_l^2 e^{-\beta E_l} = \frac{1}{Q} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_l e^{-\beta E_l} = \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2}$$

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2} - \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \beta} \right)^2 = -\frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle$$

$$\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu}$$

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \mu}$$

## Простейшие случайные блуждания

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{B} \frac{dx}{dt} + F(t) \nabla \quad \Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{B} + F(t)$$

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= 0 \\ \langle F(t+\tau)F(t) \rangle &= C\delta(\tau) \end{aligned}$$

$$\langle F(t+\tau)F(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t+\tau)F(t) dt$$

$$C = \frac{2kT}{B}$$

(???)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$D(t) = D(0) e^{-\gamma|t|} \quad (\gamma > 0)$$

$$\langle F(\omega)F(\omega_1) \rangle = 2\pi J(\omega) \delta(\omega + \omega_1)$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$J(\omega) = J(0) \frac{\gamma^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \text{где } J(0) = \frac{2D(0)}{\gamma}$$

$$J(\omega)|_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow 2\pi D(0) \delta(\omega)$$

$$J(\omega) \approx J(0)$$

## примеры систем с флуктуациями

стр 152 райгородский

$$P_\nu = \left(\frac{V}{V_0}\right)^\nu \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N-\nu}$$

$$C_N^\nu = \frac{N!}{(N-\nu)!\nu!}$$

$$P_N^\nu = \frac{N!}{(N-\nu)!\nu!} \left(\frac{V}{V_0}\right)^\nu \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N-\nu}$$

$$P_N^\nu \equiv \frac{N(N-1)\dots(N-\nu+1)}{\nu!} \left(\frac{n}{N}\right)^\nu \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-\nu} \approx \frac{n^\nu}{\nu!} \left(1 - \frac{n}{N}\right)^N$$

$$P(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N^\nu = \frac{n^\nu}{\nu!} e^{-n}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu) = 1$$

$$\ln P(\nu) = \nu \ln n - n - \nu \ln \nu + \nu = -(n + \Delta\nu) \ln \left(1 + \frac{\Delta\nu}{n}\right) + \Delta\nu$$

$$\ln P(\nu) \approx \frac{(\Delta\nu)^2}{2n} - \frac{(\Delta\nu)^2}{n} = -\frac{(\Delta\nu)^2}{2n}$$

$$P(\nu) \sim e^{-\frac{(\Delta\nu)^2}{2n}} = e^{-\frac{(\nu-n)^2}{2n}}$$

$$P(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(\nu-n)^2}{2n}}$$

Флуктуация при термоэлектронной эмиссии (вылете электронов с поверхности металла или полупроводника). Вылеты отдельных электронов происходят независимо друг от друга, и вероятность вылета одного электрона за малый промежуток времени

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - 2\langle n \rangle \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (\lambda t)^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-2)!} + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} ((\lambda t)^2 e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) = (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle^2 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) \right)^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n (\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \right)^2 = \\ &= \left( e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \right)^2 = (e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t})^2 = (\lambda t)^2 \end{aligned}$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \lambda t$$

$$\langle n \rangle = \lambda t$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = n_0 t$$

В среде, где частицы подчиняются законам классической механики, могут обмениваться энергией с окружающей средой (термостатом), но не друг с другом, дисперсия числа частиц описывается распределением Пуассона:

$$P_N = c \sum_{\{N_l=N\}} \exp \left( \frac{\mu N_l - E_l}{kT} \right)$$

$$Q_N = \sum_l \exp\left(-\frac{E_l}{kT}\right) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\gamma e^{-\frac{H}{kT}}$$

(?? док-во???)

## 1.7 Типичные конкретные газы

(соберу их свойства, которые нужны для задач)

**Об азоте,  $N$**

Двухатомный газ, так что

## 2 Основные законы термодинамики

### 2.1 Нулевое, первое, второе, третье начала термодинамики

**Первое начало термодинамики в двух словах**

Простейшая динамика температуры (???) задается первым началом термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

или, если учесть определение теплоемкости  $\delta Q = CdT$  и добавить член, ответственный за изменение числа частиц  $\mu dN$ , то оно примет вид:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

(?? кст, а это первое вообще ли начало, энтропия же уже используется?)

!! здесь работа - это работа именно газа. (? да?) поэтому если пишем работу на газом, то нужно писать минус.

Ведя энтропию (тут формула), удобно (для каких случаев??) записать как

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

(?? откуда оно?)

**Обзор применений** типа основное начало, потом напишу

**Обзор сложностей с первым началом** типа основное начало, потом напишу

**Аксиомы термодинамики**

(суть их укажу, подробно - в следующей части. пока хз, да и не актуально про это думать.)

**О сути 2-го начала термодинамики**

**Верное понимание 2-го начала**

**Заблуждения про 2-е начало**

**О задачах на холодильные машины**

**применения в жизни второго начала (??)** про вечные двигатели и все похожее.

## Суть

Есть много формулировок второго начала термодинамики.

Второе начало термодинамики возникло как рабочая теория тепловых двигателей, которая устанавливает условия, при которых превращение тепла в работу достигает максимального эффекта.

### Теорема 1. (Формулировка второго начала термодинамики Клаузиуса)

*Невозможен круговой процесс, единственным (!) результатом которого был бы переход тепла от более холодного тела к более нагретому.*

*То есть невозможна машина Клаузиуса.*

Условие единственности важно, потому что есть машины, обеспечивающие переход тепла от более холодного тела к более горячему, но при этом будут также совершение работы или другие процессы теплообмена. Например, к таким машинам относятся ходильные машины.

### Теорема 2. (Формулировка второго начала термодинамики Томсона)

*Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет теплоты, взятой от одного какого-либо тела.*

*То есть невозможна машина Томсона.*

## Третье начало термодинамики (теорема Нернста)

## 2.2 Meaning of energy, temperature, entropy, chem. potential, other parameters

## Энергия

(тут про то, как понимает энергию, пока не до думания об этом)

## Разные степени свободы газов

## Температура

### Основные формулы

## Давление

**Основные формулы давления** давление (внутри системы) определяется как (почему???):

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V};$$

Давление определяет температуру кипения! Поэтому меняя его, меняется и “физика”. (???!! точнее укажу, почему?!?!)

**Основные связи давления и других параметров** проработаю с опытом, соберу формулы тут.

**давление с точки зрения МКТ** (пар 59 свх)

## энтропия

### Основные формулы

**определение** Определим энтропию тела, находящегося в термодинамическом равновесии, как:

$$S(E) = \int_0^E \frac{dE}{T(E)}$$

Из этого определения следуют три важных свойства энтропии:

(a)

$$S|_{E=0} = S|_{T=0} = 0$$

(b) энтропия монотонная функция энергии:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} > 0$$

(c) энтропия выпуклая функция энергии:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial E} = -\frac{1}{T^2 C_V} < 0$$

Энтропию замкнутой системы, образованной из двух равновесных подсистем, определим как:

$$S = S_1(E_1) + S_2(E_2)$$

Такая энтропия максимальна, когда обе подсистемы имеют одинаковую температуру, химический потенциал и давление. Действительно: при постоянстве полной энергии  $E = E_1 + E_2$  будет выполняться:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dE_1} &= \frac{dS_1}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{d(E - E_1)}{dE_1} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \\ \frac{d^2 S}{dE^2} &= -\left(\frac{1}{T^2 C_V}\right)_1 - \left(\frac{1}{T^2 C_V}\right)_2 < 0 \end{aligned}$$

Поэтому в случае максимума энтропии температуры подсистем одинаковы.

Аналогично, варьируя энтропию системы по объему и числу частиц одной из подсистем при условии постоянства полного объема и полного числа частиц )Используя  $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{1}{T}(-p)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{1}{T}\mu$ , находим, что энтропия максимальна, когда равны друг другу давления и химические потенциалы подсистем.

(???)

**Появление энтропии** Разберемся, откуда взялась энтропия и почему такие определения.

(актуально!)

**энтропия в хаотических системах (???)** давно было интересно, где там она?

**О статистической энтропии**

**Об информационной энтропии**

**О сложности (????)** (что там Саскинд и др. в черных дырах усмотрели???)

**химический потенциал****Основные формулы**

**Определение** химический потенциал отвечает за изменение энергии системы при добавлении частицы:

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$$

**Типичные газовые параметры**

**Скорости молекул** очень важно их уметь находить

Основные формулы скоростей

средняя по максвеллу:

???

среднеквадратическая скорость школьная:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

кст, что в ней неверно при выводе??

хз

**Обзор разных скоростей** (см. потом лабник)

**Средняя длина свободного пробега**

(тут определение)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p_0}$$

$n := p_0/kT$  - число Лошмидта,

**Уравнение состояния**

очень интересная глава, наконец-то разобраться с уравнениями максвелла и тоже очень простая.

ну и по итогу можно порадоваться, что 1/12 глав сивухина пройдена. но важнее всего глубина

**О термических коэффициентах**

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_V - \text{коэффициент объемного расширения,}$$

$$\gamma = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - \text{термический коэффициент давления,}$$

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T - \text{изотермическая сжимаемость.}$$

Например, для идеального газа  $PV = \nu RT$ ,

$$\alpha = \frac{1}{T}, \quad \gamma = \frac{1}{T}, \quad \beta_T = \frac{1}{P}.$$

## О термодинамических неравенствах

### Суть термодинамических неравенств

**Вывод термодинамических неравенств** Например, Для замкнутой системы получаем  $\Delta S < 0$  или  $\delta S = 0$  и  $\delta^2 S < 0$ . Для системы в термостате  $\Delta F > 0$  или  $\delta F = 0, \delta^2 F > 0$  и т.Д.

Это означает, что если обратить время и рассмотреть процесс отклонения тех же величин от равновесия, то получим обратное к (1.14) неравенство:

$$\Delta E + P\Delta V - \mu\Delta N - T\Delta S \geq 0$$

А квадратичные по отклонениям слагаемые в (1.29) проще всего выделить так: изменение любой функции  $\Delta f = f'\Delta x + f''\Delta x^2/2 + \dots$  можно представить как  $\Delta f = y\Delta x + \Delta x\Delta y/2 + \dots$ , где  $y = f', \Delta y = f''\Delta x + \dots$ . В нашем случае  $f = E, x = (S, V, N)$ , а  $f' = (T, -P, \mu)$ . Сумма линейных по отклонениям слагаемых  $\Delta f - y\Delta x$  в равновесии обращается в ноль (см. (1.3)), а для квадратичных получаем

$$\Delta T\Delta S - \Delta P\Delta V + \Delta\mu\Delta N \geq 0$$

Это условие положительности квадратичной формы и обеспечивает устойчивость.

Например, при  $T = N = \text{const}$ , Получаем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0$$

А при  $V = N = \text{const}$

$$C_V > 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{T,V} &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T,V} \left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V} = \frac{V}{N} \left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V} = \\ &= -\frac{V}{N} \left(\frac{\partial P}{\partial(V/N)}\right)_{T,N} \frac{V}{N^2} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,N} \left(\frac{V}{N}\right)^2 \end{aligned}$$

Например, в случае магнитного поля:  $\Lambda d\lambda = +\mathcal{H}d\mathcal{B}/4\pi$

(здесь мы для полноты исследуемой системы добавили энергию поля в отсутствии образца), что дает

$$\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mathcal{H}}\right)_T > 0, C_{\mathcal{H}} > 0$$

### Основные применения термодинамических неравенств

## 2.3 Термодинамические потенциалы и их преобразования

### термодинамическая энтропия

(выше научпоп, ниже в другой главе - строгий статфиз, а тут - просто развиата обычная теория)

**неравенство Клаузиуса** Согласно второй теореме Карно, КПД любой машины меньше, чем машины карно. из этого следует, что

$$1 - Q_2^{\text{out}}/Q_1^{\text{in}} \leq 1 - T_2/T_1$$

и так как  $Q_2^{\text{out}} = -Q_2^{\text{in}}$ , то



$$\frac{Q_1^{in}}{T_1} + \frac{Q_2^{in}}{T_2} \leq 0$$

Для обратимой машины, работающей с двумя резервуарами справедливо равенство Клаузиуса:

$$\frac{Q_1^{in}}{T_1} + \frac{Q_2^{in}}{T_2} \leq 0$$

Кириченко показывает, что можно перейти к пределу бесконечного числа машин, и получить неравенство Клаузиуса в интегральной форме

$$\oint \frac{\delta Q'}{T} \leq 0$$

говорит, из него можно доказать теорему Карно, но это не очень интересно, она уже доказана другим способом.

**определение энтропии и ее свойства** рассмотрим произвольный обратимый круговой процесс проходящий через точки 1 и 2.

$$0 = \oint_L \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_1^{(1)}, 2} \frac{\delta Q}{T'} + \int_{L_2^{(2)}, 1} \frac{\delta Q}{T}$$

или

$$\int_{L_1^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_1^{(2)}} \int_2 \frac{\delta Q}{T}$$

это значит, что

$$\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T} = S_2 - S_1$$

**закон возрастания энтропии** рассмотрим круговой процесс, включающий обратимый и необратимые процессы.

применим неравенство Клаузиуса

(У кириченко еще рисунок к этому)

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} + \int_{L_{2 \rightarrow 1}^{(2)}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T} + (S_1 - S_2) \leq 0$$

$$S_2 - S_1 \geq \int_{L_{1 \rightarrow 2}^{(1)}} \frac{\delta Q}{T}$$

**суть энтропии** просто приколы в том, что гуляя по улице ты как раз и думаешь именно про эту тему,

это очень интересная тема термодинамики, тут нужен 1 день только на нее, я буду счастлив, если его найду.

Думаем про состояния....

**Энтропия идеального газа** Чтобы найти энтропию идеального газа, рассмотрим бесконечно малый обратимый процесс, для него запишем выражение для энтропии с учетом уравнения состояния идеального газа:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}$$

отсюда

$$S = S_0 + \nu C_V \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + \nu R \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)$$

(зачем оно?)

### математические преобразования

Если состояние вещества полностью характеризуется тремя параметрами:  $V, P$  и  $T$ , и существует уравнение состояния  $f(P, V, T) = 0$ . Тогда между производными этих параметров имеется тождество:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_\nu \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

Чтобы это увидеть, достаточно из равенства  $df = \frac{\partial f}{\partial P}dP + \frac{\partial f}{\partial V}dV + \frac{\partial f}{\partial T}dT = 0$  записать каждую производную в виде

$$\left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_P = -\frac{\partial f / \partial T}{\partial f / \partial V} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -\frac{\partial f / \partial P}{\partial f / \partial T} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{\partial f / \partial V}{\partial f / \partial P}$$

Перемножая, получаем ответ

Работа с производными чаще всего (?) происходит с использованием якобианов. покажем, как с ними работать.

Практически переход от одних термодинамических переменных К другим удобно производить, используя определители - якобианы перехода

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

С их помощью частные производные записываются в виде

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)}$$

а переход от одних переменных к другим осуществляется следующим образом:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \frac{\partial(t, s)}{\partial(x, y)}$$

(и что с ними делать???)

### якобианы

#### Политропический процесс

как самый такой полезный  
(суть и основные формулы)

**Обзор применений**

самое важное

**Адиабатический**

(суть и основные формулы)

**Обзор применений**

самое важное

**Внутренняя энергия  $U$** 

Внутренняя энергия  $U$ , рассматриваемая как функция  $S, V$  и  $N$ , называется термодинамическим потенциалом.

**свободная энергия  $F$** 

Свободной энергией  $F$  называют:

$$F = -T \ln Z$$

вообще она зависит от  $F = F(T, V)$  и выражается так:

$$dF(T, V) = -SdT - PdV$$

из нее можно получить давление, энтропию и...(?)

Теперь распределение Гиббса имеет вид: (???)

$$w_n = \exp\left(\frac{F - \varepsilon_n}{T}\right)$$

Энтропия определяется

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

давление определяется:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}$$

А между нашими объектами имеется следующее крайне известное соотношение:

$$F = E - TS$$

(тут место пояснений и дополнений, пока рано писать это. мб связи с термодинамикой самой, просто вторая у меня фигово выучена, не до связей)

**химический потенциал  $\mu$** **потенциал Гиббса  $G$** 

$$\Phi = F + PV = E - TS + PV$$

и что???

Энтальпия  $H$

## 2.4 О теории меры и математической термодинамике (???)

(пока не до нее)

## 3 Диффузия, теплопроводность и другие процессы переноса

### 3.1 Длина свободного пробега

Газокинетическое сечение молекулы

Длина свободного пробега

Частота столкновений молекул газа

Формула Сазерленда

Ослабление потока частиц в газе

Распределение молекул по длинам свободного пробега

### 3.2 Диффузия

Закон Фика

Самодиффузия

### 3.3 Теплопроводность

### 3.4 Вязкость

### 3.5 Броуновское движение

Закон Эйнштейна-Смолуховского

### 3.6 Эффузия

Эффузия - это медленное течение газа через малые отверстия.

Истечение газа характеризуется числом Кнудсена  $Kn = l/L$ , где  $L$  - характерный размер препятствия (отверстия),  $l$  - длина свободного пробега молекул.

При  $Kn \gg 1$  столкновениями между молекулами в окрестности отверстия можно пренебречь. Такое течение называется свободным молекулярным течением.

### Эффект Кнудсена

(?? кнудсеновский режим?)

Поскольку  $P = nkT$  и  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ , то

$$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}$$

### 3.7 Эффект Джоуля-Томсона

(потом додумаю)

Как получить с помощью него вакуум (???)

## 4 Другие модели термодинамики

### 4.1 О теплоемкостях твердых тел

закон Дьюлонга-Пти

квантовая теория теплоемкости

$$W_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar \omega\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta \hbar \omega) = \frac{\exp(-\beta \hbar \omega/2)}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n W_n = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{1}{2}\beta \hbar \omega - \ln(1 - \exp(-\beta \hbar \omega)) \right) = \frac{1}{2}\hbar \omega \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2kT}\right)$$

(??? формулы с опечатками)

$$C_V = 3R \left( \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\hbar \omega/2kT)}$$

(???)

$$C_V = 3R \left( \frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{kT}\right)$$

теория Дебая

????

### 4.2 О поверхностных явлениях

(важный раздел, но не до него пока что)

Поверхностное натяжение

Термодинамика поверхности

169

Формула Лапласа

Давление насыщенного пара над кривой поверхностью

### 4.3 Насыщенный пар

### 4.4 О кипении

Зависимость температуры кипения от давления

### 4.5 О термодинамических циклах

(внизу, потому что не такой важный вопрос, но задач про них вообще много)

## О типичных циклах

**Адиабатический процесс**  $\delta Q = 0$  Для случая квазистатического процесса дифференциальное уравнение адиабаты записывается в виде

$$dU + PdV = 0$$

В частности, для идеального газа, у которого  $C_V = \text{const}$ , имеем

$$C_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV = 0 \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const. } \gamma = 1 + \frac{\nu R}{C_V} = \frac{C_P}{C_V}$$

(адиабата Пуассона).

$\gamma = C_P/C_V$  - показатель адиабаты. Для идеального одноатомного газа  $\gamma = 5/3$ .

Уравнению адиабаты можно придать иной вид, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа:

$$PV^{\gamma} = \text{const}, \quad P^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{const}.$$

**Политропический процесс** ( $C = \text{const.}$ ) Для идеального газа

$$CdT = C_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV.$$

Если  $C_V = \text{const}$ , то отсюда следует  $PV^n = \text{const}$ . Число

$$n = 1 - \frac{\nu R}{C - C_V} = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

**О цикле Карно** (!!!!) (мб даже 1 страница будет с сутью!)

## О применении и анализе циклов (!?)

(для задач!)

**Определение КПД цикла по графику** Смотрим, в каких переменных построен цикл:

Если переменные  $p(V)$

Если переменные  $T(S)$

(!!!!)

## О других циклах

(просто их обзор, отдельно стоять на них никто не требует.)

## 5 Типичные фазовые переходы

### 5.1 О плавлении, кристаллизации и простых переходах агрегатного состояния

(по сути тут школа, тем не менее, нужно доработать идеи)

## Идея описания процессов плавления и кристаллизации и основные формулы

За счёт кристаллизации выделяется

$$dQ_0 = \lambda dm,$$

$dm$  добываем из геометрии, это тепло приравняем к теплу, которое отводи от других тел, записывая ее через удельную теплоемкость типа  $dQ_1 = c_1 (T_0 - T_{10}) dm$ .

Зависимость температуры от расстояния всегда локально кусочно-линейная.

Если есть задачи вида “было то-то, такой-то части системы изменили параметры, какая станет температура”, то просто выражаем полезные параметры системы из имеющегося уравнения обмена теплотой, подставляем в это же уравнение, но для нового случая. Иногда можно воспользоваться понятием мощности потока, которое линейно по температуре (???? додумаю это, про теплообмен теория!), например, может быть два потока температуры:

$$P = \alpha(\tau - T) \quad \text{и} \quad N = \beta(T - t),$$

(!! часто неочевидные задачи именно мощностью и решаются, так что пропишу лучше указание про этот метод тут!!)

В большинстве случаев тут задачи на воду и процессы с ней. Справка: Плотность льда  $\rho = 900$  кг/м, теплопроводность льда  $k = 2,3$  Вт/(м · К), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг, удельная теплоёмкость льда  $c_1 = 2100$  Дж/(кг · °С), удельная теплоёмкость воды  $c_2 = 4200$  Дж / (кг · °С).

Если задача сложно решается, следует зафиксировать, что некоторый параметр меняется линейно! (подробнее напишу, еще потренируюсь сперва!)

Суточный прирост новой фазы относительно большой, если материал охладился до нужной температуры, а вот если температура заметно выше критической, то охлаждение медленное и прирост новой фазы гораздо медленнее.

(по идее этого параграфа должно вообще на все задачи про это и хватить.)

## 5.2 Основное о фазовых переходах

### Фазы и фазовое равновесие

### Уравнение Клапейрона-Клаузиуса (!!!)

Кривая фазового равновесия «жидкость-пар»

### Критическая точка

140

### Фазовые переходы первого и второго рода

## 5.3 Другое о фазовых переходах

### Тройная точка

### Многокомпонентные системы. Правило фаз

Фазовая диаграмма гелия

## 6 О статистической физике в термодинамике (????!!!)

(тут тоже много тем будет)

## 6.1 Распределения Максвелла, Больцмана

### О распределении Больцмана и следствиях

#### Распределение Больцмана



## Part II

# Main Laws of Thermodynamics

## 3 Основы термодинамики

(прямо глобальные выводы про термодинамику в записи по статфизу, по сути в термодинамике нет в этом потребности.)

### 1 Философия и принципы термодинамики

Обсудим основные постулаты и концепции термодинамики.

(да, это не только про газы, просто не хочется создавать часть на страниц 20-60, так что пока в разделе про газы, вряд ли что-то в этом серьезного будет. Может, просто в статфизе и буду писать про это, потому что можно вообще забить на эти размышления.)

#### 1.1 Философия термодинамики

(тут общие предварительные соображения)

#### Деление параметров на внутренние и внешние

(из пухова строчки скопированы)

Величины, определяемые положением не входящих в нашу систему внешних тел, называются внешними параметрами  $\lambda$ .

Это, например, объем  $V$ , внешнее электрическое  $\mathcal{E}$ , магнитное  $\mathcal{H}$  поля и т.д. Величины  $\Lambda$ ,

Определяемые свойствами входящих в систему частиц, называются внутренними.

Это, например, давление  $P$ , энергия  $E$ , намагниченность  $\mathcal{M}$  и т.д.

Внутренние параметры связаны с внешними, и, в зависимости от условий, в которых находится система, одна и та же величина может быть как внешним, так и внутренним параметром.

#### Пример зависимости внешности \внутренности параметра от системы

(не понял, ну и плевать)

Так, в каноническом ансамбле  $T, V, N = \text{const}$   $V$  является внешним, а давление  $P$  – внутренним параметром системы.

(????)

Тогда как в ансамбле Богуславского  $T, P, N = \text{const}$  – наоборот.

(хз, потом буду вписывать)

#### переход между параметрами, описывающими системы

(перекину в другое место)

Переход от одной ситуации к другой осуществляется преобразованием Лежандра  $\Lambda d\lambda = d(\Lambda\lambda) - \lambda d\Lambda$  термодинамического потенциала  $d\Phi_\lambda = \dots + \Lambda d\lambda$ .

При этом  $-d(\Lambda\lambda)$  входит в новый термодинамический потенциал  $\Phi_\Lambda = \Phi_\lambda - \Lambda\lambda$ , а  $-\lambda d\Lambda$  становится его новым приращением  $d\Phi_\Lambda = \dots - \lambda d\Lambda$

## 1.2 Идея статистических описаний систем

(раздел мелкий, потому что все это в статфизе нормально написано.)

**повторение - что нам нужно знать из прошлых тем**

**подсчет числа состояний**

как с помощью подсчета числа состояний можно вывести что угодно?  
(и дальше пошла теория именно статфиза)

**простейшие статистические модели**

чисто в качестве иллюстрации теории, не более

**N осцилляторов** энергия

$$E = \Delta E \sum_{i=1}^N n_i, \quad \Delta E = \hbar\omega$$

$$\frac{(N+M-1)!}{(N-1)!M!} \approx \frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M}$$

$$\sigma = \ln \Delta\gamma = N(-n \ln(n) + (1+n) \ln(1+n)), \quad n = \frac{M}{N}$$

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln \left( \frac{1+n}{n} \right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1+n)}$$

**траектории и теорема Лиувилля**

(из пухова)

**траектории и общие идеи описания** ???

**Суть теоремы Лиувилля**

**Применения теоремы Лиувилля** хз

**Описание и вывод теоремы Лиувилля** Возможность введения функции распределения как плотности вероятности в фазовом пространстве основана на чисто механической теореме.

Каждая точка, изображающая систему ансамбля, движется в фазовом  $6N$ -мерном пространстве подобно движению частиц жидкости.

Поскольку число таких точек сохраняется, их плотность удовлетворяет уравнению непрерывности жидкости в этом пространстве:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\rho \dot{\mathbf{r}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\rho \dot{\mathbf{p}}) = 0$$

В стационарном случае жидкость несжимаема, т.е фазовый объем ее выделенной области сохраняется.

Капля жидкости причудливо меняет форму, но сохраняет свой объем (см. приложение 17).

Раскрывая производные в (2.8), Мы получаем четыре слагаемых.

Два из них кубикуют друг друга, а подстановка в оставшиеся два уравнения Гамильтона (2.3) дает скобку Пуассона.

В итоге получаем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\}_{PB} = 0$$

Наши уравнения (2.8),(2.9) были записаны в эйлеровых переменных.

Видно, что левая часть уравнения (2.9) представляет собой полную, лагранжевую, производную по времени:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Таким образом, главный вывод из теоремы Лиувилля можно сформулировать двумя способами.

Во-первых, плотность фазовой жидкости, то есть функция распределения  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , постоянна вдоль траектории движения изображающих точек  $d\rho/dt = 0$ .

Во-вторых, в стационарных условиях  $\partial\rho/\partial t = 0$  фазовый объем сохраняется.

Фазовая жидкость несжимаема и капля фазового объема течет, причудливо изменяя со временем свою форму, но сохраняя объем (см. приложение 17).

Хотя фазовый объем в процессе эволюции остается постоянным, форма этого объема изменяется очень сложным образом из-за неустойчивости фазовых траекторий.

Близкие точки экспоненциально быстро расходятся на большие расстояния.

С течением времени объем приобретает причудливую форму, напоминающую мыльную пену.

Таким образом, статистический ансамбль обладает свойством перемешивания в фазовом пространстве.

Итак, в стационарном случае функция распределения  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  коммутирует с гамильтонианом  $\{\rho, H\}_{PB} = 0$  и является интегралом движения. Значит, она зависит от таких функций координат и импульсов, которые сами являются интегралами движения.

Таким образом,  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  сама есть функция интегралов движения гамильтоновой системы уравнений (2.3), коих  $6N - 1$  штук.

Это сложные, неоднозначные, кноздреватыеж такие функции огромного количества фазовых переменных, а, главное, неаддитивные.

При этом логарифм функции распределения  $\ln \rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  равен сумме логарифмов функций распределения подсистем в силу статистической независимости, т.е является аддитивной физической величиной.

Поэтому  $\ln \rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  и сама функция распределения  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  могут зависеть только от таких комбинаций координат и импульсов, которые являются аддитивными интегралами движения.

У замкнутой механической системы имеется семь аддитивных интегралов движения: энергия, импульс (три интеграла) и момент импульса (три интеграла).

Импульс и момент импульса замкнутой системы связаны с ее равномерным поступательным движением и вращением как целого. Если отвлечься от этих движений, т.е рассматривать покоящиеся и невращающиеся системы, то функция распределения может зависеть только от одного аддитивного интеграла движения, а именно от энергии.

Любая функция такого вида удовлетворяет теореме Лиувилля и может быть использована для описания статистических свойств макроскопической системы.

Таким образом, зависимость функции распределения от фазовых переменных является эргодической:

### примеры зачем нужна теорема Лиувилля

## 1.3 уравнение состояния

Рассматривая с макро уровня систему, создадим одно или несколько уравнений, описывающих её динамику.

### термическое уравнение состояния

Рассмотрим абстрактную систему, в которой есть три параметра:  $P, V, T$ .

Например, в случае газов это давление, объем и температура.

можно на них смотреть как на абстрактные параметры, потому что любые другие системы с многими составляющими будут описываться так же.

Уравнение, которым описывается система, называется *термическим уравнением состояния*:

$$f(P, V, T) = 0$$

По определению оно должно быть невырожденным, таким образом оно эквивалентно трем уравнениям:

$$P = P(T, V) \quad V = V(T, P) \quad T = T(V, P)$$

(и что тут такого??)

### Связи приращений термодинамических параметров

Простейшие преобразования - это переходы к малым приращениям, которые реализуются соотношениями:

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \\ dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \\ dT &= \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV \end{aligned}$$

А также очевидны соотношения:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \right]^{-1} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right]^{-1} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right]^{-1}$$

Также известно, что в случае функциональной зависимости  $f(x, y, z)$  между  $x, y, z$  имеется тождество:

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1$$

независимые величины

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

называются *термические коэффициенты*

а так как (ссылка на МА, то есть пока хз, почему)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1$$

то видим, что наши коэффициенты зависимы.

(тут раскрою, зачем они нужны, пока что хз)

Теперь перейдем к самой термодинамике.

### происходящее в термодинамике

Термодинамика дает достаточно абстрактный подход к описанию систем с многими частицами, и основывается на постулатах.

потому что сама ее суть в том, что мы строим теорию из наблюдений, которые и берутся в качестве основы теории нашей. Из постулатов определяются понятия, с которыми дальше идет работа. Дальше к ним можно добавлять например МКТ, например статфиза и другого. в этой главе сосредоточимся на простой аксиоматической термодинамике, потому что именно с нее все начинается. Абсолютно все более подробно будет переопределено строго позже в соответствующих разделах, сейчас нам это не нужно. Нам нужно быстро осознать все принципы и пойти скорее в прикладные темы.

А в этом разделе четко сформулируем наши интуитивные представления о физике.

в этом разделе наблюдаем за неживой природой в отсутствии чего либо внешнего. Вообще, внешнее может или быть стационарным, или быть случайным, все равно как-то можно это описывать.

Итак, начнем вводить термодинамику. Посмотрим на постулаты.

## 1.4 термодинамические функции

(всякие штуки про них, пока не совсем понимаю, что конкретно)

### общие соображения про функции

## 1.5 первое начало термодинамики

Обсудим подробно первое начало термодинамики.

### Бытовое описание (?)

если привести в движение - оно будет развиваться по своим законам, но в итоге перейдет в покой. Назовем это первым постулатом.

общее начало термодинамики или первый постулат - Каково бы ни было начальное состояние неживых тел изолированной системы, в ней в конце концов установится термодинамическое равновесие, в котором прекратятся все макроскопические процессы

системы в процессе перехода в равновесие чем-то обмениваются, назовем это тепловой энергией.

дальше температура как внутренняя характеристика, которая определяет, будут ли находиться тела в равновесии, если она у них одинаковая?

Введем величину температуру  $T$ , она у тел одна и та же, когда они в равновесии.

Итак, когда мы добавили энергию в систему, она может пойти на работу

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$A$  - работа именно над внешними силами, это важно не путать, потому что знак ее важен.

Это называется первым началом термодинамики.

можно привести пример с поршнем, там  $A = Fdl = pSdl$ .

Посмотрим далее на саму систему. Введенная ранее функция может зависеть от  $T$  и от  $V$ , это называется калорическим уравнением состояния (от слова "калория" - единица энергии):  $U = U(T, V)$ .

можно вставить дифференциал от  $U$  и записать в более развернутом виде первое начало термодинамики.

$\delta$  - это именно приращение, а не потенциал. Чтобы приращение  $\delta$  стало потенциалом, нужно, чтобы был так называемый интегрируемый множитель.

Если же измеряем состояние с помощью измерения функции давления, то это называется термическим уравнением состояния.

Теперь про сообщение теплоты. характеристика того, как возрастает температура при сообщении энергии - теплоемкость.

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

Зависит типа от процесса. и вообще важное очень понятие.

## 1.6 Второе начало термодинамики

Обсудим подробно второе начало термодинамики.

(пар 44 сивухин, потом допишу)

### Формулировки Клаузиуса и Томсона эквивалентны

**Теорема 3.** *Формулировки Клаузиуса и Томсона эквивалентны.*

*Proof.* Пусть существует машина Томсона. Работу, которая она производит, можно целиком превратить в тепло и передать (например, трением или сжатием) термостату с более высокой температурой. Получившийся процесс соответствует машине Клаузиуса.

Обратно, пусть существует машина Клаузиуса  $K$  работающую между резервуарами с  $T_{\text{хол}}$  и  $T_{\text{гор}}$ . Чтобы создать машину Томсона, просто добавим обычную тепловую машину, которая переносит тепло от  $T_{\text{гор}}$  к  $T_{\text{хол}}$ , совершая некоторую работу. Для создания машины Томсона достаточно, чтобы после передачи тепла к холодному телу, это тепло отбирала машина Клаузиуса и возвращала горячему телу. В итоге состояние холодной машины не меняется, при этом производится работа, таким образом мы имеем машину Томсона.  $\square$

собственно, как доказать?

### формулировка Клаузиуса

**Теорема 4.** *существует новая (по отношению к внутренней энергии  $U$ ) функция состояния, называемая Клаузиусом "энтропией", элементарное изменение которой в равновесных процессах дается формулой*

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

здесь  $\delta Q$  - количество теплоты, сообщенное системе, имеющую температуру  $T$ .

## обзор различных диаграмм с отражением процессов

Равновесный процесс в любой термодинамической системе может быть изображён линией на диаграмме как в координатах  $(P, V)$ , так и в координатах  $(T, S)$ .

Координаты  $(P, V)$  удобны тем, что площадь под графиком процесса можно интерпретировать как работу, совершаемой термодинамической системой:  $\delta A = PdV$ .

Координаты  $(T, S)$  используются, когда нужно показать переданное системе количество теплоты  $\delta Q = TdS$ , оно равно площадью под графиком в этих координатах.

Для работы, совершаемой в цикле можно записать выражение:

$$A = Q_{\text{н}} - Q_{\text{ох,н}} = \oint TdS = \oint SdT$$

Поскольку величина площади цикла не зависит от того, разбиваем мы её на вертикальные столбики  $T dS$  или же на горизонтальные  $S dT$ .

## сравнение обратимых и необратимых процессов

Теперь можно записывать первое начало термодинамики в виде:

$$TdS \geq dU + PdV$$

и для обратимых

$$TdS = dU + PdV$$

**Что в мире такого, из-за чего у нас энтропия только увеличивается? (???????)**

(??? глубокий вопрос, мне на 04.07ю.-23 1.5 недели доучивать и дорешивать термач нужно, чтобы им заняться.)

**Какие свойства должны быть в компьютерной игре, чтобы тоже так было?**  
Вот в Оксиджен нот инклюдед можно ли сделать вечный двигатель? Почему да, почему нет?

### 1.7 О дальнейшем построении термодинамики

(укажем, что еще нужно или может появиться)

### 1.8 устойчивость термодинамического равновесия

(пар 51 сивухин)

### 1.9 Абстрактные системы с многими параметрами

(пока оставлена часть, потому что не до нее)

### 1.10 Понятие температуры

Обсудим подробно температуру.

(должно хватить этого раздела, термач не специализируется на этих углублениях.)

## Определение температуры

### эмпирические наблюдения

Из наблюдения термодинамического равновесия очевидно, что если у них уровень введенной нами величины  $T$  одинаков, то и переходов энергии не будет.

ну и введем тело, которое будет соприкасаться с другими телами. *термоскоп*- так его назовем. (понятно какие требования для него, потом напишу)

заметим, что при одной и той же по нашим ощущениям величины  $T$  разные вещества могут вести себя разным образом. тип закипать, твердеть.

но на этом этапе уже можно фиксировать  $T_0$  - при которой происходит что-то и называть это *температурными точками*.

мы имеем термоскоп, имеем какую-то величину  $T$ , которая характеризует тело, ну и типа понятно, что она повышается с ростом энергии в теле. и типа она очевидно однозначна, потому что мы ощущаем, что при неизменных условиях при одном и том же ощущении от тела происходят переходы. (почувствовать конечно это можно только при затвердевании льда (если у нас наука не развита еще и работаем с простыми веществами), но достаточно почувствовать окружение объектов, чтобы понять, что там внутри на самом деле такая же величина  $T$ )

ну что, у нас есть функция  $T$  и есть некоторые характерные ее точки, на этом моменте все понятно. так вот решили описывать мир.

(сивухин там рассказывает, что есть разные случаи, нам это не интересно, мы строим наивную теорию, а другие явления опишем позже. тем более без них никуда не деться.)

говорят, что функция  $T$  - от одного параметра.

и тут самая наверное важная часть раздела, но я устал.

ну в результате мы должны прийти к тому, что ввели температуру в произвольной системе и готовы к усложнениям

### Другие свойства температуры (???)

говорят, что если есть инверсная заселенность, то это то же самое, что была бы отрицательная температура (??)

вот например двухуровневая система, там зависимость энергии от температуры:  $E(T) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ , это потому что (???)

так вот, мы хотим нарисовать этот график при более чем  $1/2$  по оси  $Y$ .

в итоге график получается при  $T < 0$  более чем  $1/2$  и приходит к единице.

если мы подготовим кристал с обычной температурой, то стрелок вверх будет больше, чем стрелок вниз.

теперь как ее быстро перевести в обратное состояние - просто перевернем на 180 градусов. так мы опередим все процессы релаксации, и так она мгновенно станет с отрицательной температурой.

в общем, системы с отрицательной температурой возможны, но только с системами с ограниченным сверху спектром.

а что будет, если два тела с разными температурами привести в тепловой контакт, что будет?

посмотрим, что будет с суммарной энтропией?

$$\Delta S = \Delta E_1/T + \Delta E_2/T \geq 0$$

(????)

$$(1/T_1 + 1/T_2)E_1 \geq 0$$



крч если привести в контакт, то отрицательная температура будет падать, а положительная будет еще больше падать.

поэтому на первый взгляд равновесие не наступит никогда.

на самом деле движение остановится там, где средняя энергия. и какая температура будет - решит то, у кого была большая энергия.

поэтому через бесконечность перескочит температура и станет положительной.

так что температура обращается в бесконечность, ничего страшного (????) потому что это параметр распределения гиббса. (да хз????)

## аксиоматические определения

Температуру можно ввести аксиоматически.

Аксиома (также известная как нулевое начало термодинамики): существует термодинамическая величина, которая характеризует степень нагретости тела (??) и называется температурой  $T = T(E, V, N)$ , и обладает следующими свойствами:

1. В основном состоянии температура равна нулю:

$$T|_{E=0} = 0$$

2. Температура монотонно растет с увеличением энергии тела:

$$\frac{\partial T}{\partial E} > 0$$

3. При термодинамическом равновесии все подсистемы имеют одинаковую температуру.

$$T_1 = T_2 = \dots$$

Введя температуру, удобно определить разные характеристики тела, которые описывают температурные свойства..

## Температурные шкалы

(????)

Нам известно, что температура должна возрасть с ростом энергии.

Конкретный вид зависимости может быть любой (??), но в простейшем случае предполагается линейная зависимость.

## Заблуждения о температуре (?)

### 1.11 Измерение температуры

Обсудим подробно температуру.

### Типичное (?)

### Измерение температуры фотонов (!?!?)

(в космологии про это вопрос тоже возник, как конкретно его изменить.)

### 1.12 Понятие энергии

### Идея энергии

В мире есть что-то, что запускает работу и жизнь объектов, назовем это энергией. дальше будем описывать его.

короче, когда говорим про энергию, рассматривается теплоемкость и температура, так что ее можно писать в виде

$$U = \int C_V(T) dT$$

### 1.13 Другие подходы к термодинамике

(этим мы почти не занимаемся, так что мелкие разделы, очень редко они могут быть нужны, а на них есть другие предметы.)

### Квантовая термодинамика (?)

(пока даже не уверен, что писать сюда про это, пока в других предметах это буду проходить.)

матрица плотности

### неравновесная термодинамика

(по сути это кинетика, что-то оттуда сюда выпишу когда-то)

## 2 Элементарные термодинамические модели

### 2.1 Цикл Карно

Подробно обсудим цикл Карно.

#### Теорема

Движущая сила существует в природе в неизменном количестве, она, собственно говоря, никогда не создаётся, никогда не уничтожается; в действительности она меняет форму, т.е. вызывает то один род движения, то другой, но никогда не исчезает.

Карно о сущности теплоты

Простейший цикл, который способен показать максимальную возможность тепловых систем - это цикл Карно.

Теория цикла Карно формулируется двумя теоремами Карно.

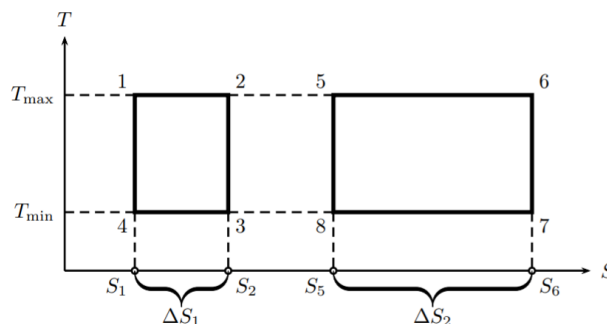


Figure 1: К доказательству теоремы Карно

**Теорема 5.** КПД любых идеальных машин, работающих по циклу Карно одинаковы.. и равен...

*Proof.* На  $TS$ -диаграмме цикл Карно изображен как на ??

В цикле  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  тепло поступает на  $1 \rightarrow 2$  и равно:

$$Q_{H_1} = \int_{1 \rightarrow 2} T dS = \int_{1 \rightarrow 2} T_{\max} dS = T_{\max} \int_{1 \rightarrow 2} dS = T_{\max} \Delta S_1$$

и отдается:

$$Q_{ox} = \left| \int_{3 \rightarrow 4} T dS \right| = \int_{4 \rightarrow 3} T dS = T_{\min} \int_{4 \rightarrow 3} dS = T_{\min} \Delta S_1$$

таким образом:

$$\frac{Q_{ox, I_1}}{Q_{H_1}} = \frac{T_{\min} \Delta S_1}{T_{\max} \Delta S_1} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

Аналогично в цикле  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 5$ :

$$Q_{H_2} = \text{площадь } (S_5 56 S_6) = T_{\max} \Delta S_2$$

$$Q_{ox, J_2} = \text{площадь } (S_5 87 S_6) = T_{\min} \Delta S_2$$

Таким образом, для обоих произвольных (и разных) циклов Карно с одинаковыми температурами  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$  мы имеем

□

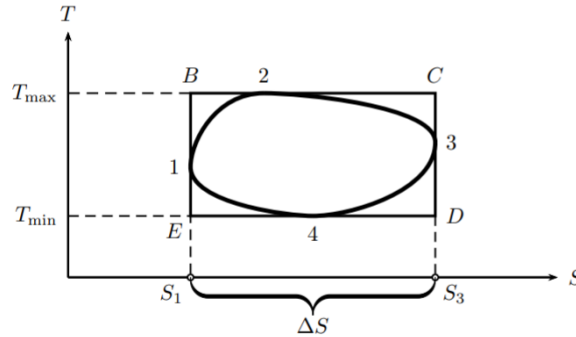


Figure 2: К доказательству теоремы Карно

**Теорема 6.** Из всех термодинамических циклов, температура рабочего тела у которых изменяется в заданных пределах, наибольший КПД имеет цикл Карно

**Доказательство по Булыгину**

(у булыгина при потребности пересмотю)

Окружим произвольный цикл  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  циклом Карно  $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$  с тем же перепадом температур  $T_{\min} - T_{\max}$  и той же максимальной разностью энтропии в цикле  $\Delta S$ .

напомним, что по теореме 1 КПД цикла Карно определяется только  $T_{\min}$  и  $T_{\max}$  и не зависит от  $\Delta S$ .

$$Q_H = \text{площадь } (S_1 123 S_3) = \text{площадь } (S_1 B C S_3) - \Delta Q_H =$$

$$= T_{\max} \Delta S - \Delta Q_H = T_{\max} \Delta S \cdot (1 - \delta_H),$$

$$\delta_H = \Delta Q_H / (T_{\max} \Delta S) > 0$$

$$\frac{Q_{\text{окл},n}}{Q_H} = \frac{T_{\min} \Delta S \cdot (1 + \delta_{\text{окл},n})}{T_{\max} \Delta S \cdot (1 - \delta_H)} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \cdot \frac{1 + \delta_{\text{окл},\pi}}{1 - \delta_H} > \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{окл},I}}{Q_H} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \cdot \frac{1 + \delta_{\text{окл},I}}{1 - \delta_H} < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \eta_C$$

Обозначив через  $\Delta Q_H$  сумму площадей криволинейных треугольников  $1B2$  и  $2C3$ , можем написать для количества тепла  $Q_H$ , получаемого рабочим телом от нагревателя в цикле  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} Q_H &= \text{площадь } (S_1 123 S_3) = \text{площадь } (S_1 B C S_3) - \Delta Q_H = \\ &= T_{\max} \Delta S - \Delta Q_H = T_{\max} \Delta S \cdot (1 - \delta_H), \end{aligned}$$

где обозначено  $\delta_H = \Delta Q_H / (T_{\max} \Delta S) > 0$ . Аналогично для количества тепла  $Q_{\text{окл}}$ , отдаваемого рабочим телом охладителю в этом же цикле  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} Q_{\text{окл}} &= \text{площадь } (S_1 143 S_3) = \text{площадь } (S_1 E D S_3) + \Delta Q_{\text{окл}} = \\ &= T_{\min} \Delta S + \Delta Q_{\text{окл}} = T_{\min} \Delta S \cdot (1 + \delta_{\text{окл}}), \end{aligned}$$

где  $\Delta Q_{\text{окл}}$  - сумма площадей криволинейных треугольников  $E14$  и  $43D$ , и также введено обозначение  $\delta_{\text{окл}} = \frac{\Delta Q_{\text{окл}}}{T_{\min} \Delta S} > 0$ .

Таким образом, для нашего произвольного цикла  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  имеем:

$$\frac{Q_{\text{окл}}}{Q_H} = \frac{T_{\min} \Delta S \cdot (1 + \delta_{\text{окл}})}{T_{\max} \Delta S \cdot (1 - \delta_H)} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \cdot \frac{1 + \delta_{\text{окл}}}{1 - \delta_H} > \frac{T_{\min}}{T_{\max}},$$

и поэтому КПД этого произвольного цикла, согласно (3) и (5),

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{окл}}}{Q_H} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \cdot \frac{1 + \delta_{\text{окл}}}{1 - \delta_H} < 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \eta_C,$$

что и доказывает теорему. Заметим, что доказательство останется справедливым, если одна из величин:  $\delta_H$  или  $\delta_{\text{окл}}$  будет равна нулю.

## 2.2 Другие термодинамические циклы

### 2.3 Распределение Максвелла

Обсудим подробно распределение Максвелла.

#### Суть распределения Максвелла

тут вкратце вывод

#### Вывод

Рассмотрим газ в заданном объеме и в состоянии равновесия. Отдельные его частицы движутся хаотически, однако в этом хаосе можно увидеть пару закономерностей: все направления такого движения равновероятны (изотропичность), движение частиц не зависит от предыдущих направлений, они могут сколько угодно раз пройти около состояний, в которых они были ранее. Этот хаос будем далее называть молекулярным хаосом.

Поставим задачу о распределении частиц по скоростям в трехмерном сосуде, в котором находится  $N$  молекул.

Интуиция нам подсказывает, что распределение должно уменьшаться с увеличением модуля скорости и.. (интуитивные представления позже запишу)

Наше искомое распределение  $dN_{v_x, v_y, v_z} \equiv dN_{\bar{v}}$ , то есть число частиц, находящихся в кубике

$$dv = \begin{pmatrix} v_x, & v_x + dv_x \\ v_y, & v_y + dv_y \\ v_z, & v_z + dv_z \end{pmatrix}.$$

в зависимости от расстояния между этим кубиком и нулем, через функцию распределения записывается так:

$$dN_{\bar{v}} = N f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \equiv N f(\bar{v}) d^3v$$

Здесь  $N$  - полное число молекул.

Необходимо найти функцию распределения. В идеальной модели она должна быть симметрична по любому направлению скорости. И каждая компонента может быть записана  $dW(v_x) = \Phi_1(v_x) dv_x$ , где  $\Phi$  - функция распределения вдоль  $x$  компоненты.

Поэтому после вставки ее в функцию распределения имеем:

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \Phi_1(v_x) \Phi_1(v_y) \Phi_1(v_z) dv_x dv_y dv_z$$

То есть должно выполняться равенство

$$f(v) = \Phi(v_x) \cdot \Phi(v_y) \cdot \Phi(v_z)$$

Преобразуем:

$$\ln f(v) = \ln \Phi(v_x) + \ln \Phi(v_y) + \ln \Phi(v_z)$$

Функции  $\Phi$  и  $f$  нам неизвестны, однако они должны удовлетворять уравнению выше при условии  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ .

После дифференцирования по  $v_x$ , имеем:

$$\frac{f'(v)}{f(v)} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{\Phi'_1(v_x)}{\Phi_1(v_x)}$$

Одни сомножитель в выражении выше считается:

$$\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{d}{d_x} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{2v_x}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}$$

Поэтому связь между  $f$  и  $\Phi$  такая:

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_x} \frac{\Phi'_1(v_x)}{\Phi_1(v_x)}$$

Правая часть не зависит от  $v_y, v_z$ , левая - эти переменные содержит. Также что чтобы не было зависимости от них, обе стороны должны быть постоянные. Обозначим постоянную  $-2\alpha$ , тогда:

$$\frac{1}{v_x} \frac{\Phi'_1(v_x)}{\Phi_1(v_x)} = -2\alpha \quad \rightarrow \quad \Phi_1(v_x) = A \exp(-\alpha v_x^2)$$

Таким образом мы получили:

$$f(v) = \Phi_1(v_x) \Phi_1(v_y) \Phi_1(v_z) = A^3 \exp(-\alpha v^2)$$

и

$$dn_{\mathbf{v}} = nA^3 \exp(-\alpha v^2) d^3v$$

Условие нормировки нам даст константу  $A$

$$\int dn_{\mathbf{v}} = n \int f(v) d^3v = n$$

$$A = \sqrt{\alpha/\pi}$$

В итоге распределение для компоненты скорости имеет вид:

$$dW(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} dv_x$$

И для вектора скорости:

$$dW(v) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v^2} dv$$

Осталось найти только параметр  $\alpha$ .

Из только скоростей его не получить никак, нужны какие-то другие характеристики газа. Очевидно, что чем больше температура, тем больше скорости, тем шире функция распределения, так что есть ее зависимость от температуры. А чтобы прийти к температуре (по ее физическому смыслу) нужно посчитать энергию и воспользоваться связью между ей и температурой. сделаем это.

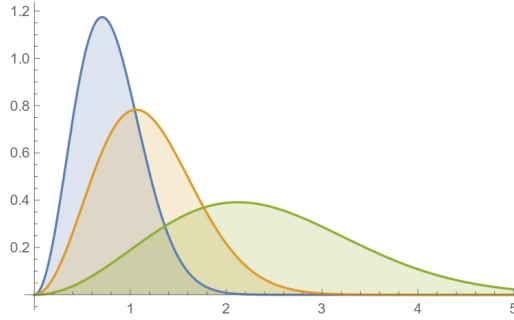


Figure 3

Сперва найдем среднюю кинетическую энергию молекул:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{к\mu н}} = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{1}{n} \int \frac{mv^2}{2} n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} d^3v =$$

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 dv = \frac{3m}{4\alpha}$$

Приравнивая к  $3kT/2$ , получаем:

$$\gamma = \frac{m}{2KT}$$

Таким образом распределение Максвелла имеет вид:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

$$F(v) = 4\pi v^2 f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

## свойства распределения Максвелла

Посмотрим, что нам дает распределение Максвелла.

С помощью него можно найти среднюю и наиболее вероятную скорости:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v F(v) dv = \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int_0^\infty 4\pi v^3 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 F(v) dv = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

наиболее вероятная:

$$v_{\text{наив}} = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

(далее еще куча свойств есть)

## О моделировании (?)

Можно посмотреть графически на распределение Максвелла. Для этого в Wolfram есть функция `MaxwellDistribution`, и разные распределения можно выдавать так:

```
Plot[Table[
PDF[MaxwellDistribution[[Sigma]], x],{[Sigma], {.5,.75, 1.5}}] // Evaluate, {x, 0, 5},
Filling -> Axis, PlotRange -> All]
```

Его свойства выдавать можно

```
Mean[MaxwellDistribution[\ [Sigma]]]
```

## применения распределения Максвелла

(в каких конкретно случаях оно присутствует? плазма? релятивистский газ?)  
пока хз.

## 2.4 О распределении Гиббса

(пока об этом в статфизе пишу, потом сюда перенесу суть.)

### введение из квантовой механики

(возможно, тут из Белоусова по статфизу теория)

Из квантовой механики известно, что физическая система, характеризуемая гамильтонианом  $H$  и имеет набор собственных состояний, обозначаемых вектором  $|n\rangle$ .

### распределение гиббса

Согласно распределению Гиббса:

**Теорема 7.** Рассмотрим квантовую систему.

При термодинамическом равновесии вероятность  $\omega$  найти эту систему в состоянии  $|n\rangle$  от энергии этого состояния и определяется (формулой Гиббса):

$$\omega_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{v}{T}\right)$$

здесь  $Z$  -нормировочный множитель, то есть множитель, обеспечивающий, чтобы вероятность была нормируема.

Заметим, что с такого подхода температура  $T$  - вводится как просто параметр, и не обязательно понимать ее физический смысл.

(место для дополнений про случай, когда у нас 2 системы, там все понятно)

### примеры распределения Гиббса

(белоусова как раз впишу сюда и задачи нарешаю)

## 2.5 Уравнения молекулярно-кинетической теории

Обсудим подробно МКТ.

(по идее должно хватить этого раздела?)

### Конкретная польза рассмотрения молекул

Вроде и без них многое получалось, так что конкретно мы можем получить, введя молекулы в нашу теорию?

### представление о молекулярно-кинетической теории

Конечно же, самые первые приложения, которое находят наши общие взгляды - это описание газов, на котором нужно подробно остановиться, потому что для газов следует иметь отдельные наработанные конструкции.

Однако многие опытные факты (мб позже напишу, какие) говорят, что молекулы. уточним нашу теорию, сказав, что реализуется все в виде именно их.

посмотрим, как конкретно.

Во-первых были замечены движения частиц.

броуновское движение.

и там про Авогадро интересно написать, как там все меряется?

итак, вводится число Авогадро для характеристики количества молекул. Теперь молекулы меряются в молях.

мб запишу про молекулы введение все, как мейлихов писал.

### Доказательство, что молекулы на самом деле есть

(много про это было споров.)

## 2.6 Другое о молекулярно-кинетической теории

(встречу - сюда буду вписывать.)

## 2.7 скорости теплового движения

(пар 60 свх)

## 2.8 Число Авогадро

Обсудим подробно число Авогадро.

### Определение

### Опыт Перрена (!!?)

(?? как же его измерить - пропишу тут, мелкий вопрос. мб почитаю про это еще.)



### 3 теплопроводность

(глава 4 сивухин)

#### 3.1 уравнение теплопроводности

пока я хз.

#### 3.2 стационарные задачи

#### 3.3 нестационарные задачи

температурные волны

(пар 55 свх)

#### 3.4 различные явления с теплопроводностью

(задачи и разные отдельные вопросы)

остывание полупространства

(пар 56 свх)

внешняя теплопередача

хз вообще что это.

## 4 Законы газовой динамики

Обсудим подробно динамику газов.

### 1 Идеальный газ

#### 1.1 формулы для разных количеств атомов в газе

#### 1.2 формулы для усреднения для приближения реальных объектов ИГ

про плазму, про реальный воздух, если уж используем ИГ, то какие соотношения для них????

скорости

(вообще хз, откуда)

в

$$\tilde{v}_{KB} = \sqrt{3 \frac{P}{\rho}} \quad (1)$$

$$\bar{v}_{Kg} = c \sqrt{\frac{3}{\gamma}} \quad (2)$$

### 1.3 статистическое описание

(статфиз мфти)

$$\alpha = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) \quad (3)$$

$$d\gamma_\alpha = \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3} \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha} = \int d\gamma_{\alpha} F_{\alpha} \quad (5)$$

$$E_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad (6)$$

$$\gamma(E) = \int d\gamma_{\alpha} \theta(E - E_{\alpha}) = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 r_i d^3 p_i}{(2\pi\hbar)^3} \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right) \quad (7)$$

$$\gamma(E) = \left(\frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3}\right)^N J_{3N}(E) \quad (8)$$

$$J_{3N}(E) = \int \prod_{i=1}^N d^3 p_i \theta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right)$$

$$J_{3N}(E) = V_{3N}(P) = \int d^{3N} p \theta\left(P^2 - \sum_{i=1}^N p_i^2\right) \quad (9)$$

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n \approx \left(\frac{2e\pi R^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (10)$$

$$\sigma(E) = \ln \gamma(E) = N \ln \left[ \frac{Ve}{N(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{4\pi emE}{3N}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (11)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\sigma}{dE} = \frac{3N}{2E}, \quad \tau = \frac{2E}{3N} \quad (12)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{3N}{2E^2} \quad (13)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{3N}{2E^2} \quad (14)$$

потом напишу нормально описание ИГ. пока просто заготовки.

## 2 Газ Ван-дер-Ваальса

Построим более строгую модель газа, чем идеальный

### основные формулы

#### 2.1 свойства газа Ван-дер-Ваальса

тут теория нормальная

## теория общезн

(и пока только она в планах)

В модели Ван-дер-Ваальса предпринята попытка учесть взаимодействие молекул. Так называемый потенциал Ван-дер-Ваальса, описывающий это взаимодействие, Рис. 3.1 выглядит следующим образом (рис. 3.1). Молекулы, как и в модели идеального газа, представляются твердыми шариками некоторого радиуса  $r_0$ . Тогда их центры не могут подойти друг к другу на расстояние, меньшее, чем  $2r_0$ . При таких расстояниях энергия взаимодействия положительна, что соответствует силам отталкивания, и бесконечно велика.

Если же расстояние между молекулами превышает  $2r_0$ , они притягиваются друг к другу. Энергия взаимодействия отрицательна и обратно пропорциональна шестой степени расстояния между центрами молекул:  $U \sim -r^{-6}$ . Средняя энергия взаимодействия  $\langle U \rangle$  пропорциональна  $\langle r \rangle^{-6}$ , т.е.  $V^{-2}$ .

В уравнение состояния по сравнению с идеальным газом вводятся два изменения. 1. В явном виде учитывается конечный объем молекул. Некоторый объем  $b$  (он считается равным учетверенному объему молекул) оказывается недоступным для молекулы, она может свободно двигаться не по всему объему сосуда  $V$ , а только в пределах пространства  $V - b$ . 2. Учитывается притяжение молекул друг к другу. В частности, молекулы пристеночного слоя имеют соседей только с одной стороны, поэтому они «втягиваются» этими силами внутрь объема, в результате чего давление на стенку сосуда несколько уменьшается. Это уменьшение давления описывается членом вида  $a/V^2$ .

Совместное действие двух механизмов приводит к тому, что фиксируемое манометром давление оказывается равным

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

Или

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Соотношения (3.2), (3.3) записаны для моля газа. Если в некотором объеме  $V$  находится  $\nu$  молей газа, значит, каждый моль занимает объем  $V/\nu$ , и в этом случае

$$\left(P + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

Как количественное соотношение уравнение Ван-дер-Ваальса справедливо до тех пор, пока  $a$  и  $b$  можно считать поправками. При более высоких плотностях, когда  $PV^2$  становится сравнимым с  $a$  или  $V - b$  сравнимым с  $b$ , модель Ван-дер-Ваальса становится слишком грубой и описывает поведение реальных веществ лишь на качественном уровне.

Изотермы Ван-дер-Ваальса. Критические параметры. Исследование поведения газа, описываемого уравнением Ван-дер-Ваальса, начнем с анализа его изотерм - графиков зависимости  $P$  от  $V$  при постоянном значении  $T$ . Изотермами идеального газа в  $PV$ -координатах являются гиперболы  $P = RT/V$ . Изотермы газа Ван-дер-Ваальса имеют более сложный вид. Уравнение Ван-дер-Ваальса можно привести к виду

$$PV^3 - (RT + Pb)V^2 + aV - ab = 0$$

Это уравнение третьего порядка относительно  $V$ , и оно, вообще говоря, имеет три корня. При достаточно высоких температурах два корня - комплексно-сопряженные числа, и реально каждому значению давления соответствует одно значение объема. Если же температура невысокая, все три корня будут действительными, при одном значении давления (и температуры) объем может принимать три различных значения.

Поведение изотермы Ван-дер-Ваальса удобно анализировать, исходя из уравнения в форме (3.2). Значения объема  $V < b$  недопустимы, а это означает, что график изотермы опускается из бесконечности правее точки  $V = b$  (рис. 3.2).

При достаточно больших значениях объема изотерма Ван-дер-Ваальса должна мало отличаться от изотермы идеального газа, в частности, при безграничном увеличении объема давление ДОЛЖНО стремиться к нулю. Но чтобы одному значению давления отвечало три значения объема, график должен иметь восходящий

участок 12 (изотерма  $AA'$ ). Точки 1 и 2 соответствуют экстремумам функции  $P(V)$ , а значит в них выполняется условие

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0.$$

Решая совместно (3.2) и (3.5), получаем уравнение кривой, на которой лежат экстремумы изотерм (штриховая кривая на рис. 3.2)

$$P_{\Xi} = \frac{a}{V^2} - \frac{2ab}{V^3} = \frac{a(V-2b)}{V^3}$$

Кривая  $P_{\Xi}(V)$  начинается с отрицательных значений давления (это обстоятельство мы позже обсудим) при  $b < V < 2b$ , проходит через максимум и затем приближается сверху к асимптоте

$V = 0$ . В точке  $K$ , в максимуме кривой, два экстремума сливаются. Изотерма, проходящая через эту, так называемую критическую точку, имеет в ней точку перегиба с горизонтальной касательной. На всех изотермах, соответствующих критической и более высоким температурам, давление становится монотонной функцией объема, каждому давлению отвечает только одно значение объема. В критической точке

$$\frac{dP_{\Xi}}{dV} = -\frac{2a}{V^3} + \frac{6ab}{V^4} = 0$$

Теперь нетрудно найти значения критических параметров:

$$V_K = 3b; \quad P_K = \frac{a}{27b^2}; \quad T_K = \frac{8a}{27bR}$$

Если мы введем приведенные объем, давление, температуру

$$\Phi = \frac{V}{V_K}, \quad \pi = \frac{P}{P_K}, \quad \tau = \frac{T}{T_K}$$

то получим приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left(\pi + \frac{3}{\Phi^2}\right) \left(\Phi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\tau}{3}$$

которое часто проще анализировать. Замечательно, что в параметрах  $\pi, \Phi, \tau$  уравнение Ван-дер-Ваальса выглядит одинаково для всех веществ. В этом смысле оно становится таким же универсальным, каким в своем диапазоне, при справедливости модели идеального газа, является уравнение Клапейрона.

Модель Ван-дер-Ваальса отражает влияние взаимодействия молекул и поэтому, в отличие от модели идеального газа, описывает эффекты, вызываемые этим взаимодействием. Рассмотрим для иллюстрации два примера.

Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса. Дифференцируя соотношение (3.2), получим  $(\partial P / \partial T)_V = R / (V - b)$ . Тогда из общего соотношения (3.1) для частного случая газа Ван-дер-Ваальса следует

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$$

Дифференциал внутренней энергии принимает вид

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$$

Если  $C_V = \text{const}$ , то после интегрирования получаем

$$U = C_V T - \frac{a}{V}$$

Постоянную интегрирования можно опустить, так как в конкретных задачах важно лишь изменение энергии.

Как и следовало ожидать, теперь, в отличие от идеального газа, внутренняя энергия зависит от объема. Если при неизменной температуре меняется занимаемый газом объем, то меняется расстояние между молекулами. Кинетическая энергия молекул газа остается прежней, но потенциальная энергия их взаимодействия меняется.

Очевидно, при адиабатическом расширении в пустоту реальные газы, в отличие от идеальных, должны охлаждаться. При увеличении объема потенциальная энергия взаимодействия молекул газа растет. В условиях теплоизоляции эта энергия может быть позаимствована только из кинетической энергии тех же молекул, то есть за счет охлаждения газа. Этот результат следует из (3.9)

$$T_2 - T_1 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0$$

### Энтропия газа Ван-дер-Ваальса.

Запишем дифференциал энтропии в переменных  $T$  и  $V$ :

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$$

Первое слагаемое можно представить в виде  $C_V dT/T$  во втором, воспользовавшись соотношением Максвелла для свободной энергии  $F$ , заменим производную на  $(\partial P/\partial T)_V = R/(V - b)$ . Теперь, если считать  $C_V$  постоянной, то после интегрирования получим для моля газа Ван-дер-Ваальса

$$S = C_V \ln T + R \ln(V - b) + S_0$$

### Эффект Джоуля-Томсона для газа Ван-дер-Ваальса

Вспомним, что при адиабатическом дросселировании остается неизменной энтальпия газа  $H$ . Для идеального газа это означает неизменность температуры. В реальных экспериментах, впервые осуществленных Джоулем и Томсоном (1852), наблюдается изменение температуры. Модель Ван-дер-Ваальса позволяет проанализировать этот эффект. Ограничимся случаем, когда перепад давлений мал, т.е. рассмотрим дифференциальный эффект Джоуля-Томсона. Тогда задача сводится к вычислению производной  $(dT/dP)_H$ . Запишем дифференциал энтальпии

$$dH = TdS + VdP = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP + VdP$$

Первый член  $T(\partial S/\partial T)_P dT = (TdS)_P = \delta Q_P = C_P dT$ . Во втором члене используем соотношение Максвелла для потенциала  $\Phi$  (см. табл. 2.1):  $(\partial S/\partial P)_T = -(\partial V/\partial T)_P$ . Так как энтальпия неизменна, можно записать:

$$dH = C_P dT - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP + VdP = 0$$

Отсюда получаем общее соотношение для дифференциального эффекта Джоуля-Томсона:

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_{\text{Дж-Т}} = \left(\frac{dT}{dP}\right)_H = \frac{T(\partial V/\partial T)_P - V}{C_P}$$

Осталось подставить  $(\partial V/\partial T)_P$ . Для идеального газа эта величина равна  $V/T$ , и эффект, конечно, оказывается нулевым. Иначе обстоит дело в случае газа Ван-дер-Ваальса. Продифференцировав (3.2) при постоянном давлении, получим

$$dP_P = \frac{R}{V-b}dT_P - \frac{RT}{(V-b)^2}dV_P + \frac{2a}{V^3}dV_P = 0$$

Отсюда, пренебрегая величинами второго порядка малости По  $a$  и  $b$ , имеем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R/(V-b)}{RT/(V-b)^2 - 2a/V^3} \approx \frac{R(V-b)}{RT - 2a/V}$$

Подставляя это выражение в (3.11) и вновь пренебрегая малыми величинами, окончательно для эффекта Джоуля-Томсона в случае газа Ван-дер-Ваальса получаем

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_{\text{Дж-Т}} = \frac{(V-b)/(1 - 2a/RTV) - V}{C_P} \approx \frac{2a/(RT) - b}{C_P}$$

Температура газа Ван-дер-Ваальса в процессе Джоуля-Томсона меняется. При этом отметим весьма существенный факт - знак эффекта зависит от температуры.

Пока  $T < T_{\text{инв}} = 2a/(Rb)$ , производная положительна (при этом говорят о положительном эффекте), а значит, при дросселировании, когда  $\Delta P < 0$ , газ охлаждается. При более высоких температурах знак эффекта меняется - газ нагревается.

У большинства газов температура инверсии эффекта Джоуля-Томсона заметно выше комнатной. Для воздуха она равна 650 К, т.е. 377°C, для углекислого газа – 2050 К (1773°C). Поэтому обычно наблюдается охлаждение газа.

А вот для водорода температура инверсии равна 205 К (–68°C), и водород при нормальных условиях нагревается. Поэтому крайне опасно возникновение трещин в водородных баллонах и проводящих водород трубах. Просачивание газа через трещины или маленькие отверстия - это тот же процесс Джоуля-Томсона, и в результате нагрева водород может воспламениться, а то и взорваться.

Приведенные значения  $T_{\text{инв}}$  дают возможность проиллюстрировать степень точности уравнения Ван-дер-Ваальса. Из сравнения выражений для температуры инверсии и критической температуры следует, что их отношение должно быть для всех веществ одинаковым:  $T_{\text{инв}} = 2a/(Rb)$ ,  $T_K = 8a/(27Rb)$  и  $T_{\text{инв}}/T_K = 27/4 = 6,75$ . Эксперимент дает различные результаты. Так, у воздуха  $T_K = 132,6$  К и  $T_{\text{инв}}/T_K = 4,9$ . Сравнительно хорошо согласуются с теорией данные для  $\text{CO}_2$ :  $T_K = 304$  К и  $T_{\text{инв}}/T_K = 6,74$ , а также для водорода:  $T_K = 33$  К,  $T_{\text{инв}}/T_K = 6,2$ . А вот у гелия  $T_{\text{инв}} = 46$  К,  $T_K = 5,2$  К, и их отношение равно 8,3. Подчеркнем также, что формула (3.12) хорошо описывает результаты дифференциального эффекта. Если перепад давлений велик, надо интегрировать общую формулу (3.11):

$$T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{T(\partial V/\partial T)_P - V}{C_P} dP$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса (с фиксированными значениями  $a$  и  $b$ ) в этом случае непригодно, и при вычислении интеграла необходимо пользоваться экспериментальными

данными о поведении параметров газа во всем диапазоне их изменения в процессе дросселирования. Вещество, подчиняющееся уравнению Ван-дер-Ваальса, обычно называют газом Ван-дер-Ваальса. Однако анализ этого уравнения позволяет выяснить, хотя бы качественно, характерные черты перехода из газообразного состояния в жидкое — частного случая так называемых фазовых переходов или фазовых превращений.

## приложения его

(типа зачем это в жизни??? в задачах? укажу потом.)

## 3 Другие газы

### 3.1 насыщенный пар

что вводится?

и какие приложения?

## Суть

## Обзор применений

## Теория

## 4 Процессы переноса в газах

Обсудим простейшую теорию переносов в газах.

(более подробное и серьезное в кинетике)

### 4.1 Длина свободного пробега

## итоговые методы

Поток массы

$$\begin{aligned} j_z &= \frac{\Delta M}{S \Delta t} = \frac{1}{6} m \langle v \rangle (n_1 - n_2) = \\ &= -\frac{1}{3} m \langle v \rangle \lambda \frac{dn}{dz} = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{dC}{dz}; C = mn \\ j_z &= -D \frac{dC}{dz} \\ D &= \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \end{aligned}$$

$D$  — коэффициент диффузии.

Касательное напряжение

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\Delta (M v_x)}{S \Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (v_{x1} - v_{x2}) = \\ &= -\frac{1}{3} n \langle v \rangle m \lambda \frac{dv_x}{dz} = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \frac{dv_x}{dz} \\ \tau_{zx} &= -\eta \frac{dv_x}{dz} \\ \eta &= \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \end{aligned}$$

$\eta$  – коэффициент вязкости.

Поток энергии

$$\begin{aligned} q_z &= \frac{\Delta Q}{S \Delta t} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) = \\ &= -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \frac{i}{2} k \lambda \frac{dT}{dz} = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \frac{C_v}{\mu} \frac{dT}{dz} \\ q_z &= -x \frac{dT}{dz} \\ x &= \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \frac{C_v}{\mu} \end{aligned}$$

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

## Теория

За время  $\tau$  молекула, обладающая скоростью  $\bar{v}$ , пролетит путь  $l = \bar{v}\tau$ .

Объем цилиндра с поперечным сечением  $\sigma$  равен  $V = \sigma l$ .

При плотности молекул в газе  $n$  в этом цилиндре находится  $n\sigma l$  частиц.

Хотя бы одно столкновение произойдет при условии, что  $n\sigma l = 1$ , т.е.

если длина цилиндра

$$l = (n\sigma)^{-1}$$

Эта величина называется длиной свободного пробега молекулы, а соответствующее время  $\tau = (n\bar{v}\sigma)^{-1}$  – временем свободного пробега.

Полученная формула для длины свободного пробега может быть уточнена, если учесть, что в газе все молекулы движутся.

Как было показано в разделе 2.3.8, средняя относительная скорость двух молекул  $\bar{v}_{\text{отн}}$  связана

со средней скоростью молекулы  $\bar{v}$  соотношением  $\bar{v}_{\text{отн}} = \sqrt{2} \bar{v}$ .

За время  $\tau$  молекула пролетит путь  $l = \bar{v}\tau$ .

Столкновения выбранной молекулы можно рассматривать, считая, что она движется со скоростью  $\bar{v}_{\text{отн}}$ , а остальные молекулы покоятся.

Это значит, что за время  $\tau$  в цилиндре длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $\sigma$  молекула испытает  $n\sigma \bar{v}_{\text{отн}} \tau = \sqrt{2} n\sigma l$  столкновений, а одно столкновение она испытает на пути  $l = (\sqrt{2}n\sigma)^{-1}$ .

Заметим, что если молекулы (частицы) распространяются в среде, составленной тяжелыми неподвижными рассеивающими центрами, то длина свободного пробега дается простейшей формулой (5.1.1) (без множителя  $\sqrt{2}$  в знаменателе), поскольку скорость  $v$  молекул в этом случае совпадает со скоростью молекул относительно рассеивающих центров  $v_{\text{отн}}$ .

## 4.2 Газокинетическое сечение молекулы

### Теория

Во многих процессах частицы можно считать твердыми шариками диаметра  $d$ .

Как видно из рис. 5.1.1а, частица сталкивается с другой такой же частицей, если расстояние между их центрами не превышает  $d$ .

Поэтому можно определить эффективное газокинетическое сечение молекулы как площадь поперечного сечения цилиндра радиусом, равным максимальному расстоянию между центрами сталкивающихся молекул, т.е.



$\sigma = \pi d^2$ : молекулы взаимодействуют, если центр какой-либо молекулы попадет в этот цилиндр.

Если рассматриваемая молекула движется в среде, образованной молекулами другого размера, то ее газокинетическое сечение по отношению к молекулам среды может быть определено аналогичным образом

(см. рис. 5.1.16)

как  $\sigma_{12} = \pi (r_1 + r_2)^2$ , где  $r_i = d_i/2$ ,  $i = 1, 2$ .

В общем случае сечения определяются для каждого типа сталкивающихся молекул:

$$\sigma_{ik} = \pi (r_i + r_k)^2.$$

### 4.3 Частота столкновений молекул газа

#### Теория

Оценим число столкновений, испытываемых молекулами газа в единице объема за единицу времени.

Длина свободного пробега молекулы составляет

$$l = (\sqrt{2}n\sigma)^{-1}.$$

Соответственно время свободного пробега равно

$$\tau = (\sqrt{2}n\bar{v}\sigma)^{-1},$$

а за единицу времени молекула испытывает  $1/\tau = \sqrt{2}n\bar{v}\sigma$  столкновений.

Поскольку в единице объема находится  $n$  молекул, то всего за единицу времени все они испытают число столкновений, равное

$$f = \frac{1}{2} \frac{n}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} n^2 \bar{v} \sigma$$

(множитель  $1/2$  связан с тем, что в каждом столкновении участвуют две молекулы, что уменьшает вдвое общее число столкновений).

Заменяя концентрацию молекул  $n$  с помощью уравнения состояния идеального газа  $n = P/kT$  и используя соотношения

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{и} \quad \sigma = \pi d^2,$$

получим искомое выражение:

$$f = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{P^2 d^2}{(kT)^{3/2}}$$

В частности, если  $d = 3 \cdot 10^{-8}$  см,  $P = 1$  атм,  $T = 273$  К,  $m = 5 \cdot 10^{-23}$  г то расчет по приведенной формуле дает  $f \sim 6 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Заметим также, что в указанных условиях длина свободного пробега молекулы составляет  $l \sim 10^{-5}$  см, средняя скорость  $\bar{v} \sim 4 \cdot 10^4$  см/с, а среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\text{составляет } \tau^{-1} = \bar{v}/l \sim 4 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

### 4.4 Формула Сазерленда

(ничего не понял, я тупой, переучивать все нужно.)

## суть формулы Сазерленда

### Теория

(это перепишу скорее всего!)

Строго говоря, приближение, в котором молекулы рассматриваются как твердые шарики, взаимодействующие только в момент столкновения, не всегда корректно. При учете реальных законов взаимодействия эффективное сечение оказывается зависящим от скоростей молекул и, следовательно, от температуры газа. В некоторых случаях эту зависимость удовлетворительно передает формула Сазерленда, которая получается следующим способом.

Предположим, что молекулы газа являются твердыми шариками, которые притягиваются друг к другу. Типичный вид соответствующей зависимости потенциальной энергии взаимодействия от расстояния приведен на рис.

#### 5.1.2

Пусть  $d$  - газокINETический диаметр молекулы, а  $\sigma_0 = \pi d^2$  - эффективное газокINETическое сечение молекулы в отсутствие дальнего межмолекулярного взаимодействия. Обозначим прицельный параметр столкновения символом  $b$  (см. рис. 5.1.3). При наличии притяжения движение молекулы оказывается не прямолинейным (см. рис. 5.1.3), в результате чего ее столкновение с другой молекулой происходит и при  $b > d$ .

В момент наибольшего сближения (столкновения) расстояние между центрами молекул составляет  $d$ .

Считая силы взаимодействия центральными, на основании закона сохранения момента импульса имеем  $v_0 b = v d$ , где  $v$  - относительная скорость молекулы в момент столкновения.

Возводя это равенство почленно в квадрат и обозначая  $\sigma = \pi b^2$ ,  $\sigma_0 = \pi d^2$ , получим  $\sigma v_0^2 = \sigma_0 v^2$ .

Из Закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\mu v_0^2}{2} + A = \frac{\mu v^2}{2}$$

где  $\mu$  - приведенная масса сталкивающихся молекул,  $A$  - работа сил притяжения до момента наибольшего сближения молекул.

Обозначим кINETическую энергию относительного движения молекул  $\mu v_0^2/2 = \varepsilon_0$ ,  $\mu v^2/2 = \varepsilon$ .

Тогда  $\sigma \varepsilon_0 = \sigma_0 (\varepsilon_0 + A)$  или

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 + \frac{A}{\varepsilon_0} \right)$$

Усредняя это соотношение по всевозможным скоростям молекул с учетом того, что  $\overline{1/\varepsilon_0} \sim 1/T$ , приходим к формуле Сазерленда:

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 + \frac{S}{T} \right)$$

где введена постоянная Сазерленда  $S$ .

## 4.5 Ослабление потока частиц в газе

### Теория

Плотность потока молекул ( $j$ ) - это число молекул, пересекающих единичную площадку (по нормали к ней) за единицу времени.

Размерность величины  $j$  есть  $[j] = \text{частиц} / (\text{см}^2 \cdot \text{с})$ .

Пусть на слой газа с плотностью  $n$  (частиц/см<sup>3</sup>) падает поток молекул с плотностью потока  $j$ .

В слое толщиной  $dx$  одна молекула потока встретит на своем пути  $n\sigma dx$  частиц газа (т.е. испытает  $n\sigma dx$  столкновений).

Всего через площадку  $S$  в рассматриваемый слой за единицу времени войдет  $jS$  молекул потока, которые испытают  $(jS)(n\sigma dx)$  столкновений с частицами газа.

В результате за единицу времени на пути  $dx$  из потока уйдет число молекул, равное  $-d(jS) = jn\sigma S dx = jS dx/l$ .

Отсюда следует

$$\frac{dj}{dx} = -\frac{j}{l} \quad \text{или} \quad j(x) = j_0 \exp\left(-\frac{x}{l}\right)$$

#### 4.6 Распределение молекул по длинам свободного пробега

(? вроде задача про это была какая-то)

##### Теория

К рассмотренной выше задаче можно подойти с другой точки зрения, если искать распределение вероятностей различных значений пути, проходимого молекулами до столкновения.

Учтем, что в слое толщиной  $dx$  одна молекула испытает  $n\sigma dx$  столкновений с молекулами среды ( $n$  - концентрация молекул среды).

Проведем  $N_0$  испытаний. т.е. запустим в среду  $N_0$  молекул.

Пусть число молекул, равное  $N$ , пройдет трассу длиной  $x$ , не испытав столкновений.

Тогда убыль их числа на последующем участке  $dx$  составит  $Nn\sigma dx$ , т.е.  $dN = -Nn\sigma dx = -Ndx/l$ .

Отсюда следует, что

$$N(x) = N_0 e^{-x/l}$$

Величина

$$dN_{\text{расс}} = -dN = N_0 \exp\left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{l}$$

равна числу молекул, рассеявшихся на участке  $x \nabla \cdot x + dx$ .

Поэтому вероятность того, что молекула пройдет без столкновений такой путь, т.е. будет иметь длину свободного пробега  $x$ , составляет

$$dW(x) = \frac{dN_{\text{расс}}}{N_0} = \exp\left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{l}$$

Легко проверить, что найденное распределение вероятностей является нормированным:

$$\int_0^\infty dW(x) = 1$$

Найдем среднюю длину свободного пробега и дисперсию:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^\infty x dW(x) = \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{l} = l \\ \overline{x^2} &= \int_0^\infty x^2 dW(x) = \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{x}{l}\right) \frac{dx}{l} = 2l^2 \\ D_x &= \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = l^2 \end{aligned}$$

Таким образом, введенная ранее величина  $l$  имеет смысл средней длины свободного пробега, а распределение вероятностей различных значений длины пробега дается формулой (5.1.2).

## 4.7 Другое о процессах переноса

(там многое еще есть, укажу потом это тут, а писать в других местах буду, например, в кинетике.)

## 4.8 Параметры диффузии

(более подробно в кинетике, тут нет смысла прямо много думать про это)

### Определения

5.2.1.

Определения.

Закон Фика.

Средняя скорость течения газа  $\mathbf{u}$  определяется формулой

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{v}_i$$

где суммирование выполняется по всем молекулам газа в единице объема.

Плотность потока частиц равна  $\mathbf{j} = n\mathbf{u}$ .

Помимо движения газа как целого существует процесс пространственного перераспределения компонент смеси относительно друг друга, обусловленный случайным (тепловым) движением молекул.

Это неравновесный процесс, который называется диффузией.

Ограничимся случаем двухкомпонентных (или бинарных) смесей, поскольку соответствующие уравнения для смесей с числом компонент более двух заметно усложняются.

Тем не менее, приводимые далее формулы легко обобщаются на случай, когда имеется любое число компонент, представленных, однако, в виде примесей в веществе-наполнителе.

Пусть имеется бинарная смесь с плотностью  $n = n_1 + n_2$ , где  $n_1$  и  $n_2$  - плотности компонентов,  $[n] = \text{частиц/см}^3$ .

Концентрации (или относительные концентрации) компонентов определяются как

$$c_1 = \frac{n_1}{n}, \quad c_2 = \frac{n_2}{n}, \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Пусть средняя скорость течения газа  $\mathbf{u} = 0$ , а диффузия осуществляется только вдоль оси  $x$ .

Тогда плотности потоков компонентов смеси даются законом Фика:

$$j_1 = -Dn \frac{dc_1}{dx}, \quad j_2 = -Dn \frac{dc_2}{dx}$$

Из (5.2.1) следует, что  $j_1 + j_2 = 0$ .

Это равенство означает, что диффузия сама по себе не меняет плотности среды, но приводит к изменению лишь относительных концентраций компонент.

Величина  $D$  называется коэффициентом диффузии и имеет размерность  $[D] = \text{см}^2/\text{с}$ . Если  $n = n_1 + n_2 = \text{const}$ , то формулы закона Фика принимают более простой вид:

$$j_1 = -D \frac{dn_1}{dx}, \quad j_2 = -D \frac{dn_2}{dx}$$

Если скорость течения газа ненулевая, то в приведенные выражения для потоков.

добавляются слагаемые, учитывающие течение газа как целого:

$$j_1 = -Dn \frac{dc_1}{dx} + nc_1 u, \quad j_2 = -Dn \frac{dc_2}{dx} + nc_2 u$$

При этом  $j = j_1 + j_2 = nu$ . В трехмерном случае соотношения (5.2.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= -Dn \operatorname{grad} c_1 + nc_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{j}_2 &= -Dn \operatorname{grad} c_2 + nc_2 \mathbf{u} \end{aligned} \rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = n\mathbf{u}$$

## Закон Фика

### Теплопроводность

Теплопроводность - это один из видов переноса тепла от более нагретых частей вещества к менее нагретым.

Теплопроводность осуществляется путем непосредственной передачи энергии от частиц с большей энергией к частицам с меньшей энергией и приводит к выравниванию температуры во всем веществе.

Теплопроводность - неравновесный процесс.

Плотность потока тепла ( $q$ ) - это количество тепловой энергии, пересекающей единичную площадку за единицу времени,

$$[q] = \frac{9pr}{cM^2 \cdot c}$$

## Определения

### Закон Фурье

Для одномерного переноса тепла (вдоль оси  $x$ ) плотность потока тепла дается законом Фурье:

$$q = -x \frac{dT}{dx}$$

Величина  $\kappa$  называется коэффициентом теплопроводности и имеет размерность

$$[\kappa] = \frac{9pr}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$$

Наряду с коэффициентом теплопроводности используется величина  $a = \kappa/C_V$ , называемая коэффициентом температуропроводности и имеющая размерность  $[a] = \text{см}^2/\text{с}$ .

Здесь  $C_V$  - теплоемкость вещества, приходящаяся на единицу объема.

Часто этот коэффициент определяют несколько иначе:  $u = \kappa/C_P = \kappa/(\gamma C_V)$ , где  $\gamma$  - показатель адиабаты.

В трехмерном случае плотность потока тепла - это вектор

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} T$$

Следует обратить внимание на то, что тепловой поток направлен в сторону убывания температуры, т.е.

обеспечивает перенос тепла от более нагретых областей вещества к менее нагретым.

## Вязкость

Сила вязкого трения, действующая по площади  $S$  на слой жидкости (газа), параллельный скорости течения и, со стороны нижележащего слоя (см. рис. 5.4.1), дается законом Ньютона:

$$F_z = -\eta S \frac{du}{dx}$$

Величина  $\eta$  называется коэффициентом вязкости (или динамической вязкостью) и имеет размерность  $[\eta] = \text{г}/(\text{с} \cdot \text{см})$ .

Вводят также кинематическую

$$\text{вязкость } \nu = \eta/\rho, [\nu] = \text{см}^2/\text{с}.$$

## Коэффициенты переноса

Для оценки коэффициентов переноса (диффузии, теплопроводности, вязкости) в газах используется следующий прием.

Принимается, что вдоль каждой из осей координат ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) движется по  $1/3$  всех молекул,  $1/6$  — в положительном и  $1/6$  — в отрицательном направлениях.

Рассмотрим перенос молекул вдоль оси  $x$  (см. рис. 5.5.1).

Число молекул, проходящих вверх за время свободного пробега  $\tau$  через единицу площади в плоскости  $AA$  с координатой  $x$ , равно

$$N^{(+)} = \frac{1}{6} n(x-l) \bar{v} \tau$$

и вниз

$$N^{(-)} = \frac{1}{6} n(x+l) \bar{v} \tau$$

Здесь  $\bar{v}$  — средняя тепловая скорость, а  $l$  — длина свободного пробега молекулы.

**Коэффициент диффузии.** По определению диффузионного потока

$$j = \frac{N^{(+)} - N^{(-)}}{\tau} \simeq -\frac{1}{3} \bar{v} l \frac{dn}{dx} \rightarrow D = \frac{1}{3} \bar{v} l$$

Поскольку  $l = 1/(n\sigma)$ ,  $n \sim P/T$ ,  $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$ , то

$$D \sim \frac{T^{3/2}}{P\sqrt{m}}$$

**Коэффициент теплопроводности.** Будем считать, что перемещения газа как целого вдоль оси  $x$  нет.

Это значит, что  $N^{(+)} = N^{(-)}$ .

Пусть  $\varepsilon(x) = c_V T(x)$  — энергия молекулы в точке  $x$ ,  $c_V$  — теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу.

Тогда согласно определению теплового потока Отсюда следует

$$x = \frac{1}{3} n \bar{v} l c_V = C_V D$$

где  $C_V = n c_V = \rho c_V^{(m)}$  — теплоемкость единицы объема,  $c_V^{(m)}$  — удельная теплоемкость.

Для коэффициента температуропроводности в рассматриваемом приближении находим

$$a = x/C_V = D$$

Поскольку  $l = 1/(n\sigma)$ ,  $C_V \sim n$ ,  $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$ , то

$$x \sim \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

## 4.9 Вязкость

### Теория

С молекулярно-кинетической точки зрения вязкость - это перенос тангенциальной компоненты импульса в направлении, перпендикулярном скорости течения.

Пусть  $u(x)$  - средняя скорость упорядоченного движения молекул.

Тогда импульс, переносимый снизу в верхний слой газа, равен

$$p_z^{(\uparrow)} = mu(x-l)N^{(\uparrow)}$$

а импульс, уносимый вниз из верхнего слоя газа, равен

$$p_z^{(1)} = mu(x+l)N^{(1)}$$

Результирующий импульс, приобретаемый верхним слоем за время  $\tau$ , составляет  $\Delta p_z = p_z^{(\uparrow)} - p_z^{(1)}$ .

Здесь, как и в предыдущем случае, считаем, что переноса газа как целого вдоль оси  $x$  нет:  $N^{(\uparrow)} = N^{(1)}$ .

Соответственно сила трения, действующая на верхний слой газа со стороны нижнего, равна (Сила на единицу площади)  $\tau = \frac{\Delta p_z}{\tau} = -N^{(1)} \frac{2lm}{\tau} \frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{3} mn\bar{v}l \frac{du}{dx}$  (такая же, но противоположного знака, сила действует на нижний слой жидкости со стороны верхнего слоя).

Отсюда находим

$$\eta = \frac{1}{3} mn\bar{v}l = \frac{1}{3} \rho \bar{v}l = \rho D, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} = D$$

## 4.10 процесс Джоуля-Томсона

(все про него, классика термодинамики. пока что копия лабника, потом пропишу, чисто одна маленькая подглавка и все)

### классический эффект Джоуля-Томсона

Эффектом Джоуля-Томсона называется изменение температуры газа при медленном его протекании (дросселировании) через теплоизолированную пористую перегородку, обладающую большим гидравлическим сопротивлением. В идеальном газе, у которого отсутствует как взаимное притяжение, так и отталкивание молекул, температура при таком течении не меняется. При стационарном движении газа через теплоизолированную трубку с пористой перегородкой над газом совершается работа по его проталкиванию через перегородку, которая идет на увеличение внутренней энергии. Диссипируемая из-за трения в перегородке энергия остается в потоке. В результате у газа, как показано ниже, сохраняется энтальпия.

Рассмотрим процесс протекания более подробно. Работа по перемещению моля газа при постоянном давлении до перегородки равна  $P_1 V_1$ , а после перегородки работа

совершается против движения и равна  $(-P_2V_2)$ ; здесь  $V_1$  и  $V_2$  - молярные объемы. Суммарная работа идет на изменение внутренней энергии моля газа  $U_2 - U_1$ :

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 \quad \text{или} \quad P_1V_1 + U_1 = P_2V_2 + U_2$$

При выводе не учитывалась кинетическая энергия газа, так как гидравлическое сопротивление делается таким, чтобы скорость газа была пренебрежимо малой (по сравнению со скоростью звука  $c_0$ ), иначе эффект может не наблюдаться. При таком пренебрежении погрешность расчета, например, перепада температур, будет порядка  $(u^2/c_0^2)T_1$ , где  $u$  - скорость течения газа. Если кинетической энергией при выводе не пренебрегать, то получится уравнение Бернулли, на основании которого и сделана приведенная оценка.

Наряду с внутренней энергией в термодинамике используется энтальпия  $H$ :

$$H = U + PV$$

Из выведенной выше формулы следует, что в процессе Джоуля-Томсона сохраняется именно эта величина:

$$H_1 = H_2$$

Формула (1.26) позволяет рассчитывать параметры газа после протекания через пористую перегородку или другое гидравлическое сопротивление. Величина эффекта Джоуля-Томсона характеризуется разностью температур до и после перегородки  $\Delta T = T_1 - T_2$ , отнесенной к перепаду давления  $\Delta P = P_1 - P_2$ .

### дифференциальный эффект Джоуля-Томсона

когда изменения давления и температуры малы

$$\Delta P \ll P_1, \quad \Delta T \ll T_1$$

В этом случае коэффициент Джоуля-Томсона  $\mu_{д-т}$ , равный отношению перепада температур к перепаду давления, приблизительно равен производной температуры по давлению при постоянной энтальпии:

$$\mu_{д-т} = \frac{\Delta T}{\Delta P} \approx \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H$$

Принимая, что энтальпия есть функция температуры и давления, и учитывая, что в процессе Джоуля-Томсона она сохраняется, получим

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \Delta T + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \Delta P = 0$$

Отсюда находим коэффициент Джоуля-Томсона:

$$\mu_{д-т} = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = - \frac{(\partial H / \partial P)_T}{(\partial H / \partial T)_P}$$

Для вычисления производных используем первое и второе начала термодинамики. При использовании энтальпии  $H$  первое начало (1.4) имеет вид

$$\delta Q = dH - VdP$$



Считаем, что  $H = H(T, P)$ , поэтому

$$\delta Q = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - V \right] dP$$

Используя определение (1.5), находим теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$ , то есть при  $dP = 0$

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

Для углекислого газа по опытным данным  $C_p = 41 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}$ . Чтобы найти производную  $(\partial H / \partial P)_T$ , поступаем так же, как при выводе формулы для внутренней энергии (1.9). Подставим энтропию (1.7) в формулу (1.30)

$$dS = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - V \right] dP$$

Так как по второму началу термодинамики  $dS$  является полным дифференциалом, то

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T - V \right] \right\}$$

После дифференцирования и упрощения получим искомую производную

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Подставляя (1.31) и (1.33) в (1.29), находим коэффициент Джоуля-Томсона:

$$\mu_{\text{д-т}} = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{T(\partial V / \partial T)_P - V}{C_p}$$

Для идеального газа  $PV = RT$  и коэффициент Джоуля-Томсона  $\mu_{\text{д-т}} = 0$

### Эффект Джоуля-Томсона для газа Ван-дер-Ваальса

Используем уравнение состояния (1.18) и найдем коэффициент Джоуля-Томсона для газа Ван-дер-Ваальса. После взятия производной в соответствии с (1.18) в формуле (1.34) можно сделать упрощение и разложить результат в ряд относительно параметров  $a$  и  $b$ , оставив только члены первого порядка. Окончательно получим

$$\mu_{\text{д-т}} = \frac{(2a/RT) - b}{C_p}$$

Температура газа  $T_i$ , при которой изменение температуры в дифференциальном эффекте отсутствует, называется температурой инверсии:

$$T_i = \frac{2a}{Rb}$$

В результате дифференциального процесса Джоуля-Томсона для разреженного газа согласно (1.35) температура будет повышаться при понижении давления в результате дросселирования, если начальная температура была выше, чем  $T_i$ , и понижаться, если была ниже  $T_i$

Температура инверсии газа Ван-дер-Ваальса в общем случае. В общем случае температура инверсии зависит не только от начальной температуры газа  $T_1$  и его начального объема  $V_1$ , но также и от конечного объема  $V_2$ .

Подставим в условие сохранения энтальпии (1.26) внутреннюю энергию газа Ван-дер-Ваальса (1.24) и давление из формулы (1.18). Получим

$$C_v T_1 - \frac{a}{V_1} + \left( \frac{RT_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1^2} \right) V_1 = C_v T_2 - \frac{a}{V_2} + \left( \frac{RT_2}{V_2 - b} - \frac{a}{V_2^2} \right) V_2$$

При температуре инверсии  $T_1 = T_2 = T_i$ . После подстановки в (1.37) находим

$$RT_i \left( \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{V_2}{V_2 - b} \right) = 2a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

После упрощения получим формулу для температуры инверсии при любом перепаде давления или любом расширении газа:

$$T_i = \frac{2a}{Rb} \frac{(V_1 - b)(V_2 - b)}{V_1 V_2}$$

Отсюда для дифференциального эффекта Джоуля-Томсона, при  $V_1 \sim V_2$  и любом соотношении между  $V_1$  и  $b$  имеем

$$T_i = \frac{2a}{Rb} \left( \frac{V_1 - b}{V_1} \right)^2$$

Для дифференциального эффекта разреженного газа, то есть при  $V_1 \gg b$ , отсюда следует  $T_i = 2a/Rb$ . Этот результат совпадает с формулой (1.36).

В случае так называемого интегрального эффекта, при  $V_2 \gg b$ , получим

$$T_{i\infty} = \frac{2a}{Rb} \frac{V_1 - b}{V_1}$$

## применение эффекта Джоуля-Томсона

хз, а вообще это самое важное в этой теме про него

### 4.11 Другое о диффузии

(многое можно указать, потом укажу.)

#### Самодиффузия

(по Кириченко. Вдали, потому что это не так нужно пока вроде)

Если компоненты смеси одинаковы, то имеет место самодиффузия - диффузия частиц в среде, состоящей из частиц того же сорта.

Макроскопически самодиффузию наблюдать нельзя, так как она не приводит к наблюдаемым изменениям состояния вещества.

Этот процесс, однако, можно изучать, если часть частиц как-либо чпомечена\* (например, в смеси изотопов одного вещества).

## 5 Уравнения диффузии и теплопроводности

### 5.1 Уравнение диффузии

#### Теория

Рассмотрим поток частиц какого-либо одного сорта вдоль оси  $x$  (рис. 5.6.1).

В объеме  $dV = dSdx$  число этих частиц равно  $dN_1 = n_1dV$ , где  $n_1 = n_1(x, t)$  - их число в единице объема в момент времени  $t$ .

Пусть  $j_1 = j_1(x, t)$  плотность потока рассматриваемых частиц.

Тогда число частиц, поступивших в объем  $dV$  в единицу времени, равно

$$(j_1(x, t) - j_1(x + dx, t)) dS = -\frac{\partial j_1}{\partial x} dV$$

Но эта величина есть скорость изменения числа частиц в выделенном объеме  $dV$ , и ее можно записать в виде  $\partial (dN_1) / \partial t$ .

Таким образом, приходим к уравнению баланса:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0$$

Пусть сначала средняя скорость течения газа равна нулю,  $u = 0$ .

Подставим сюда выражение для плотности потока частиц  $j_1$  из закона Фика

$$j_1 = -Dn \frac{dc_1}{dx}$$

и учтем, что  $n_1 = nc_1$ .

В результате получим уравнение диффузии:

$$\frac{\partial (nc_1)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( nD \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)$$

В частности, если полная плотность числа частиц постоянна,  $n = \text{const}$ , то уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial n_1}{\partial x} \right)$$

В трехмерном случае это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial (nc_1)}{\partial t} = \text{div} (Dn \text{grad } c_1)$$

Аналогичные уравнения имеют место и для другой компоненты.

Пусть теперь средняя скорость течения газа ненулевая.

Полагая

$$j_1 = n \left( -D \frac{\partial c_1}{\partial x} + c_1 u \right)$$

приходим к иному уравнению:

$$\frac{\partial (nc_1)}{\partial t} + \frac{\partial (nc_1 u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( nD \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)$$

В трехмерном случае это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial (nc_1)}{\partial t} + \text{div} (nc_1 \mathbf{u}) = \text{div} (nD \text{grad } c_1)$$

Последнее уравнение часто называют уравнением диффузии со сносом (конвекцией).

Запишем аналогичное уравнение для второй компоненты смеси:

$$\frac{\partial (nc_2)}{\partial t} + \operatorname{div} (nc_2 \mathbf{u}) = \operatorname{div} (nD \operatorname{grad} c_2)$$

Складывая почленно два последних уравнения и учитывая равенство  $c_1 + c_2 = 1$ , получим известное в гидродинамике уравнение непрерывности :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = n\mathbf{u}$$

## 5.2 Уравнение теплопроводности

### Теория

Рассмотрим перенос тепловой энергии вдоль оси  $x$  (рис.

5.6.2).

В объеме  $dV = dSdx$  количество энергии, содержащейся в данный момент времени  $t$ , равно  $dU = u dV$ , где

$u = u(x, t)$  — плотность энергии.

Пусть  $q = q(x, t)$  — плотность потока тепла.

Количество энергии, поступившей в объем  $dV$  в единицу времени, равно

$$(q(x, t) - q(x + dx, t))dS = -\frac{\partial q}{\partial x} dV$$

Но эта же величина есть скорость изменения количества энергии в выделенном объеме  $dV$  и ее можно представить в виде  $(\partial u / \partial t) dV$ .

Таким образом, мы приходим к уравнению теплового баланса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Преобразуем это уравнение для случая идеального газа.

Учтем, что  $du = C_V dT = \rho C_V^{(m)} dT$ , где  $C_V$  — теплоемкость единицы объема вещества при постоянном объеме,  $C_V^{(m)}$  — соответствующая удельная теплоемкость,  $\rho$  — массовая плотность среды.

Тогда, учитывая связь плотности потока тепла и температуры, устанавливаемую законом Фурье, получим уравнение теплопроводности:

$$\rho C_V^{(m)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Это уравнение в трехмерном случае записывается в виде

$$\rho C_V^{(m)} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (x \operatorname{grad} T)$$

Если рассматривается перенос тепла в иных системах, то следует выбирать теплоемкость, соответствующую процессу.

Например, это уравнение не меняет своего вида, если объем вещества не меняется, т.е. вещество помещено в замкнутую полость с жесткими стенками.

При изучении теплопереноса в жидкости вместо теплоемкости  $C_V$  следует взять теплоемкость  $C_P$ , поскольку обычно изменения давления в жидкости малы.

В случае твердого тела различия  $C_V$  и  $C_P$  обычно малы.

Заметим, что полученное уравнение теплопереноса справедливо только для неподвижных сред.

Если характеристики вещества  $x, \rho, C_V^{(m)}$  можно считать постоянными, то уравнение теплопроводности принимает более простую форму:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где величина  $a$  — коэффициент температуропроводности, а символ  $\Delta$  обозначает оператор Лапласа (лапласиан).

### Пример 1

Пусть идеальный газ помещен между плоскостями  $x = 0$  и  $x = L$ , причем левая плоскость поддерживается при температуре  $T|_{x=0} = T_1$ , а правая — при температуре  $T|_{x=L} = T_2$ .

Найдем стационарное распределение температуры между плоскостями.

Для идеального газа коэффициент теплопроводности зависит от температуры по закону  $\kappa(T) = \kappa_1 \sqrt{T/T_1}$ .

Поэтому уравнение теплопроводности для стационарных состояний записывается в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \sqrt{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

Интегрируя это уравнение по координате два раза, получим

$$\frac{2}{3} T^{3/2} = a_1 x + a_2$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — постоянные интегрирования, значения которых определяются из граничных условий.

Полагая  $x = 0, T = T_1$ , найдем  $a_2 = (2/3)T_1^{3/2}$ . Если теперь принять  $x = L, T = T_2$ , то окажется, что

$$\frac{2}{3} T_2^{3/2} = a_1 L + \frac{2}{3} T_1^{3/2} \quad \text{или} \quad a_1 = \frac{2}{3L} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2})$$

Таким образом, получаем окончательно

$$T(x) = \left( T_1^{3/2} + \frac{x}{L} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) \right)^{2/3}$$

### Пример 2

Найдем стационарное поле температур, создаваемое в бесконечной внешней среде сферически симметричным телом радиуса  $R$ , имеющим температуру  $T_0$ .

Температура среды на большом расстоянии от тела  $T(r)|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty$ .

Будем считать, что коэффициент теплопроводности не зависит от температуры (это допустимо для конденсированных сред в определенных диапазонах температур).

На расстоянии  $r$  от центра тепловой поток, создаваемый нагретым телом, равен

$$Q = 4\pi r^2 q = 4\pi r^2 \left( -\kappa \frac{dT}{dr} \right)$$

В силу закона сохранения энергии величина  $Q$  не зависит от расстояния до центра:  $Q = \text{const}$ .

Поэтому из дифференциального уравнения можно найти температуру:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{4\pi x r^2} \quad \text{или} \quad T(r) = a_1 + \frac{Q}{4\pi x r}$$

Константы интегрирования  $Q$  и  $a_1$  определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} T'(R) &= T_0, T(\infty) = T_\infty. \text{ Это дает} \\ a_1 &= T_\infty, Q = 4\pi x R (T_0 - T_\infty) \\ T(r) &= T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{R}{r} \end{aligned}$$

### Пример 3

Рассмотрим тело, имеющее удельную теплоемкость  $c$ , массу  $m$  и начальную температуру  $T_0$ .

Пусть это тело соединено тонким стержнем с тепловым резервуаром, имеющим неизменную температуру  $T_p$ .

Площадь поперечного сечения стержня  $S$ , длина  $L$ .

Коэффициент теплопроводности стержня примем постоянным и равным  $x$ .

Считая, что теплоемкость тела постоянна,  $c = \text{const}$ , а перенос тепла от тела к резервуару происходит медленно, найдем, как меняется температура тела  $T_T(t)$  со временем.

Поскольку стержень тонкий и тело остывает медленно, то поле температур в стержне можно приближенно считать стационарным, подчиняющимся уравнению

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dT}{dx} \right) \quad \text{или} \quad T(x) = a_1 x + a_2,$$

где  $x$  - координата вдоль стержня,  $0 < x < L$ .

Константы интегрирования  $a_1$  и  $a_2$  найдем из граничных условий:  $T|_{x=0} = T_T(t)$ ,  $T|_{x=L} = T_p$ , так что

$$T(x, t) = (T_p - T_T(t)) \frac{x}{L} + T_T(t)$$

Отсюда можно найти тепловой поток от тела:

$$Q(t) = S \left( -x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \frac{Sx}{L} (T_T(t) - T_p)$$

Для нахождения зависимости  $T_T(t)$  запишем уравнение теплового баланса для тела:

$$cm \frac{dT_T}{dt} = -Q(t) \quad \text{или} \quad \frac{dT_T}{dt} = -\frac{Sx}{L_{cm}} (T_T(t) - T_p),$$

откуда следует

$$T_T(t) = T_p + (T_0 - T_p) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{L_{cm}}{Sx}$$

Здесь учтено начальное условие  $T_T(0) = T_0$ .

Как видно из окончательной формулы, при  $t \rightarrow \infty$  температура тела сравнивается с температурой резервуара:  $T_T(\infty) = T_p$ , а тепловой поток по стержню обращается в нуль.

## 6 Броуновское движение

### 6.1 Закон Эйнштейна-Смолуховского.

Пусть маленькая частица движется в среде.

На нее действуют два типа сил. 1) Сила торможения за счет вязкого трения  $\mathbf{F}_{\text{тр}} = \mathbf{v}/B$ .

Величина  $B$  называется подеиэсностью частицы.

В частном случае частиц сферической формы подвижность определяется формулой Стокса  $B = (6\pi R\eta)^{-1}$ . 2) Флуктуационная (случайная) сила  $\mathbf{X}$  со стороны молекул среды,  $\overline{\mathbf{X}} = 0$  С учетом сказанного запишем уравнение движения частицы:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{X} - \frac{1}{B} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Уравнение такого типа, учитывающее детерминированные и случайные силы, называется уравнением Ланасевета.

Умножая его почленно на  $\mathbf{r}$  и усредняя по большому числу различных частиц, получим

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{\mathbf{r}^2} + \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \overline{\mathbf{r}^2} = \overline{m\mathbf{v}^2} + \overline{\mathbf{r}\mathbf{X}}$$

Здесь использовано тождество,

$$\mathbf{r} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 (\mathbf{r})^2}{dt^2} - \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2$$

Вследствие случайного характера силы  $\mathbf{X}$  полагаем  $\overline{\mathbf{r}\mathbf{X}} = 0$ .

Учтем также, что в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT$$

Это приводит к уравнению

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overline{\mathbf{r}^2} + \frac{1}{2B} \frac{d}{dt} \overline{\mathbf{r}^2} = 3kT,$$

решение которого имеет вид

$$\overline{\mathbf{r}^2} = r_0^2 + 6kTBt + C \exp\left(-\frac{t}{mB}\right).$$

Здесь  $r_0^2$  и  $C$  - константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

На достаточно больших временах  $t \gg mB$  получаем закон Эйнштейна-Смолуховского:

$$\overline{\mathbf{r}^2} = r_0^2 + 6kTBt$$

Величину  $r_0$  можно интерпретировать следующим образом.

Пусть в начальный момент  $t = 0$  имеется набор частиц, среднее квадратичное расстояние которых от центра  $r = 0$  равно  $r_0$ .

Тогда закон Эйнштейна-Смолуховского дает среднее квадратичное расстояние такого? в последующие моменты времени  $t > 0$ .

## 6.2 Связь подвижности и коэффициента диффузии

### Теория

Броуновское движение частицы аналогично процессу диффузии.

Поэтому подвижность  $B$  оказывается связанной с коэффициентом диффузии  $D$ .

Эта связь может быть установлена следующим способом.

В соответствии с определением подвижности средняя скорость и дрейфа молекул под действием силы  $\mathbf{F}$  равна  $\mathbf{u} = B\mathbf{F}$ .

Следовательно, под действием силы  $\mathbf{F}$  возникает поток,  $x$ -компонента которого равна  $j_x^{(F)} =$

$$= nu_x = nBF_x$$

Пусть сила  $\mathbf{F}$  - потенциальная.

Это, в частности, означает, что  $F_x = -\partial U / \partial x$ .

Тогда согласно распределению Больцмана

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp \left( -\frac{U(\mathbf{r})}{kT} \right)$$

Поэтому  $x$ -компонента диффузионного потока оказывается равной

$$j_x^{(D)} = -D \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{D}{kT} n_0 \exp \left( -\frac{U}{kT} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = -n \frac{D}{kT} F_x$$

В состоянии равновесия сумма потоков равна нулю:  $j_x^{(D)} + j_x^{(F)} = 0$ .

Отсюда следует формула Эйнштейна

$$D = kTB$$

Последнее означает, что закон броуновского движения можно записать в виде

$$\overline{\mathbf{r}^2} = r_0^2 + 6Dt$$

## 6.3 Броуновское движение как случайные блуждания

### Теория

Броуновскому движению можно дать наглядную интерпретацию.

Рассмотрим одномерные (вдоль оси X) случайные движения частицы.

Будем предполагать, что за один шаг частица смещается на расстояние  $h$  от своего начального положения,

причем независимо от направления предыдущего шага сдвиг в положительном направлении оси X имеет вероятность  $p$ , а в отрицательном - вероятность  $q = 1 - p$ .

Найдем величину смещения частицы за  $N$  шагов.

Смещение за один шаг есть случайная величина  $\xi$ ,

принимая значения  $+h$  и  $-h$ .

Для нахождения суммарного смещения частицы за  $N$  шагов возьмем два ящика (рис. 5.7.1).

При значении  $\xi = +h$ .

поместим метку в правый ящик, а при значении  $\xi = -h$  - в левый ящик.

Пусть за  $N$  шагов в правом ящике набралось  $n$  меток, а в левом  $-(N - n)$ .

Тогда суммарное смещение частицы составит

$$x = nh + (N - n)(-h) = (2n - N)h$$



Отсюда находим

$$\bar{x} = (2\pi - N)h$$

$$\overline{x^2} = \overline{(2n - N)^2} h^2 = (N^2 - 4N\bar{n} + 4\overline{n^2}) h^2.$$

Величины  $\bar{n}$  и  $\overline{n^2}$  можно найти следующим способом.

В соответствии с рис.

5.7.1 мы имеем дело с биномиальным распределением вероятности попадания метки в левый или правый ящик.

Вероятность набрать в правом ящике  $n$  меток равна

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Имея в виду свойства этого распределения, находим  $\bar{n} = Np$ ,  $\overline{n^2} - (\bar{n})^2 = Np(1-p)$ .

Соответственно оказывается

$$\bar{x} = (2p - 1)Nh$$

$$\overline{x^2} = (N^2 - 4N^2p + 4N^2p^2 + 4Np(1-p)) h^2$$

Пусть шаги влево и вправо равновероятны.

Тогда  $p = 1/2$  и полученные выражения принимают вид

$$\bar{x} = 0, \quad \overline{x^2} = Nh^2$$

Как и должно быть, в этих условиях среднее смещение частицы обращается в нуль.

Перепишем выражение для среднеквадратичного смещения в несколько иной форме.

Пусть промежуток времени между последовательными шагами есть  $\tau$ .

Тогда  $N$  шагов будут сделаны за время  $t = N\tau$ .

Введя обозначение  $D = h^2/2\tau$ , получим закон случайных блуэсдамий:

$$\overline{x^2} = 2Dt$$

Это соотношение совпадает с законом Эйнштейна-Смолуховского для одномерного броуновского движения частицы.

Пусть теперь шаги вправо более предпочтительны, т.е.

имеют вероятность  $p > 1/2$ .

Тогда среднее смещение оказывается ненулевым и растет линейно со временем:

$$\bar{x} = Vt, \quad V = (2p - 1)\frac{h}{\tau}$$

Это соотношение совпадает с законом Эйнштейна-Смолуховского для одномерного броуновского движения частицы.

Пусть теперь шаги вправо более предпочтительны, т.е.

имеют вероятность  $p > 1/2$ .

Тогда среднее смещение оказывается ненулевым и растет линейно со временем:

$$\bar{x} = Vt, \quad V = (2p - 1)\frac{h}{\tau}$$

Как говорят, имеет место дрейф с постоянной скоростью.

Для среднеквадратичного смещения в этих условиях находим

$$\overline{x^2} = (Vt)^2 + 2D_1t, \quad D_1 = 4p(1-p)\frac{h^2}{2\tau}$$

Если перейти в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью  $V$ , то в этой системе имеет место чисто случайное блуждание:

$$\overline{(x - Vt)^2} = \overline{x^2} - 2Vt\bar{x} + (Vt)^2 = 2D_1t$$

Найдем распределение вероятностей различных положений частицы  $B$  зависимости от времени.

Предполагаем, что шаги влево и вправо равновероятны, так что  $p = 1/2$ .

Тогда из (5.7.4) при  $N \gg 1, n \gg 1$  получаем распределение Гаусса:

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right)$$

где  $\sigma^2 = Np(1-p) = N/4, \bar{n} = Np = N/2$ .

Если вправо сделано  $n$  шагов, а влево  $N - n$ , то суммарное линейное смещение составляет  $x = (2n - N)h$ .

Поэтому формула (5.7.5) принимает вид

$$W_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2Nh^2}\right)$$

Здесь  $x$  - дискретная случайная величина, принимающая (при фиксированном  $N$ ) набор значений  $x = (2n - N)h, n = 0, 1, \dots, N$ .

Если смещение  $h$  за отдельный шаг мало, а полное число шагов велико, то целесообразно рассматривать  $x$  как непрерывную случайную величину.

Для этого заметим, что распределение (5.7.6) можно формально записать в виде

$$dW_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2Nh^2}\right) dn$$

где шаг по переменной  $n$  равен  $dn = 1$ .

Заменим в этой формуле дифференциал  $dn$  с учетом соотношения  $x = (2n - N)h$  на  $dn = dx/2h$ .

Пусть длительность одного шага составляет  $\tau$ , а полное время, затраченное на перемещение,  $t = N\tau$ .

Вводя коэффициент диффузии  $D = h^2/2\tau$ , получаем искомое распределение:

$$dW(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx.$$

Легко проверить, что найденное распределение является нормированным:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} dW(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \frac{dx}{\sqrt{4\pi Dt}} = 1$$

## 6.4 Скорость диффузии и теплопроводности

### Теория

По своему смыслу диффузия эквивалентна броуновскому движению частиц.

Это означает, что за время  $t$  частицы благодаря диффузии переносятся на расстояния

$$L \sim \sqrt{Dt}$$

Аналогично, молекулярная теплопроводность есть перенос тепла в процессе случайных блужданий частиц, т.е. по механизму диффузии. В этой связи теплопроводность иногда называют диффузией тепла.

Поэтому за время  $t$  тепло переносится на расстояния

$$L \sim \sqrt{at}$$

## 6.5 Звук как адиабатический процесс (!?)

суть

обоснование

из (????) известно выражение для скорости звука в газе:

Найдем условия, при выполнении которых распространение звука можно считать адиабатическим процессом. Как указывалось, для этого необходимо, чтобы вынос тепла из области с линейным размером порядка длины волны  $\lambda$  был пренебрежимо мал. Характерное расстояние, на которое переносится тепло за период звуковых колебаний  $T$ , составляет  $L \sim \sqrt{aT}$ . Тогда условие адиабатичности принимает вид

$$\sqrt{aT} \ll \lambda.$$

Переходя от периода колебаний к частоте  $f = 1/T$ , а также заменяя длину волны по формуле  $\lambda = c_{\text{зв}} T = c_{\text{зв}}/f$ , получим искомое неравенство:

$$f \ll c_{\text{зв}}^2/a$$

численная оценка

Проведем численную оценку для случая воздуха.

Коэффициент температуропроводности равен  $a = \bar{v}l/3$ , где длина свободного пробега дается выражением  $l = 1/(\sqrt{2}n\sigma)$ .

Полагая для оценки, что при нормальных условиях  $c_{\text{зв}} \sim 3 \cdot 10^4$  см/с,  $\bar{v} \sim 4 \cdot 10^4$  см/с,  $n \approx 2,5 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>, и принимая газокINETический диаметр молекулы равным  $d \sim 3 \cdot 10^{-8}$  см, получим

$$\sigma = \pi d^2 \sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2, \quad l \sim 10^{-5} \text{ см}, \quad a \sim 0,1 \text{ см}^2/\text{с}$$

что дает искомое неравенство:

$$f \ll 10^{10} \gamma \text{u}$$

Обычному звуку отвечают частоты  $10 \text{ Гц} < f < 2 \cdot 10^1 \text{ Гц}$ .

гиперзвук - введение

(в другом месте подробнее напишу)

Нарушение адиабатичности происходит при частотах, отвечающих гиперзвуку ( $f > 10^9 \gamma \text{u}$ ).

Однако для таких частот длина волны ( $\lambda = c_{\text{зв}}/f < 3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ ) оказывается порядка длины свободного пробега молекул (и меньше).

Поэтому гиперзвук в газах при нормальных условиях распространяться не может.

Таким образом, звук в газах при нормальных условиях всегда можно рассматривать как адиабатический процесс.

обычный звук - равновесный процесс

В связи со сказанным отметим, что обычный звук в газе можно рассматривать как квазистатический (равновесный) процесс.

Для этого требуется, чтобы время релаксации среды к равновесному состоянию было мало по сравнению с характерным временем протекания процесса (см. раздел 1.1.8).

Действительно, характерное время релаксации газа определяется частотой столкновений молекул и при нормальных условиях составляет  $\tau \sim l/\bar{v} \sim 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ .

Время же прохождения звуковой волной расстояния порядка длины волны

$$\lambda = c : T = \frac{c}{f} \simeq \frac{3 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}}{3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}} = 10 \text{ см}$$

составляет  $T = 1/f \sim 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

Таким образом,  $\tau \ll T$ :

## 7 Эффузия разреженного газа

Эффузия - это медленное течение газа через малые отверстия.

Истечение газа характеризуется числом Кнудсена  $\text{Kn} = l/L$ , где  $L$  - характерный размер препятствия (отверстия),  $l$  - длина свободного пробега молекул.

При  $\text{Kn} \gg 1$  столкновениями между молекулами в окрестности отверстия можно пренебречь. Такое течение называется свободным молекулярным течением.

### 7.1 Эффект Кнудсена

#### Теория

Если газ с плотностью  $n$  находится в сосуде, в стенке которого имеется малое отверстие площадью  $S$ , то эффузионный поток через отверстие равен

$$jS = \frac{1}{4} S n \bar{v} = S n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

Пусть сосуд (см. рис. 5.8.1) разделен на две секции ( $A$  и  $B$ ) перегородкой с отверстием, диаметр которого мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа ( $\text{Kn} \gg 1$ ).

Поток молекул из секции  $A$  в секцию  $B$  равен

$$j_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4} n_A \bar{v}_A$$

Обратный поток из  $B$  в  $A$  равен

$$j_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4} n_B \bar{v}_B$$

( $n_A, n_B$  и  $\bar{v}_A, \bar{v}_B$  - плотности числа молекул и средние скорости теплового движения молекул в секциях  $A$  и  $B$ ).

В состоянии равновесия число молекул, покидающих секцию  $A$ , совпадает с числом молекул, возвращающихся в нее:  $j_{B \rightarrow A} = j_{A \rightarrow B}$ .

Поскольку  $P = nkT$  и  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ , то

$$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}}$$

Из полученного соотношения следует, что при разных температурах в секциях устанавливается разное давление (эффект Кнудсена).

### 7.2 Эффузионное разделение газовых смесей

#### Теория

Пусть в сосуде  $A$  содержится смесь двух газов с различными молярными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

причем  $\mu_1 < \mu_2$ .

Примем, что соотношение между плотностями компонентов в сосуде  $A$  равно  $(n_1/n_2)_0$  и поддерживается постоянным.

Пусть газ имеет возможность перетекать в сосуд  $B$  через малые отверстия радиуса  $r \ll l$ , где  $l$  - длина свободного пробега молекул.

Будем считать, что в результате непрерывного отбора газа из сосуда  $B$  обратный эффузионный поток из  $B$  в  $A$  пренебрежимо мал.

Поскольку эффузионный поток зависит от массы молекул:

$$j \sim \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

то в сосуд  $B$  попадает смесь газов в ином соотношении.

После одного цикла эффузии отношение плотностей компонентов составит

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_1 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_0$$

Если теперь полученную смесь снова подвергнуть эффузии, то соотношение между плотностями компонентов изменится еще сильнее.

После  $N$  циклов эффузии получится газ, в котором

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_N = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{N/2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)_0.$$

Поскольку по предположению  $\mu_1 < \mu_2$ , то с каждым новым циклом доля легкой компоненты  $(n_1)$  в газе увеличивается.

Этот эффект используется для разделения изотопов одного элемента.

Например, природный уран содержит в основном изотопы  ${}^{235}_{92}\text{U}$  - 0,71% и  ${}^{238}_{92}\text{U}$  - 99,27%.

Для промышленного разделения изотопов используется газообразное соединение  $\text{UF}_6$  с молярными массами  $\mu_1 = 349$  и  $\mu_2 = 352$  для урана-235 и урана-238 соответственно.

Согласно полученной формуле для десятикратного обогащения смеси изотопом урана-235 требуется приблизительно

$$N = 2 \frac{\lg 10}{\lg(352/349)} = 540$$

циклов эффузии.

Заметим, что в промышленных установках число циклов эффузии составляет порядка 1500.

### 7.3 Свободное молекулярное течение газа через трубу

#### Теория

Если газ сильно разреженный (ультразреженный), то столкновениями его молекул друг с другом можно пренебречь.

Течение такого газа в трубе полностью определяется столкновениями его молекул со стенками трубы.

Движение молекул, поступающих в трубу с одного конца, не зависит от движения молекул, поступающих в трубу с другого конца.

При этом полный поток молекул в трубе равен разности потоков, проходящих в противоположных направлениях:  $j = j_1 - j_2$ .

Условие того, что газ - разреженный.

означает  $Kn = l/R \gg 1$ , где  $R$  - радиус трубы,  $l$  - длина свободного пробега молекул, отвечающая данной плотности газа.

Если бы молекулы отражались от стенок трубы строго зеркально (т.е. по закону угол падения равен углу отражения), то все частицы, попавшие в трубу с одного конца, вышли бы с другого.

В действительности часть молекул рассеивается диффузно и приходит в тепловое равновесие со стенками трубы.

Поэтому некоторые молекулы не проходят через трубу, возвращаясь к входу.

Предположим, что температура стенок трубы постоянна и равна температуре газа вне трубы.

Движение молекул в трубе можно рассматривать как процесс диффузии с эффективной длиной свободного пробега.

примерно равной диаметру трубы,  $l_{эфф} \simeq 2R$ , и коэффициентом диффузии  $D = \bar{v}l_{эфф}/3 \simeq 2R$  г.

Тогда плотность потока частиц в трубе составит

$$j = -D \frac{dn}{dx} \simeq -\frac{2R}{3} \bar{v} \frac{dn}{dx}$$

где  $n(x)$  - объемная плотность молекул в трубе.

При стационарном течении газа по трубе постоянного сечения плотность потока  $j = \text{const}$ .

Поэтому

$$\frac{dn}{dx} = \frac{n_2 - n_1}{L}$$

где  $L$  - длина трубы.

Обозначим  $j_1 = n_1 \bar{v}/4$ ,  $j_2 = n_2 \bar{v}/4$  - плотности потоков частиц, падающих на входы 1 и 2 трубы из внешней среды (где плотности газа соответственно равны  $n_1$  и  $n_2$ ).

Тогда плотность потока молекул в трубе окажется равной

$$j = \frac{8R}{3L} (j_1 - j_2)$$

Полученная формула применима не только при  $T = \text{const}$ , но и тогда, когда температура медленно меняется вдоль трубы.

Если газ вне трубы характеризуется значениями температуры и давления  $T_1, P_1$  и  $T_2, P_2$  у входов 1 и 2, то масса газа, протекающая через

трубу в единицу времени (расход газа), оказывается равной

$$Q = mjS = \frac{8R^3}{3l} \sqrt{\frac{\pi n}{2k}} \left( \frac{P_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{P_2}{\sqrt{T_2}} \right).$$

Здесь учтены соотношения

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{и} \quad P = nkT.$$

Для сравнения заметим, что расход газа с вязкостью  $\eta$  при изотермическом пуазейлевом течении по трубе определяется формулой

$$Q = \pi m R^4 \frac{P_1^2 - P_2^2}{16\eta k T L}$$

Эта величина зависит от радиуса трубы по закону  $Q \sim R^4$ , тогда как при свободном молекулярном течении  $Q \sim R^3$ .

## 8 Равновесие фаз и фазовые переходы

Обсудим подробно равновесие фаз и фазовые переходы.

### 8.1 Общая теория фазовых переходов

(по идее это уже я и проходил в статфизе, тут коротко без особых деталей для термача ее приведу)

#### Обзор

Фазовые переходы - это резкая смена агрегатного состояния или свойств материала при изменении внешних параметров.

Например, затвердевание, переход в сверхпроводимость...

Научимся описывать фазовые переходы.

#### краткие выводы теории фазовых переходов

(место краткого перечня того, о чем будет речь, какие собственно выводы имеются?)

### 8.2 фазовые переходы для твердых тел

(тут теория, относящаяся к твердым телам, общая идеология фазовых переходов или переходы вне твердого состояния - в другом месте)

(пока что тут все совершенно не физично, потом буду добавлять физику, пока что просто пишу модели, что происходит. также скорее всего следует сократить математику, а то что-то суть через нее не очень видно.)

#### обзор фазовых переходов

##### введение

**Определение 4.1.** *Фазами вещества называются его однородные части, различающиеся по физическим свойствам, отделенные друг от друга границами раздела.*

Этим фаза отличается от агрегатного состояния - при одном и том же состоянии могут быть разные фазы.

Например, твердое агрегатное состояние вещества может быть при разных фазах. (это какие же фазы? потом подробно посмотрю)

У покоящегося вещества для равновесия между двумя частями с разными фазами необходимо равенство давления и температур, но также и кое-что еще!

Оказывается, только при определенном соотношении между давлением и температурой при фазовом равновесии (как оно определяется через удельные потенциалы?) реализуется стационарное состояние.

Рассмотрим вещество с двумя фазами 1 и 2 с массами  $m_1$  и  $m_2$ , его переход при постоянной температуре описывается *термодинамическим потенциалом*: (потом пойму, что это)

$$\Phi = U + PV - TS$$

так как  $dU = TdS - PdV$ , то  $d\Phi = -SdT + VdP$  (возможно, это очень важная формула, но о ней ранее нужно было писать, тут уже только ее применение должно быть). Видим, что если давление и температура в системе из нескольких фаз постоянны, то  $\Phi$  также постоянен. (то есть всегда при стационарном состоянии системы?)

введя удельные потенциалы, запишем:

$$\Phi = m_1\Phi_1 + m_2\Phi_2$$

Зная, что постоянная  $\Phi$  и масса всей системы, немного подумав о их дифференциалах видим, что условие равенства фаз можно записать в виде  $\phi_1(P, T) = \phi_2(P, T)$ .

Переписывая дифференциалы удельных потенциалов в виде

$$d\Phi_1 = -s_1dT + v_1dP, \quad d\Phi_2 = -s_2dT + v_2dP$$

видим, что

условие фазового равновесия вещества через удельные энтропии и удельные объемы каждой фазы записывается так:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{q}{T}$$

Здесь  $s_1, v_1, s_2, v_2$  — увещества. (смысл каждого параметра???)  
(абсолютно хз, почему, из определений энтропий мб)

## фазы и фазовые превращения

Состояние вещества меняется при изменении внешних условий. Изменения эти бывают двух видов: количественные изменения — растет или уменьшается плотность, магнитная проницаемость, показатель преломления и т. д и изменения качественные — вода при охлаждении превращается в лед, а при нагревании в пар. Жидкость, твердое тело, газ — это три агрегатных состояния вещества, три фазы. Качественно отличающиеся по своей структуре и физическим свойствам состояния одного и того же вещества — различные его фазы — при определенных условиях могут сосуществовать. Так, если в реке плавают льдины, а в воздухе находятся водяные пары, мы наблюдаем одновременно три различных фазы, три агрегатных состояния одного вещества — воды,  $H_2O$ . Если система состоит из вещества в одном каком-то состоянии, она называется однофазной, однородной или гомогенной; если сосуществуют несколько фаз — перед нами многофазная, неоднородная, гетерогенная система. В то же время система, состоящая из нескольких веществ, может оставаться гомогенной. В частности, если все вещества, входящие в систему, находятся в газообразном состоянии, она обязательно будет гомогенной. Для конденсированного состояния это не всегда верно. Смесь воды и спирта гомогенна, так как эти жидкости растворяются друг в друге. А вот капли жира в бульоне образуют отдельную фазу, хотя и жир, и вода находятся в жидком состоянии. Различные фазы могут соответствовать одному и тому же агрегатному состоянию и в системе, состоящей из одного вещества: алмаз и графит, оба представляющие собой твердый углерод, но отличающиеся строением кристаллической решетки; никель-паламагнетик и никель-ферромагнетик; металл, обладающий электрическим сопротивлением, и тот же металл в сверхпроводящем

состоянии — примеры различных фаз одного вещества в твердом состоянии. Реже встречаются различные фазы одного вещества в жидком состоянии: жидкий гелий (вязкий и сверхтекучий), «обычная жидкость» и жидкий кристалл. Правда, в последнем примере различия между фазами настолько принципиальны, что их можно считать разными агрегатными состояниями. Строение и свойства жидкостей и твердых тел определяются взаимодействием молекул, из которых эти тела состоят. Поэтому в рамках модели идеального газа, не учитывающей взаимодействия молекул на



расстоянии, невозможно описание конденсированной фазы. Модель Ван-дер-Ваальса, в которой дальнотействующие силы учитываются, верно описывает достаточно плотный газ. Естественно распространить эту модель в область еще более высоких плотностей, когда газ переходит в жидкость. Изотерма «реального газа». Обратимся к типичной, волнообразной изотерме Ван-дер-Ваальса (ABCD на рис. 3.3). В диапазоне давлений от  $P_1$  до  $P_2$  каждому значению давления отвечают три возможных значения объема. Согласно уравнению Ван-дер-Ваальса, при уменьшении объема давление сначала

должно повышаться, затем, в некотором диапазоне значений понижаться, и наконец, вновь расти. Реально такое поведение вещества невозможно, так как при этом оно должно пройти участок  $CB$ , на котором производная  $(\partial P / \partial V)_T$  положительна, а это соответствует абсолютно неустойчивым состояниям.

Сравним допустимые состояния - участки  $AB$  и  $CD$ . Левая ветвь - участок  $AB$  - отличается меньшим объемом при равных давлениях и заметно более слабой зависимостью объема от давления. Подобные характеристики типичны для жидкости: плотность у нее заметно больше, чем у газа, так как молекулы располагаются практически вплотную друг к другу; в связи с этим жидкость, если сравнивать с газом, практически несжимаема.

Следует отметить, что участок  $AB$  описывает жидкость заметно хуже, чем участок  $CD$  - газ. Изотермы Ван-дер-Ваальса при неограниченном росте давления имеют асимптотами прямые  $V = b$ , что соответствует учетверенному объему молекул. В реальной жидкости молекулы расположены вплотную и могут занимать до 74% объема сосуда. Кроме того, сжимаемость

жидкостей очень мала. Если считать, что участок  $CD$  изображен с соблюдением масштаба, то участок  $AB$  должен выглядеть практически вертикальной прямой. Значения объема для различных жидкостей обычно лежат в пределах  $(0,34 - 0,41)b$ . Это неверно при температурах, близких к критической, когда плотности жидкости и газа становятся сравнимыми.

Не забывая об этих оговорках, проанализируем переход вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса («газа Ван-дер-Ваальса») из газообразного состояния в жидкое. Этот переход не может происходить по кривой Ван-дер-Ваальса: мы уже отмечали, что участок  $CB$  изображает неустойчивые состояния. Газ должен «перескочить» с  $DC$  на  $BA$ , минуя состояния, отвечающие  $CB$ .

Из эксперимента известно, что, если сжимать газ при постоянной температуре, то в некоторый момент давление перестает повышаться, хотя объем продолжает уменьшаться. Это связано с тем, что при некотором постоянном давлении газ конденсируется. Давление вновь начинает расти только тогда, когда весь газ перейдет в жидкость. Таким образом, начиная с некоторой точки  $E$ , линия, изображающая переход газа в жидкость, должна представлять собой горизонтальную прямую  $EF$ . И лишь по достижении точки  $F$ , лежащей уже на  $AB$ , вещество может вновь подчиняться уравнению Ван-дер-Ваальса.

Изотерма, состоящая из участков  $AF$  и  $ED$  теоретической кривой Ван-дер-Ваальса и прямой  $FE$ , носит название изотермы реального газа. Напомним, однако, что она, с одной стороны, описывает поведение как газа, так и жидкости, но, с другой стороны, поведение жидкости - только качественно.

Положение прямой  $EF$  можно определить из следующих соображений. Проведем с «газом» Ван-дер-Ваальса цикл, в котором переход из  $E$  в  $F$  будет происходить по кривой  $ECGBF$ , а обратный переход - по прямой  $FGE$ . Конечно, в силу неустойчивости состояний на участке  $CGB$ , это можно проделать только мысленно. Работа цикла равна разности площадей  $FGBF$  (эта часть цикла обходится по часовой стрелке - работа тут положительна) и  $GECE$  (а эта часть обходится против часовой стрелки - работа отрицательна). Но во время всего цикла температура рабочего вещества неизменна. Мы

знаем, что в таком случае КПД цикла должен быть равен нулю, т.е. равна нулю полная работа. Значит, площади  $FGBF$  и  $GECC$  равны, чем и определяется положение прямой  $FE$ . Это условие называется правилом Максвелла.

Тот же результат можно получить, рассматривая поведение потенциала Гиббса. Вспомним, что дифференциал потенциала Гиббса равен  $d\Phi = -SdT + VdP$ . При фазовом переходе температура и давление неизменны, значит условием равновесия

является равенство потенциалов Гиббса в расчете на одинаковое количество вещества. Иначе говоря, должны быть равными молярные потенциалы  $\Phi_1 = \Phi_2$ , или удельные потенциалы, или потенциалы в расчете на молекулу, т.е. химические потенциалы фаз:  $\mu_1 = \mu_2$ . Для фиксированного значения температуры при давлениях, меньших  $P_0$ , потенциал газа меньше - равновесию отвечает газообразное состояние; если давление превышает  $P_0$ , равновесию отвечает жидкость. На прямой  $EF$  удельные потенциалы газа и жидкости равны, и лишь объем, приходящийся на долю вещества, определяет, будет это газ, жидкость или две фазы будут сосуществовать. Переход вещества из газообразного состояния в жидкое и обратно при этом не изменяет суммарного значения потенциала  $\Phi$ , как это и должно быть в условиях равновесия при фиксированных температуре и давлении.

Теплота перехода. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Рассмотрим процесс фазового перехода в условиях, когда постоянным поддерживается внешнее давление. Если, например, к помещенной под поршень воде подводится тепло, то в определенный момент рост температуры прекращается и некоторое время она остается постоянной. Это продолжается в течение всего времени, пока вода превращается в пар (жидкая фаза в газообразную), т.е. пока происходит фазовый переход.

Подвод тепла, между тем, продолжается. Тепло расходуется на работу по расширению - газ занимает больший объем, чем жидкость, из которой он образовался; кроме того, внутренняя энергия у газообразной фазы выше, чем у жидкой при той же температуре. Так как давление при этом не меняется, подведенное количество теплоты равно разности энтальпий вещества в состояниях, между которыми происходит переход. Действи-

тельно, для энтальпии  $dH = TdS + VdP$ , и при неизменном давлении  $dH_P = (TdS)_P = \delta Q_P$ . Итак, при постоянном давлении теплота фазового перехода в расчете на моль вещества  $\Lambda = \Delta H$ . Если изменить температуру, изменится и давление, при котором происходит фазовый переход. Например, при повышении температуры в жидкости образуется больше молекул, имеющих энергию, достаточную для «вылета» в газовую фазу. Поток молекул из жидкости возрастает. Но в равновесии он должен быть равен обратному потоку - из газа в жидкость. Это может произойти только при повышении плотности, а значит, и давления паров. Потенциалы Гиббса двух фаз в новых условиях по-прежнему должны быть равны, то есть должны быть равными и их приращения:  $d\Phi_1 = d\Phi_2$

Если мы останемся на кривой равновесия фаз, т.е. переходим от равновесия при температуре  $T$  и давлении  $P$  к равновесию

### 8.3 Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний.

#### применение уравнения Клапейрона-Клаузиуса

???? самое интересное

#### тройная точка

откуда появляется, почему такая?

## 8.4 кинетическое описание

как кинетику пройду, добавлю этот параграф

## 8.5 переходы первого рода

коротко о переходе первого рода, его смысл:

типа два потенциала, и переходит система на второй потенциал.

точка перехода ничем не замечательная.

в точке перехода может перегрев быть и переохлаждение.

вид фаз не имеет каких-то закономерностей и симметрий

а второго рода это сингулярности. никакого перегрева и переохлаждения быть не может.

и симметрии есть: например симметрия ферро вложена в симметрии паро магнетиков. и там флуктуации есть.

### переходы первого рода

рассмотрим два тела, способных взаимодействовать друг с другом. (?) равенство фаз имеет место, когда параметры обеих систем совпадают:

$$T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2, \quad \mu_1 = \mu_2$$

Это утверждение можно вывести из принципа максимальности энтропии.

Для температуры: (???)

Для химического потенциала:

$$\frac{dS}{dN_1} = \frac{dS_1}{dN_1} + \frac{dS_2}{dN_2} \frac{d(N - N_1)}{dN_1} = \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} = 0 \rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

Далее нам хотелось бы найти область значения параметров, при которых может происходить фазовый переход.

Для этого посмотрим на условие фазового равновесия

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T),$$

оно неявным образом задает вид кривой равновесия  $p = p(T)$

Перепишем равенство хим потенциалов в дифференциалах, немного преобразовав:

$$\left( \frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dT} = \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dT}$$

Также известно, что (?)

$$d\mu = -s dT + v dp, \quad \text{где } s = S/N, v = V/N$$

Поэтому (?)

$$s = -\frac{\partial \mu}{\partial T}, \quad v = \frac{\partial \mu}{\partial p}$$

В результате формула Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T v_{12}}, \quad q = T(s_1 - s_2), \quad v_{12} = v_1 - v_2$$

приближенно

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1}{v_1} = \frac{ps_1}{T}$$

первого и второго рода  
зародышы

$$E_2(S - S_1, V - V_1, N - N_1) - E_2(S, V, N) = -T_2S_1 + p_2V_1 - \mu_2N_1$$

$$\varepsilon(R) = \{E_1(S_1, V_1, N_1) - T_2S_1 + p_2V_1 - \mu_2N_1 + 4\pi\sigma R^2\}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dN_1} = (\mu_1(p) - \mu_2(p)) + \frac{8}{3}\pi\sigma a^2 N_1^{-1/3}$$

$$N_c = \left[ \frac{8}{3}\pi \frac{\sigma a^2}{\mu_2(p) - \mu_1(p)} \right]^3$$

## 8.6 переходы второго рода

### ферромагнетики как пример перехода второго рода

(чисто как пример, короткий и ничего не добавляющего принципиально, а только поясняющий)

$$dE = \frac{1}{4\pi} H dB$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN + \frac{1}{4\pi} H dB$$

$$\mathcal{F}(T, H) = F(T, B) - \frac{1}{8\pi} H^2 - HM$$

$$M = - \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \right)_T$$

$$\mathcal{F} = F_0(T) + a(T)M^2 + \frac{1}{2}b(T)M^4$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = a(T)M + b(T)M^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial M^2} = a(T) + 3b(T)M^2 > 0$$

$$M = \sqrt{\frac{|a(T)|}{b(T)}}$$

$$M = M_0(T) = \sqrt{\frac{\alpha}{b}(T_c - T)}, \quad T < T_c$$

$$M = 0, \quad T > T_c$$

$$\mathcal{F} = F_0(T) - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{b} (T_c - T)^2, \quad T < T_c$$

$$\mathcal{F} = F_0(T), \quad T > T_c$$

энтропия

$$S = S_0(T) - \frac{\alpha^2}{b} (T_c - T), \quad T < T_c$$

$$S = S_0(T), \quad T > T_c$$

$$C(T) = T \frac{\partial S}{\partial T} = C_0(T) + \frac{\alpha^2}{b} T, \quad T < T_c$$

$$C(T) = C_0(T), \quad T > T_c$$

## 8.7 построение кривых фазового равновесия

## Part III

# Problems in Thermodynamics

Обсудим задачи по термодинамике в рамках изученных моделей, а также общие вопросы.

## 9 Типичные задачи термодинамики

### 9.1 Вопросы на понимание термодинамики (!?!?!?)

(типичные вопросы типичных тем вуза)

## 10 Задачи Коткина и Образовского

### 10.1 Задачи на Повторение вопросов термодинамики

КО-1.

1. Найти сумму внутренней энергии идеального газа под поршнем в стоящем вертикально цилиндре и потенциальной энергии поршня. Найти теплоёмкость газа под поршнем. Найти теплоёмкость столба атмосферы.

Найти высоту центра тяжести столба атмосферы.

КО-1.

2. Частица космических лучей выделила в объёме  $V$  энергию  $E$ . (Мы рассматриваем небольшой объём и считаем, что в этом объёме энергия распределена равномерно. Выделение энергии можно считать мгновенным.) На сколько изменятся давление и температура в этом объёме? Можно ли использовать это явление для наблюдения космических лучей с помощью акустических датчиков, фиксирующих звуковые волны, приходящие из глубины океана?

КО-1.

3. Из сосуда откачан воздух. Приоткрыв на короткое время кран, сосуд заполняют атмосферным воздухом. Какой будет температура вошедшего в сосуд воздуха, если теплообмен со стенками сосуда не успевает произойти. Каким будет давление воздуха в сосуде, когда температура его за счет теплообмена сравняется с температурой атмосферного воздуха?

КО-1.

4. Сравнить теплоёмкость шарика, лежащего на столе, с теплоёмкостью такого же шарика, подвешенного за верхнюю точку; теплоёмкость чрезвычайно жёсткого стержня, растягиваемого данной силой, и того же стержня, сжимаемого такой же силой.

КО-1.

5. Найти изменение температуры воды при конвективном переносе на глубину 1 км с поверхности, считая что теплообмена

за время погружения нет. Теплоемкость воды  $C_p = 4 \text{ кДж/кг К}$ , коэффициент теплового расширения  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ .

КО-1.

6. Конденсатор ёмкости  $C$ , заполненный диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от температуры:  $\varepsilon(T)$ , находится в термостате. Конденсатор медленно заряжают до напряжения  $\varphi$ . Найти количество тепла, поглощённое конденсатором в этом процессе.

КО-1.

7. Один раз конденсатор, заполненный диэлектриком, присоединён к источнику напряжения  $U$ , а другой раз - заряжен до такого же напряжения, а затем отключён от источника. Найти разность значений теплоёмкости конденсатора в этих двух случаях,  $c_\varphi - c_U$ .

**КО-1.**

8. Конденсатор ёмкости  $C$ , заполненный диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от температуры:  $\varepsilon(T)$ , заряжают в условиях тепловой изоляции до напряжения  $U$ . На сколько изменится температура конденсатора. Принять, что теплоёмкость его велика и практически не зависит от напряжения.

**КО-1.**

9. Заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $l$  от плоской поверхности диэлектрика, медленно удаляется на бесконечность. Какое количество тепла выделится при этом в диэлектрике, если его температура поддерживается постоянной?

**КО-1.**

10. Конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого  $\varepsilon = 1 + A/T$ . Найти энергию конденсатора, заряженного до напряжения  $U$ .

**КО-1.**

11. Тонкая диэлектрическая пластинка находится в большом плоском конденсаторе. Конденсатор медленно заряжают, так что в нём возникает электрическое поле  $\mathcal{E}$ . На сколько изменится температура пластинки, если считать её теплоизолированной?

Диэлектрическая проницаемость пластинки равна  $\varepsilon(T)$ , теплоёмкость в расчёте на единицу объёма —  $C$ . Изменение температуры можно считать малым.

Рассмотреть случаи, когда пластинка расположена параллельно пластинам и перпендикулярно им.

**КО-1.**

12. Диэлектрический шар находится в большом плоском конденсаторе. Конденсатор медленно заряжают, так что в нём возникает электрическое поле  $\mathcal{E}$ . На сколько изменится температура шара, если считать его теплоизолированным? Диэлектрическая проницаемость шара равна  $\varepsilon(T)$ , теплоёмкость в расчёте на единицу объёма —  $C$ . Изменение температуры можно считать малым. (См. [2, §11].

**10.2 1. Решения Повторение вопросов термодинамики**

**КО-1.** 1.  $E = Nc_V T + Mgh = Nc_P T$ .

Так как каждый слой атмосферы находится под постоянным давлением, создаваемым весом слоев, лежащих выше, теплоёмкость атмосферы  $C = N_0 c_P$ , где  $N_0$  — число молекул во всем столбе атмосферы. Это число может быть выражено через величину атмосферного давления: для столба атмосферы, площадь сечения которого равна единице,  $N_0 mg = P_{\text{атм}}$ .

Высота центра тяжести столба атмосферы определяется потенциальной энергией молекул,  $N_0 mg \langle z \rangle = N_0 c_P T - N_0 c_V T$ , откуда  $\langle z \rangle = T/mg$ .

Подставляя численные значения величин, следует заменить  $T$  на  $k_B T$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана).  $\langle z \rangle \sim 8k$ .

Сумма внутренней энергии газа под поршнем и потенциальной энергии поршня совпадает с величиной  $H = E + PV$  — энтальпией газа. Переход от энергии к энтальпии в соотношении  $dE = TdS - PdV$  — это преобразование Лежандра:  $dH = TdS + VdP$ . Используя преобразование Лежандра, можно уйти от неудобной задачи конструирования расширенной системы (вроде той, как в этой задаче).

**КО-1.** 2. Изменение температуры  $\Delta T = \Delta E / C_V$ .

Добавочное давление определяется из условия

$$V(P, E) = V(P + \Delta P, E + \Delta E)$$

Разлагая по  $\Delta E, \Delta P$  до первого порядка, получаем

$$\Delta P = - \left( \frac{\partial V}{\partial E} \right)_P / \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_E \Delta E = - \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \frac{\Delta E}{C_V}$$

В глубине океана  $\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0$  (как в глубине озера зимой), поэтому звуковые волны (в первом порядке по  $\Delta E$ ) возбуждаться не будут.

**КО-1.** 3.  $T = \gamma T_0, \gamma = c_P / c_V, P = P_0 / \gamma$ , (см. [LL5. 43, задача 17], [12, §22].

**КО-1.** 4. Теплоёмкости одинаковы. Подробнее - в дополнении А.

**КО-1.** 5. Поскольку теплообмена нет, то  $S = \text{const}$ .

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta P, \Delta P = \rho gh \\ \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S &= \frac{D(T, S)}{D(P, S)} = \frac{D(T, S)}{D(T, P)} / \frac{D(P, S)}{D(T, P)} = \\ &= -\frac{T}{C_p} \frac{D(T, S)}{D(T, P)} = -\frac{T}{C_p} \frac{D(P, V)}{D(T, P)} = \frac{T\alpha}{C_p/V}\end{aligned}$$

Окончательно

$$\Delta T = \frac{T\alpha}{C_p/V} \rho gh \approx 0,1^\circ K$$

(см. также [20]).

**КО-1.** 6. Изменение энергии конденсатора при увеличении заряда на одной из пластин на  $dq$  (и уменьшении на столько же - на другой) равно

$$dE = TdS + \varphi dq$$

где  $dQ = TdS$  - теплота, полученная в этом процессе от термостата. Удобно рассматривать процесс зарядки при постоянной температуре. Для этого перейдем к свободной энергии  $F = E - TS$

$$dF = -SdT + \varphi dq \quad (1)$$

Имея в виду, что  $\varphi = q/C(T)$ ,  $C(T) = C_0\varepsilon(T)$ , находим

$$\Delta F = F(T, q) - F(T, 0) = \frac{q^2}{2C(T)} \quad (2)$$

Согласно (1),  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ , так что из (2)

$$\Delta S = S(T, q) - S(T, 0) = -\frac{\partial \Delta F}{\partial T} = -\frac{q^2}{2} \frac{d}{dT} \frac{1}{C(T)} = \frac{q^2}{2C_0} \frac{\varepsilon'(T)}{\varepsilon^2} \quad (3)$$

Для диэлектрика, составленного из свободно ориентирующихся диполей, очевидно,  $\varepsilon'(T) < 0$ . (С ростом температуры поляризация разрушается.)

Заметим, что свободно ориентирующийся диполь в электрическом поле  $\mathcal{E}$  движется подобно математическому маятнику, частота которого при малых колебаниях пропорциональна  $\sqrt{g}$ , в нашем случае  $\propto \sqrt{\mathcal{E}}$ ; при достаточно медленном изменении электрического поля сохраняется адиабатический инвариант, равный отношению энергии колебаний к частоте, так что энергия колебаний  $\propto \sqrt{\mathcal{E}}$ . Эта энергия колебаний определяет температуру. При увеличении электрического поля энергия колебаний растёт. При контакте диполей с частицами термостата избыточная энергия передаётся ему. Таково представление о микроскопической картине процессов, происходящих при зарядке конденсатора.

Возможна и другая картина поляризации. Пусть поляризация диэлектрика обусловлена зарядами, которые при включении электрического поля отклоняются от положений равновесия. Если при нагревании диэлектрика эти заряды могут переходить в более высокое по энергии состояние, в котором их поляризуемость окажется выше, то  $\varepsilon'(T) > 0$ .

Таким образом, поглощённое конденсатором тепло  $Q = T\Delta S$  может быть как положительным, так и отрицательным.

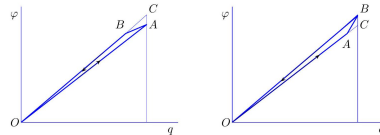


Рис. 3.  $OABO$  - цикл Карно с конденсатором в качестве рабочего тела.  $OACO$  с нагревателем при зарядке конденсатора - цикл, удобный для расчета работы.  $\varepsilon'(T) < 0$

Заметим, наконец, что рассматриваемый процесс изотермической зарядки конденсатора является обратимым: при разрядке конденсатора то же количество тепла выделяется в термостат. Суммарная энтропия конденсатора и термостата не изменяется.

Безусловно, вычисления с использованием термодинамических потенциалов удобнее, чем с использованием метода циклов". Тем не менее стоит связать эти методы. Для того, кому метод циклов



знаком настолько хорошо, что жалко расставаться с ним, не попрощавшись, приведём пояснения с использованием диаграммы

на „ $q\varphi$ “-плоскости. Примем для определённости, что  $\varepsilon'(T) < 0$  (рис. 3). Тогда изотерма,

$$\varphi = \frac{q}{C_0 \varepsilon(T)}$$

- это прямая, угол наклона которой растёт с ростом температуры.

Мы используем конденсатор в качестве тепловой машины, заряжая его при одной температуре, а разряжая при другой. Цикл  $OABO$  составлен из двух близких изотерм:  $OA$  (для температуры  $T$  - температуры холодильника) и  $BO$  (для температуры  $T + dT$  - температуры нагревателя), и адиабаты  $AB$ . Направление обхода цикла отличается от направления обхода на  $PV$ -диаграмме для газа, так как в формулах, выражающих работу над конденсатором при его зарядке,  $\delta A = \varphi dq$ , и над газом при изменении его объёма,  $\delta A = -PdV$ , стоят разные знаки<sup>6</sup>. Это цикл Карно. Работа  $A$ , совершаемая тепловой машиной за цикл, равна площади, охватываемой циклом на диаграмме. Теплота  $Q$ , полученная конденсатором от нагревателя (т. е. на изотерме  $BO$ , при разрядке), связана с работой  $A$  соотношением

$$\frac{A}{Q} = \frac{dT}{T}$$

определяющим коэффициент полезного действия тепловой машины в цикле Карно. Для вычисления площади, охватываемой циклом Карно, заменим его на цикл  $OACO$ , более удобный для расчёта. Различие площадей - площадь треугольника  $ACB$  пропорциональная  $(dT)^2$ , т. е. это величина второго порядка малости при  $dT \rightarrow 0$ , так что ею можно будет пренебречь. Работа при изотермической зарядке конденсатора равна площади под изотермой  $OA$ :

$$A_T = \frac{q^2}{2C(T)}$$

работа при изотермической разрядке (на изотерме  $CO$ ) равна

$$A_{T+dT} = -\frac{q^2}{2C(T+dT)}$$

Работа в цикле

$$A = A_{T+dT} + A_T = -dT \frac{\partial A}{\partial T}$$

Интересующая нас теплота, отводимая от конденсатора при его зарядке, совпадает с теплотой, подводимой к нему при его изотермической разрядке на участке  $BO$  цикла,  $Q = A \frac{T}{dT} = -T \frac{\partial A}{\partial T}$ . Разумеется, результат, да и весь ход расчёта, фактически совпадает с приведенным выше расчётом, выполненным с помощью свободной энергии. Очевидно, метод циклов заметно более громоздок. При его использовании требуется постоянно следить за знаками разных слагаемых, за направлениями рассматриваемых процессов и т. п. Например, при  $\varepsilon'(T) > 0$  требуются иной рисунок и иные рассуждения (рис.4).

**КО-1.** 7.

$$\Delta S = \frac{q^2 \varepsilon'(T)}{2C_0 \varepsilon^2} = \frac{C_0 U^2 \varepsilon'(T)}{2}, \quad C = T \frac{\partial \Delta S}{\partial T}$$

$$C_q = T \frac{q^2}{2C_0} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon'^2}{\varepsilon^3} \right), \quad C_U = T \frac{C_0 U^2 \varepsilon''}{2}, \quad C_U - C_q = T \frac{q^2 \varepsilon'^2}{C_0 \varepsilon^3}$$

**КО-1.** 8. В условиях тепловой изоляции неизменной остаётся величина энтропии конденсатора:

$$S(T, U) = S(T_0, 0) \quad (4)$$

где  $T_0$  - исходная температура конденсатора. Согласно равенству (3) из задачи 1.6

$$S(T, U) = S(T, 0) - \frac{C(T)U^2}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{C(T)} \quad (5)$$

Приведённых равенств достаточно для того, чтобы найти  $T(T_0, U)$ . Обозначим  $T = T_0 + \Delta T$ . Учитывая, что изменение температуры  $\Delta T$  мало, представим  $S(T, 0)$  в виде  $S(T_0, 0) + \frac{\partial S}{\partial T} \Delta T = S(T_0, 0) + \frac{C}{T_0} \Delta T$ , а в малой добавке, зависящей от напряжения, заменим  $T$  на  $T_0$ . В итоге

<sup>06</sup>М обычно рассматриваем работу, совершаемую над телом, подобно тому, как это сделано в курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица.

$$\Delta T = -\frac{\delta Q}{C} \quad (6)$$

где

$$\delta Q = -T_0 \frac{C(T_0) U^2}{2} \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{1}{C(T_0)} \quad (7)$$

- тепло, которое было бы подведено к конденсатору при его изотермической зарядке. Обратим внимание на некоторое сходство решённой задачи с задачей об охлаждении кристаллов с парамагнитными примесями методом адиабатического размагничивания (см. задачу 2.5). Только в этом случае теплоёмкость кристалла не большая, а малая ( $C \propto T^3$ ), поле не электрическое, а магнитное, не включается, а выключается и эффект не малый, а большой.

**КО-1.** 10. Энергия конденсатора  $E = \frac{1}{2} C_0 U^2$ , где  $C_0$  - ёмкость конденсатора без диэлектрика.

**КО-1.** 11. В том случае, когда пластинка расположена параллельно пластинам конденсатора (т.е. перпендикулярно силовым линиям), напряжённость электрического поля в конденсаторе  $\mathbf{E}_0$  совпадает с индукцией поля  $\mathbf{D}$  внутри пластинки. Если заряжать конденсатор при постоянной температуре, то свободная энергия, локализованная внутри пластины, вырастет на величину  $\Delta F = \frac{V}{4\pi} \int_0^D E dD = \frac{V E_0^2}{8\pi \varepsilon(T)}$ , (здесь  $V$  - объём пластины). Прирост энтропии при этом  $\Delta S = S(T, E_0) - S(T, 0) = -\frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \frac{V \varepsilon'(T) E_0^2}{8\pi \varepsilon^2}$ . Пластина поглотит из термостата теплоту  $Q_T = T \Delta S$ . Если же пластина теплоизолирована, то  $S(T, 0) = S(T + \delta T, E_0)$ , откуда  $\delta T \approx -Q_T / C$ , где  $C$  - теплоёмкость пластины.

В случае, когда пластинка расположена параллельно силовым линиям, напряжённость электрического поля в конденсаторе  $\mathbf{E}_0$  совпадает с напряжённостью электрического поля  $\mathbf{E}$  внутри пластинки. В этом случае удобно воспользоваться потенциалом  $\Phi = F - \frac{V}{4\pi} E D$ , для которого  $d\Phi = -S dT - \frac{V}{4\pi} D dE$ . Теперь  $\Delta \Phi = \Phi(T, E) - \Phi(T, 0) = -\frac{V \varepsilon(T) E_0^2}{8\pi}$ . Прирост энтропии при этом  $\Delta S = S(T, E_0) - S(T, 0) = -\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial T} = \frac{V}{8\pi} \varepsilon'(T) E_0^2$ . Обратим внимание, что прирост энтропии больше, чем для пластинки, расположенной перпендикулярно силовым линиям, так как во втором случае поле внутри пластинки не экранируется при поляризации диэлектрика.

Заметим также, что добавочная свободная энергия  $\Delta F = \frac{V \varepsilon(T)}{8\pi} E_0^2$ , локализованная внутри пластинки, больше, чем в отсутствие пластинки. Это могло бы привести к ошибочному заключению о выталкивании пластинки из области, где есть электрическое поле. Однако при наличии пластинки, расположенной вдоль силовых линий электрического поля, весьма существенно изменяется также энергия поля вне её.

**КО-1.** 12. Эту задачу можно рассматривать как иллюстрацию к материалу, изложенному в [2, §11].

Воспользуемся полной свободной энергией  $\mathcal{F}$ , из которой исключена энергия поля, которое существовало бы во всём пространстве в отсутствие тела. Так как внешнее поле  $\mathcal{E}$  однородно,

$$d\mathcal{F} = -S dT - \mathcal{P} d\mathcal{E} \quad (8)$$

где  $S$  - энтропия шара,  $\mathcal{P}$  - его дипольный момент. Дипольный момент выражаем через объём шара  $V$  и его поляризацию  $\mathbf{P}$ , которая выражается через электрическое поле  $\mathbf{E}$  внутри шара, а оно - через внешнее поле вдали от шара (поле в конденсаторе):

$$\mathcal{P} = V \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{3}{2 + \varepsilon} \mathcal{E}$$

(см., например, [2, §8]). Дальнейший ход решения задачи вполне аналогичен пути решения задач 1.6,

**КО-1.** 8.

$$\Delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(T, \mathcal{E}) - \mathcal{F}(T, 0) = \frac{3V\mathcal{E}^2}{8\pi} \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} = \frac{3V\mathcal{E}^2}{8\pi} \left( \frac{3}{2 + \varepsilon} - 1 \right)$$

$$\Delta S = - \left( \frac{\partial \Delta \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{\mathcal{E}} = \frac{9V\mathcal{E}^2}{8\pi} \frac{\varepsilon'(T)}{(2 + \varepsilon)^2}, \quad \delta T = -\frac{T \Delta S}{VC}$$

Подчеркнём, что в равенстве (8) работа  $-\mathcal{P} d\mathcal{E}$  содержит не то значение электрического поля, которое имеется около шара или внутри него, а поле вдали от шара, т. е. то, которое было бы в отсутствие шара. Фактически свободная энергия  $\mathcal{F}$  учитывает вклад в свободную энергию полей в пространстве, окружающем шар.

### 10.3 Задачи на Микроканоническое и каноническое распределения

#### КО-2.

1. Цепочка состоит из  $N$  звеньев длины  $a$ . Каждое звено может свободно поворачиваться, ориентируясь по или против оси  $x$ , направленной вверх. Верхний конец цепочки закреплён, к нижнему - подвешен груз веса  $f$ . Найти зависимость среднего значения длины цепочки от температуры. (Это примитивная модель молекулы каучука. Она улавливает" необычную зависимость длины молекул от температуры).

Резинка длины  $l$ , на которой подвешен груз  $f$ , при нагревании укорачивается:  $(\frac{\partial l}{\partial T})_f < 0$ . Как изменится её температура при адиабатическом растягивании?

#### КО-2.

2. Для системы, состоящей из большого числа  $N$  одинаковых гармонических осцилляторов, найти статистический вес состояния с энергией  $E = (3N/2 + L)\hbar\omega$  (первое слагаемое - уровень нулевых колебаний). Найти зависимость энергии и теплоёмкости системы от температуры.

#### КО-2.

3. Найти число квантовых состояний частицы между стенками  $0 \leq x \leq L$  с энергиями в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ . Рассмотреть случаи, когда стенки непроницаемы и когда выполняются циклические граничные условия. (Одномерная задача).

То же для частицы в кубе с ребром  $L$ .

#### КО-2.

4. Найти форму энергетического спектра электронов при  $\beta$ -распаде атомного ядра ( ${}^AZ \rightarrow {}^A(Z+1) + e + \bar{\nu}$ ), считая, что все квантовые состояния системы электрон + антинейтрино при заданной их суммарной энергии ( $\varepsilon_e + \varepsilon_{\bar{\nu}} = E$ ) равновероятны<sup>1</sup>. Энергией отдачи ядра можно пренебречь.

#### КО-2.

5. Для получения низких (гелиевых") температур  $T_0 \gtrsim 1$  К используют контакт тела с кипящим при низком давлении гелием. Для получения еще более низких температур часто используют метод адиабатического размагничивания. Кристалл, в который введена примесь парамагнитной соли, намагничивают при температуре  $T_0 \sim 1$  К, теплоизолируют, а затем медленно выключают внешнее магнитное поле. Происходит адиабатическое размагничивание кристалла, и он охлаждается.

При низких температурах теплоёмкость кристалла  ${}^2C = AT^3$ . Найти температуру кристалла после выключения магнитного поля. Считать, что атомы примеси имеют спин  $1/2$ .

#### КО-2.

6. Найти теплоёмкость двухуровневой системы, верхний уровень которой имеет очень высокую кратность вырождения  $g$ , так что даже  $\ln g \gg 1$ .

#### КО-2.

7. Газ находится в объёме  $V$ , в малой части которого  $V_1$  имеется потенциальная яма" глубины  $-U_0$ . Найти теплоёмкость газа.

#### КО-2.

8. Газ состоит из молекул, которые имеют определённый дипольный момент и могут произвольным образом ориентироваться в пространстве. Найти диэлектрическую проницаемость газа в пределе высоких температур.

<sup>01</sup> Это предположение справедливо с высокой степенью точности. Разумеется, причина этого не в характерном для задач статистической физики перемешивании", обусловленном длительным движением системы при наличии очень слабого взаимодействия её с окружающей средой, а в особенностях  $\beta$ -распада. Эта задача приведена здесь как пример эффективного использования важного для нас представления о статистическом весе.

<sup>2</sup> Величина коэффициента  $A$  определяется теплоёмкостью кристаллической решётки. Оценку её можно найти, например, в [LL5. 66],[7, 53],[11, п. 7.9].

**КО-2.**

9. Найти энергию взаимодействия двух молекул  $\langle U \rangle$ , имеющих электрические дипольные моменты, усреднённую по их направлениям, в зависимости от расстояния между молекулами в случае, когда  $U \ll T$ .

**КО-2.**

10.  $N$  шаров движутся на плоском бильярде, испытывая упругие столкновения друг с другом и со стенками. Определить распределение шаров по компоненте скорости  $v_x$ . Принять, что для замкнутой системы шаров справедливо микроканоническое распределение. (В этой задаче подразумевается, что бильярд реализован на компьютере.)

**КО-2.**

11.  $N$  компьютерных шаров движутся на наклонном плоском бильярде, испытывая упругие столкновения друг с другом и с бортиками. Определить распределение шаров по высоте (полагая, что верхнего бортика шары не достигают).

**10.4 2. Микроканоническое и каноническое распределения**

**КО-2.** 1. [8, гл. 1, задача 13]. <sup>7</sup> Пусть число сегментов, направленных вниз, равно  $N_+ = N/2 + m$ , а вверх  $N_- = N/2 - m$ . Тогда длина цепи равна  $l = 2ma$ . В качестве энергии цепочки принимаем потенциальную энергию груза

$$E = -lf = -2maf$$

(За начало отсчета принят уровень точки подвеса. В рассматриваемой модели молекулы кинетическая энергия теплового движения звеньев не учитывается.) Энтропия состояния с заданной длиной

$$S = \ln C_N^{N_+} = \ln \frac{N!}{N_+! N_-!}$$

Связь температуры с энергией

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{-2af} \frac{\partial S}{\partial m} = \frac{1}{2af} \ln \frac{N_-}{N_+}$$

откуда

$$\frac{N - 2m}{N + 2m} = e^{-2maf/T}, \quad m = \frac{N}{2} \operatorname{th} \frac{af}{T}, \quad l = Na \operatorname{th} \frac{af}{T}$$

С ростом температуры длина цепочки убывает. Для резины этому отвечает условие

$$\left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_f < 0 \quad (9)$$

С точки зрения формальных вычислений, эта задача не отличается от задач о двухуровневой системе, о намагничивании газа магнитных диполей со спином 1/2.

Изменение температуры резинки при адиабатическом изменении длины характеризуется термодинамическим коэффициентом

$$\left( \frac{\partial T}{\partial l} \right)_S$$

Преобразуем его, используя соотношение  $\frac{\partial(T,S)}{\partial(f,l)} = -1$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial l} \right)_S &= \frac{\partial(T,S)}{\partial(l,S)} = - \frac{\partial(f,l)}{\partial(f,T)} \frac{\partial(f,T)}{\partial(l,T)} \frac{\partial(l,T)}{\partial(l,S)} = \\ &= - \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_f \left( \frac{\partial f}{\partial l} \right)_T \frac{T}{C_l} \end{aligned}$$

Поскольку для каучука, очевидно,

$$C_l > 0, \quad \left( \frac{\partial l}{\partial f} \right)_T > 0 \quad (10)$$

<sup>07</sup> Решение этой задачи с использованием микроканонического распределения не проще, чем с использованием канонического, но именно такой подход к задачам мы хотим проиллюстрировать.

с учётом неравенства (9) получаем  $(\frac{\partial T}{\partial l})_S > 0$ : при растягивании резины она нагревается. В части курса, посвященной фазовым переходам и флуктуациям, будет показано, что неравенства вида (10) являются необходимыми условиями термодинамического равновесия для любого вещества.

**КО-2.** 2.  $L$  квантов можно распределить между  $N$  осцилляторами  $\Gamma$  способами. Чтобы найти это число, представим себе, что в ряд поставлены  $N - 1 + L$  объектов. Любое возможное распределение квантов по осцилляторам можно получить, объявив  $L$  из этих объектов квантами, а остальные  $N - 1$  - перегородками между  $N$  ящиками - осцилляторами. Такой выбор возможен

$$\Gamma = C_{N-1+L}^L = \frac{(N-1+L)!}{(N-1)!L!} \approx \frac{(N+L)!}{N!L!}$$

способами.

Энтропия системы есть  $S = \ln \Gamma$ , а температура определяется из соотношения

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{N+L}{L} \right)$$

Отсюда

$$E = N\hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) = N \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}$$

$$C = N \left( \frac{\hbar\omega}{2T} \right)^2 \operatorname{sh}^{-2} \left( \frac{\hbar\omega}{2T} \right)$$

При высоких температурах,  $\hbar\omega \ll T$ ,

$$E = NT \left( 1 + O \left( \frac{\hbar\omega}{T} \right) \right)$$

(тот факт, что в разложении нет члена с  $(\hbar\omega/T)^0$ , очевиден из-за нечётности функции  $\operatorname{cth} x$ .)  
Теплоёмкость  $C \approx N$ .

При низких температурах,  $\hbar\omega \gg T$ ,

$$E \approx E_0 + N\hbar\omega \exp(-\hbar\omega/T), \quad C = N \left( \frac{\hbar\omega}{T} \right)^2 \exp(-\hbar\omega/T) \ll N$$

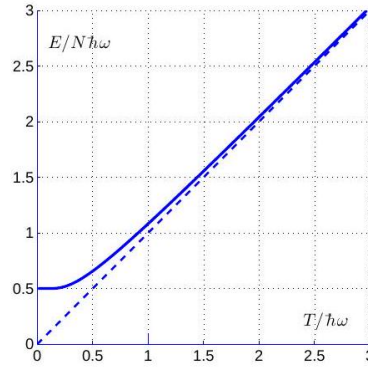


Рис. 5. Средняя энергия гармонического осциллятора в зависимости от температуры

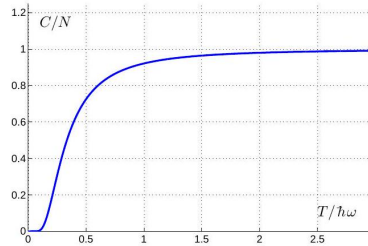


Рис. 6. Теплоёмкость гармонического осциллятора в зависимости от температуры  
Зависимости  $E(T)$ ,  $C(T)$  представлены на рис. 5, 6 .

**КО-2.** 3. В одномерной задаче волновые функции и уровни энергии частицы

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x, \quad k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varepsilon_n = \frac{p_n^2}{2m}, \quad p_n = \hbar k_n = \frac{\hbar \pi n}{L}$$

В шкале импульсов уровни энергии распределены равномерно, в интервале  $dp$  находится  $dn = \frac{Ldp}{\pi\hbar}$  уровней. Учитывая, что  $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ ,  $dp = \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} d\varepsilon$ , получаем  $dn = \frac{Ld\varepsilon}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}$ . Переходя к трёхмерной задаче, будем считать, что частица движется в кубе со стороной  $L$ . В уравнении Шредингера переменные  $x, y, z$  разделяются. Собственным значениям энергии в пространстве импульсов отвечают точки, координаты которых распределены вдоль каждой из осей  $(p_x, p_y, p_z)$  с постоянным шагом  $L/(\pi\hbar)$  (точнее, вдоль каждой из полуосей  $p_{x,y,z} > 0$ ). Каждому из состояний в импульсном пространстве соответствует объём  $(\pi\hbar/L)^3$ . Объёму  $d^3p$  в импульсном пространстве отвечает  $dn = d^3p/(\pi\hbar/L)^3$  состояний. Здесь подразумевается, что объём в импульсном пространстве  $d^3p$  достаточно велик, чтобы оказалось  $dn \gg 1$ . Это обеспечивается макроскопическим значением величины  $V = L^3$ . При соединении нескольких объёмов  $V_1, V_2, \dots$  число состояний растёт пропорционально их сумме. Очень часто можно бывает также рассматривать в качестве объёма  $V$  малый (с других точек зрения) объём  $dV$ , не нарушая условия  $dn \gg 1$ . Чтобы перейти к интервалу энергии  $d\varepsilon$ , заменим  $d^3p$  на  $p^2 dp d\Omega_p = \sqrt{2m\varepsilon} d\varepsilon (4\pi/8)$ . В итоге

$$dn = L^3 \sqrt{2m\varepsilon} d\varepsilon / (2\pi^2 \hbar^3)$$

Этот же результат можно получить, если принять для волновых функций циклические граничные условия:

$$\psi(0) = \psi(L), \psi'(0) = \psi'(L)$$

Тогда

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n x}, k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(и аналогично - для движений в направлениях  $y$  и  $z$ .) Состояния в шкале импульсов расположены вдвое реже, но каждому значению энергии (кроме основного) соответствует два значения импульса, отличающихся знаком. В таком случае направление импульса может лежать в любом квадранте, а размер ячейки в импульсном пространстве, отвечающей одному квантовому состоянию частицы,  $(2\pi\hbar/L)^3$ , в 8 раз больше.

Заметим, наконец, что число состояний частицы в периодическом поле (в одномерной задаче) или в поле кристаллической решётки выражается подобным же образом, но с заменой импульса на квазиимпульс.

**КО-2.** 4. Ответ:  $dN_e \propto \sqrt{\varepsilon_e} (E - \varepsilon_e)^2 d\varepsilon_e$  (при  $m_\nu = 0, \varepsilon_e \ll m_e c^2$ ).

**КО-2.** 5. Статистическая сумма частицы примеси (точнее, часть ее, связанная с ориентацией магнитных моментов в магнитном поле)  $z = e^{\mu\mathcal{H}/T} + e^{-\mu\mathcal{H}/T}$ , свободная энергия газа", содержащего  $N$  частиц,  $F_{\mathcal{H}} = -NT \ln z$ , его энтропия -

$$S_{\mathcal{H}} = -\frac{\partial F_{\mathcal{H}}}{\partial T} = N \ln z + \frac{NT}{z} \frac{\partial z}{\partial T} =$$

$$= N \ln \left( e^{\mu\mathcal{H}/T} + e^{-\mu\mathcal{H}/T} \right) - \frac{N\mu\mathcal{H}}{T} \operatorname{th} \frac{\mu\mathcal{H}}{T}$$

Теплоёмкость кристалла при низких температурах  $C_0 = AT^3$ , где  $A$  - величина, не зависящая от температуры (закон Дебая). Соответствующая энтропия  $S_0 = AT^3/3$ .

При адиабатическом размагничивании

$$S_0 + S_{\mathcal{H}} = S = \text{const.} \quad (11)$$

На рис. 7 показана зависимость  $T(\mathcal{H})$ , отвечающая (11). При очень низких температурах  $S_0 \ll S_{\mathcal{H}}, S_{\mathcal{H}} \approx \text{const}$ , так что, очевидно,  $T \propto \mathcal{H}$ .

Повышение концентрации примеси ведет к усилению эффекта охлаждения. Однако при понижении температуры возможно возникновение спонтанного намагничивания, исключающего дальнейшее размагничивание. Поэтому оптимальная концентрация примеси не может быть слишком велика. (См. также [7, §15].)

**КО-2.** 6. ([7, 44]). Разумеется, речь идет о совокупности очень большого числа таких систем, требуется же определить теплоёмкость в расчете на одну систему. Переход к такой совокупности и возврат к одной системе мы оставим за рамками вычислений. Энергию и теплоёмкость в расчете на одну систему мы обозначаем в данном случае  $E$  и  $C$ .

Приняв за начало отсчета энергию основного уровня и обозначив энергию верхнего уровня  $\varepsilon$ , получаем выражение для стат-

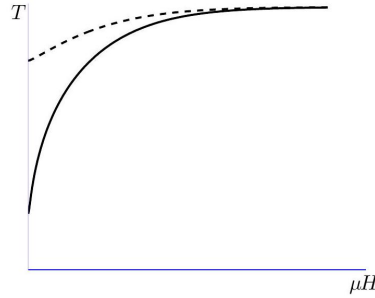


Рис. 7. Зависимость температуры кристалла от приложенного магнитного поля при адиабатическом размагничивании (при различных концентрациях примеси парамагнитных ионов)

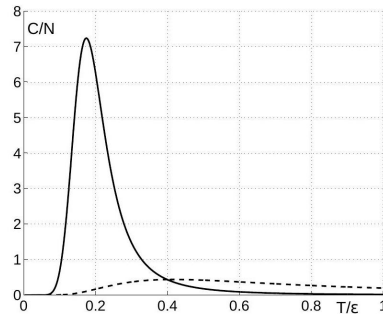


Рис. 8. Теплоемкость двухуровневой системы с сильно вырожденным верхним уровнем ( $g = 150$ ) в зависимости от температуры. Пунктиром показана та же зависимость при  $g = 1$  суммы одной двухуровневой системы

$$Z = 1 + ge^{-\varepsilon/T}$$

Средняя энергия

$$\langle E \rangle \equiv E = -\frac{dZ}{d(1/T)} = \frac{\varepsilon ge^{-\varepsilon/T}}{1 + ge^{-\varepsilon/T}} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{g}e^{\varepsilon/T} + 1}$$

При  $T \ll \varepsilon$  энергия  $E \approx 0$ , при  $T \gg \varepsilon$  энергия  $E \approx \varepsilon$ . Обозначим  $x = (1/g)e^{\varepsilon/T}$ . Значение  $E = \varepsilon/2$  достигается при  $x(T) = 1$ . Можно ожидать, что при таком примерно значении температуры окажется максимальной и теплоёмкость  $C = dE/dT$ . Теплоёмкость

$$C = \left(\frac{\varepsilon}{T}\right)^2 \frac{\frac{1}{g}e^{\varepsilon/T}}{\left(\frac{1}{g}e^{\varepsilon/T} + 1\right)^2} = \frac{(\varepsilon/T)^2}{(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})^2}$$

При  $T \ll \varepsilon$  экспоненциальная функция  $x(T)$  меняется гораздо быстрее <sup>8</sup> чем  $(\varepsilon/T)^2$ , и можно найти приближенное положение максимума теплоёмкости  $T_0$ , находя значение  $x$ , при котором достигается минимум знаменателя. Это значение, как мы и ожидали,  $x = 1$ , откуда  $\varepsilon/T_0 \approx \ln g$ . Таким образом, температура, при которой теплоёмкость достигает максимума приближенно равна

$$T_0 \approx \frac{\varepsilon}{\ln g} \ll \varepsilon$$

а значение теплоёмкости в максимуме

$$C(T_0) \approx \frac{(\ln g)^2}{4} \gg 1$$

Ширину  $\Delta T$  пика теплоёмкости можно оценить из условия

$$E(T \rightarrow \infty) = \int_0^\infty C dT \approx \Delta T C(T_0) \approx \varepsilon$$

откуда

$$\Delta T \approx \frac{4\varepsilon}{(\ln g)^2} = \frac{4T_0}{\ln g} \ll T_0$$

Таким образом, максимум теплоёмкости смещается в сторону более низких температур, а ширина пика сужается (рис. 8).

**КО-2.** 7. Вклад в статистическую сумму кинетической энергии молекул таков же как для газа в постоянном объеме. Вклад потенциальной энергии (записанный для одной частицы) -

$$z_U = (V - V_1) + V_1 e^{U_0/T} = V_1 e^{U_0/T} \left( 1 + \frac{V - V_1}{V_1} e^{-U_0/T} \right)$$

с точностью до множителя, не дающего вклада в теплоёмкость, подобен статистической сумме, двухуровневой системы с сильно вырожденным верхним уровнем. Зависимость  $C(T)$  имеет максимум при  $T \sim U_0 / \ln \frac{V - V_1}{V_1}$ .

<sup>8</sup> При  $T \ll \varepsilon$ ,  $x \approx 1$  имеем  $\left| \frac{d}{dT} \frac{\varepsilon^2}{T^2} \right| / \left| \frac{dx}{dT} \right| = \frac{2T}{\varepsilon} x \ll 1$ .

Предложенная модель двухуровневой системы помогает понять, почему максимум теплоёмкости сдвигается в область температур, низких по сравнению с  $U_0$ .

**КО-2.** 8. Для изотропного диэлектрика диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  находится из соотношения

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi|\mathbf{P}|}{|\mathbf{E}|}$$

где  $\mathbf{P}$  есть вектор дипольного момента единицы объема, наведенный приложенным внешним электрическим полем  $\mathbf{E}$ , ( $E d \ll T$  для не очень низких температур)

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{d} \rangle = n \frac{\int \mathbf{d} e^{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/T} d\Omega}{\int e^{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/T} d\Omega} \approx n \frac{\int \mathbf{d} (1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/T + \dots) d\Omega}{\int (1 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}/T + \dots) d\Omega} = \frac{nd^2 \mathbf{E}}{3T}$$

где  $n$  - концентрация молекул,  $\mathbf{d}$  - дипольный момент молекулы,  $d\Omega$  - элемент телесного угла вдоль направления дипольного момента молекулы. При вычислении интеграла использовано, что  $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$ ,  $\langle d_i d_j \rangle = \delta_{ij} d^2/3$ . Таким образом, диэлектрическая проницаемость газа молекул, обладающих собственным дипольным моментом, равна

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi n d^2}{3T}$$

**КО-2.** 9. Энергия взаимодействия двух диполей  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , находящихся на расстоянии  $R$ , равна

$$U = \frac{\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1 \mathbf{n})(\mathbf{d}_2 \mathbf{n})}{R^3}$$

здесь  $\mathbf{n}$  - единичный вектор, задающий направление от одного диполя к другому. Действуя так же, как в предыдущей задаче, и принимая во внимание, что усреднение по направлениям двух диполей должно быть независимым, получаем

$$\langle U \rangle = -\overline{U^2}/T = -\frac{2}{3} \frac{d_1^2 d_2^2}{T R^6}$$

где черта над выражением означает усреднение по направлениям векторов  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ .

При попытке усреднения по расположению молекул необходимо было бы принять во внимание не только их притяжение, но и отталкивание на малых расстояниях.

**КО-2.** 10. Распределение по импульсам для системы  $N$  шаров

$$dw = A \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N - E) d^2 p_1 d^2 p_2 \dots d^2 p_N$$

где  $\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$ ,  $E$  - полная энергия системы шаров,  $A$  - нормировочная константа. Чтобы получить распределение по компоненте скорости  $v_x$  одного шара (например, первого), следует проинтегрировать  $dw$  по всем компонентам импульсов, кроме  $dp_{1x}$ . При этом учтем, что  $d^2 p_i \propto d\varepsilon_i$ , а также сделаем замены переменных  $\varepsilon_i = (E - mv_{1x}^2/2) z_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$ ,  $v_{1y} = \sqrt{(E - mv_{1x}^2/2)/m} z_{1y}$ , позволяющие привести интеграл к безразмерному виду (и тем самым уйти от его фактического вычисления)



$$dw = A' \int \delta \left( (E - mv_{1x}^2/2) (z_{1y} + z_2 + z_3 + \dots + z_N - 1) \right) \cdot dz_{1y} dz_2 \dots dz_N (E - mv_{1x}^2/2)^{N-1/2} = A'' (E - mv_{1x}^2/2)^{N-3/2}$$

В итоге,

$$\frac{dw}{dv_x} = B \left( 1 - \frac{mv_{1x}^2}{2E} \right)^{N-3/2}$$

Из условия нормировки,  $\int dw = 1$ , может быть найдена и постоянная  $B = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{E}} \frac{(2N-4)!!}{(2N-3)!!}$ .

## 10.5 Задачи на Больцмановский газ

### КО-3.

1. Оценить температуру в центре Солнца. (Радиус Солнца  $\sim 1$  млн км, его масса  $\sim 2 \cdot 10^{33}$  г.)  
Указание: удобно воспользоваться теоремой о вириале.

### КО-3.

2. Два различных идеальных газа, находившиеся в объёмах  $V_1$  и  $V_2$ , имели одинаковые температуры и давления и были разделены перегородкой. Перегородку убирают, и газы смешиваются (путем диффузии), равномерно заполняя весь объем  $V_1 + V_2$ . На сколько изменится суммарная энтропия газов? Числа частиц в указанных объёмах были равны  $N_1$  и  $N_2$ .

### КО-3.

3. Найти теплоёмкость больцмановского газа, заключённого в ящик высотой  $L$  при температуре  $T$  в поле тяжести.

### КО-3.

4. Больцмановский газ находится в поле

$$U(z) = \begin{cases} U_0 \ln \frac{r}{a} & \text{при } r < a \\ \infty & \text{при } r > a \end{cases}$$

Найти теплоёмкость газа и его давление на стенку при  $r = a$ .

### КО-3.

5. Оценить количество  $N$  молекул в аудитории с кинетической энергией не менее  $\varepsilon_0$  для  $\varepsilon_0 = 1, 2, 3, 4$  эВ (согласно распределению Максвелла). Для случая, когда окажется  $N \ll 1$ , оценить время, спустя которое появится хотя бы одна молекула с такой энергией.

### КО-3.

6. Средняя кинетическая энергия молекулы больцмановского газа равна  $\frac{3}{2}T$ . Найти среднюю величину кинетической энергии молекулы, падающей на стенку.

### КО-3.

7. Сколько воды испарится при  $20^\circ\text{C}$  за 1 с с  $1 \text{ см}^2$  её поверхности, обдуваемой сухим воздухом? Давление насыщенных паров при  $20^\circ\text{C}$  равно 18 мм рт. ст. Какой поток тепла должен бы подводиться к поверхности, чтобы обеспечить такую скорость испарения?

### КО-3.

8. Газ представляет собой смесь частиц нескольких типов с массами  $m_i$  и концентрациями  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  Сечение столкновений частиц „1" и „2" зависит от их относительной скорости,  $\sigma(v_{\text{отн}})$ . Выразить среднее число столкновений этих частиц в единице объема за единицу времени.

**КО-3.**

9. Пусть вероятность столкновений молекул максвелловского газа определяется сечением столкновения, зависящим от их относительной скорости:  $\sigma = \sigma_0 (1 + v_0^2/v_{\text{отн}}^2)$ . Найти частоту столкновений и среднюю длину свободного пробега молекул.

**КО-3.**

10. Найти распределение плотности в атмосфере планеты, считая её изотермической.

**КО-3.**

11. В гравитационном поле звезды массы  $M$  и радиуса  $R$  находится разреженный больцмановский газ, состоящий из частиц массы  $m$ . Температура газа  $T$ , плотность его на большом удалении от звезды  $n$ . Найти число частиц газа, падающих на звезду за одну секунду.

Считать, что длина свободного пробега частиц газа велика по сравнению с радиусом звезды.

**КО-3.**

12. Оценить время, за которое планета может потерять свою атмосферу. (Принимая, что атмосфера изотермическая).

**КО-3.**

13. К какому вкладу в статистическую сумму атома водорода приводит учёт возбужденных состояний атома?

**КО-3.**

14. Больцмановский газ заряженных частиц находится в поле  $U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$  и постоянном однородном магнитном поле, направленном по оси  $z$ . Пренебрегая взаимодействием зарядов между собой, найти магнитный момент газа. Выразить магнитную восприимчивость в расчёте на одну частицу.

**КО-3.**

15. Рассмотреть зависимость теплоёмкости от температуры для газов  $\text{CO}_2$  и  $\text{SO}_2$ . Молекулы  $\text{CO}_2$  имеют линейную форму, а молекулы  $\text{SO}_2$  - треугольную.

3 Относительная скорость - это величина скорости одной из частиц в той системе отсчёта, где другая покоится.

**КО-3.**

16. Выразить теплоёмкости  $C_V$  и  $C_P$  частично ионизированной плазмы через её степень ионизации  $\alpha(T)$ . Нарисовать графики  $C_V(T)$  и  $C_P(T)$ . (Считая зависимость  $\alpha(T)$  известной).

**КО-3.**

17. Найти зависимость степени диссоциации двухатомного газа от температуры при заданном объёме.

**КО-3.**

18. Найти изменение момента инерции молекулы, вызванное её тепловым расширением".

**КО-3.**

19. Водород, имевший комнатную температуру, быстро охладили до температуры  $T_0 \ll T_{\text{rot}} = \hbar^2/2I$ , так что соотношение чисел молекул орто- и параводорода осталось равно 3 : 1. Затем происходит переход к соотношению, равновесному при низкой температуре. Какова будет в итоге температура водорода, если принять, что он теплоизолирован и объём его неизменен?

**КО-3.**

20. Сколько тепла выделится в реакции  $2\text{O}_3 \rightleftharpoons 3\text{O}_2$  при  $T = 27^\circ\text{C}$ ,  $P = 1$  атм? Для оценок принять энергию диссоциации  $\text{O}_2$  равной 5,12 эВ, энергию разрыва связи  $\text{O}_3 \rightarrow \text{O}_2 + \text{O}$  - равной 1,04 эВ. На сколько изменится найденная величина, если реакция идёт при постоянном объёме?

**КО-3.**

21. В этой задаче обсуждается мысленный эксперимент, впрочем, не так уж далёкий от опыта Эйнштейна - де-Гааза.

В процессе решения задачи допустимо так или иначе уточнять и модифицировать её условия.

На цилиндр, который может свободно вращаться вокруг своей оси, вдоль направления оси падает  $N$  электронов, поляризованных вдоль той же оси. Электроны застревают в цилиндре и частично деполяризуются. Вследствие сохранения проекции момента импульса на ось, цилиндр приходит во вращение. Первый (простой) вопрос: откуда взялась энергия вращения?

Главный вопрос: как узнать, какой угловой скорости достигнет цилиндр?

**10.6 Решения Больцмановский газ**

**КО-3.** 2. Первоначальное значение энтропии равно

$$S_H = S_1 + S_2, \quad S_i = N_i \ln \frac{V_i}{N_i} + N_i f(m_i, T), \quad i = 1, 2$$

где функция  $f$  включает в себя величины, не зависящие от плотности  $N_i/V_i$ . После смешивания каждый из газов находится в объёме  $V = V_1 + V_2$  и энтропия равна

$$S_K = S_1 + S_2, \quad S_i = N_i \ln \frac{V_1 + V_2}{N_i} + N_i f(m_i, T), \quad i = 1, 2$$

Изменение энтропии равно

$$\Delta S = N_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} > 0$$

Если бы газы не были бы разными, то изменение энтропии было бы, естественно, равно нулю.

Тот факт, что переходе от газов, молекулы которых различаются как угодно мало, к газам с тождественными молекулами энтропия смешения изменяется скачком, составляет содержание парадокса Гиббса.

**КО-3.** 3. Энергия частицы есть

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

поэтому статистическая сумма частицы  $z$  представляется в виде произведения двух сомножителей, один из которых получается интегрированием по импульсам, а другой - по координатам,  $z = z_p + z_u$ , так что средняя энергия в расчёте на частицу

$$\langle E/N \rangle = -\frac{d}{d\beta} (\ln z_p + \ln z_u)$$

содержит вклады от кинетической энергии ( $c_V T$ ) и от потенциальной:

$$\begin{aligned} \langle U/N \rangle &= -\frac{d}{d\beta} \ln \left( \int e^{-\beta mgz} d^3 r \right) = \\ &= T + \frac{mgL}{\exp(mgL/T) - 1} \end{aligned}$$

При низких температурах,  $T \ll mgL$ ,

$$\langle E/N \rangle \approx (c_V + 1) T = c_P T, \quad C = N c_P$$

(ср. с задачей 1.1); при высоких -

$$\langle E/N \rangle \approx (c_V) T = c_V T, \quad C = N c_V$$

**КО-3.** 4. Вклад в статсумму частицы от распределения по импульсам таков же, как для газа в заданном объёме. Вклад от распределения по координатам

$$z_u = \int_0^a e^{-U/T} dV = 4\pi a^{U_0/T} \int_0^a r^{2-U_0/T} dr = \frac{V}{1-T_0/T} \quad (12)$$

где обозначено

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad T_0 = \frac{U_0}{3}$$

При  $T < T_0$  интеграл (12) расходится, так что в этом случае потребуется дополнительное исследование.

Вклад  $z_u$  в свободную энергию газа

$$F_u = -NT \ln V + NT \ln(1 - T_0/T) \quad (13)$$

потенциальная энергия газа

$$E_u = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{F_u}{T} = -\frac{NT_0}{1 - T_0/T} \quad (14)$$

теплоёмкость

$$C = N(c_V + c_u), \quad Nc_u = \frac{\partial E_u}{\partial T} = \frac{N}{(T/T_0 - 1)^2} \quad (15)$$

При  $U_0 \rightarrow 0$ , разумеется,  $C_u \rightarrow 0$ . При  $T \rightarrow T_0 + 0$  оказывается  $E_u \rightarrow -\infty$ ,  $C_u \rightarrow \infty$ , понизить температуру такого газа ниже  $T_0$  невозможно: нужно было бы отвести бесконечное количество энергии. Нетрудно сообразить, что эта энергия берётся за счёт падения частиц в центр поля.

Концентрация частиц  $n \propto e^{-U/T} = (a/r)^{U_0/T}$ ,

$$n = \frac{N}{V} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^{3T_0/T}$$

Найдём, сколько частиц окажется в очень малой окрестности центра, при  $r < \varepsilon$ .

$$N_\varepsilon = 4\pi \int_0^\varepsilon nr^2 dr = N \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{3(1-T_0/T)}$$

При  $T \rightarrow T_0 + 0$  оказывается  $N_\varepsilon \rightarrow N$ : в центр попадают все частицы. Подробнее о предельных температурах см. [7, 67].

Давление газа при  $r = a$  находим как  $P = nT$ ,

$$P|_{r=a} = \frac{NT}{V} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

Попытка выразить давление как  $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$  (с  $F$  из (13)) приводит к ошибочному результату, легко сообразить, почему.

Заметим, что в поле с более сильной особенностью, чем логарифмическая, например, в поле  $U = -\alpha/r$  частицы классического идеального газа в статистическом равновесии упадут в центр поля при любой температуре:  $\int_{r<\varepsilon} ndV \rightarrow \infty$ . Это означает, конечно, что такая модель газа в таком случае неприменима. Тем интереснее будет увидеть, как справились с этой трудностью при рассмотрении равновесной плазмы.

**КО-3.** 5. Из распределения по скоростям

$$w(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2T} v^2 dv$$

можно получить распределение по энергиям. Например, для  $\varepsilon = mv^2/2$  получаем

$$dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon/T} \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} d\left(\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

Вероятность найти молекулу с энергией  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  для  $\varepsilon_0 \gg T$  даётся интегралом

$$w_0 = w(\varepsilon \geq \varepsilon_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon_0/T}^{\infty} e^{-\varepsilon/T} \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} d\left(\frac{\varepsilon}{T}\right) \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{T}} e^{-\varepsilon_0/T}$$

Для  $\varepsilon_0 = 1$  эВ при нормальных условиях в  $1 \text{ см}^3$  находится примерно 600 молекул. Однако уже для  $\varepsilon_0 = 2$  эВ вероятность найти такую молекулу составляет  $\sim 10^{-34}$ , поэтому таких энергичных частиц нет даже в большой аудитории.

Скоро ли появится молекула с энергией  $\varepsilon > \varepsilon_0 \sim 2$  эВ? Для одной молекулы испытания" происходят с частотой её столкновений (при каждом столкновении изменяется её скорость). Это частота  $\nu \sim v_T/l$ , где  $v_T \sim \sqrt{T/m}$  – характерная (тепловая) скорость молекулы,  $l \sim 1/n\sigma$  – длина свободного пробега,  $n$  – концентрация газа,  $\sigma$  – сечение столкновений молекул. Для  $N$  молекул число испытаний" за время  $t$  равно  $N\nu t (N = nV$  – число молекул в комнате, объём которой равен  $V$ ). Среднее число успешных испытаний" составляет  $w_0 N\nu t$ . Время ожидания появления молекулы с энергией выше  $\varepsilon_0$  оценивается как  $t \sim 1/(w_0 N\nu) \sim \sqrt{\frac{T}{\varepsilon_0}} e^{\varepsilon_0/T} / (N\nu) \sim 10^{-36+17\varepsilon_0(\vartheta \text{ В})}$  с. Для  $\varepsilon_0 \geq 3_{\text{эВ}}$  это время превышает возраст Вселенной.

**КО-3.** 6. Поскольку частицы, имеющие большее значение скорости, быстрее достигают стенки, можно ожидать что искомая энергия  $\langle \varepsilon \rangle$  больше средней энергии молекулы в объёме газа,  $3T/2$ .

Пусть ось  $z$  направлена перпендикулярно стенке наружу. Разобьем кинетическую энергию молекулы  $mv^2/2$  на два слагаемых:

$\varepsilon_{xy} = m(v_x^2 + v_y^2)/2$  и  $\varepsilon_z = mv_z^2/2$ . Число частиц, налетающих на единичную площадку стенки за единицу времени, выражается через концентрацию молекул  $n_0$  и функцию распределения по компоненте скорости  $v_z$

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} e^{-mv_z^2/2T}$$

как

$$n = n_0 \int_0^\infty v_z f(v_z) dv_z = n_0 \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} \int_0^\infty z e^{-z^2} dz = \frac{n_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2\pi m}}$$

а вклад  $\varepsilon_z$  в кинетическую энергию этих частиц

$$n \langle \varepsilon_z \rangle = n_0 \int_0^\infty \varepsilon_z v_z f(v_z) dv_z = n_0 \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} T \int_0^\infty z^3 e^{-z^2} dz = \frac{n_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} T.$$

Таким образом  $\langle \varepsilon_z \rangle = T$ . На величину  $\langle \varepsilon_{xy} \rangle = T$ , движение в направлении  $z$ , приводящее к столкновению со стенкой, не влияет. В итоге  $\langle \varepsilon \rangle = 2T$ . (Для двухатомного газа это движение не влияет и на энергию вращений и колебаний молекул).

Если в откачанный сосуд выпустить через отверстие размера  $d \ll \lambda$  (где  $\lambda$  – длина свободного пробега) небольшую порцию газа с температурой  $T$  (небольшую – для того, чтобы можно было пренебречь обратным потоком), то после установления равновесия температура газа в сосуде станет равной  $T' = (2/3)\langle \varepsilon \rangle = 4T/3$ .

Для обратного случая,  $d \gg \lambda$ , температура вошедшего в отверстие одноатомного газа  $T' = 5T/3$  (см. задачу 1.3, [1, § 39]). Различие этих результатов не должно нас удивлять, потому что механизмы увеличения средней энергии попавших в сосуд частиц различны: в случае  $d \ll \lambda$  в отверстие попадает больше быстрых частиц, а в случае  $d \gg \lambda$ , газ движется, как сплошная среда, и над ним совершает работу атмосферный воздух.

**КО-3.** 7. Пусть поверхность воды находится в контакте с насыщенным паром. Тогда поток молекул, покидающих воду, компенсируется потоком молекул, попадающих в нее из пара. Плотность потока молекул, достигающих поверхности воды, найдена в предыдущей задаче:

$$j = \frac{n_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2\pi m}} = \frac{P}{\sqrt{2\pi m T}}$$

Если принять, что каждая молекула, достигающая поверхности воды, поглощается, то такой же должна быть и плотность потока молекул, покидающих воду. [LL5. 39].

Необходимый подвод тепла в задаче определяется как  $Q = qj$ , где  $q = 2500$  (Дж/г) / ( $6 \cdot 10^{23}$  частиц /  $18 \text{ г}$ ) =  $7,5 \cdot 10^{-20}$  Дж/частица – скрытая теплота испарения. В итоге

$$j = 2,4 \cdot 10^{20} / (\text{см}^2 \text{с}) \cdot Q = 180 \text{ KB/cm}^2.$$

(Величина  $q$  включает не только среднюю энергию вылетающих частиц и их энергию связи, но и работу вытеснения, связанную с увеличением объёма вещества при испарении. Впрочем, доля работы вытеснения невелика.) Необходимый подвод тепла очень велик, так что найденная скорость испарения может поддерживаться в течение малого времени. Поверхность воды очень быстро охладится.

Насколько справедливо предположение, что прилипает каждая молекула? В работе [13] указано, что к поверхности воды в условиях, примерно таких, как в этой задаче, прилипает на самом деле лишь одна молекула из 25. Это снижает численные оценки скорости испарения, необходимого подвода тепла и скорости охлаждения воды, но не отменяет тот факт, что поверхность воды очень быстро охладится и скорость испарения очень быстро упадёт.

**КО-3.** 8. Выберем одну частицу типа 1" со скоростью  $\mathbf{v}_1$  и выразим среднее число столкновений ее  $d\nu$  за 1 секунду с частицами типа 2", скорость которых лежит в области  $d^3v_2$  вблизи  $\mathbf{v}_2$ . Плотность потока таких частиц, записанная в системе отсчёта, в которой частица 1" неподвижна перед столкновением,  $j' = v_{\text{отн}} n_2 f_2(v_2) d^3v_2$ , где  $v_{\text{отн}} = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$  – скорость частицы 2" в системе частицы 1", а число столкновений выражается через сечение:  $d\nu = \sigma(v_{\text{отн}}) j'$ . Полное число столкновений в объёме  $dV$  (за 1 секунду) получаем, просуммировав по всем скоростям частиц 2" и по всем частицам 1":

$$\nu = \int \sigma(v_{\text{отн}}) v_{\text{отн}} n_2 f_2(v_2) d^3v_2 n_1 f_1(v_1) d^3v_1 dV$$

Как и следовало ожидать, величина  $\nu$  не изменяется при замене  $1 \rightleftharpoons 2$

Далее ограничимся случаем, когда скорости частиц нерелятивистские.

Удобно перейти в интеграле к относительной скорости и скорости центра масс:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{V}_{\text{цм}} = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) / (m_1 + m_2).$$

Тогда

$$f_1(v_1) f_2(v_2) d^3v_1 d^3v_2 = f_{\text{цм}}(V_{\text{цм}}) f_{\text{отн}}(v_{\text{отн}}) d^3V_{\text{цм}} d^3v_{\text{отн}}$$

где

$$f_{\text{цм}}(V_{\text{цм}}) = \left( \frac{m_1 + m_2}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-(m_1 + m_2) V_{\text{цм}}^2 / 2T},$$

$$f_{\text{отн}}(v_{\text{отн}}) = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-m v_{\text{отн}}^2 / 2T}$$

э Для релятивистских скоростей частиц в системе покоя частицы 1" концентрация частиц 2" равна  $n'_1 = n_1 / \Gamma$ , где  $\Gamma = 1 / \sqrt{1 - v_1^2 / c^2}$ , а плотность потока частиц 2" (тех, скорость которых в лабораторной системе лежит в области  $d^3v_2$  вблизи  $\mathbf{v}_2$ )  $j' = n'_2 v_{\text{отн}} f_2(v_2) d^3v_2$ , где  $v_{\text{отн}} = \sqrt{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 - [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^2 / c^2} / (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 / c^2)$ ,  $n'_2 = n_2 (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 / c^2) \Gamma$ .  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведенная масса. Проинтегрировав по скорости центра масс, получим для числа столкновений в объёме  $dV$  за время  $dt$

$$d\nu_{12} = 4\pi n_1 n_2 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} dV dt \int_0^\infty v_{\text{отн}}^3 \sigma(v_{\text{отн}}) e^{-m v_{\text{отн}}^2 / 2T} dv_{\text{отн}}$$

Если речь идет о столкновениях одинаковых частиц, то найденный результат нужно разделить пополам,  $n_1 n_2 \rightarrow n^2 / 2$ , так как в этом случае в нашей схеме расчёта каждое столкновение окажется учтённым дважды (каждая из частиц может играть роль как покоящейся, так и налетающей).

**КО-3.** 10. Концентрация газа с массой молекулы  $m$  на расстоянии  $r$  от центра планеты  $n = n_0 \exp \left[ \gamma m m_0 \left( \frac{1}{rT} - \frac{1}{r_0 T} \right) \right]$ . При  $r \rightarrow \infty$  концентрация стремится к постоянной  $n_0 \exp \left( -\frac{v_2^2}{v_T^2} \right)$ , где  $v_2$  – вторая космическая скорость, а  $v_T$  – тепловая. Полное число молекул, окружающих планету бесконечно. Если представить себе, что в начальном состоянии весь газ был связан с планетой, то в равновесном состоянии должно быть  $n_0 \rightarrow 0$ , т. е. планета теряет атмосферу (правда, в интереснейшем случае – очень медленно).

Некоторые звёздные скопления можно рассматривать как газ", молекулы которого – отдельные звёзды, находящиеся в создаваемом ими же поле тяготения. Устанавливается распределение по энергиям звёзд, очень похожее на максвелловское, но самые быстрые из них покидают скопление, так что такие звёздные скопления постепенно испаряются".

**КО-3.** 11. Число частиц, падающих на звезду за единицу времени,

$$\nu = n \int \sigma v f(\mathbf{v}) d^3v = 4\pi n \int_0^\infty \sigma v^3 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-m v^2 / 2T} dv$$

где  $\sigma = \pi R^2 \left( 1 + \frac{2GM}{v^2 R} \right)$  – сечение падения частицы на шар радиуса  $R$  с учётом притяжения, обусловленного потенциальной энергией  $U = -\frac{GMm}{r}$ , а  $f(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-m v^2 / 2T}$  – функция распределения частиц по скоростям. Окончательно

$$\nu = R^2 n \sqrt{\frac{8\pi T}{m}} \left( 1 + \frac{GMm}{RT} \right)$$

Подчеркнём, что это решение относится к случаю, когда газ вокруг звезды настолько разреженный, что длина свободного пробега превышает размер звезды, так что в основном на звезду падают частицы, находившиеся далеко от неё.

В подобных условиях поток частиц на звезду весьма мал.

**КО-3.** 12. Число частиц, покидающих Землю, можно приравнять к числу частиц, падающих на нее в условиях, когда концентрация  $n$  распространяется до бесконечности". Хотя в действительности на каком-то расстоянии от Земли становятся существенными влияния Луны и Солнца, интересующее нас число улетающих частиц определяется процессами, происходящими в атмосфере и её окрестностях, и не должно сильно измениться при замене истинной ситуации на эту несколько идеализированную модель.

Легко проверить, что концентрация газа  $n$  в космическом пространстве, отвечающая условиям равновесия с концентрацией  $n_0$  на поверхности Земли,  $n = n_0 \exp(-v_2^2/v_T^2)$ , достаточно мала, чтобы длина свободного пробега в таком газе была много больше радиуса Земли.

Число частиц, падающих на Землю за секунду, находим, как это сделано в задаче 3.11. Сечение падения  $^{10}\sigma = \pi r_0^2 (1 + v_2^2/v^2)$ .

Число столкновений в секунду  $\nu = 4\pi n \langle \sigma v \rangle$ ,  $\langle \sigma v \rangle \approx \pi r_0^2 v_2^2/v_T^2$ . Время потери атмосферы оцениваем, как  $t_0 \sim N/\nu$ .

Для Земли время  $t$  очень велико, для Луны - нет. Различие обусловлено, в первую очередь, различием величин второй космической скорости. (См. также [12, §79])

**КО-3.** 13. Вклад в статистическую сумму возбужденных состояний атома

$$z = 4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp \frac{e^2}{2n^2 a T}$$

( $e$  - заряд электрона,  $a$  - боровский радиус, множитель 4 - изза спинового вырождения), рассматриваемый формально, расходится. В действительности верхний предел суммирования по  $n$ ,  $n_{\max}$ , возникающий, например, из-за большого размера возбужденных атомов, невелик, функция  $n^2 \exp \frac{e^2}{2n^2 a T}$  быстро убывает с ростом  $n$  и при  $n < n_{\max}$  не достигает ещё своего минимума, так что при расчете термодинамических свойств атомарного водорода достаточно сохранить только первое слагаемое и принимать  $z = 4$ .

**КО-3.** 14. Уровни энергии для частицы в однородном магнитном поле и кратности их вырождения можно найти, например, следующим образом. В книге [21, задача 11.8] приведено каноническое преобразование, приводящее к диагональному виду гамильтониан заряженной частицы в магнитном поле. Это линейное преобразование, и легко видеть, что такое же преобразование для операторов координат и импульсов представляет собой унитарное преобразование, которое приводит гамильтониан к виду

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \frac{\hat{p}_z^2}{2m}$$

атмосферы. Для этого расстояния от Земли и определяется вторая космическая скорость, входящая в сечение падения.

где  $\hat{H}_{1,2}$  - гамильтонианы осцилляторов с частотами <sup>11</sup>

$$\omega_{1,2} = \tilde{\omega} \pm \omega_B, \omega_B = \frac{eB}{2mc}, \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}_B^2}$$

Движение вдоль магнитного поля не зависит от поля и не даёт вклада в магнитные свойства газа. Уровни энергии для поперечного движения  $E_{n_1, n_2} = \hbar \omega_1 (n_1 + 1/2) + \hbar \omega_2 (n_2 + 1/2)$  совпадают с уровнями энергии пары независимых гармонических осцилляторов (и являются невырожденными), так что можно сразу же записать вклад поперечного движения в свободную энергию

$$F_{\perp} = \sum_{1,2} \left( \frac{\hbar \omega_{1,2}}{2} + T \ln \left( 1 - e^{-\hbar \omega_{1,2}/T} \right) \right)$$

Магнитный момент газа

$$\mathcal{M} = -\frac{\partial F_{\perp}}{\partial B} = -N \sum_{1,2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega_{1,2}/T} - 1} \right) \hbar \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial B}$$

<sup>10</sup> Сечение падения частицы на Землю определяется, среди прочего, ее радиусом, который естественно отсчитывать в данном случае до верхних слоев

Подставив

$$\hbar \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial B} = \pm \frac{\omega_{1,2}}{\tilde{\omega}} \mu, \mu = \frac{e\hbar}{2mc}$$

получаем

$$\mathcal{M} = -\frac{N\mu}{2} \left( \frac{\omega_2}{\tilde{\omega}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_2}{2T} - \frac{\omega_1}{\tilde{\omega}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_1}{2T} \right)$$

Определим магнитную восприимчивость в расчете на одну частицу как  $\chi = \frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} \Big|_{B=0}$ . При вычислении можно заменить

$$\hbar \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial B} \Big|_{B \rightarrow 0} \rightarrow \pm \mu, \quad \omega_{1,2} \rightarrow \omega, \quad \tilde{\omega} \rightarrow \omega$$

<sup>11</sup> Частоты  $\omega_{1,2}$  легко найти, рассматривая движение частицы по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

В результате

$$\chi = -\frac{\mu^2}{\hbar\omega} \left( \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} - \frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{sh}^{-2} \frac{\hbar\omega}{2T} \right).$$

При  $T \ll \hbar\omega$  получаем  $\chi = -\frac{\mu^2}{\hbar\omega} = -\frac{e^2}{4mc^2} \frac{\hbar}{m\omega}$ , что соответствует атомному диамагнетизму (см., например, [5, 113]). При  $T \gg \hbar\omega$  получаем  $\chi = -\frac{\mu^2}{3T}$  — диамагнетизм Ландау.

**КО-3.** 15. Вклад в теплоёмкость  $c_V$  поступательных степеней свободы всегда составляет  $3/2$  в расчёте на молекулу. Вклады вращательных степеней свободы "вымерзают" при очень низких температурах (для водорода вращательная теплоёмкость проявляется при  $T < 100$  К, квантовые свойства вращательного движения проявляются у молекул с очень малыми моментами инерции, например, у  $\text{CH}_4$ ).

Вклад каждой вращательной степени свободы при достаточно высоких температурах (т. е. при  $T \gtrsim 10$  К) равен  $1/2$ . Молекула углекислого газа линейная, поэтому у неё две вращательных степени свободы, молекула воды имеет форму треугольника и у неё вращательных степеней свободы три. Пока не включились" колебания, теплоёмкость в расчёте на молекулу у углекислого газа равна  $5/2$ , у водяного пара  $-3$ .

Каждая колебательная степень свободы даёт при достаточно высоких температурах вклад в теплоёмкость, равный 1 (хотя реально это не всегда достижимо из-за диссоциации молекул при таких высоких температурах). Кроме того нужно заметить, что разным колебательным степеням свободы, как правило, отвечают разные частоты, так что включаются" колебательные вклады в теплоёмкость при разных температурах.

Всего у трехатомной молекулы 9 степеней свободы. Три из них приходится на поступательное движение. Для линейной молеку-

лы есть две вращательных степени свободы, поэтому на колебательные приходится четыре степени свободы. Для нелинейной есть три вращательных и следовательно три колебательных степеней свободы.

Для очень высоких температур, когда в теплоёмкость дают вклад все степени свободы, для линейной молекулы  $C_v = 3/2 + 2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1 = 13/2$ , а для нелинейной  $C_v = 3/2 + 3 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1 = 6$ .

**КО-3.** 16. Энергия газа

$$E = (N_A + N_e + N_i) \frac{3}{2} T + N_i I = N_0 \frac{3}{2} T + N_0 \alpha(T) \left( \frac{3}{2} T + I \right)$$

где  $N_0$  - число атомов до нагревания, приведшего к ионизации,  $N_A, N_i, N_e$  - число нейтральных атомов, ионов и электронов,  $I$  энергия ионизации атома. Теплоёмкость при постоянном объёме

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = N_0 \left[ \frac{3}{2} (1 + \alpha) + \frac{d\alpha}{dT} I \right]$$

С ростом температуры растет число частиц и при полной ионизации удваивается. Поэтому удваивается и теплоёмкость. Ионизация происходит в узком интервале температур в окрестности температуры много меньшей  $I$  (если концентрация газа не слишком велика). В этой области имеется узкий пик в зависимости  $C_V(T)$ .

На рис. 9 показана зависимость степени ионизации плазмы от температуры. На рис. 10 —  $C_V(T)$ . (Зависимость  $\alpha(T)$  для рисунков взята из [7, §49], принято  $\frac{2V}{N_0} \left( \frac{mI}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 10^3$ .)

Теплоёмкость при постоянном давлении выражается аналогично через энтальпию. (Именно  $C_P$  входит в условие устойчивости атмосферы с градиентом температуры относительно конвекции.)



**КО-3.** 17. Диссоциацию можно представлять себе как химическую реакцию

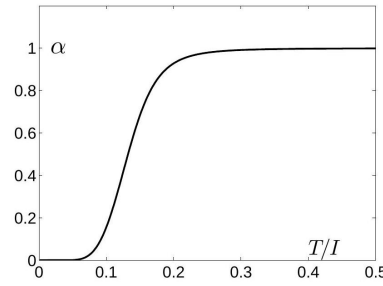
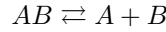


Рис. 9. Зависимость степени ионизации плазмы от температуры при постоянном объёме

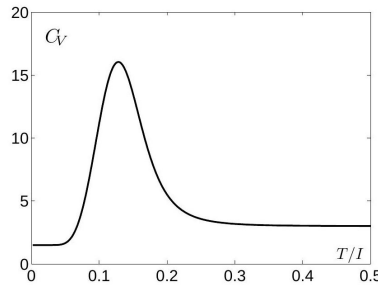


Рис. 10. Зависимость теплоёмкости плазмы от температуры при постоянном объёме

Пусть при очень низких температурах было  $N_0$  молекул. При повышении температуры часть молекул диссоциирует, так что останется  $N_m$  молекул и  $N_A = N_B = N_0 - N_m$  атомов типа  $A$  и  $B$ . Введем степень диссоциации  $\alpha \equiv N_A/N_0$ . Эта величина может изменяться в пределах  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Число атомов и молекул выражаются через степень диссоциации следующим образом:

$$N_A = N_B = \alpha N_0, \quad N_m = (1 - \alpha)N_0$$

Условие химического равновесия

$$\mu_{AB} = \mu_A + \mu_B \quad (16)$$

где  $\mu$  - химический потенциал газа. Для идеального газа

$$\mu_i = -T \ln \frac{z_i}{N_i}, \quad i = A, B, AB \quad (17)$$

где  $z$  - статистическая сумма одной молекулы.

Условие (16) учётом (17) даёт

$$\frac{z_A z_B}{N_A N_B} = \frac{z_{AB}}{N_{AB}}$$

или

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{z_A z_B}{z_{AB} N_0}$$

Обозначим энергию диссоциации молекулы  $W$ . Если сообщить такую энергию атомам покоящейся молекулы, то они разлетятся в разные стороны, причем скорость их по мере разлета будет стремиться к нулю. Записывая статсуммы для разных частиц, нужно согласовать их начала отсчета энергии: принимая за ноль энергии покоящихся атомов  $A$  и  $B$ , будем считать энергию покоящейся молекулы  $AB$  равной  $-W$ . Статсумма частицы  $A$

$$z = g_A V \int e^{-p^2/2mT} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = g_A V \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

аналогична статсумма атома  $B$ . Для молекулы нужно добавить множители <sup>12</sup>

$$z_{rot} = \frac{2IT}{\hbar^2}, \quad z_{vib} = \frac{e^{W/T}}{1 - e^{-\hbar\omega/T}}$$

В итоге

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{V}{N_0(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{m_{AB}}{m_A m_B} \right)^{3/2} \frac{2IT^{1/2}}{\hbar^5} (1 - e^{-\hbar\omega/T}) e^{-W/T} \quad (18)$$

Для разреженного газа уже при  $T \lesssim \hbar\omega$  большая часть молекул диссоциирует. В этом случае

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/2} e^{-W/T}$$

где

$$T_0^{-1/2} = \frac{V}{N_0(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{m_{AB}}{m_A m_B} \right)^{3/2} \frac{2I}{\hbar^5}$$

Температуру  $T_{\text{дис}}$ , при которой степень диссоциации  $\alpha = 1/2$ , находим, решая это уравнение методом последовательных приближений.

$$T_{\text{дис}} \approx \frac{1}{2} \frac{W}{1 + \ln(W/T_0)}$$

Обратим внимание на странное поведение  $\alpha$  в (18) при  $T \rightarrow \infty$ . Причина - в некорректном учёте колебательных уровней энергии при вычислении  $z_{vib}$  (подробнее см. в [7, §50]).

**КО-3.** 21. Если перевернётся  $N_1$  электронов, закон сохранения момента импульса приводит к равенству  $I\Omega = \hbar N_1$ , где  $I$  - момент инерции цилиндра,  $\Omega$  - его угловая скорость. Энергия вращения  $E_k = \Omega^2/2I$  будет взята из внутренней энергии, так что энтропия цилиндра уменьшится на  $S_0 = E_k/T$ , где  $T$  - температура цилиндра. (Её считаем неизменной, принимая, что теплоёмкость цилиндра достаточно велика.) Энтропия электронов, связанная с ориентацией их спинов, станет равна  $S_e = \ln C_N^{N_1} = \ln \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$ . Величина  $N_1$  определяется условием, чтобы прирост энтропии был максимальным:  $\frac{\partial}{\partial N_1} (S_e - S_0) = 0$ , откуда  $\Omega = N\hbar/I (1 + e^{\hbar\Omega/T})$ .

## 10.7 Задачи на Идеальный ферми-газ

4.1. Молекулы газа могут оседать (адсорбироваться) на поверхности сосуда. Имеется определённое количество мест на поверхности, на которые может быть адсорбирована молекула. Каждое из них может принять не более одной молекулы. Какая доля возможных мест окажется занята молекулами? (Эта доля называется степенью адсорбции <sup>4</sup>.) Газ бoльцмановский, давление его равно  $P$ , температура  $T$ . Энергия адсорбированной молекулы равна  $-\varepsilon$ .

4.2. Найти химический потенциал, среднюю энергию и давление электронов проводимости в меди, атомный вес  $A \approx 64$  г/моль, плотность  $\rho \approx 9$  г/см<sup>3</sup>, считая, что каждый атом меди предоставляет один электрон проводимости.

Замечание. На самом деле в кристалле электроны движутся в периодическом поле, так что зависимость энергии от квазиимпульса заметно сложнее, чем зависимость энергии от импульса для свободного электрона. Поэтому результат предлагаемого расчёта следует рассматривать как оценку.

4.3. Найти давление вырожденного электронного ультрарелятивистского газа в зависимости от концентрации.

4.4. В атомах с большим числом  $Z$  электронов большая часть из них движется вблизи ядра в объёме с характерным размером  $R$ . В модели Томаса - Ферми эти электроны рассматриваются как вырожденный электронный газ, температура которого равна нулю. (Один-два электрона движутся вблизи наружной части атома, где поле ядра почти полностью экранировано. Поэтому

размеры всех атомов близки друг к другу.) Пренебрегая кулоновским взаимодействием электронов друг с другом, оценить величину  $R$ .

4.5. Найти магнитный момент и магнитную восприимчивость вырожденного электронного газа, связанные с магнитным моментом электрона.

4.6. Когда в обычной звезде выгорает заметная часть водорода (превращаясь в гелий), термоядерная реакция прекращается и звезда, излучая, будет сжиматься. С повышением плотности газ электронов становится вырожденным. Сжатие останавливается благодаря тому, что гравитационные силы такой звезды будут компенсироваться давлением вырожденного электронного газа. Такая звезда, называется белым карликом. Оценить радиус белого карлика, масса которого равна  $M \sim M_\odot$ , где  $M_\odot \sim 2 \cdot 10^{33}$  г - масса Солнца.

4.7. Если звезда на начальной стадии имела массу, заметно большую массы Солнца, или масса белого карлика может увеличиваться за счет захвата окружающего вещества, то энергия Ферми электронного

<sup>102</sup> Если атомы  $A$  и  $B$  тождественны, то нужно добавить еще множитель "число симметрии" - аналог множителя  $1/N!$  в статсумме газа.

<sup>04</sup> Эта задача отнесена к теме "ферми-газ" в связи с тем, что предполагаемый метод её решения широко используется в этом разделе.

газа может достичь порога реакции  $e + p \rightarrow n + \nu$ , ( $\Delta m = m_n - m_p = 1,3\text{МВ}$ ), электронный газ при этом становится релятивистским, ( $m_e = 0,511\text{М}$ ). Газы электронов и протонов почти совсем исчезают, нейтрино улетают. Звезда становится нейтронной (возможно, пульсаром). Оценить радиус нейтронной звезды, масса которой по порядку величины совпадает с массой Солнца.

4.8. Найти квантовую поправку к давлению ферми-газа и теплоёмкости при постоянном объёме, считая газ слабо вырожденным.

Найти квантовую поправку к теплоёмкости при постоянном давлении для слабо вырожденного ферми-газа.

4.9. Столб слабо вырожденного ферми-газа находится в однородном поле тяжести. Найти квантовые поправки к его теплоёмкости и высоте центра масс.

Указание. Удобно воспользоваться разложением по малой величине  $r = e^{\mu/T}$ .

4.10. Найти зависимость плотности и давления вырожденного ферми-газа в поле тяжести от высоты при  $T = 0$ .

4.11. Найти теплоёмкость вырожденного ферми-газа в поле гармонического осциллятора  $U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ .

4.12. Если в полупроводник IV группы ( $Ge, Si$ ) ввести в небольшом количестве атомы V группы ( $P, As, Sb$ ), то четыре электрона каждого из них образуют валентные связи с  $Ge, Si$ , а один электрон остается слабо связанным; энергия связи  $\Delta_d \sim 0,01 - 0,03$  эВ, и он легко может перепрыгнуть в зону проводимости уже при температуре  $T \sim 300$  К. Легированные таким образом полупроводники называют донорными или полупроводниками  $n$ -типа. Энергия электрона, связанного с ионом донорной примеси, равна  $\varepsilon_d$ .

Считая известным химический потенциал электронов, найти, какая доля атомов донорной примеси будет ионизирована.

4.13. Атом примеси в полупроводнике имеет уровень энергии, близкий к потолку валентной зоны:  $\varepsilon_a = -\Delta/2 + \Delta_a$ ;  $\Delta_a \ll \Delta$  (отсчёт энергии от середины запрещённой зоны; такая примесь называется акцепторной). На этом уровне может оказаться один электрон, причем он может находиться в одном из двух спиновых состояний. Выразить вероятность того, что электрон окажется в таком состоянии, через химический потенциал электронов.

4.14. В объёме  $V$  полупроводника имеется  $N_d$  атомов донорной примеси. Найти число электронов в зоне проводимости. Ограничиться случаем, когда  $N_d \gg N_0$ , где  $N_0$  - число электронов в чистом полупроводнике (при том же значении температуры). Отсчитанная от дна зоны проводимости энергия электрона, связанного с ионом донорной примеси, равна  $\varepsilon_d = -\Delta_d$ .

4.15. Найти теплоёмкость газа электронов и дырок в чистом полупроводнике.

4.16. При каком давлении водород будет иметь плотность  $10 \text{ кг/см}^3$ ? На сколько изменится это давление, если температура поднимется от  $300 \text{ К}$  до  $3000 \text{ К}$ ?

4.17. Электронный газ в металле обычно бывает сильно вырожденным ( $T \ll \varepsilon_F \equiv \mu$ ). Поэтому часто оказывается удобным рассматривать вместо газа свободных электронов газ квазичастиц - электронов и дырок с энергией, отсчитываемой от уровня Ферми:  $\varepsilon(\mathbf{p}) = |\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu| = v_0 |p - p_0|$ . Здесь  $v_0 = p_0/m$ ,  $p = |\mathbf{p}|$ . (При  $p > p_0$  это электроны, при  $p < p_0$  - дырки.)

Найти отношение числа квазичастиц электронного газа к числу частиц.

4.18. Кусок металла представляет собой катод в электровакуумном приборе. Этот кусок металла представляет собой для электронного газа потенциальную яму с крутыми стенками. Расстояние от уровня Ферми электронного газа до верхнего уровня ямы  $A$  - работа выхода. Катод нагрет до температуры  $T$ , такой что  $A \gg T$ , так что лишь небольшая доля электронов может покидать металл. К металлу приложено напряжение, мало изменяющее эту потенциальную яму, но достаточное для того, чтобы все электроны, покинувшие катод достигали анода (образуется ток насыщения).

Определить зависимость тока насыщения от температуры.

4.19. [Л5. 55], [7, 34], [11, п. 7.1]. Микросостояние идеального газа можно задать, указав, сколько частиц находится в каждом возможном для частицы состоянии. Объединим близкие, в частности, имеющие одинаковые энергии, состояния в большие группы по  $G_i \gg 1$  частиц в каждой. Задав число частиц  $N_i$  в каждой из групп, мы определяем макросостояние газа, вообще говоря, неравновесное.

Найти энтропию такого состояния для ферми-газа и выразить её через числа заполнения групп состояний  $f_i = N_i/G_i$  и  $G_i$ .

Найти числа заполнения, отвечающие максимуму энтропии при фиксированных значениях полного числа частиц и полной энергии газа. Найти среднее квадратичное отклонение чисел заполнения от максимального значения.

## 10.8 Решения Идеальный ферми-газ

4.1. Разобьем поверхность на ячейки, которые могут быть либо пусты, либо заняты только одной частицей. Мы можем рассматривать одну ячейку как систему, способную обмениваться энергией и частицами с газом. Степень адсорбции  $\theta$  - отношение числа адсорбированных молекул к числу мест на поверхности - равно среднему числу молекул, находящихся на каждом из возможных мест. Можно видеть, что условия заполнения мест такие же, как для фермионов с энергией  $-\varepsilon$  (возможное число частиц 0 или 1). Поэтому величина  $\theta$  определяется распределением Ферми:

$$\theta = \frac{1}{e^{-(\varepsilon+\mu)/T} + 1}$$

где  $\mu$  - химический потенциал адсорбированных молекул, совпадающий вследствие условия равновесия относительно обмена частицами с химическим потенциалом этих частиц в газе

$$\mu = -T \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] = -T \ln \left[ \frac{T^{5/2}}{P} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]$$

(для простоты записи мы считаем газ одноатомным).

Таким образом получаем для степени адсорбции так называемую изотерму Ленгмюра.

$$\theta = \left[ e^{\varepsilon/T} T^{5/2} (m/2\pi\hbar)^{3/2} / P + 1 \right]^{-1} \equiv \frac{P}{P + P_0}$$

где использовано обозначение  $P_0 = e^{\varepsilon/T} T^{5/2} (m/2\pi\hbar)^{3/2}$ .

Во избежание недоразумений, заметим, что распределение Ферми возникло в этой задаче не вследствие тождественности частиц, а вследствие их силового взаимодействия, (см. также [8, гл. 1, задача 29]). Результат не зависит от того, являются частицы фермионами или бозонами. Учёт же того факта, что адсорбированная частица может иметь разные состояния (например, спиновые), приведёт к некоторому изменению распределения (см. задачу 4.12).

4.2. Считая, что каждый атом меди поставляет один электрон проводимости, имеем

$$\begin{aligned} \frac{N_e}{V} &= \frac{9 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{64} \approx 9 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} \\ \varepsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} \approx \\ &\approx \frac{10^{-54} \text{ эр}^2 \text{с}^2}{2 \cdot 10^{-27} \text{ Г}} (30 \cdot 9 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3})^{2/3} \approx 10^{-11} \text{ эрг} \approx 7 \cdot 10^4 \text{ К} \approx 6 \text{ эВ} \\ P &= \frac{2}{5} \frac{N}{V} \varepsilon_F \approx 0,4 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3} \cdot 10^{-11} \text{ эрг} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ а} \end{aligned}$$

Оценка  $\varepsilon_F$  показывает, что электронный газ в металлах при любых температурах является вырожденным.

Этот расчёт заслуживает наименования "ценка", так как в действительности электронный газ в металлах (в том числе и в меди) многими свойствами отличается от описанного идеального газа свободных электронов.

4.3. Связь между импульсом Ферми и плотностью остается такой же, как для нерелятивистского электронного газа:

$$p_0 = \hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \quad (19)$$

однако выражения для энергии и давления меняются

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= cp_0 = \hbar c \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \\ E &= \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_0} c p p^2 dp = \frac{3}{4} N \varepsilon_0 = \frac{3}{4} N \hbar c \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \\ P &= \frac{c}{4} (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3} = \frac{1}{3} \frac{E}{V} \end{aligned}$$

Приведем также зависимость давления вырожденного фермигаза от его плотности в случае промежуточных плотностей, когда газ не является ультрарелятивистским. Можно, например, выразить давление как

$$P = \int_{v_x > 0} 2p_x v_x f(\varepsilon) d\Gamma / V = \int_0^{p_0} \frac{p v}{3} \frac{2 \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

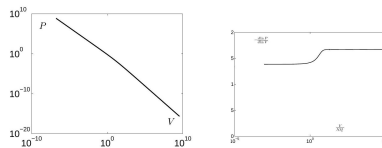


Рис. 11. Зависимость давления (в единицах мы, изображенной на рис. 11,  $-\frac{d \ln P}{d \ln V}$ ,  $N \lambda_c^3$ ) от объёма

где  $p_0$  по-прежнему определяется (19), а  $\varepsilon = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$ ,  $v = c^2 p / \varepsilon$ . В результате несложных выкладок получаем

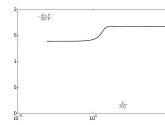


Рис. 12. Зависимость наклона изотерм  $mc^2/\lambda_c^3$  от объёма

$$P = \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} =$$

$$= \frac{mc^2}{8\pi^2 \lambda_c^3} \left[ x\sqrt{1+x^2} (2x^2/3 - 1) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]$$

где  $x = p_0/mc$ ,  $\lambda_c = \hbar/mc = 3,8 \cdot 10^{-11}$  см — комптоновская длина волны электрона.

Переход от зависимости  $P \propto V^{-5/3}$  к  $P \propto V^{-4/3}$  происходит в довольно широком интервале плотностей в окрестности  $\lambda_c^{-3}$ . На рис. 11 приведена изотерма электронного газа при нулевой температуре (в логарифмическом масштабе), на рис. 12 — зависимость наклона изотермы  $-\frac{d \ln P}{d \ln V}$  от  $\frac{V}{N \lambda_c^3}$ .

Здесь уместно напомнить, что с повышением плотности электронного газа роль кулоновского взаимодействия электронов падает.

4.4. Число электронов  $N_e = Z$ , объём  $V \approx r^3$ . Тогда кинетическая энергия частиц вырожденного ферми-газа есть

$$E_K \approx \frac{Z \hbar^2}{m} \left( \frac{Z}{r^3} \right)^{2/3} \approx \frac{Z^{5/3} \hbar^2}{m r^2}$$

Поскольку в среднем электроны находятся ближе к ядру чем друг к другу, полная энергия кулоновского взаимодействия по порядку величины равна

$$E_{\text{кул}} \approx -Z \frac{Ze^2}{r}$$

Минимизируя полную энергию  $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{кул}}$  как функцию  $r$ , получаем

$$r \approx \frac{\hbar^2}{m e^2 Z^{1/3}} \approx \frac{a_B}{Z^{1/3}}$$

О модели Томаса — Ферми см. [5, 70]. В задаче к указанному параграфу показано, между прочим, что энергия взаимодействия электронов с ядром в модели Томаса — Ферми в 7 раз больше энергии их взаимодействия друг с другом, что до некоторой степени оправдывает пренебрежение последней.

4.5. Возможны две разные проекции спина на направление магнитного поля, соответственно, два значения проекции магнитного момента электрона,  $\pm \mu_0$ ,  $\mu_0 = e\hbar/(2mc)$  ("по полю" и "против поля"), и разные вклады в энергию электрона,  $\mp \mu_0 \mathcal{H}$ . В зависимости от ориентации спина различными окажутся и значения граничного импульса (при одной граничной энергии  $\varepsilon_F$ )

$$\frac{p_{\uparrow}^2}{2m} - \mu_0 \mathcal{H} = \frac{p_{\downarrow}^2}{2m} + \mu_0 \mathcal{H} = \varepsilon_F \quad (20)$$

Количества частиц с каждой из ориентаций спина

$$N_{\uparrow\downarrow} = \frac{4\pi p_{\uparrow\downarrow}^3 V}{3(2\pi\hbar)^3} \quad (21)$$

Полное число электронов  $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$  в объёме  $V$  с учётом (20), (21) определяет величину  $\varepsilon_F$ . Магнитный момент направлен вдоль магнитного поля и определяется как

$$\mathcal{M} = (N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \mu_0$$

Учтём теперь, что энергия спина в магнитном поле мала по сравнению с энергией Ферми  $^{13} \mu_0 \mathcal{H} \ll \varepsilon_F$ , и разложим  $N_{\uparrow\downarrow}$  по  $\mu_0 \mathcal{H}/\varepsilon_F$  (учитывая, что при этом условии  $N \propto \varepsilon_F^{3/2}$ ):

$$N_{\uparrow\downarrow} = \frac{N}{2} \left( 1 \pm \frac{3 \mu_0 \mathcal{H}}{2 \varepsilon_F} \right).$$

Отсюда видно, что энергия Ферми при включении магнитного поля с точностью до  $\mu_0 \mathcal{H}/\varepsilon_F$  включительно не изменяется. Магнитный момент

$$\mathcal{M} = \frac{3N\mu_0^2 \mathcal{H}}{2\varepsilon_F}$$

а магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{\mathcal{M}}{V \mathcal{H}} = \frac{3\mu_0^2 N}{2\varepsilon_F V}$$

Это парамагнитная восприимчивость Паули. Для вырожденного электронного газа она оказалась много меньше, чем для больцмановского (с той же концентрацией), потому что фактически могут ориентироваться во внешнем поле только электроны, энергия которых близка к энергии Ферми.

Для вырожденного электронного газа, как и для больцмановского, парамагнитная восприимчивость на треть компенсируется диамагнетизмом Ландау, обусловленным орбитальным движением электронов, (см. подробнее в [LL5. §59 – 60], [7, §59]).

4.6. Кинетическая энергия частиц вырожденного электронного газа есть

$$E_{\text{кин}} \sim N_e \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{N_e}{V} \right)^{2/3} \sim \frac{\hbar^2 N_e^{5/3}}{m_e R^2}, \quad N_e \sim \frac{M}{4m_p}$$

Из условия минимума полной энергии

$$E_{\text{полн}} \sim -\frac{GM^2}{R} + \frac{\hbar^2}{m_e R^2} \left( \frac{M}{4m_p} \right)^{5/3}$$

следует выражение для радиуса белого карлика

$$R_{\text{бк}} \sim \frac{\hbar^2}{Gm_e m_p^{5/3} M^{1/3}} \approx 10^4 \text{K} \quad (22)$$

Обратим внимание на сходство с задачей 4.4.

4.7. При концентрации вещества, когда энергия Ферми электронного газа не очень превышает величину  $\Delta m \ll m_n$ , нейтронный газ ещё остаётся нерелятивистским. Радиус звезды определяется противодействием гравитационного сжатия и давления вырожденного нейтронного газа. Для оценки радиуса нейтронной звезды можно воспользоваться результатом предыдущей задачи, (22), заменив только массу электрона на массу нейтрона. В итоге оценка дает радиус, примерно в 1000 раз меньший.

Если масса нейтронной звезды ещё больше, то нейтронный газ становится релятивистским. В пределе ультрарелятивистского ферми-газа зависимость кинетической энергии газа от размера звезды становится такой же, как потенциальной ( $E \propto R^{-1}$ ). Коэффициент же в этой зависимости для потенциальной энергии растет с массой быстрее. Поэтому при некоторой величине массы звезды гравитационное сжатие становится преобладающим, звезда неограниченно сжимается и превращается в чёрную дыру.

Оценка предельной массы нейтронной звезды на принятом в этих задачах уровне точности даст в результате величину порядка массы Солнца. Это правильно, но интересен и более точный расчет. Корректный расчёт требует применения общей теории относительности.

4.8. Вспомним

$$\begin{aligned} \Omega &= F - N\mu = F - \Phi = -PV, \quad d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \\ \Omega &= -T \ln Q, \quad Q = \prod_k q_k, \quad q_k = 1 + e^{(\mu - \varepsilon_k)/T}, \quad \ln Q = \sum_k \ln q_k \end{aligned}$$

В случае слабо вырожденного газа  $e^{(\mu - \varepsilon)/T} \ll 1$ , так что

$$\begin{aligned} \ln q_k &= e^{(\mu - \varepsilon_k)/T} - \frac{1}{2} e^{2(\mu - \varepsilon_k)/T} \\ \ln Q &= e^{\mu/T} z(T) - \frac{1}{2} e^{2\mu/T} z(T/2) \\ z &= \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} = 2V \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} PV &= T \ln Q = T e^{\mu/T} z(T) \left( 1 - e^{\mu/T} z(T/2)/2z(T) \right) = \\ &= T e^{\mu/T} z(T) \left( 1 - e^{\mu/T}/2^{5/2} \right) = -\Omega \\ N &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = e^{\mu/T} z(T) \left( 1 - 2e^{\mu/T}/2^{5/2} \right) \\ \frac{PV}{NT} &= 1 + e^{\mu/T}/2^{5/2} \end{aligned}$$

Подставив в малую поправку  $e^{\mu/T} = N/z(T)$  (как для больцмановского газа), получаем

$$\frac{PV}{NT} = 1 + \frac{N\hbar^3}{4V} \left( \frac{\pi}{mT} \right)^{3/2} \quad (23)$$

Как и следовало ожидать, невозможность находиться двум и более электронам в одном и том же состоянии приводит к увеличению давления по сравнению с идеальным больцмановским газом.

<sup>013</sup> К тому же магнитная восприимчивость определяется как  $\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} \right|_{\mathcal{H}=0}$ . Здесь  $M = \mathcal{M}/V$  - намагничённость.

Энергия нерелятивистского газа в заданном объеме связана с его давлением соотношением  $E = (3/2)(PV/N)$ . Из (23)

$$E = \frac{3}{2}NT \left( 1 + \frac{N\hbar^3}{4V} \left( \frac{\pi}{mT} \right)^{3/2} \right)$$

а теплоёмкость

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}N \left( 1 - \frac{N\hbar^3}{8V} \left( \frac{\pi}{mT} \right)^{3/2} \right)$$

Уменьшение теплоёмкости также можно качественно объяснить влиянием принципа Паули: количество состояний, в которые возможен переход, уменьшилось, и для нагревания газа это подобно уменьшению числа его частиц.

Для определения  $C_p$  воспользуемся известной формулой

$$C_p - C_v = -T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 / \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

В итоге

$$C_p = \frac{5}{2}N \left( 1 - \frac{11N\hbar^3}{40V} \left( \frac{\pi}{mT} \right)^{3/2} \right)$$

4.10. Как видно из постановки вопроса, подразумевается, что на каждой высоте достигнуто локальное равновесие газа.

Граничный импульс и граничная кинетическая энергия фермионов на данной высоте связаны с плотностью газа на этой высоте:  $p_0 = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n^{1/3}$ ,  $\varepsilon_0 = p_0^2/2m = An^{2/3}$ , давление  $P = \frac{2}{5}n\varepsilon_0$ .

Можно было бы воспроизвести вывод барометрической формулы, знакомый по курсу общей физики, стартуя от равенства  $dP = -mgdx$

Другой способ - записать равенство  $\mu = \mu(x)$ , где  $\mu$  - химический потенциал ферми-газа, а  $\mu(x) = \varepsilon_0 + mgx$  - локальное значение химического потенциала, складывающееся из граничного значения кинетической энергии и потенциальной энергии.

Это сразу же даёт

$$n = [(\mu - mgx)/A]^{3/2} = (mg/A)^{3/2} (x_{\max} - x)^{3/2}$$

Здесь  $x_{\max} = \mu/mg$  - высота столба газа. Химический потенциал связан с полным числом фермионов в столбе газа единичного сечения  $N$  условием  $N = \int_0^{x_{\max}} n dx = \frac{2}{5} \left( \frac{mg}{A} \right)^{3/2} x_{\max}^{5/2}$ .

Естественно считать, что температура мала, но не равна нулю. Тогда при высотах, близких к  $x_{\max}$ , условие  $\mu(x) \gg T$  будет нарушено, газ перестанет быть вырожденным, а при  $x > x_{\max}$  в зависимости  $n(x)$  появится хвост в виде распределения Больцмана.

4.11. Удобно использовать известные уровни энергии и кратности их вырождения для гармонического осциллятора  $^{14}\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2)$ ,  $g_n \approx 2n^2/2 = n^2$ , так что

$$N = \sum_0^\infty g_n f(\varepsilon_n), \quad E = \sum_0^\infty \varepsilon_n g_n f(\varepsilon_n)$$

Переходя к интегрированию по  $d\varepsilon = \hbar\omega dn$  (с  $dn = 1$ ), получаем

$$N = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad E = \frac{1}{(\hbar\omega)^3} \int_0^\infty \varepsilon^3 f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (24)$$

Используя известное приближенное выражение для интегралов вида

$$\int_0^\infty F(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^\mu F(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} F'(\mu), \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1}$$

применимое при условии  $T \ll \mu$ , получаем

$$N \approx \frac{\mu^3}{3(\hbar\omega)^3} \left( 1 + \frac{\pi^2 T^2}{\mu^2} \right), \quad E \approx \frac{\mu^4}{4(\hbar\omega)^3} \left( 1 + \frac{2\pi^2 T^2}{\mu^2} \right)$$

<sup>14</sup> Для определения кратности вырождения полезно вспомнить задачу 2.2 .

Из первого равенства находим с помощью последовательных приближений  $\mu$ . Положив  $T = 0$ , получаем  $\mu \approx \mu_0 = \hbar\omega(3N)^{1/3}$ . Те- перь это значение  $\mu$  можно подставить в малые добавки, стоящие в круглых скобках. Таким образом

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 \left(1 + \frac{\pi^2 T^2}{\mu_0^2}\right)^{-1/3} = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{3\mu_0^2}\right) \\ E &= \frac{\mu_0^4}{4(\hbar\omega)^3} \left(1 - \frac{\pi^2 T^2}{3\mu_0^2}\right)^4 \left(1 + \frac{2\pi^2 T^2}{\mu_0^2}\right) = \frac{\mu_0^4}{4(\hbar\omega)^3} \left(1 + \frac{2\pi^2 T^2}{3\mu_0^2}\right) = \\ &= \frac{\mu_0^4}{4(\hbar\omega)^3} + \frac{\mu_0^3}{6(\hbar\omega)^3} \frac{\pi^2 T^2}{\mu_0} = E_0 + N \frac{\pi^2 T^2}{2\mu_0}\end{aligned}$$

Отсюда теплоёмкость электронного газа в поле гармонического осциллятора при низких температурах

$$C = \frac{\pi^2 T}{\mu_0} N = \frac{\pi^2 T}{3^{1/3} \hbar \omega} N^{2/3}$$

В случае высоких температур химический потенциал становится отрицательным и по модулю большим по сравнению с температурой, так что в выражении для среднего числа заполнения уровней можно пренебречь единицей в знаменателе и распределение Ферми переходит в распределение Больцмана. Тогда из (24)

$$\begin{aligned}N &= A e^{\mu/T} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = A e^{\mu/T} T^3 2! \\ E &= A e^{\mu/T} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon = A e^{\mu/T} T^4 3!\end{aligned}$$

Отсюда  $E = 3NT$ ,  $C = 3N$ , как и должно быть для трехмерного гармонического осциллятора.

4.12. Атом примеси может находиться в одном из трех состояний: иметь один связанный электрон с энергией  $\varepsilon_d$  и одним из двух направлений спина либо не иметь связанных электронов.

Согласно большому каноническому распределению вероятности этих состояний равны

$$w_\uparrow = w_\downarrow = \frac{1}{q} e^{(\mu - \varepsilon_d)/T}, \quad w_0 = \frac{1}{q}$$

где  $q = 1 + 2e^{(\mu - \varepsilon_d)/T}$  найдено из условия  $w_\uparrow + w_\downarrow + w_0 = 1$ . Доля ионизированных атомов донорной примеси равна  $w_0$ .

4.13.

$$w = \frac{2}{2 + e^{(\varepsilon_d - \mu)/T}}$$

4.14. Количества электронов, дырок и ионизированных атомов примеси при заданных значениях температуры и химического потенциала (за начало отсчета энергии и химического потенциала выбрано дно зоны проводимости)

$$N_e = 2V \left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\mu/T}, \quad N_h = 2V \left(\frac{m_h T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-(\Delta + \mu)/T} \quad (25)$$

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + 2e^{(\mu + \Delta_d)/T}} \quad (26)$$

Химический потенциал определяется условием электрической нейтральности полупроводника

$$N_e = N_h + N_d^+ \quad (27)$$

Произведение

$$N_e N_h = N_0^2 = 4(m_e m_h)^{3/2} \left(\frac{T}{2\pi\hbar^2}\right)^3 e^{-\Delta/T}$$

не зависит от величины химического потенциала. Поэтому указанное в условии задачи соотношение  $N_d \gg N_0$  приводит к соотношению  $N_e \sim N_d^+ \gg N_h = N_0^2/N_e$ , так что в условии (27) можно пренебречь количеством дырок  $N_h$ . Подставив в (26)

$$e^{\mu/T} = N_e/N_1, \quad N_1 = \frac{V}{2} \left(\frac{m_e T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

получаем уравнение для определения  $N_e$

$$N_e = \frac{N_d}{1 + (N_e/2N_1) e^{\Delta_d/T}} \quad (28)$$

В результате

$$N_e = N_1 e^{-\Delta_d/T} \left( \sqrt{1 + \frac{2N_d}{N_1} e^{\Delta_d/T}} - 1 \right)$$



Если  $2N_d \gg N_1 e^{-\Delta_d/T}$ , то  $N_e = \sqrt{2N_1 N_d} e^{-\Delta_d/2T}$ . В этом случае наклон графика  $\ln \sigma$  (где  $\sigma$  – проводимость<sup>15</sup>) в зависимости от  $1/T$  позволяет найти величину  $\Delta_d$ . В обратном предельном случае  $N_e = N_d$  и не зависит от температуры. Это как раз тот режим, в котором работает большинство полупроводниковых приборов.

При дальнейшем повышении температуры (и не слишком больших концентрациях примеси) достигается условие  $N_d \ll N_0$  и полупроводник может рассматриваться как чистый.

4.15. Учтем, что электроны и дырки подчиняются распределению Больцмана, причем количества их одинаковы и  $N_e = N_h \propto T^{3/2} e^{-\Delta/2T}$  ( $\Delta$  – ширина запрещенной зоны). Энергия газа электронов и дырок  $E = N_e(\Delta + 3T)$ . Теплоёмкость  $C = \frac{dE}{dT}$ . Учитывая, что  $\Delta \gg T$ , получаем  $C = N_e \frac{\Delta^2}{2T^2} (1 + O(\frac{T}{\Delta}))$ .

4.17.  $3 \ln 2 \cdot (T/\mu)$ ,  $\mu = p_0 v_0/2$ .

При вычислении можно принять  $d^3p = 4\pi p_0^2 dp$  и при этом суммировать вклады электронов и дырок. (Подробнее об электронах и дырках в металлах см., например, [16, 2.2]).

Заметим, что определения дырок в полупроводнике и в металле различны.

<sup>15</sup> Проводимость  $\sigma \propto (N_e/V)$ . Отсюда  $\ln \sigma = -\Delta_d/2T + \ln N_1 + \text{const}$ . Зависимостью  $\ln N_1 = (3/2) \ln T + \text{const}$  от  $T$  обычно можно бывает пренебречь.

4.18. Обратим внимание на сходство задачи с задачей 3.6.

При наличии достаточного напряжения возникает ток насыщения, определяемый потоком электронов из металла. Этот поток можно считать таким же, как в отсутствие напряжения между катодом и анодом, когда вне металла есть газ электронов, находящийся в равновесии с электронным газом в металле. Удобно рассчитать именно поток электронов в металл в таких условиях. Химические потенциалы электронных газов вне и внутри металла совпадают. Если вести отсчет от уровня, отвечающего покоящейся частице вне металла, то  $\mu = -A$ . Обычно  $A \gg T$ , так что газ вне металла оказывается бoльцмановским. Мы будем считать его идеальным. Его концентрация

$$n_0 = \frac{N}{V} = e^{\mu/T} z/V = 2e^{-A/T} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

(см. задачу 4.8). Плотность потока частиц, вылетающих из металла, в равновесии равна плотности потока частиц, падающих на него. Она была найдена в задаче 3.6:

$$j = \frac{n_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2\pi m}}$$

Главная зависимость от температуры содержится в экспоненте (в  $n_0(T)$ ).

Может возникнуть впечатление, что из задачи выпал вопрос о сложном законе дисперсии электронов в металле  $\varepsilon(\mathbf{p})$ . Но совсем не так: появляется равносильно сложный вопрос о коэффициенте конденсации (вероятности прилипания электрона при ударе о поверхность металла). Например, для электрона, энергия которого попала в запрещенную зону внутри металла, коэффициент отражения равен единице. Так что предложенное решение нельзя считать вполне корректным для реальных металлов.

Можно вспомнить также, что при меньших напряжениях существенным оказывается влияние на ток объемного заряда. В условиях же, когда все электроны удаляются от катода, объемного заряда нет и расчёт с гипотетическим идеальным газом является разумным.

4.19.  $S = \sum_i G_i [f_i \ln f_i + (1 - f_i) \ln (1 - f_i)]$ .

Суммируются вклады электронов и дырок. Максимуму энтропии отвечает распределение Ферми - Дирака.

$$\langle (\Delta f_i)^2 \rangle = - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial f_i^2} \right)_{\sum G_i f_i, \sum \varepsilon G_i f_i}^{-1} = f_i (1 - f_i)$$

## 10.9 Задачи на Идеальный бозе-газ

5.1. Бозе-газ находится в поле  $U = m\omega^2 r^2/2$ . Найти температуру  $T_k$  конденсации Бозе - Эйнштейна, теплоёмкость при  $T < T_k$  и скачок теплоёмкости в точке конденсации.

5.2. Для бозе-газа в заданном объеме найти скачок величины  $\left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V$  при температуре конденсации Бозе - Эйнштейна.

5.3. Бозе-газ находится в поле

$$U(z) = \begin{cases} Fz & \text{при } z > 0 \\ \infty & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

Найти температуру  $T_k$  конденсации Бозе - Эйнштейна, теплоёмкость при  $T < T_k$ , скачок теплоёмкости в точке конденсации, высоту центра тяжести газа  $\langle z \rangle$  и скачок величины  $\frac{\partial \langle z \rangle}{\partial T}$ .

5.4. Для бозе-газа в центральном поле  $U(r) = Ar^n$  найти скачок величины теплоёмкости при температуре конденсации Бозе - Эйнштейна.

5.5. Изобразить изотермы бозе-газа на  $PV$  плоскости.

5.6. Рассматриваем звезду - белый карлик, которая почти целиком состоит из смеси ядер гелия и электронов и имеет температуру  $T \sim 10^7$  К (Такая температура поддерживалась, пока не выгорел" весь водород.) Благодаря высокой

теплопроводности и прозрачности вещества белого карлика температура его почти одна и та же всюду. Только тонкий поверхностный слой имеет гораздо меньшую температуру  $T_1 \sim 10^4$  К

Оценить, за какое время такая звезда остынет (превратившись в коричневого карлика).

5.7. Используя модель Дебая, найти средний квадрат отклонения атома от положения равновесия  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ .

5.8. Найти соотношение между концентрациями электронов, позитронов и фотонов и соотношение между их энергиями при температуре  $T \gg m_e c^2$  (такая высокая температура была в малые доли секунды после Большого взрыва; в этих условиях можно принять, что концентрации электронов и позитронов одинаковы).

5.9. Газ нагрет до такой высокой температуры, что количество фотонов, находящихся с ним в равновесии, стало сравнимо с количеством частиц газа. (Такие условия выполняются в глубине Солнца). Найти скорость звука в этой смеси газов,  $c_s^2 = (\partial P / \partial \rho)_S$ . Температура  $T \ll mc^2$  ( $m$  – масса частицы газа,  $c$  – скорость света).

5.10. Идеальный бозе-газ в поле тяжести находится в сосуде, имеющем форму конуса с вертикальной осью. Найти температуру бозе-эйнштейновской конденсации, зависимость от температуры теплоёмкости газа и высоты его центра тяжести.

5.11. Это задача для бозе-газа, поставленная так же, как задача 4.19 для ферми-газа.

Найти энтропию неравновесного состояния бозе-газа и выразить её через числа заполнения групп состояний  $f_i = N_i / G_i$  и числа состояний в группах  $G_i$ .

Найти числа заполнения, отвечающие максимуму энтропии при фиксированных значениях полного числа частиц и полной энергии газа. Найти среднее квадратичное отклонение чисел заполнения от максимального значения.

5.12. Абсолютно чёрное тело вращается вокруг Солнца по орбите Земли. До какой температуры нагреет его излучение Солнца? Влияния потоков частиц (солнечного ветра) не учитывать.

## 10.10 Решения Идеальный бозе-газ

5.1. Воспользуемся тем, что уровни энергии частицы в данном поле и кратности их вырождения хорошо известны:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2), \quad g_n = C_{n+1}^2 \approx n^2/2$$

В уравнении

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1}$$

позволяющем найти температуру конденсации Бозе - Эйнштейна  $T_k$  и химический потенциал при  $T > T_k$ , можно перейти к интегрированию по  $n$ , а затем и по  $x = \hbar\omega n/T$ :<sup>16</sup>

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 b_2(y), \quad y = \frac{3\hbar\omega/2 - \mu}{T} \quad (29)$$

$$b_a(y) := \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{e^{x+y} - 1}$$

Температура конденсации достигается, когда химический потенциал имеет максимально возможное значение, что отвечает условию  $y = 0$ :

$$N = \frac{1}{2} \left( \frac{T_k}{\hbar\omega} \right)^3 b_2(0), \quad T_k = \hbar\omega \left( \frac{2N}{b_2(0)} \right)^{1/3}$$

Энергия газа

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n \varepsilon_n}{e^{(\varepsilon_n - \mu)/T} - 1} = N \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{T^4}{2(\hbar\omega)^3} b_3(y) \quad (30)$$

Теплоёмкость  $C = \frac{dE}{dT}$ . При  $T < T_k$  выполняется условие  $y = 0$ , в этом случае

$$\begin{aligned} C &= 2 \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 b_3(0) = 4N \left( \frac{T}{T_k} \right)^3 \frac{b_3(0)}{b_2(0)} = \\ &= 12N \left( \frac{T}{T_k} \right)^3 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} = 10,8N \left( \frac{T}{T_k} \right)^3 \end{aligned}$$

При  $T > T_k$  необходимо учесть зависимость  $y$  от  $T$ :

$$C = 2 \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 b_3(y) - \frac{3}{2} \frac{T^4}{(\hbar\omega)^3} b_2(y) \frac{dy}{dT} \quad (31)$$

Производную  $\frac{dy}{dT}$  находим, продифференцировав уравнение (29) по  $T$  (удобно его предварительно прологарифмировать):

$$\frac{3}{T} - \frac{2b_1(y)}{b_2(y)} \frac{dy}{dT} = 0 \quad (32)$$

Подставив  $\frac{dy}{dT}$  из (32) в (31), получаем

$$C = 2 \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 b_3(y) - \frac{9}{4} \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 \frac{b_2^2(y)}{b_1(y)}$$

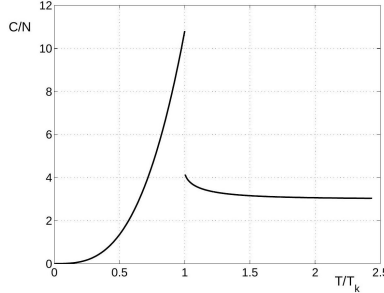


Рис. 13. Теплоёмкость бозе-газа в поле  $U = m\omega^2 r^2/2$   
Скачок теплоёмкости при  $T = T_k$

$$\Delta C = -\frac{9}{4} \left( \frac{T_k}{\hbar\omega} \right)^3 \frac{b_2^2(0)}{b_1(0)} = -\frac{9}{2} \frac{b_2(0)}{b_1(0)} N = -9 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} N = -6,58N$$

На рис. 13 приведена зависимость  $C(T)$ , найденная численно.

5.2. Ответ.  $\Delta \left( \frac{\partial C_V}{\partial T} \right)_V = -\frac{27}{16\pi} \zeta^2 \left( \frac{3}{2} \right) \frac{N}{T_k} = -3,67 \frac{N}{T_k}$ .

5.3. Будем рассматривать столб газа единичной площади сечения. Распределение частиц по импульсам и по высоте

$$f(\varepsilon(z, p)) = f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} - 1}, \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + U(z)$$

Химический потенциал определяется равенством

$$N = \int f(\varepsilon(z, p)) \frac{dz d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \int_0^\infty dz \int_0^\infty dp \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} f(\varepsilon(z, p))$$

Удобно перейти от интегрирования по  $z$  к интегрированию по  $\varepsilon$ , после чего интеграл по  $p$  легко вычисляется:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty d\varepsilon \int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} \frac{p^2 dp}{dU/dz} \frac{f(\varepsilon)}{2\pi^2 \hbar^3} = \\ &= \int_0^\infty d\varepsilon \frac{(2m\varepsilon)^{3/2} f(\varepsilon)}{6\pi^2 \hbar^3 F} = \frac{(2m)^{3/2} T^{5/2}}{6\pi^2 \hbar^3 F} b_{3/2}(y) \end{aligned} \quad (33)$$

где  $y = -\mu/T$ . Температура  $T_k$  конденсации Бозе - Эйнштейна определяется условием  $y = 0$ .

$$T_k = \left[ \frac{6\pi^2 \hbar^3 F N}{(2m)^{3/2} b_{3/2}(0)} \right]^{2/5}, \quad T_k \approx \frac{2\hbar^{1,2} F^{0,4}}{(Nm)^{0,6}}$$

5.4. Если  $n < 6$ , то  $\Delta C = -Ns^2 \zeta(s)/\zeta(s-1)$ , где  $s = 3/n + 3/2$ . Если  $n > 6$ , то  $\Delta C = 0$ ,  $dC/dT \rightarrow -\infty$  при  $T \rightarrow T_k + 0$ .

5.5. Давление любого нерелятивистского идеального газа с изотропным распределением по скоростям может быть выражено через плотность энергии:  $P = \frac{2E}{3V}$ . Для бозе-газа

$$P = \frac{2}{3} AT^{5/2} b_{3/2}(y), \quad y = -\frac{\mu}{T} \quad (34)$$

Величина  $y$ , связанная с химическим потенциалом газа, определяется из уравнения

$$N = AVT^{3/2} b_{1/2}(y) + N_0 \quad (35)$$

Графический анализ его решения представлен на рис.14. Уравнения (34),(35) определяют уравнение изотермы в параметрическом виде ( $0 < y < \infty$ , см. рис.15).

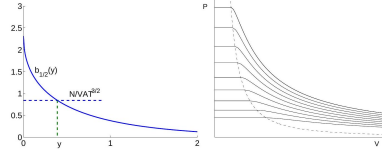


Рис. 14. Графическое решение уравнения, Рис. 15. Изотермы бозе-газа. Пунктирная определяющего  $y$  линия - линия фазового перехода

При уменьшении объема  $V$  при постоянной температуре величина  $y$  в (35) достигает максимального возможного значения,  $y = 0$ . Это точка бозе-конденсации,

$$V = V_k \equiv V|_{y=0}, \quad P = P_k \equiv P|_{y=0}$$

Исключив из этих уравнений  $T$ , получаем линию фазового перехода на  $PV$  плоскости:

$$P_k V_k^{5/3} = \frac{2b_{3/2}(0)N^{5/3}}{3b_{1/2}^{5/3}(0)A^{2/3}} \quad (36)$$

При  $V < V_k$  в (34)  $y = 0$  ( а в (35) еще и  $N_0 > 0$ ), - давление остается постоянным и равным  $P_k$ . Вблизи линии фазового перехода ( $V - V_k \ll V_k, y \ll 1$ )

$$\begin{aligned} b_{3/2}(y) &= b_{3/2}(0) - \frac{3}{2}b_{1/2}(0)y \\ b_{1/2}(y) &= b_{1/2}(0) - \pi\sqrt{y} \end{aligned}$$

С учетом этого

$$\frac{P - P_k}{P_k} = -\frac{3b_{1/2}(0)y}{2b_{3/2}(0)}, \quad \frac{V - V_k}{V_k} = \frac{\pi\sqrt{y}}{b_{1/2}(0)}$$

так что

$$\frac{P - P_k}{P_k} = -\frac{3b_{1/2}^2(0)}{2\pi^2 b_{3/2}(0)} \left( \frac{V - V_k}{V_k} \right)^2$$

Изотерма пересекает линию фазового перехода без излома.

#### 5.6. Потеря энергии определяется излучением

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi R^2 \sigma T_1^4$$

а изменение температуры - теплоёмкостью вещества. Теплоёмкость же обусловлена невырожденным газом ядер, так что

$$\frac{dE}{dt} \sim C \frac{dT}{dt} \sim \frac{3}{2} \frac{M}{4m_p} \frac{T}{t}$$

Здесь  $R \sim 10^4$  км,  $M \sim 10^{33}$  г радиус и масса звезды (см. задачу 4.6),  $\sigma \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ В/м}^2 \text{ К}^{-4}$  - постоянная Стефана Больцмана. Оценку времени остывания  $t$  получаем, приравняв эти два выражения  $\dot{E}$ .

Результат  $t \sim 10^8$  лет. Это время довольно маленькое по космическим масштабам. В действительности в поверхностном слое содержится водород и идёт реакция термоядерного синтеза, так что наша оценка не совсем правильна. Тем не менее, белые карлики остывают достаточно быстро и наблюдаются сейчас (а не остыли все давно) потому, что они постоянно воспроизводятся в результате эволюции звезд.

#### 5.7. Отклонение атома, связанное с одним из нормальных колебаний $^{17}r_k$ , определяется условием

$$\frac{Nm\omega_k^2 \langle r_k^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2} \hbar \omega_k \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar \omega_k / T} - 1} \right) \quad (37)$$

отклонения в разных колебаниях можно считать независимыми и поэтому значения  $\langle r_k^2 \rangle$  для разных  $k$  и разных поляризаций сложить:

<sup>0</sup><sub>17</sub> В качестве нормальных колебаний выбраны бегущие волны, так что отклонение каждого из атомов по величине одно и то же.

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \int \frac{\hbar}{Nm\omega} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/T} - 1} \right) \frac{3Vd^3k}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{3V\hbar}{4Nm\pi^2 u^3} \int_0^{\omega_m} \omega \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} d\omega, \quad \hbar\omega_m = T_D\end{aligned}$$

Заметим, что величина  $\langle r^2 \rangle$  играет роль в теории рассеяния на кристалле рентгеновских лучей. Она же определяет, насколько ярко выраженным окажется в данном кристалле эффект Мёссбауэра.

Для многих веществ справедливо также правило Линдемана, определяющее температуру плавления: при температуре плавления  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}/a \sim 0,2 - 0,25$ , где  $a$  – размер ячейки кристаллической решётки. [7, 53], [10, гл. 2 9]

Интересно рассмотреть также отклонение атома в одномерной цепочке.

5.8. Равновесные значения числа частиц в указанной реакции определяются условиями  $\mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 2\mu_\gamma = 0$ . При температуре  $T \gg m_e c^2$  концентрации электронов и позитронов во много раз превышают концентрацию частиц при исходных („земных“) условиях, поэтому можно пренебречь различием концентраций частиц и античастиц. Равенство концентраций электронов и позитронов дает  $\mu_{e^+} = \mu_{e^-} = 0$ . Учитывая также, что почти все электроны и позитроны в этих условиях являются ультрарелятивистскими, получаем

$$\begin{aligned}N_{e^-} &= V \int_0^\infty 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp(pc/T) + 1} = \frac{V}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 f_2(0) \\ E_{e^-} &= \frac{VT}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 f_3(0) \\ N_\gamma &= \frac{V}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 b_2(0), \quad E_\gamma = \frac{VT}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 b_3(0)\end{aligned}$$

где функции  $b_a, f_a$  определены в дополнении С. Интегралы  $f_n(0)$  и  $b_n(0)$  связаны простым соотношением  $f_n(0) = (1 - 2^{-n}) b_n(0)$ . Следовательно,

$$\frac{N_{e^-}}{N_\gamma} = \frac{3}{4}, \quad \frac{E_{e^-}}{E_\gamma} = \frac{7}{8}$$

Интересно, что в данной равновесной системе средние энергии, приходящиеся на один электрон (или позитрон) и на один фотон, не совпадают. Заметим также, что парциальные давления ультрарелятивистских газов оцениваются как  $P_i = E_i/3V \sim n_i T$ . А точнее, например, для фотонного газа

$$P_\gamma = (\pi^4/(90\zeta(3)))n_\gamma T = 0,9n_\gamma T$$

для электронного -

$$P_e = 1,05n_e T$$

5.9. ([6, 65, задача 2]). Давление  $P_\gamma$  и энтропия  $S_\gamma$  фотонного газа равны

$$P_\gamma = \frac{a}{4} T^4, \quad S_\gamma = a T^3 V, \quad \text{где} \quad a = \frac{4\pi^2}{45(\hbar c)^3}$$

Учтя также вклад частиц в давление и энтропию, а также тот факт, что массовая плотность в рассматриваемых условиях определяется только частицами, получаем

$$\varrho = nm = \frac{Nm}{V}, \quad P = \frac{NT}{V} + \frac{1}{4} a T^4 \quad (38)$$

$$S = VaT^3 + N \ln V + \frac{3}{2} N \ln T + S_0 \quad (39)$$

Здесь  $N$  - полное число частиц в объёме  $V$ , а  $m$  - средняя масса частицы. (Для водородной плазмы  $m$  - половина массы протона).

Скорость звука  $c_s^2 = (\partial P / \partial \rho)_S$  представим в виде

$$c_s^2 = \frac{\partial(P, S)}{\partial(\varrho, S)} = \frac{\partial(P, S)}{\partial(V, T)} / \frac{\partial(\varrho, S)}{\partial(V, T)}$$

Вычисление с использованием (38),(39) приводит к результату

$$\frac{\partial(P, S)}{\partial(V, T)} = -\frac{3}{2}n(n + 2aT^3) - (n + aT^3)^2, \quad \frac{\partial(\varrho, S)}{\partial(V, T)} = -\frac{3mn}{2T}(n + 2aT^3),$$

$$c_s^2 = \frac{5T}{3m} \left[ 1 + \frac{2(aT^3)^2}{5n(n + 2aT^3)} \right].$$

Для  $n \gg aT^3$  получается известный результат для одноатомного газа  $c_s^2 = 5T/3m$ . В случае  $n \ll aT^3$ , что эквивалентно  $n \ll n_\gamma$ , получается  $c_s^2 \sim (5T/3m)(n_\gamma/n)$ , т. е. много больше характерной тепловой скорости частиц.

Для численных оценок ответ удобно представить в таком виде, чтобы можно было подставлять значения температуры в градусах Кельвина:

$$c_s^2 = \frac{5k_b T}{3m} \left[ 1 + \frac{2(\tilde{a}T^3)^2}{5n(n + 2\tilde{a}T^3)} \right].$$

$$\tilde{a} = ak_b^3 = 4,1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \text{ К}^{-3}.$$

В глубине Солнца концентрация фотонов оказывается сравнима с концентрацией частиц. В слоях Солнца, близких к его поверхности, происходит конвективный перенос тепла, приводящий, помимо прочего, к возникновению шума. От каждой точки поверхности во все стороны распространяется звук. (Размер точки - ячейки конвективного движения  $\sim 1000$  км.) Ещё более мощные колебания возникают при появлении и исчезновении солнечных пятен.

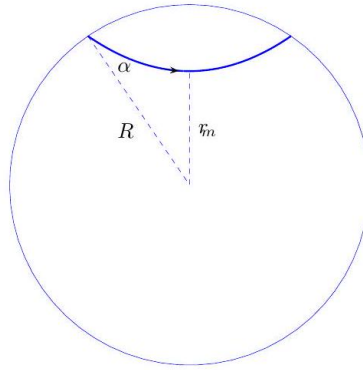


Рис. 16. Схематическое изображение звукового луча, стартовавшего с поверхности Солнца под углом  $\alpha$

Скорость звука растет с глубиной (вместе с температурой и с концентрацией фотонов). Поэтому звуковые волны, распространяющиеся вглубь под углом к вертикали, испытывают преломление, а затем и полное отражение и поворачивают обратно, достигнув той или иной глубины, <sup>18</sup> и возвращаются на поверхность, удалившись на то или иное расстояние от источника звука. Глубина, которой достигает звуковой луч, оказывается связана с расстоянием от источника звука, на котором луч вернется на поверхность, и с временем, спустя которое это произойдет. Каждая из точек поверхности Солнца оказывается, таким образом, как источником звука, так и приёмником звука, вернувшегося из глубины. Изучая корреляцию движений вещества в разных точках поверхности Солнца, можно получать сведения о его внутреннем строении (подобно тому, как информация о распространении волн, возникающих при землетрясениях, позволяет исследовать внутреннее строение Земли).

18 Гамильтониан волнового пакета звуковых колебаний  $\hat{H} = c_s(r)p$ , где  $\mathbf{r}$  определяет положение волнового пакета, а импульс  $p = |\mathbf{p}|$  пропорционален волновому вектору несущей звуковой волны. Энергия и момент импульса - интегралы движения. Это приводит к соотношению, определяющему расстояние от центра Солнца  $r_m = R(c(r_m)/c(R)) \sin \alpha$ , которого достигнет звуковой волновой пакет, в зависимости от угла падения  $\alpha$ . (Здесь  $R$  - радиус Солнца).

$$5.11. S = \sum_i G_i [(1 + f_i) \ln(1 + f_i) - f_i \ln f_i]$$

Максимуму энтропии при заданных значениях полной энергии и числа частиц отвечает распределение Бозе - Эйнштейна.

$$\langle (\Delta f_i)^2 \rangle = f_i (1 + f_i)$$

5.12. Солнце излучает в секунду энергию  $I = 4\pi r^2 \sigma T_0^4$ , где  $r$  - радиус Солнца,  $T_0 \approx 6000$  К - температура его поверхности,  $\sigma$  - постоянная Стефана - Больцмана. Для определённости считаем тело шаром радиуса  $a$ . В секунду на тело попадает (и поглощается им) энергия  $(\pi a^2 / 4\pi R^2) I$ , где  $R$  - расстояние до Солнца. Тело излучает за то же время энергию  $4\pi a^2 \sigma T^4$ , где  $T$  - температура тела. В установившемся режиме эти энергии должны быть равны, откуда  $T = (r/2R)^{1/2} T_0$ . Подставив  $r_0 = 0,7$  млн км,  $R = 150$  млн км, получаем  $T \approx 290$  К.

Ответ не изменится, если тело не является абсолютно чёрным. Однако форма тела для ответа существенна. Существенна и зависимость коэффициента отражения от частоты.

Если одна сторона тела чёрная, а другая - отражающая, то его температуру, очевидно, можно регулировать, так или иначе его поворачивая.

### 10.11 Задачи на Неидеальный газ. Фазовые переходы

6.1. Для двухатомного слабо неидеального газа известен второй вириальный коэффициент  $B(T)$ . Найти среднюю энергию в расчете на одну молекулу газа.

Как изменяется температура такого газа при расширении его в пустоту?

6.2. Выразить величину  $(\frac{\partial T}{\partial P})_H$ , характеризующую изменение температуры при эффекте Джоуля - Томсона, через теплоёмкость и уравнение состояния для газа ван-дер-Ваальса.

6.3. Выразить температуру, давление и молярный объём в критической точке через постоянные, входящие в уравнение вандер-Ваальса.

6.4. Газ ван-дер-Ваальса находится в однородном поле тяжести. Определить зависимость плотности газа от высоты, считая температуру постоянной.

6.5. Насыщенный водяной пар находится в теплоизолированном сосуде. Объём сосуда уменьшают. Станет ли пар пересыщенным?

6.6. Найти зависимость скрытой теплоты фазового перехода от температуры  $dq/dT$ . Рассмотреть случаи испарения (например, воды при  $T \sim 100^\circ\text{C}$ ) и плавления льда.

6.7. Давление насыщенного водяного пара при некоторых значениях температуры:

$T (^\circ\text{C})$	20	30	100
$P (\text{Па})$	2333	4240	101325

(см. [18].)

Приняв, что скрытая теплота испарения зависит от температуры линейно, получить зависимость  $P(T)$  в этом диапазоне температур.

Найти зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры.

6.8. Насыщенный водяной пар при  $T = 100^\circ\text{C}$  имел давление 1 атм. На сколько процентов изменилась его плотность в процессе, при котором давление возросло до 1,01 атм. и пар остался насыщенным?

6.9. В сосуд, объём которого 1 л, налили 1 г воды и закупорили его, после чего сосуд стали нагревать. При какой температуре вся вода испарится?

6.10. В закрытом сосуде находятся в равновесии пар и небольшое количество жидкости. При нагревании сосуда количество жидкости убывает и при некоторой температуре в сосуде остаётся только пар. При этой температуре теплоёмкость содержимого сосуда испытывает скачок. Найти величину этого скачка. Объём сосуда в процессе нагревания считать постоянным.

6.11. За какое время испарится капля воды, находящаяся в сухом воздухе, температура которого равна  $20^\circ\text{C}$ ? Начальный

радиус капли равен  $a_0 = 1$  мм. Какой будет в процессе испарения температура капли? Коэффициент диффузии водяного пара в воздухе равен  $D = 0,22 \text{ см}^2/\text{с}$ , коэффициент теплопроводности воздуха  $\lambda = 0,024 \text{ Вт}/(\text{смК})$ , давление насыщенного водяного пара и скрытую теплоту испарения воды  $q$  в зависимости от температуры можно найти в предыдущих задачах.

6.12. Найти радиус кривизны капли воды, находящейся в равновесии с пересыщенным паром, и исследовать устойчивость такого равновесия.

6.13. Найти зависимость температуры плавления льда от давления на лёд при условиях, когда давление образующейся при этом воды оказывается равно атмосферному.

6.14. Найти скачок теплоёмкости латуни состава  $\text{CuZn}$  в точке упорядочения сплава. Кристаллическая решетка кубическая объёмноцентрированная. Использовать приближение молекулярного поля, учитывая лишь взаимодействие ближайших соседей.

6.15. Найти скачок теплоёмкости латуни состава  $\text{Cu}_{1+k}\text{Zn}_{1-k}$  в точке упорядочения сплава.

6.16. Модель перехода спираль - клубок" в длинной молекуле. □

Рассматривается молекула, имеющая форму лестницы" (подобной двойной спирали ДНК). Каждая ступенька может находиться в одном из двух состояний - целом" и разорванном". Энергия, необходимая для разрыва, равна  $\varepsilon$ .

Если две разорванных ступеньки оказываются рядом, то область молекулы между ними приобретает значительную подвижность, так что число возможных конфигураций этой области становится равно  $g \gg 1$ . Появление уединённого" разрыва не ведет к росту числа конфигураций. Число ступенек  $N$  очень велико. Можно считать молекулу замкнутой в кольцо.

Определить теплоёмкость молекулы и среднее число разорванных звеньев в зависимости от температуры.

6.17. Вещество имеет температуру немного ниже температуры фазового перехода второго рода. Имеются две области вещества, в которых параметр порядка  $\eta = \pm\eta_0$ . Полагая, что на переходном участке между этими областями параметр  $\eta$  зависит лишь от одной координаты  $x$ , и используя аналогию с задачами аналитической механики, найти зависимость  $\eta(x)$  и величину поверхностного натяжения  $\sigma$  (в рамках модели Цернике - Орнштейна).

### 10.12 Решения Неидеальный газ. Фазовые переходы

6.1.  $E = E_{\text{ид}} - \frac{N^2}{V} B'(T)$ . При расширении в пустоту  $E = \text{const}$ . Чаще всего неидеальный газ в таком процессе (процесс Гей - Люссака) охлаждается. Однако для охлаждения газа использовать такой процесс неудобно.

6.2. [7, §13] Для газа ван-дер-Ваальса энтальпия

$$H = N \left( c_V T + \frac{T}{1 - nb} - 2an \right) \quad (40)$$

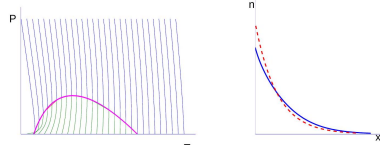


Рис. 17. Зависимость давления от температуры при эффекте Джоуля - ван-дер-Ваальса в поле тяжести от Томсона. Под жирной кривой - аналогичная кривая, в которой происходит охлаждение газа

где  $n = N/V$  - плотность,  $c_V$  - теплоёмкость (в расчёте на частицу), которую считаем постоянной. На рис. 17 показаны зависимости  $P(T)$  для разных начальных значений температуры и давления и кривая инверсии в процессе Джоуля - Томсона, кривая, на которой

$$\left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = 0$$

Зависимость  $P(T)$  для изображения графиков определена параметрически с использованием (40) и уравнения ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{nT}{1 - nb} - an^2$$

$$6.3. T_k = 8a/27b; P_k = a/27b^2; V_k = 3b.$$

См., например, [7, §12], [LL5, §83 - 84].

6.4. Можно воспользоваться тем же способом, что в задаче 4.10. Химический потенциал газа ван-дер-Ваальса выражаем как  $\left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T}$ ,

где свободная энергия

$$F = F_{ид} - NT \ln \left( 1 - \frac{Nb}{V} \right) - \frac{N^2 a}{V}.$$

$$\mu(x) = \mu_{ид} - T \ln(1 - nb) - \frac{nbT}{1 - nb} - 2an,$$

$$\mu_{ид} = T \ln n + f(T).$$

Зависимость  $n(x)$  определяется равенством  $\mu(x) = \mu - mgx$ .

Разумеется, для построения графика (рис. 18) удобнее вычислять  $x(n)$ . Нормировка графиков выбрана такой, чтобы на них было одинаково полное число частиц.

6.5. Сравним величину  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S$  с  $\frac{dT}{dV}$  вдоль кривой равновесия фаз.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= \frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} = \frac{\partial(P, V)}{\partial(V, S)} = \frac{\partial(P, V)}{\partial(V, T)} \frac{\partial(V, T)}{\partial(V, S)} = - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \frac{T}{C_V} \\ \frac{dV}{dT} &= \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dT} = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \frac{q}{T \Delta v} \end{aligned}$$

С учетом уравнения состояния  $PV = NT$  и  $\Delta v \approx V/N$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S / \frac{dT}{dV} = \frac{N}{C_V} \left( \frac{q}{T} - 1 \right)$$

6.6. Представив скрытую теплоту испарения в виде  $q = T \Delta s$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dT} &= \Delta s + T \frac{d\Delta s}{dT} = \frac{q}{T} + T \left( \frac{\partial \Delta s}{\partial T} \right)_P + T \left( \frac{\partial \Delta s}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dT} = \\ &= \frac{q}{T} + \Delta c_P - \left( \frac{\partial \Delta v}{\partial T} \right)_P \frac{q}{\Delta v} \end{aligned} \quad (41)$$

Для испарения воды можно принять  $\Delta v = v = T/P$ , что приводит к

$$\frac{dq}{dT} = \Delta c_P \equiv c_{P \text{ пара}} - c_{P \text{ жидк.}} \ll \frac{q}{T}$$

Если интервал температур не очень широк, можно принять с хорошей точностью  $q \approx \text{const}$ .



Для плавления льда можно пренебречь последним слагаемым в (41) по сравнению с первым.

6.7. Ответ можно представить в форме

$$P = P_0 \exp \left( \frac{q}{T_0} - \frac{q}{T} \right) \left( \frac{T_0}{T} \right)^a$$

где  $P_0 = 2333$  Па,  $T_0 = 293^\circ\text{K}$ ,  $q = 6724,8^\circ\text{K}$ ,  $a = 4,7695$ .

Плотность  $n = P\mu/RT$ ,  $\mu = 18$  г,  $R = 8,314$  Дж/(моль К).<sup>19</sup>

6.8

$$\frac{dv_{\text{н}}}{v_{\text{н}}} = -\frac{dP}{P} \left( 1 - \frac{T}{q} \right)$$

Подставив  $q = 6,78 \cdot 10^{-20}$  Дж/част.,  $k_{\text{в}} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К,  $T = 373$  К, получаем  $k_{\text{в}}T/q = 0,076 \ll 1$ , так что  $dv_{\text{н}}/v_{\text{н}} = -0,01$ .

6.9. Число молей воды в сосуде  $\nu = 1/18$ , на моль приходится объём  $v = 22,4 \cdot 10^{-3} \cdot 293/273$  м<sup>3</sup>. Искомая температура определяется условием  $Pv = RT$ , где зависимость  $P(T)$  найдена ранее,  $R = 8,314$  Дж/(моль К).  $T = 35^\circ\text{C}$ .

При вычислении числа частиц воды в сосуде мы пренебрегали наличием пара в начальном состоянии. В расчёте зависимости  $P(T)$  не учтено давление воздуха, находящегося в сосуде. Несложно убедиться, что это приводит к малым поправкам.

6.10.

$$\frac{\Delta C_V}{N} = -\frac{q}{T} \left( \frac{q}{T} - 1 \right)$$

(Учтено, что  $v_{\text{н}} \gg v_{\text{в}}$ .) При наличии воды теплоёмкость определялась в первую очередь ее испарением, поэтому скачок очень велик.

6.11. Будем решать задачу, предполагая, что распределения концентрации пара  $n(r)$  и температуры  $T(r)$  вокруг капли устанавливаются за время, гораздо меньшее, чем существенно изменяется её радиус  $a$ . Основанием для такого подхода является чрезвычайно большая разница плотностей воды  $n_{\text{ж}}$  и пара  $n$ . Действительно, оценку времени  $t_0$ , за которое устанавливается распределение концентрации водяного пара на расстоянии порядка радиуса капли  $a$ , можно получить из уравнения диффузии  $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ , учитывая, что концентрация пара существенно падает на расстоянии  $\sim a$  от капли:  $n/t_0 \sim Dn/a^2$ ,  $t_0 \sim a^2/D$ . Оценка же времени  $t$  существенного смещения границы капли получается из условия  $|n \frac{da}{dt}| \approx |D\nabla n|$ , откуда  $na/t \sim Dn/a$ ,  $t \sim \frac{n}{n_{\text{ж}}} t_0 \gg t_0$ . Таким образом, можно рассматривать состояние пара при определённом значении радиуса капли с хорошей точностью как стационарное. Это значит, что диффузионный поток частиц  $I = -D \frac{dn}{dr} 4\pi r^2$  не зависит от  $r$ . Отсюда  $n(r) = \frac{I}{4\pi Dr}$  (с учётом того, что  $n \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ). Поток  $I$  может быть выражен через концентрацию пара на границе капли  $n_a \equiv n(a)$ :  $I = 4\pi D a n_a$ . Это концентрация насыщенного пара при температуре капли, равной  $T_a \equiv T(a)$ . Эта температура ниже температуры окружающего воздуха  $T_0 = T(\infty)$ . К капле направлен поток теплоты, необходимый для испарения воды с ее поверхности  $Q = Iq$ .

Величина этого потока определяется градиентом температуры:

$Q = \lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$  и также не зависит от  $r$ . Поэтому  $T(r) = -\frac{Q}{4\pi\lambda r} + T_0$ . Температура капли  $T_a = T_0 - \frac{Dq}{\lambda} n_a$ . Уменьшение температуры капли приводит к уменьшению плотности окружающего её насыщенного пара, а это в свою очередь уменьшает диффузионный поток от капли и влияет тем самым на величину  $\delta T = T_0 - T_a$ . Величину  $\delta T$  находим из уравнения  $\delta T = \frac{Dq}{\lambda} n(T - \delta T)$ . (Зависимость  $n(T)$  найдена в задаче 5.3). Капля оказывается холоднее окружающего воздуха на  $\delta T \approx 15$  К.

Объём капли убывает со скоростью  $\frac{4\pi}{3} \frac{da^3}{dt} = \frac{I}{n_{\text{ж}}}$ , где  $n_{\text{ж}} = 1$  г/см<sup>3</sup> — плотность воды. Подставив  $I = 4\pi D a n_a$ , получаем  $a^2 = a_0^2 - 2D \frac{n_a^2}{n_{\text{ж}}} t$ , время испарения капли  $t = \frac{a_0^2 n_{\text{ж}}}{2D n_a} \approx 56$  мин. (Без учета охлаждения капли мы получили бы  $t \approx 22$  мин).

6.12. Будем считать далее, что температура капли совпадает с температурой пара  $T$ . Обозначим давление насыщенного пара, находящегося в контакте с плоской поверхностью жидкости,  $P^{(0)}$ . Это давление определяется условием  $\mu_0(T, P^{(0)}) = \mu(T, P^{(0)})$ , где  $\mu_0$  и  $\mu$  — химические потенциалы пара и жидкости. (Далее аргумент  $T$ , который всюду имеет одно и то же значение, опускаем.)

Давление насыщенного пара, находящегося в контакте с поверхностью капли жидкости, обозначим  $P_0$ , а пересыщение пара  $\delta P = P_0 - P^{(0)}$ . Как известно, давление жидкости в капле радиуса  $r$  больше давления пара на величину  $\frac{2\alpha}{r}$ , где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. Условие равновесия по отношению к обмену молекулами между жидкостью и паром

$$\mu_0(P_0) = \mu \left( P_0 + \frac{2\alpha}{r} \right) \quad (42)$$

Далее можно сделать разложение по малым величинам  $\delta P$  для

<sup>19</sup> Тут что-то явно не то с округлением, но мы воспроизвели точность, указанную в таблицах [18].

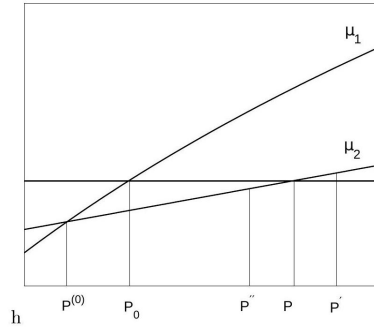


Рис. 19. К исследованию устойчивости равновесного размера капли пара и  $\delta P + \frac{2\alpha}{r}$  - для жидкости. Учитывая, что  $\frac{\partial \mu}{\partial P} = v = \frac{V}{N}$ ,  $v \ll v_0$ , получаем <sup>20</sup>

$$\delta P = \frac{2\alpha}{r} \frac{v}{v_0 - v} \approx \frac{2\alpha}{r} \frac{v}{v_0}$$

На рис. 19 показана зависимость химических потенциалов пара ( $\mu_1$ ) и жидкости ( $\mu_2$ ) от давления. Давление  $P_0$  большого объема пара, а с ним и химический потенциал пара  $\mu_0(P_0)$  можно считать неизменным. Давление жидкости  $P = P_0 + \frac{2\alpha}{r}$ . Если радиус капли уменьшится (за счет флуктуаций числа молекул в капле), то давление в ней возрастет ( $P'$  на рис.19), химический потенциал станет больше химического потенциала пара, обмен молекулами с паром будет приводить к преимущественному переходу молекул из капли в пар и дальнейшему уменьшению радиуса капли. И наоборот, случайное увеличение числа частиц в капле ведет к уменьшению давления в ней ( $P''$  на рис.19), уменьшению ее химического потенциала и дальнейшему росту капли. Таким обра-

зом равновесие капли радиуса  $r = \frac{2\alpha}{\delta P} \frac{v}{v_0}$  с пересыщенным паром неустойчиво, (см. также [17, §35, 41][7, §27]. )

6.14. Мы будем рассматривать кристалл, находящийся в термостате, и определять его состояние, находя минимум свободной энергии  $F = E - TS$ . Чтобы выразить свободную энергию, нам нужно найти энергию взаимодействия атомов друг с другом и энтропию кристалла, связанную с размещением атомов.

Будем обозначать медную" подрешётку  $A$ , а цинковую" -  $B$ . Число атомов меди в медной" подрешётке  $N_{aA}$ , число атомов цинка в медной" подрешётке  $N_{bA}$ , число атомов меди в цинковой" подрешётке  $N_{aB}$ , число атомов цинка в цинковой" подрешётке  $N_{bB}$ .

$$\begin{aligned} N_{aA} + N_{aB} &= N; & N_{bA} + N_{bB} &= N \\ N_{aA} + N_{bA} &= N; & N_{aB} + N_{bB} &= N \end{aligned}$$

Одно из этих соотношений - следствие трех других. Вследствие этих соотношений лишь одна из величин  $N_{aA}, N_{aB}, N_{bA}, N_{bB}$  может считаться независимой.

Статистический вес состояния с заданными числами атомов в подрешётках

$$\Gamma = C_N^{N_{aA}} C_N^{N_{aB}} = \frac{N!}{N_{aA}! N_{bA}!} \frac{N!}{N_{aB}! N_{bB}!}$$

энтропия  $S = \ln \Gamma$ .

Мы учитываем взаимодействие только атомов, находящихся в соседних кристаллических ячейках (а потому - в разных подрешётках). Энергию взаимодействия медь - медь" обозначаем  $V_{aa}$  (причем  $V_{aa} < 0$ ), подобным же образом введены  $V_{ab}, V_{bb}$ . Предполагаем, что справедливо условие  $V = V_{aa} + V_{bb} - 2V_{ab} > 0$ <sup>21</sup>,

благодаря которому состояние кристалла, с атомами меди и цинка, находящимися полностью в разных подрешётках (и таким образом оказавшимися ближайшими соседями), имеет наименьшую энергию связи. (Это состояние либо с  $N_{aA} = N_{bB} = N$ , либо с  $N_{aA} = N_{bB} = 0$  - в последнем случае подрешётки заслуживали бы переименования.)

Для определения энергии посмотрим сначала, сколько каких соседей может оказаться у атома меди, находящегося в медной" подрешётке. Число ближайших соседей обозначим  $q$  (в нашем случае  $q = 8$ ). Среднее число атомов меди на  $q$  местах в соседней подрешётке равно  $q \frac{N_{aB}}{N}$ , среднее число атомов цинка  $q \frac{N_{bB}}{N}$ . Среднее значение энергии взаимодействия с соседями для данного атома меди  $q \frac{N_{aB}}{N} V_{aa} + q \frac{N_{bB}}{N} V_{ab}$ .

Энергия взаимодействия всех атомов

$$E = N_{aA} \left( q \frac{N_{aB}}{N} V_{aa} + q \frac{N_{bB}}{N} V_{ab} \right) + N_{bA} \left( q \frac{N_{aB}}{N} V_{ba} + q \frac{N_{bB}}{N} V_{bb} \right)$$

Переход от частичного порядка в размещении атомов по подрешёткам к полному беспорядку происходит при условии, что числа атомов меди в обеих подрешётках станут одинаковы. Параметр порядка  $\eta$  вводим таким образом, чтобы он обращался в нуль при  $N_{aA} = N_{aB}$  :

<sup>20</sup> Для жидкости следующий член разложения много меньше, так как  $\frac{\partial v}{\partial P} \frac{2\alpha}{r} \ll v$ , поэтому достаточно сохранить линейный член разложения.

<sup>21</sup> При  $V < 0$  энергетически выгодным было бы расслоение смеси на вещества „а" и „b".

$$N_{aA} - N_{aB} = \eta N$$

(Множитель  $N$  обеспечивает такую нормировку параметра  $\eta$ , что он будет обращаться в 1 или -1 при полном порядке".) Подставив в  $E$

$$N_{aA} = N_{bB} = N \frac{1+\eta}{2}, \quad N_{bA} = N_{aB} = N \frac{1-\eta}{2}$$

получаем

$$E = E_0 - Nq \frac{V}{4} \eta^2 \quad (43)$$

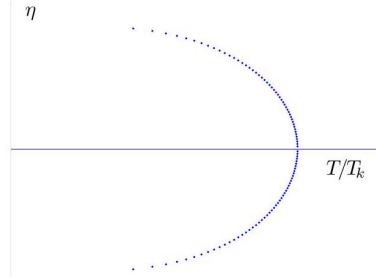


Рис. 20. Параметр порядка упорядочивающегося сплава в зависимости от температуры. Приближение среднего поля

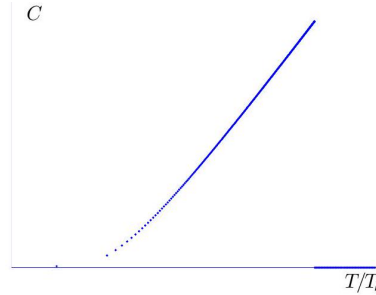


Рис. 21. Теплоёмкость, связанная с упорядочением сплава в зависимости от температуры. Приближение среднего поля

Равновесное значение параметра порядка  $\eta$  определяется из условия

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$$

Учитывая, что  $\delta N_{aA} = \delta N_{bB} = N \frac{\delta \eta}{2}$ ,  $\delta N_{bA} = \delta N_{aB} = -N \frac{\delta \eta}{2}$ , получаем

$$-\frac{1}{2} V \eta N q + T N \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} = 0$$

Вблизи точки фазового перехода  $\eta \ll 1$ , так что можно представить  $\ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$  в виде  $2 \left( \eta + \frac{\eta^3}{3} \right)$ :

$$\eta \left( -\frac{qV}{2} + 2T \left( 1 + \frac{\eta^2}{3} \right) \right) = 0 \quad (44)$$

Малое, но отличное от нуля значение  $\eta$  появляется при температуре  $T < T_k = \frac{Vq}{4}$ . Выразив  $\eta^2$  из (44):  $\eta^2 \approx 3(T_k - T)/T_k$  и подставив в (43), находим  $E = E_0 + 3N(T_k - T)$ . Скачок теплоёмкости  $\Delta C = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{T=T_k+0} - \left. \frac{dE}{dT} \right|_{T=T_k-0} = -3N$ .

На рис. 20, 21 изображены зависимости  $\eta(T), C(T)$ , получаемые из приведённых уравнений. Разумеется приводимая величина  $C(T)$  - это только добавка к теплоёмкости кристалла, связанной с колебаниями кристаллической решетки, (см. также [8, гл. 5, пример 2], [7, 78].)

6.16. Задачу можно рассматривать как вариант одномерной задачи Изинга и воспользоваться таким же подходом к ее решению, как в [7, §80], [11, п. 9.2.2].

Мы будем вычислять статистическую сумму для молекулы. Каждое слагаемое может быть представлено как произведение вкладов отдельных звеньев" (участков молекулы между ступеньками),  $A(1)A(2) \dots A(N)$ ; вклад от статистического веса конфигураций участка молекулы между ступеньками мы будем включать в множитель, отвечающий звену, следующему за этим участком. Перебирая звенья по порядку, мы будем, таким образом, учитывать, что вклад  $i$ -го звена в статистическую сумму,  $A(i)$ , зависит не только от состояния этого звена, но и состояния звена предыдущего,  $(i-1)$ -го (а для первого - от состояния последнего). Обозначив состояние целого звена  $\sigma = 0$ , а состояние разорванного  $\sigma = 1$ , мы сведём все возможные значения  $A(i)$  в таблицу (матрицу):

$\sigma_{i-1} \backslash \sigma_i$	0	1
0	1	$e^{-\varepsilon/T}$
1	1	$ge^{-\varepsilon/T}$

В первом столбце стоят две единицы, отвечающие целому состоянию  $i$ -го звена,  $e^{-\varepsilon/T}$  в верхней строке второго столбца отвечает необходимости затратить энергию  $\varepsilon$  для разрыва этого звена, наконец, последний элемент матрицы содержит добавочный множитель  $g$ , отвечающей свободе участка молекулы между  $(i-1)$ -м

и  $i$ -м звеньями, возникшей из-за свободы обоих этих звеньев. Элементы матрицы обозначим  $A_{\sigma_{i-1}, \sigma_i}$ . Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\sigma_1=0,1} \sum_{\sigma_2=0,1} \dots \sum_{\sigma_N=0,1} A_{\sigma_1, \sigma_2} A_{\sigma_2, \sigma_3} \dots A_{\sigma_N, \sigma_1}$$

получается суммированием по обоим возможным состояниям каждой из ступенек.

Выражение  $Z$  сводится к следу  $N$ -й степени матрицы  $A$ :  $Z = \text{Sp}(A^N)$ . Для его вычисления достаточно найти собственные значения матрицы  $A$  из уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & e^{-\varepsilon/T} \\ 1 & ge^{-\varepsilon/T} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + ge^{-\varepsilon/T} \pm \sqrt{(1 - ge^{-\varepsilon/T})^2 + 4e^{-\varepsilon/T}} \right] \quad (45)$$

$$Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N \approx \lambda_1^N$$

Свободная энергия

$$F = -NT \ln \lambda_1$$

Очевидно, что зависимость свободной энергии от температуры, а вместе с ней и других термодинамических величин, не имеет скачков. Однако имеются интервалы температуры, где эта зависимость окажется очень резкой. Для качественного выяснения зависимости  $F(T)$  заметим, что как при достаточно низких температурах, так и при достаточно высоких - вторым слагаемым под корнем в формуле (45) можно пренебречь. Переход от значения  $\lambda_1 \approx 1$  к значению  $\lambda_1 \approx ge^{-\varepsilon/T}$  происходит в узком интервале температур, когда оба слагаемых под корнем имеют один порядок величины. Это интервал температуры  $\delta T$  в окрестности того ее значения  $T_0$ , при котором  $ge^{-\varepsilon/T} = 1$ , т. е.

$$T_0 \sim \frac{\varepsilon}{\ln g} \quad (46)$$

Из условия  $1 - ge^{-\varepsilon/(T_0 + \delta T)} = \pm 2e^{-\varepsilon/2T_0}$  получаем оценку

$$\delta T \sim \frac{4\varepsilon}{\sqrt{g} \ln^2 g} \quad (47)$$

В таком (очень узком) интервале температур происходит плавление" молекулы - разрыв связей почти во всех звеньях. Резкое сужение интервала перехода от связанного состояния звеньев к разорванному, обусловленное взаимодействием многих звеньев цепочки друг с другом, биофизику называют кооперативным эффектом.

Очевидно, как вычисляется теплоёмкость цепочки (ее часть, связанная с разрывом или восстановлением связей в звеньях):

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

Доля разорванных ступенек может быть вычислена, как нетрудно сообразить, по формуле

$$N^* = - \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right)_T$$

а доля тех разорванных ступенек, которые имеют разорванной соседнюю ступеньку, по формуле

$$N^{**} = \frac{g}{\lambda} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial g} \right)_T$$

На рис. 22 представлена зависимость теплоёмкости молекулы от температуры (в расчете на одно звено). Там же изображена для сравнения зависимость от температуры теплоёмкости двухуровневой системы с высоко вырожденным верхним уровнем.

(Для графиков принято значение  $g = 20$ . Дифференцирование при построении графиков проводилось численно.) В обоих случаях область перехода существенно смещена в сторону температур, более низких, чем энергия возбуждения  $\varepsilon$ . Как и следовало

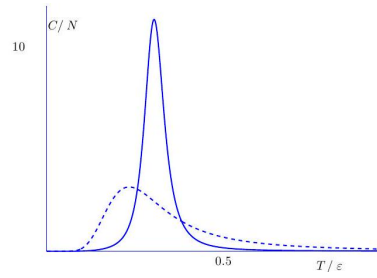


Рис. 22. Теплоёмкость длинной молекулы с взаимодействием соседних звеньев. Пунктиром показана теплоёмкость двухуровневой системы с сильно вырожденным верхним уровнем

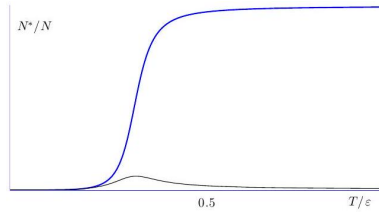


Рис. 23. Доля разорванных связей. Тонкая линия - доля в том числе одиночных разорванных связей ожидать, для молекулы с взаимодействием между звеньями интервал перехода в возбужденное состояние оказывается сокращен гораздо сильнее, чем просто при вырождении верхнего уровня.

На рис. 23 представлена зависимость от температуры доли разорванных связей  $N^*/N$ , тонкой кривой - доля одиночных связей, т. е. не имеющих разорванных звеньев - соседей,  $(N^* - N^{**})/N$

Молекула белка представляет собой очень длинную цепочку аминокислот, имеющую в связанном состоянии форму винтовой линии. Такую форму цепочки удерживают слабые химические связи аминокислот друг с другом (так называемые водородные связи). Эта форма молекулы белка называется  $\alpha$ -спираль. При разрыве большинства указанных водородных связей молекула становится гибкой длинной цепочкой (почти нитью), запутывается и получается клубок. Аналогичный переход имеет место для молекул ДНК. Для реальных белков и ДНК величина  $\delta T$  оказывается порядка 1 К, а  $T_0 \sim 90^\circ\text{C}$ . Оценка по этим данным величины  $g$  согласно (46),(47) дает  $g \sim 260$ . Оценка согласно (46)  $\varepsilon \sim 2000$  К неплохо соответствует энергии водородной связи (учитывая грубость как модели, так и способа оценки).<sup>22</sup>

О сопоставлении результатов расчета с экспериментальными данными и об уточнении моделей можно прочесть, например, в ([19, §4.5, 8.4], [9, гл. 8, 2]).

6.17. [15, гл. VII]. Зависимость  $\eta(x)$  определяется условием минимума функционала

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 + \phi(\eta) \right] dx, \quad \text{где } \phi = at\eta^2 + B\eta^4, \quad t = T - T_k, \quad t < 0.$$

В области вещества, где расположена одна фаза, параметр порядка  $\eta$  имеет постоянное значение, соответствующее минимуму  $\phi(\eta)$ :

$$\eta_0 = \pm \left( \frac{a|t|}{2B} \right)^{1/2}$$

Условие минимума  $\Omega$  подобно принципу наименьшего действия в классической механике для частицы. При этом  $x$  играет роль времени,  $\eta$  - координаты,  $\phi$  - потенциальной энергии (с обратным знаком),  $g$  - половины массы. Переход от области  $\eta_0 < 0$  к области  $\eta_0 > 0$  - движение частицы.

Мы не будем записывать уравнения Эйлера этой вариационной задачи (уравнения движения), а сразу же запишем интеграл энергии":

$$g \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 - \phi(\eta) = E$$

В глубине каждой из фаз параметр порядка становится постоянным и равным  $\pm\eta_0$ . Этому отвечает выбор постоянной интегрирования<sup>22</sup> Если принять, что получивший подвижность участок молекулы содержит 4 отрезка, каждый из которых может принимать по 4 разных положения, то получаем  $g = 4^4 = 256$ . Энергия водородной связи  $\sim 4500$  К. рования  $E = -\phi(\eta_0)$ . Таким образом,

$$g \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \phi(\eta) - \phi(\eta_0) \quad (49)$$

Подставив  $\phi, \eta_0$ , получаем (для движения от  $\eta < 0$  к  $\eta > 0$ )

$$\frac{d\eta}{dx} = \left( \frac{B}{g} \right)^{1/2} (\eta_0^2 - \eta^2)$$

Из этого уравнения легко найти

$$\eta = \eta_0 \operatorname{th} \frac{x}{R}, \quad R = \left( \frac{2g}{a|t|} \right)^{1/2}$$

Коэффициент поверхностного натяжения совпадает с поверхностной" добавкой к потенциалу  $\Omega$ :

$$\sigma = \Delta\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g(\eta'(x))^2 + \phi(\eta) - \phi(\eta_0) \right] dx \quad (50)$$

С учетом (49), (50)

$$\sigma = 2g \int_{-\infty}^{\infty} [\eta'(x)]^2 dx = 2(Bg)^{1/2} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2) d\eta = \frac{g^{1/2}(2a|t|)^{3/2}}{3B}$$

### 10.13 Задачи на Флуктуации

#### КО-7.

1. Найти квазистатистические флуктуации  $\langle(\Delta S)^2\rangle$ ,  $\langle(\Delta P)^2\rangle$ ,  $\langle\Delta S\Delta P\rangle$  в заданном объёме.

#### КО-7.

2. Найти квазистатистические флуктуации энергии в объёме  $V$ , если объём тела и число частиц в нем фиксированы  $\langle(\Delta E)_{V,N}^2\rangle$ , если объём может флуктуировать  $\langle(\Delta E)_N^2\rangle$ , а число частиц фиксировано, в случае, если фиксирован объём, но переменна число частиц  $\langle(\Delta E)_V^2\rangle$ .

#### КО-7.

3. Найти флуктуации объёма больцмановского газа, ограниченного поршнем, площади  $A$ , который удерживается пружиной жесткости  $k$ . Внешнее давление  $P_0$ , температура  $T_0$ . В равновесии пружина не растянута.

### [LL5.§112, §113], КО-7.4. Флуктуации $N$ в БКА

Выразить флуктуации числа частиц в большом каноническом ансамбле, используя большую статистическую сумму.

#### КО-7. 4.

Большая статистическая сумма

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} Z_N$$

выражается через статсуммы  $Z_N$  для  $N$  частиц, а вероятность иметь в системе  $N$  частиц  $w_N = e^{\mu N/T} Z_N / Q$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{1}{Q} \sum_{N=0}^{\infty} N w_N = \frac{T}{Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial \mu} \right) \\ \langle N^2 \rangle &= \frac{1}{Q} \sum_{N=0}^{\infty} N^2 w_N = \frac{T^2}{Q} \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} \right) \end{aligned}$$

откуда

$$T \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} = T^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \mu} \right) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle \Delta N^2 \rangle$$

Для идеального больцмановского газа

$$\mu = T \ln \frac{z}{N}, \quad N = e^{\mu/T} z, \quad \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} = \frac{1}{N}$$

Для идеального ферми-газа ( $T \ll \mu$ )

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} = \frac{3T}{2N\mu} \propto \frac{T}{N^{5/3}}$$

относительные флуктуации числа частиц стремятся к нулю с понижением температуры и убывают с ростом полного числа частиц в системе гораздо быстрее чем для больцмановского газа. Малость флуктуаций обусловлена тем, что очень сильно подавлены флуктуации в состояниях вне энергетического интервала ширины  $T$  вблизи поверхности Ферми.

### КО-7.

5. Найти отношение флуктуаций  $\langle (\Delta V)_S^2 \rangle / \langle (\Delta V)^2 \rangle$  (определяющее отношение интенсивности рассеянного света в крыльях" дублета Мандельштама - Бриллюена к полной интенсивности рассеянного света).

### КО-7.

6. Выразить относительную величину флуктуаций интенсивности дневного света, рассматривая электромагнитное поле как классическое.

**КО-7.** 6. Мгновенное значение электрического поля световой волны складывается из полей, излучённых множеством атомов:

$$\mathbf{E} = \sum_a \mathbf{E}_a$$

Каждое из слагаемых  $\mathbf{E}_a$  изменяется с частотой  $\omega \sim 10^{13}$  с, а за время, не большее  $\tau \sim 10^{-7}$  с, <sup>23</sup> полностью изменяет фазу  $\theta_a$  и амплитуду, причем независимо от других.

Далее мы примем для определённости, что выделен свет линейно поляризованный.

Для мгновенного значения квадрата поля, определяющего плотность потока энергии,

$$\begin{aligned} E^2 &= \sum_a E_a \cos(\omega t + \theta_a) \sum_b E_b \cos(\omega t + \theta_b) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} E_a E_b (\cos(\theta_a - \theta_b) + \cos(2\omega t + \theta_a + \theta_b)) \end{aligned}$$

Интенсивность света определяется величиной  $E^2$ , усреднённой за период  $2\pi/\omega$  или за несколько таких периодов. За такое время амплитуды и фазы отдельных слагаемых заметно не изменятся, а слагаемое, осциллирующее с частотой  $2\omega$  при таком усреднении обратится в нуль. Поэтому мгновенное" значение интенсивности света

$$I \propto \frac{1}{2} \sum_{a,b} E_a E_b \cos(\theta_a - \theta_b)$$

Среднее значение интенсивности определится при усреднении за время, большее  $\tau$ . При таком усреднении <sup>24</sup> исчезнут все слагаемые с  $a \neq b$ , так как фазы излучений разных атомов  $\theta_a$  за такое время изменяются независимо друг от друга:  $\langle \cos(\theta_a - \theta_b) \rangle = 0$ .

Поэтому

$$\langle I \rangle \propto \frac{1}{2} \sum_a E_a^2 = \frac{1}{2} N \langle E_a^2 \rangle$$

где  $N$  – число слагаемых,  $\langle E_a^2 \rangle$  – средний (по разным атомам) квадрат поля излучения одного атома.

Чтобы найти флуктуацию интенсивности, нужно найти еще  $\langle I^2 \rangle$ .

$$I^2 \propto \frac{1}{4} \sum_{a,b} E_a E_b \cos(\theta_a - \theta_b) \sum_{c,d} E_c E_d \cos(\theta_c - \theta_d) =$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{a,b,c,d} E_a E_b E_c E_d (\cos(\theta_a - \theta_b + \theta_c - \theta_d) + \cos(\theta_a - \theta_b - \theta_c + \theta_d)).$$

При усреднении за время, много большее  $\tau$ , сохраняются только слагаемые, в которых случайные фазы сокращаются. Это  $N$  слагаемых с  $a = b = c = d$ , для которых оба косинуса обращаются в единицу, и  $2N(N-1)$  слагаемых для которых первый косинус обращается в 1 (при  $a = b \neq c = d$ , и при  $a = d \neq b = c$ ) и столько же - для второго косинуса (при  $a = b \neq c = d$ , и при  $a = c \neq b = d$ ). Это дает в сумме

<sup>023</sup> Указанная в тексте оценка соответствует естественной ширине спектральной линии. Ближе к действительности оценка  $\tau \sim 10^{-10}$  с - время между соударениями атомов.

<sup>24</sup> Любой используемый детектор, даже самый быстрый", фактически производит такое усреднение. Подобным же образом мгновенная" величина давления газа определяется средним значением переданного стенке сосуда импульса за время, в течение которого происходит достаточно много столкновений молекул газа с этой стенкой.

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{4} N \langle E_a^4 \rangle + \frac{1}{2} N(N-1) \langle E_a^2 \rangle^2$$

Поскольку  $N \gg 1$  первое слагаемое мало в сравнении со вторым, а во втором можно заменить  $N(N-1)$  на  $N^2$ . В итоге

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} N^2 \langle E_a^2 \rangle^2$$

так что

$$\frac{(\Delta I)^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = 1$$

Приведём ещё один вариант решения. Мы несколько иначе опишем ту же физическую картину. Речь идет по-прежнему об одной линейно поляризованной моде колебаний.

Поле световой волны мы представляем в виде

$$E = \text{Re} \left( \sum_a E_a e^{-i\omega t} \right) \quad (51)$$

где  $E_a$ -комплексная амплитуда поля излучения отдельного атома. Квадрат модуля комплексной амплитуды  $E^{(0)} = \sum E_a$  определяет интенсивность волны, усреднённую за период.

Обратим внимание, что задаваемая уравнением (51) в комплексной плоскости картина для комплексной амплитуды колебания  $E^{(0)}$  полностью совпадает с картиной смещения частицы при случайных блужданиях (число слагаемых отвечает числу шагов). Распределение вероятностей для каждой из величин  $E' = \text{Re}(E^{(0)})$  и  $E'' = \text{Im}(E^{(0)})$ , представляющих собой сумму очень большого числа случайных слагаемых, гауссово:

$$dw(E') \propto \exp \left( -\frac{E'^2}{2\langle E'^2 \rangle} \right) dE', \quad dw(E'') \propto \exp \left( -\frac{E''^2}{2\langle E''^2 \rangle} \right) dE''$$

Распределение вероятностей для величины  $E^{(0)2} = E'^2 + E''^2$

$$dw \propto \exp \left( -\frac{E'^2 + E''^2}{2\langle E'^2 \rangle} \right) dE' dE'' \propto \exp \left( -\frac{E^{(0)2}}{2\langle E^{(0)2} \rangle} \right) E^{(0)} dE^{(0)},$$

$$\langle E'^2 \rangle = \langle E''^2 \rangle, \quad \langle E^{(0)2} \rangle = 2\langle E'^2 \rangle.$$

Для интенсивности излучения  $I$  распределение такое же, как для  $E^{(0)2}$ :

$$dw = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-I/\langle I \rangle} dI$$

Поэтому

$$\langle I^2 \rangle = \frac{1}{\langle I \rangle} \int_0^\infty I^2 e^{-I/\langle I \rangle} dI = 2\langle I \rangle^2, \quad \langle (\Delta I)^2 \rangle = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle^2$$

Заметим, что для видимого света в спектре солнечного излучения  $\langle n \rangle = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1} \ll 1$ , так что с точки зрения определения флуктуаций это излучение оказывается не классическим, а квантовым. Изложенное решение задачи фактически относится к инфракрасной области спектра, где  $\langle n \rangle \gg 1$ .

Найденная величина флуктуаций чрезвычайно велика, интенсивность изменяется на 100%. Почему же Солнце и звезды не мигают? Если рассматривать не одну выделенную моду а много, скажем  $G = \omega^2 \Delta\omega \Delta\Omega / 4\pi^3 \gg 1$  мод ( $\Delta\omega$  - интервал частот,  $\Delta\Omega$  - телесный угол, в котором сосредоточено наблюдаемое излучение), то нужно учитывать, что флуктуации их независимы. Складываются интенсивности  $\mathcal{I} = GI$  и квадраты флуктуаций  $(\Delta\mathcal{I})^2 = G(\Delta I)^2$ . Тогда  $(\Delta\mathcal{I})^2/\mathcal{I}^2 = 1/G \ll 1$ .

Здесь уместно будет подчеркнуть также, что предварительное усреднение величины  $E_x^2 \rightarrow I$  при переходе к величине интенсивности было весьма существенным. Если усреднять не  $I^2$ , а  $E_x^4$ , то результат будет зависеть от того, как реализовано неполяризованное состояние.

Например, это может быть наложение взаимно некогерентных линейно поляризованных полей  $E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta_x)$  и  $E_y = E_0 \cos(\omega t + \theta_y)$ . Тогда  $\langle E_x^4 \rangle = \frac{3}{8} E_0^4$ .

В то же время для проекции электрического поля на ось  $x'$ , составляющую углы  $45^\circ$  с осями  $x$  и  $y$ ,  $E_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + E_y)$ , получаем  $\langle E_{x'}^4 \rangle = \frac{1}{4} (\langle E_x^4 \rangle + 4\langle E_x^3 E_y \rangle + 6\langle E_x^2 E_y^2 \rangle + 4\langle E_x E_y^3 \rangle + \langle E_y^4 \rangle) = \frac{9}{16} E_0^4$ .

В опытах Брауна - Твисса изучается интерференция интенсивностей. Подумайте, происходит ли в этих опытах предварительное усреднение квадратов полей.

## КО-7.

7. Найти корреляционные функции  $\langle x(t') x(t' + t) \rangle$ ,  $\langle v(t') x(t' + t) \rangle$  и  $\langle v(t') v(t' + t) \rangle$ , ( $v = \dot{x}$ ) для осциллятора с трением.



**КО-7.** 7. Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi(t_1 - t_2) &= \langle x(t_1) x(t_2) \rangle \\ \chi(t_1 - t_2) &= \langle v(t_1) x(t_2) \rangle, v = \dot{x} \\ \psi(t_1 - t_2) &= \langle v(t_1) v(t_2) \rangle\end{aligned}$$

Уравнение движения для корреляционной функции  $\varphi(t_1 - t_2)$  получаем, умножив уравнение движения осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_{\text{слл}}/m, \quad (\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2)$$

для  $x(t_1)$  на  $x(t_2)$  и усреднив по множеству осцилляторов:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \varphi(t_1 - t_2) + 2\gamma \frac{\partial}{\partial t_1} \varphi(t_1 - t_2) + \omega_0^2 \varphi(t_1 - t_2) = \langle f_{\text{сл}}(t_1) x(t_2) \rangle / m$$

Для  $t_1 > t_2$  берем значение случайной силы в момент после наблюдения смещения осциллятора, поэтому  $\langle f_{\text{сл}}(t_1) x(t_2) \rangle = 0$ . Для  $t = t_1 - t_2 > 0$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Решение этого уравнения (для  $t > 0$ )

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Дифференцируя по  $t$ , получим и другие корреляционные функции.

Чтобы найти постоянные  $A, B$ , рассмотрим функцию  $\chi$  при малых  $t_1 - t_2$ . В этом случае можно не учитывать влияния на движение осциллятора сил (как возвращающей, так и случайной) и принять  $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1)$ . Для функции  $\chi$  это дает при  $t \rightarrow 0$

$$\chi(t) = \langle v(t_1) x(t_1) \rangle + \langle v^2(t_1) \rangle (t_2 - t_1)$$

Учтём далее <sup>25</sup>, что

$$\langle v(t_1) x(t_1) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt_1} x^2(t_1) \right\rangle = 0$$

<sup>25</sup> Для того чтобы доказать, что среднее значение производной по времени от ограниченной функции равно нулю, мы принимаем, не акцентируя на этом внимания, что среднее по ансамблю не отличается от среднего по времени.

а также

$$\langle v^2(t_1) \rangle = \frac{T}{m}$$

Для

$$\chi = \dot{\varphi} = e^{-\gamma t} ((-\gamma A + \omega B) \cos \omega t - (\omega A + \gamma B) \sin \omega t)$$

это приводит к уравнениям

$$-\gamma A + \omega B = 0, \quad -\omega(\gamma B + \omega A) = \frac{T}{m}$$

откуда

$$A = -\frac{T}{m} \omega_0^2, \quad B = \frac{\gamma}{\omega} A$$

Учтя также, что  $\varphi(-t) = \varphi(t)$ ,  $\chi(-t) = -\chi(t)$ ,  $\psi(-t) = \psi(t)$ , получаем в итоге

$$\begin{aligned}\langle x(t') x(t' + t) \rangle &= (T/m\omega_0^2) (\cos \omega t + (\gamma/\omega) \sin \omega |t|) e^{-\gamma|t|} \\ \langle v(t') x(t' + t) \rangle &= (T/m\omega) \sin \omega t e^{-\gamma|t|} \\ \langle v(t') v(t' + t) \rangle &= (T/m) (\cos \omega t - (\gamma/\omega) \sin \omega |t|) e^{-\gamma|t|}\end{aligned}$$

Флуктуации  $N_0$  определяются флуктуациями  $N_a$ . При этом следует учесть, что флуктуации числа частиц в разных состояниях независимы:  $\langle \Delta N_{a'} \Delta N_a \rangle = 0$  при  $a' \neq a$ , поэтому

$$\langle (\Delta N_0)^2 \rangle = \sum_{|a\rangle} \langle (\Delta N_a)^2 \rangle = \sum_{|a\rangle} (\langle N_a \rangle + \langle N_a \rangle^2) = T \frac{\partial N_{>}}{\partial \mu} \quad (55)$$

где  $N_{>} = \sum_{|a\rangle} \langle N_a \rangle$  — среднее число частиц в состояниях с положительной энергией. Это число можно выразить так (см. зад. 5.3):

$$N_{>} = \frac{(2m)^{3/2} T^{5/2}}{6\pi^2 \hbar^3 F} b_{3/2}(y) = N \left( \frac{T}{T_k} \right)^{5/2} \frac{b_{3/2}(y)}{b_{3/2}(0)}, \text{ где } y = -\mu/T \quad (56)$$

так что

$$\langle (\Delta N_0)^2 \rangle = \left. \frac{\partial N_{>}}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} N \left( \frac{T}{T_k} \right)^{5/2} \frac{b_{1/2}(0)}{b_{3/2}(0)} = 2,92 N \left( \frac{T}{T_k} \right)^{5/2}$$

Отметим, что для бозе-газа в заданном объёме (без внешнего поля) сумму  $\sum_{|a\rangle} \langle (\Delta N_a)^2 \rangle$  не удаётся заменить интегралом: интеграл  $\int \langle (N_{|a\rangle})^2 \rangle d\Gamma \propto \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} f_B^2(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \propto \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} \varepsilon^{-3/2} d\varepsilon$  расходится, если принять наименьшее значение энергии  $\varepsilon_{\min}$  равным нулю. Это значит, что в сумму самый существенный вклад вносят состояния с низшими энергиями. Между прочим, вследствие этого величина <sup>26</sup> Если бы число частиц не было задано, то в этом равенстве стояло бы не  $N$ , а  $\langle N \rangle$ . Флуктуации же величины  $N_0$  определялись бы согласно (52):  $\langle (\Delta N_0)^2 \rangle = N_0 (1 + N_0)$ .

флуктуаций  $\langle (\Delta N_0)^2 \rangle$  зависит от формы сосуда, в котором находится газ.

### КО-7.

8. Столб идеального бозе-газа, состоящий из  $N$  частиц, находится в однородном поле (как в зад. 5.3) при температуре ниже температуры конденсации Бозе - Эйнштейна.

Найти флуктуации числа частиц в бозе-конденсате.

**КО-7.** 8. Число частиц  $N_a$  в любом квантовом состоянии  $|a\rangle$  с энергией, больше минимальной, микроскопически мало, поэтому газ с  $N$  частицами можно рассматривать как термостат и источник частиц для этого состояния. Флуктуации числа частиц в таком состоянии

$$\langle (\Delta N_a)^2 \rangle = \langle N_a \rangle + \langle \Delta N_a \rangle^2 = T \frac{\partial \langle N_a \rangle}{\partial \mu} \quad (52)$$

Число частиц в бозе-конденсате  $N_0$  сопоставимо с  $N$  и определяется как

$$N_0 = N - \sum_{|a\rangle} N_a \quad (53)$$

Естественно также, что <sup>26</sup>

$$\langle N_0 \rangle = N - \sum \langle N_a \rangle \quad (54)$$

$|a\rangle$

### КО-7.

9. Найти флуктуации числа бозе-частиц на основном уровне в поле гармонического осциллятора при постоянном полном числе частиц.

**КО-7.** 9.

$$\langle (\Delta N_0)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{T}{\hbar\omega} \right)^3$$

Максимальное значение  $-\langle (\Delta N_0)^2 \rangle \approx 2N$  (при  $T = T_k$ ).

### КО-7.

10. Оценить связанную с флуктуациями параметра порядка добавку к теплоёмкости вблизи точки фазового перехода второго рода. (Предполагается использование теории фазовых переходов Ландау с учетом зависимости параметра порядка от координат, в духе теории критической опалесценции Орнштейна и Цернике.)

**КО-7.** 10. На некотором удалении от точки фазового перехода вероятность какого-либо значения параметра порядка  $\eta$  определяется потенциалом  $\Omega^{27}$

$$w \propto e^{-\Omega/T}, \quad \Omega = V\phi, \quad \text{где } \phi = at\eta^2 + B\eta^4, \quad t = T - T_k.$$

Величина флуктуаций параметра  $\delta\eta$  определяется условием  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} (\delta\eta)^2 \sim a|t|(\delta\eta)^2 \sim T$ , откуда

$$(\delta\eta)^2 \sim \frac{T}{Va|t|} \quad (57)$$

При приближении к точке перехода флуктуации растут. Согласно представлениям, введенным в физику Орнштейном и Цернике при изучении критической опалесценции, вещество вблизи критической точки разбивается на мелкие участки, на каждом из которых значение параметра порядка не зависит от его значения на других участках. Оценка (57) становится несправедлива, объем  $V$  следует заменить на размер такого участка, так что флуктуации параметра порядка оказываются гораздо большими, тем большими, чем мельче участки с определенными значениями  $\eta$ . Между ними имеются переходные области, в которых параметр  $\eta$  постепенно изменяется. С этим изменением параметра порядка связана энергия, которую можно понимать как

<sup>27</sup>. Наиболее вероятное значение  $\eta_0$  параметра порядка определяется минимумом  $\phi(\eta) : \eta_0 = 0$  при  $t > 0, \eta_0 > 0$  при  $t < 0$ . В обоих случаях  $\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\eta_0} \sim Va|t|$ .

поверхностную, связанную с наличием границ между участками с разными значениями  $\eta$ . Наличие такой энергии ограничивает измельчение участков с постоянными значениями  $\eta$  (и рост флуктуаций). Потенциал  $\Omega$ , отражающий такое представление о структуре вещества вблизи точки фазового перехода второго рода, имеет вид

$$\Omega(T, P, \eta) = \int [\phi(T, P, \eta) + g(\nabla\eta)^2] dV, \quad \text{где } g = \text{const}. \quad (58)$$

Параметр  $g$  фактически задает величину поверхностной энергии. Ширину области перехода  $\sim R$  между участками с разными значениями параметра порядка можно оценить, принимая, что флуктуационная часть первого слагаемого подынтегрального выражения в (58) имеет тот же порядок, что второе слагаемое:  $a|t|(\delta\eta)^2 \sim g(\delta\eta/R)^2$ , откуда  $R \sim (g/a|t|)^{1/2}$ . Теперь можно оценить величину флуктуаций параметра порядка, принимая, что область перехода между участками вещества с разными значениями  $\eta$  простирается на всю возможную глубину этих участков (чтобы величина градиента в (58) была возможно меньше) и подставив в (57) в качестве объема  $V \sim R^3$ :

$$\delta\eta^2 \sim \frac{T(a|t|)^{1/2}}{g^{3/2}} \quad (59)$$

Таким образом, указанная поверхностная энергия подавляет рост флуктуаций параметра порядка по мере приближения к точке фазового перехода. (Подразумевается, что флуктуации  $\eta$  остаются велики по сравнению с оценкой (57)<sup>28</sup>.)

Добавку к  $\Omega$ , обусловленную флуктуациями  $\eta$ ,

$$\delta\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right) (\delta\eta)^2$$

оцениваем как

$$\delta\Omega \sim VT_k \left( \frac{a|t|}{g} \right)^{3/2}$$

Получая далее добавки к энтропии и теплоёмкости, дифференцируем только  $t$ , сохраняя тем самым лишь наибольшие слагаемые.

$$\delta S = -\frac{\partial}{\partial T} \delta\Omega \sim VT_k a^{3/2} |t|^{1/2} / g^{3/2}$$

$$\delta C = T \frac{\partial}{\partial T} \delta S \sim \frac{VT_k^2 a^{3/2}}{g^{3/2} |t|^{1/2}}$$

При более тщательном расчете (см. [LL5. 147, задача]) получается еще коэффициент  $1/16\pi$ . Более подробный рассказ о теории Орнштейна - Цернике см. также в учебнике [7, §81].

<sup>28</sup> Иначе говоря, величина  $|t|$  не слишком мала. Это согласуется с тем фактом, что область применимости теории Ландау задается условием  $\delta\eta \ll \eta_0$ , ограничивающим величину  $|t|$  снизу.

**КО-7.**

11. Найти связь флуктуаций намагниченности с соответствующей магнитной восприимчивостью, используя выражения этих величин через статистическую сумму.

Принять, что при включении магнитного поля  $\mathcal{H}$  к гамильтониану  $H$  добавляется слагаемое  $-\mathcal{M}\mathcal{H}$  ( $M$  - намагниченность,  $V$  - объём тела,  $\mathcal{M} = VM$  - его магнитный момент).

**КО-7.** 11. При наличии магнитного поля статсумма принимает вид

$$Z = \sum e^{-H/T + \mathcal{M}\mathcal{H}/T}$$

Среднее значение магнитного момента определяется из соотношения

$$\frac{T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mathcal{H}} = \sum \left( \frac{1}{Z} e^{-H/T + \mathcal{M}\mathcal{H}/T} \right) \mathcal{M} = \langle \mathcal{M} \rangle$$

Магнитная восприимчивость  $\chi$  равна

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{V} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathcal{H}} = \frac{T}{V} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mathcal{H}} \right) = \frac{T}{V} \left[ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mathcal{H}^2} - \frac{1}{Z^2} \left( \frac{\partial Z}{\partial \mathcal{H}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{TV} (\langle \mathcal{M}^2 \rangle - \langle \mathcal{M} \rangle^2) = \frac{V(\Delta \mathcal{M})^2}{T} \end{aligned}$$

Резкий рост магнитной восприимчивости вблизи точки фазового перехода второго рода связан с большими флуктуациями намагниченности.

**КО-7.**

12. Найти, как зависит от времени средний квадрат размера области, занятой облаком броуновских частиц, которые стартовали одновременно из одной точки.

**КО-7.** 12. Поскольку  $\mathbf{r}(t) = \int_0^t dt_1 \mathbf{v}(t_1)$ , получаем

$$\langle r^2(t) \rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2) \rangle$$

Учтя, что

$$\langle \mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2) \rangle = 3 \frac{T}{m} e^{-|t_1 - t_2|/\tau}$$

где  $\tau = m/\alpha$ ,  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности силы трения частицы и её скорости, находим

$$\langle r^2(t) \rangle = 6 \frac{T}{m} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{(-t_1 + t_2)/\tau} = 6 \frac{T}{m} \left[ \tau t - \tau^2 (1 - e^{-t/\tau}) \right]$$

Для времени  $t \ll \tau$

$$\sqrt{\langle r^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{3T}{m}} t = v_T t \quad (60)$$

что соответствует свободному движению частиц с тепловой скоростью.

Для времени  $t \gg \tau$

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{6T\alpha}{m} t \quad (61)$$

и движение частиц — это случайные блуждания (см. также [8, гл. 6, задача 13], [11, п. 11.1]).

**КО-7.**

13. Контур состоит из двух сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , температуры которых равны  $T_1$  и  $T_2$ , и конденсатора ёмкости  $C$ , соединённых параллельно. Найти автокорреляционную функцию тока, идущего через конденсатор.

**КО-7.** 13

$$\langle i(t_1) i(t_2) \rangle = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 R_2} \left( -\frac{1}{RC} e^{-|t_1 - t_2|/RC} + \delta(t_1 - t_2) \right)$$

где

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

**КО-7.**

14. Контур состоит из двух сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , температуры которых равны  $T_1$  и  $T_2$ , и катушки индуктивности  $L$ , соединённых последовательно (кольцом). Найти, какая энергия передаётся от одного сопротивления к другому за счёт флуктуаций тока в цепи.

**КО-7.** 14. Будем определять энергию, передаваемую сопротивлению  $R_1$ . Можно считать, что при каждом из сопротивлений есть шумовой источник ЭДС,  $\mathcal{E}_{1,2}$ . В цепи идет ток  $I$ . Средняя мощность, поставляемая сопротивлением  $R_1$  в цепь, равна  $w_{1-} = \langle \mathcal{E}_1 I \rangle$ , получаемая из цепи  $w_{1+} = R_1 \langle I^2 \rangle$ , так что мощность, передаваемая первому сопротивлению  $w_{2 \rightarrow 1} = w_{1+} - w_{1-}$ .

Импеданс цепи  $Z(\omega) = R_1 + R_2 - i\omega L$ . Компонента Фурье <sup>29</sup> тока выражается через компоненты Фурье случайных ЭДС:  $I_\omega = (\mathcal{E}_{1\omega} + \mathcal{E}_{2\omega}) / Z(\omega)$

$$w_{1-} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \langle \mathcal{E}_{1\omega_1} I_{\omega_2} \rangle = \quad (62)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \langle (\mathcal{E}_{1\omega_1} (\mathcal{E}_{1\omega_2} + \mathcal{E}_{2\omega_2})) \rangle / Z(\omega_2) \quad (63)$$

Спектральные характеристики источников шума:

$$\langle \mathcal{E}_{1\omega_1} \mathcal{E}_{1\omega_2} \rangle = 2\pi (\mathcal{E}_1^2)_\omega \delta(\omega_1 + \omega_2), (\mathcal{E}_1^2)_\omega = R_1 T_1, (\mathcal{E}_2^2)_\omega = R_2 T_2, \langle \mathcal{E}_{1\omega_1} \mathcal{E}_{2\omega_2} \rangle = 0$$

Подставив в (63), получаем

$$w_{1-} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{R_1 T_1}{Z(\omega)} \quad (64)$$

Подобным же образом

$$w_{1+} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{R_1 (R_1 T_1 + R_2 T_2)}{Z(\omega) Z(-\omega)}$$

<sup>29</sup> Мы используем разложение Фурье в виде ([LL5. 122], [11, п. 12.2])

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}; \quad x_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt$$

так что

$$\begin{aligned} w_{2 \rightarrow 1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{R_1 R_2 (T_2 - T_1) + i\omega L R_1 T_1}{Z(\omega) Z(-\omega)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{R_1 R_2 (T_2 - T_1) + i\omega L R_1 T_1}{(R_1 + R_2)^2 + L^2 \omega^2} \end{aligned}$$

В итоге

$$w_{2 \rightarrow 1} = \frac{R_1 R_2 (T_2 - T_1)}{2 (R_1 + R_2) L}$$

Нас не должна смущать расхожимость интеграла (64) (сокращающаяся в ответе), хотя бы потому, что есть достаточно причин, ограничивающих белый шум ЭДС  $\mathcal{E}_{1,2}$  при высоких частотах.

Разумеется, перенос энергии, связанный всего с одной степенью свободы, очень мал.

**КО-7.**

15. Контур состоит из трёх одинаковых сопротивлений,  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , температуры которых различны, и трёх одинаковых конденсаторов  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  (рис. 1). Найти автокорреляционные функции зарядов на одном из конденсаторов и токов, идущих через конденсатор. Найти корреляционную функцию зарядов на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ .

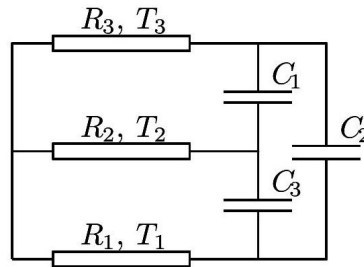


Рис. 1. Симметричный контур

**10.14 Задачи на Уравнение диффузии****КО-8.**

1. Выразить коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении диффузии

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Af(x, t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Bf(x, t))$$

для случайных блужданий, изучавшихся в практикуме "Моделирование физических процессов" (полагая  $\Delta t = 1$  и  $\langle \Delta x \rangle = -b$ ).

В этой работе смещение частицы за шаг  $\Delta t$  задавалось как  $\Delta x = h * (2r - 1) - b$ , где  $r$  — случайное число с равномерным распределением от 0 до 1,  $h = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $b \ll h$ .

**КО-8.**

2. Выразить коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении диффузии для броуновских частиц в пространстве скоростей. Получить стационарное распределение по скоростям.

**КО-8.**

3. Броуновские частицы движутся в поле тяжести. Ось  $x$  направлена вверх. Пусть при  $x = 0$  установлена непроницаемая стенка (пол), а величины  $A$  и  $B$  — постоянные. Найти установившееся распределение  $f(x)$  (для  $x > 0$ ). Найти, в частности, распределение броуновских частиц по высоте над дном сосуда в поле тяжести.

**КО-8.**

4. Для газа с переменной в пространстве температурой  $A = 0$ ,  $B(x) = b + ax^2$ . Найти установившееся со временем распределение плотности.

**10.15 Решения Уравнение диффузии**

**КО-8.** 1.  $A = -b$ ,  $B = \frac{1}{3}h^2$ .

- КО-8.** 2. В пространстве скоростей уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(f\mathbf{A}) - \left( \frac{\partial^2}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial v_z^2} \right) (Bf)$$

где

$$\mathbf{A} = -\frac{\langle \Delta \mathbf{v} \rangle}{\Delta t} = -\frac{\mathbf{v}}{\tau}, \quad B = \frac{\langle (\Delta v_x)^2 \rangle}{2\Delta t} = \frac{T}{m\tau}$$

Для функции распределения, не зависящей от времени, уравнение диффузии сводится к условию  $\mathbf{j} = 0$ , где

$$\mathbf{j} = \mathbf{A}f - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(Bf)$$

Учитывая, что в стационарном режиме функция распределения изотропна, получаем уравнение

$$\frac{vf}{\tau} + \frac{d}{dv} \left( \frac{T}{m\tau} f \right) = 0$$

которое приводит к распределению

$$f(v) \propto \exp \left( -\frac{mv^2}{2T} \right)$$

(как и следовало ожидать).

**КО-8.** 3. Для установившегося распределения выполняется условие  $j_x = 0$ . Оно сводится к равенству  $Af + \frac{d}{dx}(Bf) = 0$  и дает  $f \propto \exp(-Ax/B)$  (с учетом того, что  $f \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .) Уравнение движения частицы в поле тяжести  $m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha\mathbf{v} + \mathbf{f}_{\text{случ}} + m\mathbf{g}$  (величина ускорения в поле тяжести  $g$  должна быть подправлена" так, чтобы учитывалась архимедова сила). Влияние поля тяжести сводится к появлению дрейфовой" скорости  $\mathbf{v}_{\text{др}} = m\mathbf{g}/\alpha$ . Следует выбрать интервал времени  $\Delta t \gg \tau$ , так что  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = (2T\tau/m)\Delta t$ , отсюда  $B = T\tau/m$ . Средняя же скорость  $\mathbf{A} = \mathbf{v}_{\text{др}} = \mathbf{g}\tau$  обусловлена только смещением в поле тяжести.

В итоге  $f(x) = f(0)\exp(-mgx/T)$ . В слое толщины  $\sim A\Delta t$  вблизи дна на формирование величин  $A, B$  должны оказывать влияние столкновения броуновских частиц с дном. Движение и концентрация частиц в этом слое будут несколько разными в зависимости от того, например, являются ли эти столкновения упругими или неупругими. В последнем случае, очевидно, концентрация частиц в тонком слое вблизи дна окажется аномально" повышенной.

## 10.16 Задачи на Кинетическое уравнение

### КО-9.

1. На ускорителях со встречными пучками сгустки частиц фокусируются в точке встречи (см. рис. 2). Примем, что при

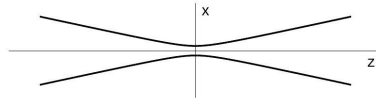


Рис. 2. Вид пучка частиц вблизи фокуса  $z = 0$  распределения частиц каждого из пучков по поперечным координатам  $x, y$  и по углам отклонения  $\theta_x, \theta_y$  скорости от оси  $z$  гауссовы:

$$f(x, y, \theta_x, \theta_y) = \frac{N}{\pi^2 \sigma_x \sigma_y \Delta_x \Delta_y} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\theta_x^2}{2\Delta_x^2} - \frac{\theta_y^2}{2\Delta_y^2} \right)$$

где  $N$  - число частиц на единицу длины пучка. Будем считать пучки неограниченными и однородными в направлении оси  $z$ .

Можно принять также, что скорость частиц равна  $c$ , а существенные в задаче углы  $\theta_x, \theta_y$  малы, так что  $v_z \approx \pm c$ .

Найти функцию распределения при  $z \neq 0$ , концентрацию частиц пучка  $n(x, y, z)$ . Найти число соударений частиц встречных пучков на участке  $dz$  за время  $dt$ , если сечение соударения равно  $\sigma_{\text{int}}$ . (Это сечение достаточно мало, чтобы не влиять на концентрацию частиц в пучках.) Взаимодействием частиц в пучках друг с другом можно пренебречь.

### КО-9.

2. Найти диэлектрическую проницаемость плазмы в случаях, когда электрическое поле  $\mathbf{E}$  параллельно волновому вектору  $\mathbf{k}$  и когда  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  ( $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varepsilon_t(\omega, \mathbf{k})$ ) при условии  $k\langle v \rangle \ll \omega$ .

**КО-9.**

3. Найти статическую (продольную) диэлектрическую проницаемость плазмы (т. е.  $\varepsilon(\omega, k)$  при условии  $\omega = 0$ ).

**КО-9.**

4. Найти поправку к диэлектрической проницаемости плазмы, обусловленную движением ионов.

**КО-9.**

5. При определённых условиях в плазме возможны колебания, в которых электроны и ионы движутся с почти одинаковыми амплитудами, так что электрическое поле, возникающее при смещении ионов, в очень большой мере экранируется электронами. Поэтому частота этих колебаний мала,  $\omega \ll kv_e$ . В то же время их фазовая скорость велика по сравнению со скоростью ионов<sup>5</sup>:  $v_i \ll \omega/k$ . Такие колебания называют ионным звуком.

Найти закон дисперсии ионного звука.

**КО-9.**

6. Провести в интеграле столкновений

$$I = \int w \cdot [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_1, t)] d^3 p_1 d^3 p' d^3 p'_1$$

где

$$w = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) = w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1 \rightarrow \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \propto \\ \propto \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1) \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{p}'_1))$$

интегрирование по скорости центра масс пары частиц после столкновения  $\mathbf{V}' = \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1}{2m}$  и величине их относительной скорости  $v'_{\text{отн}} = \frac{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1|}{m}$ .

**КО-9.**

7. Получить из кинетического уравнения вид равновесного распределения по скоростям в газе в отсутствие внешних полей.

**КО-9.**

8. Выразить поток тепла в металле через скорости и энергии квазичастиц. (О квазичастицах см. задачу 4.14.)

**КО-9.**

9. Рассматриваем фотонный газ с очень малой примесью вещества. Пусть рассеяние фотонов на этой примеси приводит к длине пробега фотонов  $l$ . В таком фотонном газе волны, в которых концентрация фотонов оказывается переменной, могут распространяться, если длина волны их велика по сравнению с  $l$ . Найти скорость таких волн.

**КО-9.**

10. Вдоль отрезка проволоки, к которому приложена постоянная разность потенциалов, течёт ток. Как изменится ток, если включить постоянное однородное магнитное поле, перпендикулярное проволоке? Воспользоваться  $\tau$ -приближением для интеграла столкновений. (Задача об эффекте Холла).

<sup>5</sup> Такие условия реализуются, например, в плазме, нагреваемой протекающим по ней током: передача энергии от лёгких частиц к тяжёлым происходит очень медленно, поэтому газ электронов имеет температуру много большую, чем газ ионов.



**КО-9.**

11. Найти изменение сопротивления проводника при включении магнитного поля **В**, перпендикулярного электрическому полю **Е**, если есть два типа носителей заряда, например, электроны и дырки.

**КО-9.**

12. Выразить коэффициент затухания поперечного звука в металле, обусловленный вязкостью электронного газа, при условии, что длина волны звука много больше длины свободного пробега электронов ( $kv\tau \ll 1$ ), причём главную роль в рассеянии электронов играют примеси.

**КО-9.**

13. Выразить  $\tau$  в предыдущей задаче через сечение рассеяния электронов. Рассеяние электронов на примесях считать упругим. (Подразумевается, что процесс происходит при низкой температуре, так что влиянием на движение электронов колебаний кристаллической решетки можно пренебречь.)

**КО-9.**

14. Вычислить коэффициент теплопроводности для газа нейтральных молекул, принимая для интеграла столкновений  $\tau$ -приближение.

**10.17 Решения Кинетическое уравнение**

**КО-9.** 1. Зависимость от времени функции распределения при свободном движении частиц:  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}) = F_1(x - c\theta_x t, y - c\theta_y t, z - ct, \theta_x, \theta_y)$ . В нашем случае зависимости от времени нет. Это возможно, если функция  $F_1$  зависит от своих аргументов  $x, y, z$  через линейные комбинации

$$x - c\theta_x t - \theta_x(z - ct) = x - \theta_x z, y - c\theta_y t - \theta_y(z - ct) = y - \theta_y z$$

Учитывая вид функции распределения при  $z = 0$ , получаем

$$f(x, y, z, \theta_x, \theta_y) = \frac{N}{\pi^2 \sigma_x \sigma_y \Delta_x \Delta_y} \exp \left( -\frac{(x - \theta_x z)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \theta_y z)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\theta_x^2}{2\Delta_x^2} - \frac{\theta_y^2}{2\Delta_y^2} \right)$$

Концентрация частиц в пучке

$$n(x, y, z) = \int f d\theta_x d\theta_y = \frac{N}{\pi^2 \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} \exp \left( -\frac{x^2}{2\tilde{\sigma}_x^2} - \frac{y^2}{2\tilde{\sigma}_y^2} \right)$$

где

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \sigma_x^2 (1 + z^2/\beta_x^2), \tilde{\sigma}_y^2 = \sigma_y^2 (1 + z^2/\beta_y^2), \beta_x = \sigma_x/\Delta_x, \beta_y = \sigma_y/\Delta_y$$

Число соударений в секунду на участке  $dz$  за время  $dt$

$$d\nu = \sigma_{\text{int}} \cdot 2c \cdot dz dt \int n^2(x, y, z) dx dy = \frac{cN^2}{\pi \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} dz$$

Разумеется, найденные распределения справедливы только на участке между фокусирующими пучки линзами, а сгустки частиц не бесконечны <sup>30</sup>.

<sup>30</sup> Для ускорителя ВЭПП-4М, например,  $\sigma_x = 1$  мм,  $\sigma_y = 0,03$  мм,  $\beta_x = 75$  см,  $\beta_y = 5$  см, длина сгустков частиц  $\sigma_z = 5$  см, фокусные расстояния линз порядка нескольких метров.  $N = (N_0/\sqrt{\pi}\sigma_z) \exp(-(z \pm ct)^2/2\sigma_z^2)$ .

**КО-9.** 2. Пусть плазма находится в электрическом поле  $\mathbf{E} \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$ . Мы принимаем, что электрическое поле достаточно слабое, чтобы отклонение функции распределения электронов  $\delta f$  от равновесной  $f_0$  можно было считать малым и произвести линеаризацию кинетического уравнения. Мы найдём добавку к функции распределения электронов, затем - плотность тока  $\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} \delta f d^3p$ , выразим проводимость и, наконец, воспользуемся соотношением

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi\sigma i}{\omega} \quad (65)$$

Выберем ось  $x$  параллельно направлению вектора  $\mathbf{k}$ . С учетом того, что  $\delta f \propto \mathbf{E}$ , из линеаризованного кинетического уравнения (без учета столкновений)

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

получаем

$$\delta f = -\frac{ie\mathbf{E}}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}$$

Будем также использовать разложение

$$\frac{1}{\omega - kv_x} = \frac{1}{\omega} \left( 1 + \frac{kv_x}{\omega} + \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right)$$

Начнём со случая, когда электрическое поле параллельно  $\mathbf{k}$ .

$$\begin{aligned} j \equiv j_x &= \frac{-ie^2 E}{\omega} \int v_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \left( 1 + \frac{kv_x}{\omega} + \left( \frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right) d^3p = \\ &= \frac{ine^2}{m} \left( 1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega^2} \right) E = \sigma_l E \\ \varepsilon_l &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega^2} \right), \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m} \end{aligned}$$

Для распределения Максвелла  $\langle v^2 \rangle = 3T/m$ .

Для случая  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  направим ось  $y$  вдоль  $\mathbf{E}$ . Тогда

$$\begin{aligned} j \equiv j_y &= -ie^2 E \int v_y \frac{\partial f_0}{\partial p_y} \frac{d^3p}{\omega - kv_x} = \frac{ieE}{m} \int \frac{f_0 d^3p}{\omega - kv_x} = \sigma_t E \\ \varepsilon_t &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{3\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

Мы не выписываем здесь мнимую часть  $\varepsilon$ , обусловленную затуханием Ландау.

Приведем еще один вариант вывода  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_t$ , на этот раз - не связанный с использованием кинетического уравнения.

Сначала напомним, как находится диэлектрическая проницаемость плазмы без учета теплового движения электронов. Дипольный момент, возникающий при смещении электрона в электрическом поле  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \exp(-i\omega t)$ , равен  $\mathbf{p}(t) = \alpha(\omega) \mathbf{E}(t)$ , где  $\alpha = -e^2/m\omega^2$  - поляризуемость частицы. Поляризация вещества  $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$ , где  $n$  - концентрация электронов. Далее,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ , откуда

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi n \alpha(\omega). \quad (67)$$

Чтобы учесть тепловое движение электронов рассматриваем по отдельности группы электронов с одинаковыми скоростями  $\mathbf{v}$ . Количество электронов в каждой из таких групп определяется функцией распределения  $f(\mathbf{v})$ . Найдём переменный дипольный момент электрона, движущегося по закону  $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ , возникающий в поле  $\mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . По сути дела, мы будем определять реакцию электрона на поле электромагнитной волны, поэтому считаем, что наряду с электрическим есть и магнитное поле, зависимость которого от координат и времени такова же. Магнитное поле можно определить из уравнения  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , что дает  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k}\mathbf{E}]$ . Пока мы рассматривали покоившиеся (без учета волны) электроны, это магнитное поле нас не интересовало, поскольку учет его влияния на движение электрона дал бы поправку, квадратичную по амплитуде поля. Для учета колебаний электрона в системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , это магнитное поле становится существенным. Дело в том, что электрическое поле в этой системе отсчета определяется как электрическим, так и магнитным полями в лабораторной системе:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] = \mathbf{E} + \frac{1}{\omega}[\mathbf{v}[\mathbf{kE}]] = \mathbf{E} + \frac{1}{\omega}(\mathbf{vE})\mathbf{k} - \frac{1}{\omega}(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{E} \\ \mathbf{E}'(t) &= \mathbf{E}' \exp(-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})t)\end{aligned}\quad (68)$$

Поляризуемость  $\alpha$  должна быть взята при значении частоты, равном  $\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ . (Изменение частоты поля представляет собой эффект Доплера.) Возвращаясь в лабораторную систему, получаем дипольный момент  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ , где  $\mathbf{p}' = \alpha(\omega')\mathbf{E}'$ .<sup>31</sup> Поляризацию получаем, просуммировав значения  $\mathbf{p}$  по всем электронам, учитывая при этом разброс их скоростей, иначе говоря, усреднив с максвелловской функцией распределения.

Рассмотрим сначала случай, когда  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ . В этом случае  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$  и в (67) заменяем  $n\alpha$  на

$$n \langle \alpha(\omega') \rangle = \int \alpha(\omega - kv_x) f(v) d^3v = -\frac{e^2}{m} \int \frac{f(v) d^3v}{(\omega - kv_x)^2} \quad (69)$$

Проинтегрировав по частям по  $v_x$ , получаем

$$n \langle \alpha(\omega') \rangle = -\frac{e^2}{mk} \int \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{d^3v}{\omega - kv_x} \quad (70)$$

Это приводит к найденному уже выше выражению  $\varepsilon_l$ .

В случае  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  из (68) получаем  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\omega} + \frac{E v_y}{\omega} \mathbf{k}$ . Второе слагаемое при усреднении по направлениям исчезнет, так что в (67) заменяем  $n\alpha$  на

$$n \left\langle \alpha(\omega') \frac{\omega'}{\omega} \right\rangle = -\frac{e^2}{m} \int \frac{f(v) d^3v}{\omega - kv_x} \quad (71)$$

В результате для  $\varepsilon_t$  также получаем значение, найденное выше.

**КО-9.** 3.  $\varepsilon(\mathbf{k}) = 1 + \frac{\kappa^2}{k^2}$ ,  $\kappa^2 = \frac{4\pi n e^2}{T}$ .

(При переходе к пределу  $\omega \rightarrow 0$  следует заменять  $\omega \rightarrow i\epsilon \rightarrow 0$ . Поэтому в (69) при интегрировании по  $v_x$  получится полюс второго порядка при  $v_x = 0$ , который при интегрировании в комплексной плоскости обходится снизу. Удобнее воспользоваться выражением (70).)

Поскольку в ответ не входит масса частиц, протоны дают такой же вклад, как и электроны, т. е.  $n$  - суммарная концентрация заряженных частиц.

**КО-9.** 4. Ограничимся случаем, когда можно пренебречь разбросом скоростей частиц <sup>32</sup>.  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_e^2/\omega^2 - \omega_i^2/\omega^2$ ,  $\omega_a^2 = 4\pi n_a e_a^2/m_a$ ,  $a = e, i$ . Для  $n_e = n_i$  дело сводится к замене массы электрона на приведенную массу электрона и иона.

Обратим внимание на сходство плазменных колебаний в этом случае с оптическими колебаниями кристаллической решетки.

**КО-9.** 5. Можно считать, что в указанных условиях поляризация электронной составляющей плазмы оказывается статической:  $\varepsilon_e - 1 = \kappa^2/k^2$ ,  $\kappa^2 = 4\pi n e^2/T_e$ , а в ионной поляризации можно пренебречь пространственной дисперсией:  $\varepsilon_i - 1 = -\omega_{0i}^2/\omega^2$ ,  $\omega_{0i}^2 = 4\pi n e^2/m_i$ . В итоге

$$\varepsilon = 1 + \frac{\kappa^2}{k^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}$$

Закон дисперсии ионного звука получаем из уравнения  $\varepsilon(\omega, k) = 0$ . При низких частотах скорость такого звука  $\omega/k = \sqrt{T_e/m_i}$ . Указанные в условии соотношения скоростей могут выполняться, если  $T_e \gg T_i$ .

<sup>32</sup> В этом случае кинетическое уравнение, в сущности, не нужно.

Такие колебания сходны с акустическими колебаниями кристаллической решетки.

<sup>31</sup> Кроме того возникает также и магнитный момент,  $\mathbf{m} = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{p}']$ . При возврате в лабораторную систему вклад его в электрический дипольный момент будет иметь относительную величину  $\sim v^2/c^2$ , и мы не будем его учитывать.

**КО-9.** 6. Перейдем от переменных  $\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$  к переменным  $\mathbf{V}'$  и  $\mathbf{v}'_{\text{отн}}$  :

$$\begin{aligned} \int \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1) \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{p}'_1)) d^3 p' d^3 p'_1, = \\ = 8m^6 \int \delta(2m(\mathbf{V} - \mathbf{V}')) \\ \cdot \delta(mV^2 + mv_{\text{отн}}^2/4 - mV'^2 + mv_{\text{отн}}'^2/4) d^3 V' d^3 v'_{\text{отн}} = \\ = m^2 v_{\text{отн}} d\Omega' \end{aligned}$$

В итоге

$$I = \int \frac{d\sigma}{d\Omega'} v_{\text{отн}} (f f_1 - f' f'_1) d\Omega' d^3 p_1$$

(множитель  $m^{-2}$  считаем включенным в коэффициент пропорциональности в условии, дифференциальное сечение рассеяния молекул зависит от угла между  $\mathbf{v}'_{\text{отн}}$  и  $\mathbf{v}_{\text{отн}} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)/m$ ).

**КО-9.** 7. Очевидно, что искомое распределение должно быть пространственно однородным, функция распределения не зависит от  $t$  и  $\mathbf{r}$ . Поскольку также  $\mathbf{F} = 0$ , получаем  $I = 0$ . Распределение должно быть изотропным, функция распределения может зависеть только от модуля  $\mathbf{p}$ , т.е. только от энергии. Условие  $I = 0$  сводится к равенству  $f(\varepsilon)f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon')f(\varepsilon'_1)$  при условии  $\varepsilon + \varepsilon_1 = \varepsilon' + \varepsilon'_1$ , иначе говоря,  $f(\varepsilon)f(\varepsilon_1) = F(E)$ , где  $E = \varepsilon + \varepsilon_1$ . Записав это равенство в виде  $\ln f(\varepsilon) + \ln f(E - \varepsilon) = \ln F(E)$ , продифференцируем его по  $\varepsilon$ :

$$\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} - \frac{f'(\varepsilon_1)}{f(\varepsilon_1)} = 0$$

Поскольку значения  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  произвольны, это равенство означает, что  $f'(\varepsilon)/f(\varepsilon) = -\beta$ , где  $\beta$  — постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . В итоге получаем

$$f(\varepsilon) = e^{\alpha - \beta\varepsilon}$$

т. е. распределение Максвелла.

**КО-9.** 8. Плотность потока тепла это плотность потока энергии квазичастиц:

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{v} \varepsilon(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3 p$$

Интегрирование проводится по всем значениям  $\mathbf{p}$ , скорость квазичастицы  $\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = v_0 \frac{\mathbf{p}}{p} \text{sgn}(p - p_0)$ , фактически вклад дает область  $|p - p_0| \lesssim T$ , причем нужно сложить вклады электронов ( $p > p_0$ ) и дырок ( $p < p_0$ ).

Результат совпадает с выражением потока через энергии электронов

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{v} (\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon_0) f(\mathbf{p}) d^3 p$$

(Подробнее - в [16, §3.4].

**КО-9.** 9. Кинетическое уравнение, описывающее изменение функции распределения фотонов,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = I$$

Здесь скорость фотона  $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / \varepsilon$ ,  $\varepsilon = cp$  — энергия фотона. Интеграл столкновений

$$I \propto \int [w(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) f(\mathbf{p}') - w(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') f(\mathbf{p})] d^3 p'$$

Будем считать, что столкновения фотонов с частицами вещества являются упругими,  $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p})$ , и что  $w(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) = w(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}')$ .

Тогда  $\int \varepsilon I d^3 p = 0$ ,  $\int \mathbf{p} I d^3 p = 0$ .

Примем также, что в каждой точке" достигается локальное равновесие, в частности, фотонный газ имеет некоторую среднюю скорость  $\mathbf{V}$ , и в системе отсчета, которая движется с такой скоростью, распределение частиц по импульсам  $f_0(\mathbf{p})$  можно считать изотропным (и равновесным). В случае, когда рассматривается обыкновенный газ, подобные предположения приводят к уравнениям газодинамики

идеального газа. Ограничимся случаем, когда средняя скорость фотонного газа является нерелятивистской:  $V \ll c$  (это означает, что амплитуда волны мала).

Функция распределения  $f$  в исходной системе может быть выражена через функцию распределения  $f_0$  в системе, имеющей скорость <sup>33</sup> $\mathbf{V}$ :

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_0\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{V}\varepsilon}{c^2}\right) = f_0(\mathbf{p}) + \delta f, \quad \delta f = -\frac{\mathbf{V}\varepsilon}{c^2} \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$$

При замене  $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$  функция  $f_0$  не изменяется, а  $\delta f \rightarrow -\delta f$ .

Как и для обыкновенного газа, концентрация фотонного газа  $n = \int f d^3p = \int f_0 d^3p$ , поправочное слагаемое в функции распределения выпадает. Плотность потока  $j_k = \int v_k f d^3p$ . При вычислении интеграла вклад дает только поправочное слагаемое <sup>34</sup>.

Проинтегрируем кинетическое уравнение по  $d^3p$ . В результате получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0$$

Умножим кинетическое уравнение на  $v_k$  и проинтегрируем по  $d^3p$ . При этом в интеграле  $\int v_k v_i f_0 d^3p$  можно заменить  $v_k v_i$  на  $c^2 \delta_{ki}/3$ , а вклад слагаемого  $\delta f$  исчезает.

$$\frac{\partial j_k}{\partial t} + \frac{c^2}{3} \frac{\partial n}{\partial x_k} = 0$$

Полученная система уравнений приводит к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{c^2}{3} \Delta n$$

Скорость волн плотности в фотонном газе в описанных условиях оказалась равна  $\frac{c}{\sqrt{3}}$ .

Такое же значение скорости звука можно получить, рассматривая фотонный газ как сплошную среду с уравнением состояния  $P = \frac{E}{3V} = \frac{1}{3} \rho c^2$ . <sup>35</sup>

Подобные же волны, распространяющиеся в фоновом газе, наблюдаются в сверхтекучем гелии при температурах ниже 0,5 К. (В этом случае  $c$  - скорость обычного, первого, звука.) Это тепловые волны, которые могут распространяться на расстояния, много большие длины волны. Их называют вторым звуком.

**КО-9.** 10. Пусть  $OZ \parallel \mathbf{B}$ , а  $OX \parallel \mathbf{E}$ . Электрическое поле и отличие  $\delta f$  функции распределения от равновесной  $f_0$  считаем малыми, а магнитное поле - нет. Кинетическое уравнение после линеаризации

$$eE \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \omega \left( v_x \frac{\partial \delta f}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial \delta f}{\partial v_x} \right) = -\frac{\delta f}{\tau}, \quad \omega = \frac{eB}{mc}$$

Ищем решение в виде

$$\delta f = A(\varepsilon) v_x + B(\varepsilon) v_y$$

Приравняв по отдельности слагаемые, содержащие  $v_x$  и  $v_y$ , находим

$$A = -\frac{\tau eE}{1 + (\omega\tau)^2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad B = \omega\tau A$$

При вычислении плотности тока в  $j_x = e \int v_x \delta f d^3v$  войдет только  $A$ , причем множитель  $1/[1 + (\omega\tau)^2]$ , содержащий всю зависимость от магнитного поля, можно вынести за знак интеграла. Поэтому

$$j_x = \frac{\sigma E}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad j_y = \omega\tau j_x, \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (72)$$

При дальнейшем анализе ответа надо учитывать, что вектор  $\mathbf{j}$  направлен вдоль провода, а электрическое поле имеет как продольную, так и поперечную по отношению к току компоненты,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel$ .

Обозначим угол между плотностью тока и электрическим полем  $\theta$ ,

<sup>033</sup> Используем преобразование Лоренца для импульса и энергии при  $V \ll c$ . Подробнее о преобразовании функции распределения см. [4, 10].

<sup>34</sup> Несложно получить также, что  $\mathbf{j} = \mathbf{V}n$ .

<sup>035</sup> Заметим в связи с этим, что приведенный выше вывод можно было бы применить и к газу ультрарелятивистских фермионов.

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \frac{\sigma E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (73)$$

$$\cos \theta = \frac{j_x}{j} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad \tan \theta = \frac{j_y}{j_x} = \omega\tau \quad (74)$$

$$E_{\parallel} = E \cos \theta = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad j = \sigma E_{\parallel} \quad (75)$$

$$E_{\perp} = E \tan \theta = \omega\tau \frac{j}{\sigma} = \frac{Hj}{nec} \quad (76)$$

В итоге оказывается, что зависимость тока от поперечного магнитного поля (эффект, называемый магнетосопротивлением) в рассматриваемой модели отсутствует. Появление поперечного напряжения - это эффект Холла. Выполняется соотношение  $E_{\perp} = RHj$ , где  $R = 1/nec$  - коэффициент Холла.

Такой же результат можно получить, отвлекаясь от разброса по скоростям электронов и представляя, что у них есть некая средняя скорость, направленная вдоль проводника  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{\parallel 1}$ . Тогда среднее значение действующей на электрон в направлении поперек провода силы должно быть равно нулю:  $e\mathbf{E}_{\perp} + (e/c)[\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{H}] = 0$ ; с учётом равенства  $j = nev$  это приводит к найденному выше значению коэффициента Холла и отсутствию магнетосопротивления.  $\square$

Заметим, что обосновать  $\tau$ -приближение в этой задаче в случае произвольной величины магнитного поля едва ли удастся.

**КО-9.** 11. Используя (72), суммируем вклады в ток двух носителей:

$$j_x = (\alpha_1 + \alpha_2) E, \quad \alpha_i = \frac{\sigma_i}{1 + (\omega_i \tau_i)^2}, \quad \omega_i = \frac{e_i H}{m_i c}, \quad \sigma_i = \frac{n_i e_i^2 \tau_i}{m_i}, \quad i = 1, 2$$

$$j_y = (\beta_1 + \beta_2) E, \quad \beta_i = \omega_i \tau_i \alpha_i.$$

Далее, подобно (74-75),

$$E_{\parallel} = \frac{j_x}{j} E = \frac{j}{\sigma}, \quad \sigma = \frac{j^2}{j_x E} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

В этой модели проводимость зависит от магнитного поля. Важен факт появления серьёзной зависимости, самому же полученному характеру зависимости не следует придавать большого значения, т. к. на виде её в реальных условиях сильно сказывается анизотропия зависимости энергии электронов от квазиимпульса, которой мы не учитывали. Холловский коэффициент оказывается равен

$$R = \frac{\sigma_1^2 R_1 + \sigma_2^2 R_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}$$

где  $R_i = 1/(e_i n_i c)$ .

**КО-9.** 12. Направим ось  $x$  по волновому вектору  $\mathbf{k}$  звука, ось  $y$  по направлению смещения  $\mathbf{u}$  вещества в звуковой волне. Примем, что  $\mathbf{u} \propto \exp i(kx - \omega t)$ . Уравнение, определяющее распространение звуковой волны,

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -\frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial x} \quad (77)$$

где  $v_s$  - скорость звука,  $\Pi_{yx}$  - компонента тензора плотности потока импульса, переносимого электронным газом:

$$\Pi_{yx} = \int p_y v_x f d^3 p \quad (78)$$

Будем считать, что состояние электронного газа близко к локально равновесному:

$$f = f_0(|\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(x, t)|) + \delta f \quad (79)$$

Учитывая, что  $\omega \ll kv \ll 1/\tau$ , в левой части кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\delta f}{\tau}$$

следует сохранить только вклад  $f_0$  во втором члене, так что

$$v_x(ik)(i\omega u)\frac{\partial f_0}{\partial v_y} = -\frac{\delta f}{\tau} \quad (80)$$

$$\Pi_{yx} = -k\omega\tau um \int v_x^2 v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_y} d^3p = k\omega\tau m n u \frac{v_0^2}{5} \quad (81)$$

Из (77) получаем  $\rho(\omega^2 - v_s^2 k^2)u = -ik\Pi_{yx}$ , откуда <sup>36</sup>

$$k = \frac{\omega}{v_s} + \frac{i\gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{nmv_0^2\omega^2\tau}{5\rho v_s^3} \sim \omega\tau k$$

Величина  $\gamma$  характеризует потери энергии:  $|u|^2 \propto \exp(-\gamma x)$ .

**КО-9.** 13. Зависимость добавки к функции распределения (80) от направления вектора  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$  имеет вид

$$\delta f = A(\varepsilon)n_x n_y \quad (82)$$

В интеграл столкновений входит разность  $\delta f(\mathbf{p}) - \delta f(\mathbf{p}')$ . Мы подставим  $\delta f(\mathbf{p}')$  в эту разность, представив импульс электрона <sup>36</sup> Мы не учитывали некоторые существенные для задач физики твёрдого тела обстоятельства, например, тот факт, что зависимость  $\varepsilon(\mathbf{p})$  изменяется при деформации вещества. после рассеяния в виде  $\mathbf{p}' = p(\mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{n}'_{\perp})$ , и проведем усреднение по азимутальному направлению вектора  $\mathbf{n}'_{\perp}$  (учитывая, что входящее в интеграл столкновений сечение рассеяния от этого направления не зависит).

$$\delta f(\mathbf{p}') = A(\varepsilon)n'_x n'_y = A(\varepsilon)(\cos \theta n_x + n'_{\perp x})(\cos \theta n_y + n'_{\perp y})$$

Указанное усреднение сводится к заменам:

$$\langle n'_{\perp i} \rangle = 0, \quad \langle n'_{\perp i} n'_{\perp j} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{n}'_{\perp})^2 (\delta_{ij} - n_i n_j) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\delta_{ij} - n_i n_j) \quad (83)$$

В частности,  $\langle n'_x n'_y \rangle = (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta) n_x n_y$ . Поэтому разность  $\delta f(\mathbf{p}) - \delta f(\mathbf{p}')$  заменяется на  $\delta f(\mathbf{p})(1 - \langle n'_x n'_y \rangle) = \delta f(\mathbf{p}) \frac{3}{2} \sin^2 \theta$ .

В итоге приходим к ответу

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3}{2} n_0 v \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^2 \theta d\Omega$$

Связь величины  $\tau$  с сечением рассеяния электронов оказалась не такой, как в задачах о проводимости и о теплопроводности.

**КО-9.** 14. Интересуясь коэффициентом теплопроводности, мы подразумеваем, что длина свободного пробега молекул мала по сравнению с характерным расстоянием, на котором изменяется температура. Это значит, что в первом приближении в каждой точке" газа есть локальное равновесие, можно представлять функцию распределения в виде максвелловской функции распределения

$$f_0 = An(x)e^{-\varepsilon/T(x)} \quad (84)$$

где  $n(x)$  и  $T(x)$  локальные значения концентрации и температуры газа,  $\varepsilon = p^2/2m$ . Имея в виду, что  $d^3p \propto \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ , множитель  $A$  определяем условием

$$\int_0^\infty f_0 \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = n, \quad AT^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \quad (85)$$

Давление газа в согласии с (84) равно  $P = nT$ . Давление не должно изменяться от точки к точке, так что градиент температуры и градиент концентрации связаны соотношением

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = 0 \quad (86)$$

Поток тепла обусловлен отклонением функции распределения от равновесной,  $f = f_0 + \delta f$ . Заявленное в условии  $\tau$ -приближение подразумевает, что кинетическое уравнение линеаризовано, т. е.

$$v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\delta f}{\tau} \quad (87)$$

С учётом (84), (85), (86) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial x} &= \frac{\partial f_0}{\partial n} \frac{dn}{dx} + \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{dT}{dx} = \\ &= \frac{f_0}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{f_0 \varepsilon}{T^2} \frac{dT}{dx} - \frac{3 f_0}{2 T} \frac{dT}{dx} = \frac{f_0}{T} \left( \frac{\varepsilon}{T} - \frac{5}{2} \right) \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

так что

$$\delta f = -\tau v_x \frac{f_0}{T} \left( \frac{\varepsilon}{T} - \frac{5}{2} \right) \frac{dT}{dx} \quad (88)$$

Заметим, что вклады  $\delta f$  в концентрацию  $n \propto \int \delta f d^3 p$  и плотность энергии  $n \langle \varepsilon \rangle \propto \int \varepsilon \delta f d^3 p$  обращаются в ноль (из-за наличия множителя  $v_x$ ). По той же причине  $\delta f$  не даст поправки и к давлению.<sup>37</sup> Нетрудно убедиться, что  $\delta f$  не приведёт и к появлению потока частиц:  $\int v_x \delta f d^3 p \propto \int_0^\infty e^{-\varepsilon/T} (\varepsilon/T - 5/2) \varepsilon \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = 0$  (вместо  $v_x^2$  подставлено  $2\varepsilon/3m$ ).

<sup>37</sup> Именно этот факт позволяет интерпретировать входящие в (84) величины  $n$  и  $T$  как концентрацию и температуру газа; добавка к плотности потока импульса, фактически определяющей давление,  $\delta \Pi_{xx} \propto \int v_x p_x \delta f d^3 p$ , также обращается в ноль, подтверждая законность равенства  $P = nT$  и тем самым соотношения (86).

Плотность потока энергии,

$$\begin{aligned} q &= \int_0^\infty \varepsilon v_x \delta f \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{2\tau}{3mT} \frac{dT}{dx} \int_0^\infty f_0 \varepsilon^2 \left( \frac{\varepsilon}{T} - \frac{5}{2} \right) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \\ &= -\frac{2\tau}{3m} \frac{dT}{dx} A n T^{5/2} \left( \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \right) = -\kappa \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

где

$$\kappa = \frac{5nT\tau}{2m} \quad (89)$$

- коэффициент теплопроводности.

Следует сознаться, что  $\tau$ -приближение не удаётся обосновать. Более корректный подход к решению кинетического уравнения можно найти, например, в [3, 6 - 10], [22, 7 - 13], [23, гл. II].

Выражение (89) справедливо по порядку величины, при этом нужно иметь в виду, что  $\tau \sim l/v$ , где  $l \sim 1/n\sigma$  - длина свободного пробега,  $v \sim \sqrt{T/m}$  - тепловая скорость,  $\sigma$  - сечение рассеяния молекул. Поэтому  $\kappa \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{T}{m}}$ . Обратим внимание, что теплопроводность оказалась не зависящей от концентрации газа.

Разумеется, при очень малой концентрации газа, когда на длину свободного пробега нельзя смотреть как на исчезающе малую (например, для газа между стенками колбы термоса), зависимость от концентрации вполне существенна.

## 11 Задачи общей физики

### 11.1 Задачи на оценки явлений (!?!?!?)

(соберу что-то простое потом.)

### 11.2 Задачи Туймаады

#### ТУЙМ-53. Ледяной покров (1995)

В течение нескольких недель температура воздуха была  $T_1 = -20^\circ\text{C}$  и озеро покрылось льдом толщиной  $h = 20$  см. На какую величину  $\Delta h$  увеличится толщина льда за следующие сутки при той же погоде? Температура грунта и воды на дне озера  $T_2 = +4^\circ\text{C}$ , так как при этой температуре плотность воды максимальна. Плотность льда  $\rho = 900$  кг/м, теплопроводность льда  $k = 2,3$  Вт/(м·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг, удельная теплоёмкость льда  $c_1 = 2100$  Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость воды  $c_2 = 4200$  Дж/(кг·°C).

**Решение** Запишите обмен теплотами. (! напишу точнее указания!)

Поскольку погода не менялась в течение длительного времени, можно считать, что все термодинамические процессы идут уже в установившемся режиме, то есть температура льда линейно изменяется от  $T_1 = -20^\circ\text{C}$  на воздухе до  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  на границе с водой, а температура воды линейно изменяется от  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  на границе со льдом до  $T_2 = +4^\circ\text{C}$  на дне озера. Качественная зависимость температуры  $T$  от глубины представлена на рис. 121.



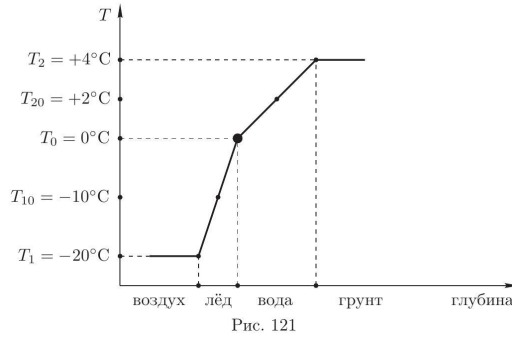


Рис. 121

Кристаллизация воды происходит на границе со льдом при постоянной температуре  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  (выделенная точка на рис. 121), а значения  $T_1$  и  $T_2$  являются константами по условию задачи, значит, средние температуры льда и воды также не меняются со временем и равны соответственно

$$T_{10} = \frac{T_1 + T_0}{2} = -10^\circ\text{C} = \text{const} \quad \text{и} \quad T_{20} = \frac{T_2 + T_0}{2} = +2^\circ\text{C} = \text{const}.$$

Пусть  $x$  — толщина льда в некоторый момент времени  $t$ , тогда за малый промежуток времени  $dt$  толщина льда увеличится на  $dx$  за счёт кристаллизации воды массой  $dm = \rho S dx$ , где  $S$  — площадь озера. При этом непосредственно за счёт кристаллизации выделяется количество теплоты  $dQ_0 = \lambda dm$ , а для сохранения прежних значений средних температур льда и воды нужно отвести от них дополнительные количества теплоты соответственно

$$dQ_1 = c_1 (T_0 - T_{10}) dm \quad \text{и} \quad dQ_2 = c_2 (T_{20} - T_0) dm.$$

Таким образом, в системе выделяется общее количество теплоты

$$dQ = dQ_0 + dQ_1 + dQ_2 = \alpha dm = \alpha \rho S dx$$

где для краткости введено обозначение

$$\alpha = \lambda + c_1 \cdot \frac{T_0 - T_1}{2} + c_2 \cdot \frac{T_2 - T_0}{2}.$$

Это тепло выделяется в разных местах ( $dQ_0$  — на границе,  $dQ_1$  — в объёме льда,  $dQ_2$  — в объёме воды), однако на основании количественной оценки

$$\frac{dQ_1 + dQ_2}{dQ_0} = \frac{c_1 (T_0 - T_1) + c_2 (T_2 - T_0)}{2\lambda} \approx 0,09 \ll 1$$

будем считать, что всё тепло целиком выделяется на границе. Отметим, что только в рамках этого приближения можно считать зависимость температуры от глубины кусочно линейной функцией (рис. 121).

Поскольку выделившееся количество теплоты  $dQ$  передаётся воздуху за счёт разности температур  $\Delta T = T_0 - T_1$  через слой льда толщиной  $x$  и площадью  $S$  за время  $dt$ , по формуле для теплопроводности запишем

$$dQ = k \cdot \frac{\Delta T}{x} \cdot S \cdot dt$$

откуда после подстановки  $dQ$  из формулы (154) и упрощения получим

$$\alpha \rho x dx = k \Delta T dt$$

Отметим, что скорость роста ледяного покрова  $v = dx/dt = k \Delta T / (\alpha \rho x) \sim 1/x$  уменьшается при увеличении  $x$ , поэтому озёра не промерзают до дна.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (155) при изменении толщины льда  $x$  от  $h$  до  $H$ , а времени  $t$  от 0 до  $\tau = 1$  сут = 86400с:

$$\int_h^H \alpha \rho x dx = \int_0^\tau k \Delta T dt$$

откуда

$$\frac{\alpha \rho}{2} (H^2 - h^2) = k \Delta T \tau, \quad \text{или} \quad H = \sqrt{h^2 + \frac{2k \Delta T \tau}{\alpha \rho}}.$$

Найдём искомое приращение толщины ледяного покрова:

$$\Delta x = H - h = h \left( \sqrt{1 + \frac{4k (T_0 - T_1) \tau}{\rho h^2 (2\lambda + c_1 (T_0 - T_1) + c_2 (T_2 - T_0))}} - 1 \right) \approx 5,3 \text{ с}$$

**Примечание.** Может показаться странным, что суточный приrost оказался около четверти толщины льда, образовавшегося согласно условию за несколько недель. Однако никакого противоречия здесь нет, так как из-за конвекции в озере существенное время с начала похолодания занимает охлаждение поверхности воды до температуры кристаллизации. Вообще, “несколько недель” - лишняя информация в задаче.

### ТУЙМ-54. Похолодание (1996)

При температуре на улице  $t_1 = -5^\circ\text{C}$  комнатный термометр показывает  $T_1 = 25^\circ\text{C}$ . Какая температура  $T_2$  будет в доме, если наступит похолодание до  $t_2 = -30^\circ\text{C}$ ? Все прочие условия, включая температуру батарей отопления  $\tau = 70^\circ\text{C}$ , считайте одинаковыми в обоих случаях.

**Решение** У нас обмен потоками, так что приравняем их мощности для обоих случаев, а те линейны по температуре. Отсюда и получаем температуру.

Пусть  $T$  и  $t$  - текущие температуры в доме и на улице соответственно, тогда мощности потоков тепла от батарей в комнату и из дома на улицу составляют

$$P = \alpha(\tau - T) \quad \text{и} \quad N = \beta(T - t),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые константы. В установившемся режиме эти мощности равны между собой, поэтому для первого и второго случаев можно записать соответственно

$$\alpha(\tau - T_1) = \beta(T_1 - t_1) \quad \text{и} \quad \alpha(\tau - T_2) = \beta(T_2 - t_2)$$

откуда

$$T_2 = \tau - \frac{\tau - T_1}{\tau - t_1} \cdot (\tau - t_2) = 10^\circ\text{C}$$

**Примечание.** Видно, что комнатные температуры  $T_1$  и  $T_2$  сильно различаются, что нежелательно с точки зрения обеспечения комфорта для жильцов, поэтому температуру батарей обычно корректируют по погоде на основании приведённых рассуждений и формул.

### Задача 55. Электрочайник (1997)

Меняя напряжение, подаваемое на электрический чайник, можно изменять потребляемую им мощность  $P$ . В зависимости от  $P$  чайник с водой можно нагреть до различных максимальных температур. Эту зависимость отражает табл. 1. Остывание нагретого чайника, выключенного из сети, описывает табл. 2. Определите объём воды, если теплоёмкость пустого чайника  $C_0 = 100 \text{ Дж/К}$ , удельная теплоёмкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Т а б л и ц а 1:

Мощность $P$ , Вт	0	100	200	300
Температура $t$ , $^\circ\text{C}$	20	40	60	80

Т а б л и ц а 2:

Время $\tau$ , с	0	60	300	600	1200	2400
Температура $t$ , $^\circ\text{C}$	80	75	60	45	30	20

**ТУЙМ-55. Электрочайник (1997)** Температура чайника при мощности  $P$  перестаёт увеличиваться, достигнув установившегося значения  $t$ , когда энергия, потребляемая из сети за время  $d\tau$ , целиком передаётся в окружающую среду, то есть

$$Pd\tau = k(t - t_0)d\tau$$

где  $k$  - коэффициент теплоотдачи,  $t_0$  - температура окружающей среды. Линейная зависимость  $P$  от  $t - t_0$ , описываемая формулой (156), подтверждается результатами, приведёнными в таблице 1. Таблица также позволяет найти  $k$  как угловой коэффициент этой зависимости

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 5 \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{К}}$$

При охлаждении чайника с горячей водой справедливо равенство

$$(cm + C_0)dt = -k(t - t_0)d\tau$$

где  $m$  - масса воды в чайнике,  $dt$  - изменение его температуры за время  $d\tau$ .

Перепишем уравнение (158):  $t, ^\circ\text{C}$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t - t_0)}{cm + C_0}$$

В начале охлаждения, при  $t = t_f = 80^\circ\text{C}$ , имеем

$$B = \frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t_f - t_0)}{cm + C_0}$$

Отношение  $B = dt/d\tau$  равно угловому коэффициенту графика зависимости  $t(\tau)$  в точке  $\tau = 0$ .

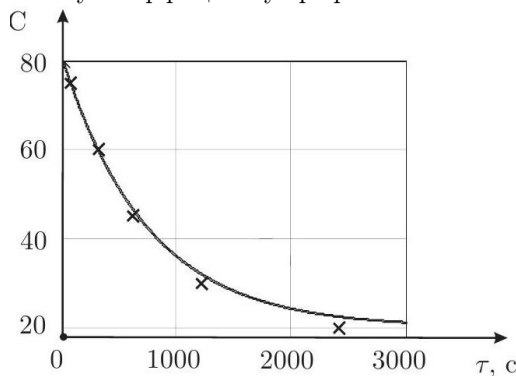


Рис. 122

Этот угловой коэффициент можно приближённо найти из таблицы 2 по двум-тремя первым точкам:

$$B \approx -0,080 \frac{\text{K}}{\text{с}}$$

Подставляя  $B$  в формулу (159), получим объём  $V$  воды в чайнике:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{-k(t_f - t_0) - BC_0}{Bc\rho} \approx 0,9 \text{ л.}$$

Если проинтегрировать уравнение (158), то получится

$$t - t_0 = (t_f - t_0) e^{-\frac{k\tau}{cm+C_0}} = (t_f - t_0) e^{-B\frac{\tau}{t_f-t_0}}.$$

На рис. 122 представлены точки, полученные из таблицы 2, и график этой функции при найденном значении  $B$ . Видно, что выполненные расчёты согласуются с экспериментом.

## ТУЙМ-56. Нагреватель (1998)

В калориметр поместили неизвестное вещество  $X$  массой  $m = 100$  г и специальный нагреватель, который обеспечивал постоянную скорость повышения температуры  $v = 1,0^\circ\text{C}/\text{с}$ . В ходе эксперимента измерялась потребляемая нагревателем мощность  $P$  в зависимости от температуры  $T$ . Полученные результаты представлены в табл. 3. В ходе опыта вещество  $X$  расплавилось. Удельная теплоёмкость вещества  $X$  не зависит от температуры в пределах одного агрегатного состояния. Общая теплоёмкость калориметра и нагревателя  $C = 50$  Дж/ $^\circ\text{C}$ . Температура окружающей среды  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

Полагая экспериментальные данные достоверными и достаточно точными, определите следующие параметры вещества  $X$ : температуру плавления  $T_{\text{пл}}$ , удельные теплоёмкости  $c_{\text{тв}}$  и  $c_{\text{жид}}$  в твёрдом и жидком состояниях соответственно, удельную теплоту плавления  $\lambda$ . На какую постоянную мощность  $P_{\text{пл}}$  нужно настроить нагреватель, чтобы длительное время поддерживать вещество  $X$  в калориметре при температуре плавления?

Приводить ответы в общем виде в данной задаче не требуется, однако желательно оценить погрешности полученных численных результатов.

$T, ^\circ\text{C}$	31	32	33	34	35	36	37
$P, \text{Вт}$	155	160	165	760	155	160	165

**Задача 56. Нагреватель (1998)** Графическое представление экспериментальных данных (рис. 123) позволяет обнаружить три этапа процесса:

- 1) от  $31^\circ\text{C}$  до  $33^\circ\text{C}$ ;
- 1) от  $33^\circ\text{C}$  до  $35^\circ\text{C}$ ;
- 1) от  $35^\circ\text{C}$  до  $37^\circ\text{C}$ .

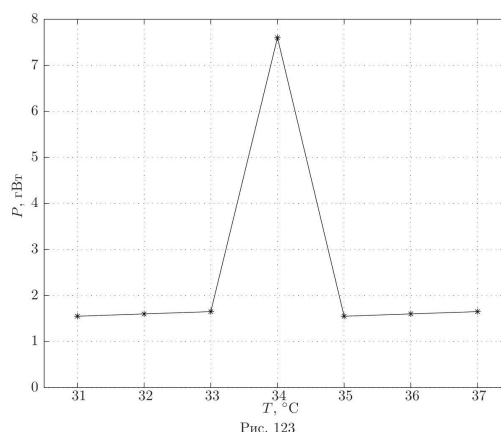


Рис. 123

Температура плавления. На втором этапе мощность нагревателя резко увеличивается, значит, именно в этот момент происходит плавление вещества  $X$ , то есть  $T_{\text{пл}} = (34,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}$ . Наличие погрешности результата связано не с точностью исходных данных, а с их дискретностью, составляющей  $1^\circ\text{C}$ .

Мощность теплопотерь. На первом и третьем этапах мощность нагревателя линейно зависит от температуры, что при условии постоянства теплоёмкостей может объясняться только наличием теплопотерь, мощность которых  $P_0 = k(T - T_0)$ , где  $k$  - константа, характеризующая калориметр. Из таблицы в условии видно, что мощность увеличивается на  $\Delta P = 5$  Вт при повышении температуры на  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ , следовательно, коэффициент пропорциональности  $k = \Delta P / \Delta T = 5 \text{ Вт}/^\circ\text{C}$ . Чтобы поддерживать вещество  $X$  в калориметре при постоянной температуре, нагреватель должен подводить мощность, равную мощности теплопотерь, поэтому  $P_{\text{пл}} = k(T_{\text{пл}} - T_0) = (70 \pm 3) \text{ Вт}$ . Погрешность  $P_{\text{пл}}$  обусловлена погрешностью  $T_{\text{пл}}$  из предыдущего пункта.

Удельные теплоёмкости. За малый промежуток времени  $\Delta t$  температура системы повышается на  $\Delta T = v \Delta t$ . Пусть  $c$  - удельная теплоёмкость вещества  $X$  при температуре  $T$  на первом или третьем этапе, тогда уравнение теплового баланса на промежутке времени  $\Delta t$  будет иметь вид

$$(P - k(T - T_0)) \Delta t = (cm + C) \Delta T$$

откуда

$$c = \frac{1}{m} \left( \frac{P - k(T - T_0)}{v} - C \right).$$

Подставляя сюда данные для любых точек на первом и третьем этапах, находим соответственно

$$c_{\text{т}} = 500 \text{ Дж} / (\text{Г} \cdot ^\circ\text{C}) \quad \text{и} \quad c_{\text{жид}} = 300 \text{ Дж} / (\text{Г} \cdot ^\circ\text{C}).$$

Погрешности здесь не рассчитаны, так как они могут быть связаны только с погрешностью исходных данных, которой по условию можно пренебречь.

Удельная теплота плавления. Мощности нагревателя на границах второго этапа ( $P_{33} = 165$  Вт и  $P_{35} = 155$  Вт) близки между собой и существенно меньше мощности в середине второго этапа ( $P_{34} = 760$  Вт), поэтому можно считать, что для нагрева системы и компенсации теплопотерь на втором этапе требуется средняя мощность  $P_{\text{ср}} = (P_{33} + P_{35})/2 = 160$  Вт, а дополнительная мощность  $P_{\text{доп}} = P_{34} - P_{\text{ср}} = 600$  Вт расходуется на плавление.

Логично предположить, что полученные в эксперименте мощности  $P$  являются средними значениями за промежуток времени  $\Delta t = \Delta T/v = 1$  с между соседними измерениями, тогда из уравнения теплового баланса для плавления

$$P_{\text{доп}} \Delta t = \lambda m$$

находим

$$\lambda = (6000 \pm 50) \text{ Дж/кг}$$

Погрешность последнего результата оценена через диапазон возможных значений  $P_{\text{доп}} = (600 \pm 5) \text{ Вт}$ , зависящий от  $P_{\text{ср}} = (160 \pm 5) \text{ Вт}$ , и получилась весьма небольшой для подобных измерений, однако следует учесть, что, если предположение об усреднении мощности в реальности не выполняется, то полученное значение  $\lambda$  может в разы отличаться от истинного.

## ТУЙМ-57. Пружина (1999)

Между двумя плоскостями с постоянными температурами  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) находится идеальный газ с молярной массой  $M$ . Расстояние между плоскостями равно  $H$ . К верхней плоскости на невесомой пружине подвешен маленький шарик массой  $m$ , средняя плотность которого равна  $\rho_0$ . Длина пружины в недеформированном состоянии  $L_0$ . Коэффициент жёсткости пружины равен  $k$ . Температура линейно возрастает при удалении от нижней плоскости.

1) Найдите распределение плотности газа между плоскостями, считая, что давление газа между плоскостями везде одинаково и равно  $p$ .

2) Найдите давление в газе  $p$ , если в положении равновесия длина пружины равна  $L_0$ .

3) Найдите частоту малых колебаний шарика, считая, что при движении шарика газ не перемешивается и не оказывает сопротивления движению шарика.

**Задача 57. Пружина (1999)** Плотность газа зависит от давления по Менделееву-Клапейрону, считая изменение температуры линейным. С помощью него по закону Архимеда определяем силу, действующую на пружину, а из уравнения колебаний - частоту. (! еще раз решу!)

Для нахождения плотности газа применим уравнение состояния идеального газа  $pV = m_{\Gamma}RT/M$  (уравнение Менделеева-Клапейрона). Из него следует, что

$$\rho = \frac{m_{\Gamma}}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

где  $M$  - молярная масса газа,  $m_{\Gamma}$  - масса газа в объёме  $V$ ,  $R$  - универсальная газовая постоянная. Зависимость плотности газа от координаты  $x$  обусловлена распределением температуры газа (рис. 124).

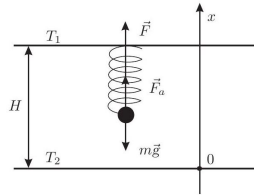


Рис. 124

Учитывая, что температура между плоскостями изменяется линейно с изменением  $x$ , получим

$$T = T(x) = \frac{T_1 - T_2}{H}x + T_2$$

и тогда из уравнения (160) следует, что

$$\rho(x) = \frac{MpH}{R((T_1 - T_2)x + HT_2)}.$$

В положении равновесия сумма всех сил, приложенных к шарiku, равна нулю (рис. 124):

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_a = 0$$

где  $M\vec{g}$  - сила тяжести,  $\vec{F}$  - сила упругости,  $\vec{F}_a$  - сила Архимеда. Условие равновесия имеет вид

$$-mg + k(L - L_0) + \rho g \frac{m}{\rho_0} = 0$$

Поскольку  $L = L_0$ , получим  $\rho = \rho_0$ . После подстановки этого равенства, а также  $x = H - L_0$  в формулу (161) найдём

$$p = \frac{\rho_0 R}{M} \left( \frac{T_1 - T_2}{H} (H - L_0) + T_2 \right)$$

Для нахождения частоты малых колебаний запишем динамическое уравнение движения шарика вблизи положения равновесия:

$$m\ddot{x} = -k\xi + mg \frac{\rho(x) - \rho_0}{\rho_0}$$

где  $\xi = x - (H - L_0)$  - малое отклонение шарика от положения равновесия, а соответствующее приращение плотности, найденное из формулы (161), равно

$$\rho(x) - \rho_0 = \frac{-MpH\xi(T_1 - T_2)}{R((T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2)^2}$$

После подстановки этих выражений динамическое уравнение принимает вид

$$m\ddot{\xi} = - \left( k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2} \right) \xi$$

Отсюда находим искомую циклическую частоту малых колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2} \right)}.$$

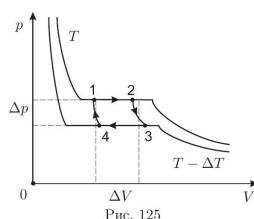
**ТУЙМ-58. Сковарка (1999)**

Известно, что в герметично закрытой кастрюле (сковарке) пища варится быстрее, вследствие того что в ней температура кипения воды выше 100 °С. На сколько давление в сковарке должно быть выше атмосферного, для того чтобы температура кипения в ней стала равной 105 °С? Удельная теплота парообразования воды  $r = 2250$  кДж/кг. Решите задачу, проанализировав цикл Карно с рабочим телом вода-пар. Насыщенный водяной пар считайте идеальным газом.

**ТУЙМ-58. Сковарка (1999)** На рис. 125 изображены две близкие изотермы воды, соответствующие температурам  $T$  и  $T - \Delta T$ .

Прямолинейные участки изотерм соответствуют равновесным состояниям смеси воды и водяного пара. Рассмотрим цикл Карно 1-2-3-4-1, осуществляемый с некоторой массой  $m$  воды. Коэффициент полезного действия  $\eta$  цикла Карно:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{A}{Q}$$



где  $A$  - работа за цикл,  $Q$  - количество теплоты, полученное от нагревателя. Поскольку  $\Delta T = 5^\circ\text{C}$  мало по сравнению с  $T = 373^\circ\text{C}$ , при вычислении работы цикл 1-2-3-4-1 можно считать прямоугольником. Тогда

$$A = \Delta p \Delta V$$

где  $\Delta V$  - изменение объёма воды при её обращении в пар. Количество теплоты, необходимое для парообразования, составляет

$$Q = rm$$

Подставляя выражения (164) и (165) в формулу (163), получим

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p \Delta V}{rm}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{r}{T \Delta v}$$

где  $\Delta v = \Delta V/m$  - изменение удельного объёма воды при её обращении в пар.

Уравнение (166) известно в физике под названием уравнения Клаузиуса-Клапейрона. Оно описывает не только кипение, но и другие агрегатные превращения. При парообразовании воды  $\Delta v > 0$ , поэтому из уравнения (166) следует увеличение температуры кипения ( $\Delta T > 0$ ) с ростом давления ( $\Delta p > 0$ ). А вот процесс плавления льда сопровождается уменьшением удельного объёма ( $\Delta v < 0$ ). Поэтому температура плавления льда с повышением давления убывает.

При кипении изменение удельного объёма воды приблизительно равно удельному объёму образовавшегося пара, то есть  $\Delta v \approx V_v/m$ . Считая пар идеальным газом, отношение  $V_v/m$  можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона. Получим

$$\Delta v = \frac{RT}{Mp}$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная, а  $M$  - молярная масса воды. Подставляя найденное  $\Delta v$  в уравнение (166), найдём

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{rM\Delta T}{RT^2}$$

Подставляя численные значения, получим

$$\Delta p = 0,18 \cdot 10^5 \text{ П П}$$

**ТУЙМ-59. Сосуд с водой (2001)**

В сосуде под поршнем, создающим постоянное давление  $P_0 = 1$  атм, находится химически чистое вещество  $\text{H}_2\text{O}$  массой  $m = 10$  г. Изобразите график зависимости общей теплоёмкости  $C$  содержимого сосуда от температуры  $T$  в интервале от  $T_1 = -50^\circ\text{C}$  до  $T_2 = 150^\circ\text{C}$  и поясните особенности графика.

Физические величины на всякий случай: плотность льда  $\rho_l = 917$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_w = 1000$ /м<sup>3</sup>, удельная теплоёмкость льда  $c_l = 2100$  Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость воды  $c_w = 4200$  Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг, удельная теплота парообразования воды  $r = 2,26$  МДж/кг, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К), молярная масса воды  $\mu = 18$  кг/кмоль.

**ТУЙМ-59. Сосуд с водой (2001)** Это очевидный график. (?? еще раз проверю!??)

Общая теплоёмкость системы определяется формулой  $C = \Delta Q / \Delta T$ , где  $\Delta Q$  - малое количество теплоты, которое система получает при изменении её температуры на малую величину  $\Delta T$ .

Заданный по условию процесс нагревания содержимого сосуда в интервале температур от  $T_1 = -50^\circ\text{C}$  до  $T_2 = 150^\circ\text{C}$  протекает при постоянном нормальном давлении  $P_0 = 1$  атм, поэтому плавление льда и парообразование воды будут происходить при обычных температурах  $0^\circ\text{C}$  и  $100^\circ\text{C}$  соответственно, которые входят в рассматриваемый интервал.

В точках фазового перехода тепло подводится ( $\Delta Q > 0$ ), а температура не изменяется ( $\Delta T = 0$ ), поэтому теплоёмкость стремится к бесконечности.

В интервале температур  $[-50^\circ\text{C}; 0^\circ\text{C}]$  содержимое сосуда находится в твёрдом состоянии (лёд) и его теплоёмкость составляет  $C_1 = c_l m = 21$  Дж/°C.

В интервале температур  $(0^\circ\text{C}; 100^\circ\text{C})$  содержимое сосуда находится в жидком состоянии (вода) и его теплоёмкость составляет  $C_2 = c_w m = 42$  Дж/°C. В интервале температур  $(100^\circ\text{C}; 150^\circ\text{C})$  содержимое сосуда находится в газообразном состоянии (пар) и его теплоёмкость составляет  $C_3 = 3(m/\mu)R \approx 14$  Дж/°C.

Изобразим полученные результаты в графическом виде (рис. 126).

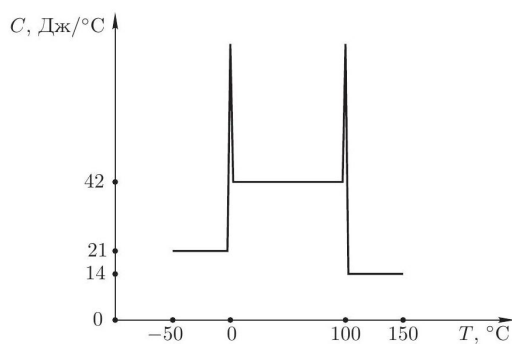


Рис. 126

**Примечание.** Отметим, что значение  $C_3$ , вычисленное согласно простейшей модели идеального газа, заметно отличается от «истинного» значения  $C_3 \approx 20$  Дж/°C, полученного на основе экспериментальных данных из справочника. Кроме того, каждая из теплоёмкостей  $C_1, C_2$  и  $C_3$  не является константой, а немного зависит от температуры. Однако эти уточнения не влияют на суть задачи в условиях олимпиады.

**ТУЙМ-60. Стопка монет (2002)**

Из очень большого количества одинаковых золотых монет радиусом  $R$  и толщиной  $H$  каждая сложили стопку. Все соседние монеты разделили бумажными кругами радиусом  $R$  и толщиной  $d$  каждый. Боковую поверхность стопки монет с прослойками обернули несколькими слоями той же бумаги, так что общая толщина обёртки оказалась равна  $l$ . Один торец получившегося цилиндра прижали через слой бумаги толщиной  $d$  к термостату, находящемуся при температуре  $T$ , а остальная поверхность цилиндра осталась на воздухе, температура  $T_0$  которого поддерживается постоянной (рис. 22).

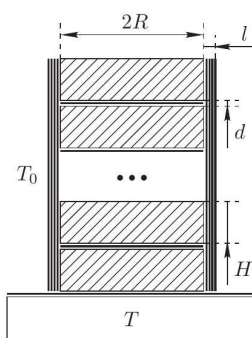


Рис. 22

Через некоторое время установилось стационарное распределение температур в стопке монет. Какую тепловую мощность  $P$  получает стопка монет от термостата в этом состоянии? Коэффициент теплопроводности  $\mu$  бумаги много меньше аналогичной величины для золота. Известны соотношения между размерами:  $d < l \ll H < R$ . Все неровности монет были предварительно спилены, так что воздушных пустот внутри цилиндра нет.

**ТУЙМ-60. Стопка монет (2002)** По закону теплопроводности искомая мощность вычисляется по формуле  $P = k(T - T_0)$ , где  $k$  - некоторый коэффициент, зависящий только от материалов и размеров цилиндра. Поскольку монет по условию много, большинство из них вдали от термостата находятся практически при температуре  $T_0$ . Таким образом, добавление к свободному торцу цилиндра ещё одной монеты с бумажной прослойкой не изменит распределение температур, а также величины  $P$  и  $k$ . За счёт большого коэффициента теплопроводности золота по сравнению с бумагой температуру каждой монеты можно считать одинаковой по всему её объёму. Пусть  $T_1$  - температура ближайшей к термостату монеты, тогда цилиндр из остальных монет получает от неё мощность  $P_1 = k(T_1 - T_0)$ , так как этот цилиндр эквивалентен первоначальному, а первая монета играет для него роль термостата. Исключая  $k$  из записанных выше выражений для  $P$  и  $P_1$ , находим

$$P_1 = P \cdot \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}$$

По закону теплопроводности найдём мощность теплопередачи через бумагу между первой монетой и окружающей средой:

$$\Delta P_1 = \mu \cdot 2\pi R H \cdot \frac{T_1 - T_0}{l}$$

Уравнение теплового баланса для первой монеты имеет вид

$$P = P_1 + \Delta P_1$$

По закону теплопроводности найдём мощность теплопередачи через бумагу между термостатом и первой монетой:

$$P = \mu \cdot \pi R^2 \cdot \frac{T - T_1}{d}$$

Подставив выражения (167) и (168) в уравнение (169) и используя формулу (170) для исключения  $T_1$  (для упрощения алгебраических преобразований целесообразно предварительно обозначить группы констант временными буквами), получим

$$P^2 + \frac{2\pi\mu R H}{l} (T - T_0) \cdot P - \frac{2\pi^2\mu^2 R^3 H}{l d} (T - T_0)^2 = 0$$

Из физического смысла  $P/(T - T_0) = k = \text{const} > 0$ , поэтому выбираем плюс при записи решения квадратного уравнения:

$$P = \frac{\pi\mu R H}{l} (T - T_0) \left( \sqrt{1 + \frac{2Rl}{Hd}} - 1 \right).$$

### ТУЙМ-61. Фотонный газ (2003)

С точки зрения квантовой физики электромагнитное излучение представляет собой множество хаотически движущихся и не взаимодействующих друг с другом частиц - фотонов. Другими словами, электромагнитное излучение представляет собой фотонный газ, который во многом аналогичен идеальному газу, рассматриваемому в молекулярно-кинетической теории. Есть и существенные отличия. Все фотоны движутся с одинаковой скоростью (скоростью света в вакууме), и их число не остаётся постоянным при изменении состояния: фотоны рождаются и поглощаются. Тем не менее, ряд свойств фотонного газа можно установить, опираясь на молекулярно-кинетическую теорию идеальных газов, что и предлагается проделать в данной задаче.

1) Докажите, что давление  $P$ , оказываемое частицами идеального газа на плоскую поверхность, определяется формулой

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$$

где  $n$  - число частиц в единице объёма,  $\vec{v}$  - скорость частиц,  $\vec{p}$  - их импульс,  $\langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$  - среднее значение скалярного произведения  $\vec{v} \cdot \vec{p}$ .

1) Используя формулу для давления частиц идеального газа (1), докажите, что давление света  $P$  можно вычислить по формуле

$$P = \frac{1}{3} u$$



где  $u$  - объёмная плотность энергии излучения.

1) Докажите, рассматривая цикл Карно для фотонного газа при малых изменениях температуры и объёма, что световое давление пропорционально четвёртой степени абсолютной температуры.

1) Используя результаты предыдущего пункта, получите закон Стефана-Больцмана для мощности излучения абсолютно чёрного тела с единицы поверхности:

$$W = \sigma T^4$$

где  $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана, а  $T$  - абсолютная температура. Получите соотношение между  $\sigma$  и коэффициентом пропорциональности между давлением и четвёртой степенью температуры. При выводе учтите, что число частиц газа, соударяющихся с единицей поверхности стенки в единицу времени, равно

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

где  $n$  - число частиц в единице объёма, а  $\langle v \rangle$  - средний модуль скорости частиц.

1) Вычислите КПД цикла, совершаемого над фотонным газом. Цикл состоит из четырёх последовательных процессов:

- 1) изобарическое расширение из состояния с температурой  $T_1$ ,
- 1) переход в состояние с температурой  $T_2$  по закону  $PV^{4/3} = \text{const}$ ,
- 1) изобарическое сжатие,
- 1) переход в исходное состояние снова по закону  $PV^{4/3} = \text{const}$ .

**ТУЙМ-61. Фотонный газ (2003)** Давление газа обусловлено ударами его частиц о стенки сосуда. Величина давления равна средней силе, действующей на единицу площади стенки. Найдём среднюю силу  $F_i$ , с которой действуют на стенку частицы, имеющие скорость  $\vec{v}_i$  и импульс  $\vec{p}_i$ , направленные под углом  $\alpha_i$  к нормали стенки. Для этого применим закон изменения импульса, считая удар частиц упругим. За время  $\Delta t$  о единичную площадку стенки ударятся  $N_i = n_i v_i \cos \alpha_i \Delta t$  таких частиц, где  $n_i$  - их число в единице объёма:

$$2N_i p_i \cos \alpha_i = 2n_i v_i \cos \alpha_i p_i \cos \alpha_i = F_i \Delta t.$$

Давление газа  $P$  составляет

$$P = \langle F_i \rangle = 2 \langle n_i v_{ix} p_{ix} \rangle = 2 \langle v_{ix} p_{ix} \rangle \frac{1}{2} n,$$

где ось  $x$  перпендикулярна к стенке. Множитель  $1/2$  поставлен потому, что лишь половина частиц, имеющих одно и то же значение  $\vec{v}_i \vec{p}_i$ , движется к стенке, а другая - в противоположном направлении. Из-за хаотичности движения частиц

$$\langle p_i \cos \alpha_i \cdot v_i \cos \alpha_i \rangle = \langle v_{ix} p_{ix} \rangle = \frac{1}{3} \langle v_{ix} p_{ix} + v_{iy} p_{iy} + v_{iz} p_{iz} \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle.$$

Подставляя это выражение в формулу (171), получим

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$$

Ответ на второй пункт задачи просто следует из полученной формулы, если принять во внимание, что масса фотона равна нулю и поэтому его энергия  $E = pc$ , где  $c$  - скорость света, то есть скорость фотонов  $v = c$ :

$$P = \frac{1}{3} n E = \frac{1}{3} u$$

где  $u = nE$  - энергия единицы объёма фотонного газа.

Рассматриваемый в третьем пункте цикл Карно изображён на рис. 127.

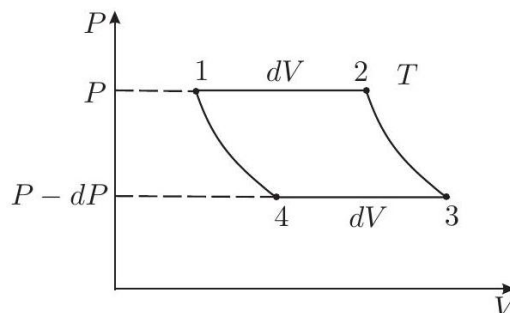


Рис. 127

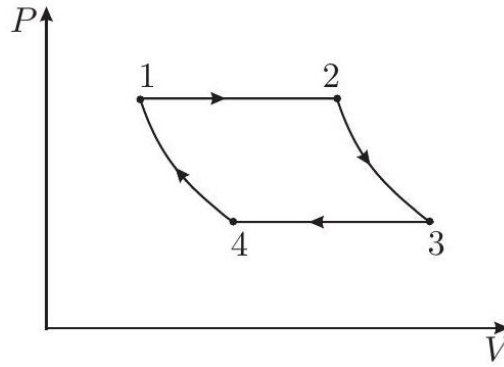


Рис. 128 Давление фотонного газа отличается от плотности энергии излучения только множителем  $1/3$  в формуле (172), а плотность энергии не зависит от объёма, подобно тому как масса единицы объёма не зависит от объёма всего тела. Поэтому давление фотонов не зависит от объёма, а определяется только температурой. Таким образом, изотермы 1-2 и 3-4 совпадают с изобарами, что отражено на рис. 127. Вследствие малости  $dT$  и  $dP$  график рассматриваемого цикла можно приближённо считать параллелограммом. Тогда его «площадь» равна  $dP \cdot dT$ , и получаем следующую формулу для КПД цикла:

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{dP \cdot dV}{\delta Q}$$

Количество теплоты  $\delta Q$ , сообщаемое фотонному газу при изотермическом расширении, выразим из первого начала термодинамики:

$$\delta Q = dU + PdV = u dV + PdV = 4PdV$$

Подставим последнее выражение в формулу (173):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP \cdot dV}{4PdV}$$

Путём интегрирования находим

$$P = aT^4$$

где  $a$  - некоторая постоянная величина.

В четвёртом пункте требуется, используя формулу (174), получить выражение для мощности  $W$  излучения единицы поверхности абсолютно чёрного тела. Для этого нужно сложить энергии всех фотонов, излучаемых в единицу времени единицей площади поверхности:

$$W = \sum \nu_i E_i$$

где  $E_i$  - энергия фотонов  $i$ -го сорта, а  $\nu_i$  - их число, излучаемое в единицу времени единичной площадкой. Из условия известно, что

$$\nu_i = \frac{1}{4} n_i \langle v_i \rangle$$

где  $n_i$  - число фотонов  $i$ -го сорта в единице объёма, а  $\langle v_i \rangle = c$  - скорость движения фотонов. Используя выражение для  $\nu_i$ , а также формулу (174), получим закон Стефана-Больцмана:

$$W = \frac{1}{4} \sum n_i c E_i = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4} 3P = \frac{3}{4} caT^4 = \sigma T^4,$$

где  $\sigma = 3ca/4$ . Таким образом, постоянная Стефана-Больцмана отличается от коэффициента пропорциональности  $a$ , входящего в формулу (174), лишь множителем  $3c/4$ .

Часто в литературе в формуле

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

вместо  $1/4$  пишут множитель  $1/6$ . Такой результат получается в более грубой модели, в которой рассматривается движение частиц только в трёх взаимно перпендикулярных направлениях.

В последнем пункте требуется найти КПД цикла, изображённого на рис. 128. Как было выяснено ранее, изобары 1-2 и 3-4 для фотонного газа совпадают с изотермами, так что рассматриваемый цикл похож на цикл Карно. В цикле Карно процессы 2-3 и 4-1 должны быть адиабатическими. В данной задаче эти процессы описываются уравнением  $PV^{4/3} = \text{const}$ . Чтобы сравнить процессы 2-3 и 4-1 с адиабатическими, нужно получить уравнение адиабаты фотонного газа. Для этого применим первое начало термодинамики и формулу (172):

$$\delta Q = \delta A + dU = 4PdV + 3VdP = 0$$

Отсюда получим

$$\frac{dP}{P} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V}$$

После интегрирования находим

$$PV^{4/3} = \text{const}$$

Таким образом, в задаче речь идёт именно о цикле Карно, коэффициент полезного действия которого, как известно, не зависит от рода рабочего вещества и равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

в том числе и для рассматриваемого в задаче цикла с фотонным газом.

## ТУЙМ-62. Процесс над газом (2004)

Над одним молем идеального газа совершают процесс, показанный на рис. 23. Найдите максимальную температуру газа в течение этого процесса (процесс считать квазистатическим).

**ТУЙМ-62. Процесс над газом (2004)** Каждая точка графика характеризует состояние газа. Зная давление  $p$  и объём  $V$ , с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона можно найти температуру газа  $T$ . Прделав такие вычисления для ряда точек, можно построить график в координатных осях  $(T, V)$ . Соединив точки плавной линией, можно приблизительно отсчитать искомое значение максимальной температуры. Естественно, подобный план удобно реализовать используя, например, компьютерную систему MathCAD. На рис. 129 показано такое построение. Видно, что  $T_{\text{max}} \approx 4,5 \cdot 10^2$  К. Нельзя ли в данном случае обойтись без этого общего метода? Если бы мы умели быстро рисовать на данном в условии графике изотермы, то достаточно было бы подобрать изотерму, касающуюся этого графика. Вот если бы изотермы были прямыми линиями, то их можно было бы начертить с помощью линейки. Можно ли сделать изотермы прямолинейными?

Уравнение Менделеева-Клапейрона позволяет положительно ответить на этот вопрос:

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

Функция  $p = p(1/V)$  линейная при  $T = \text{const}$ . Следовательно, нужно построить график заданного процесса в осях  $(p, 1/V)$ . Такое построение выполнено на рис. 130. Здесь же проведена и изотерма, касающаяся данного графика. Точка касания соответствует искомому состоянию. Температуру его удобно найти как угловой коэффициент построенной прямой. Из уравнения (175) следует, что

$$T = \frac{pV}{\nu R} \approx 4,6 \cdot 10^2 \text{ К}$$

Видно, что результаты, полученные обоими методами, приблизительно совпадают.

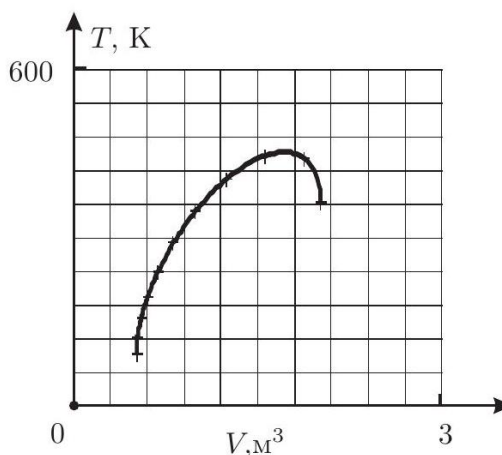
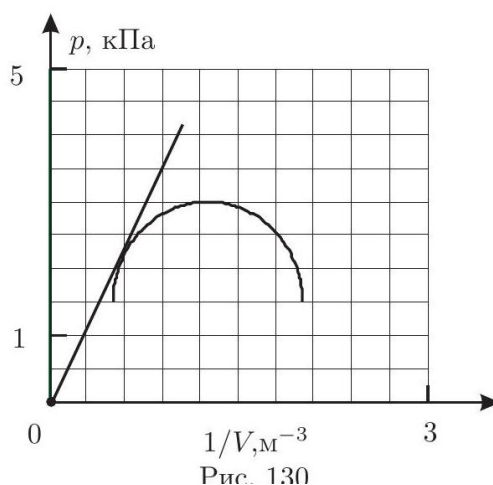


Рис. 129



### ТУЙМ-63. Термодинамический цикл (2004)

С одним молем идеального одноатомного газа провели замкнутый цикл, изображённый на рис. 24, где 1-2 - изотерма, 2-3 - изобара, 3-4 - политропа, для которой  $C = R/2$ , и 4-1 - изохора. Минимальная температура, достигаемая газом в цикле,  $T_{\min} = 300$  К. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоёмкостью  $C$ .

- 1) Укажите точки на цикле, в которых газ достигает максимальной  $T_{\max}$  и минимальной  $T_{\min}$  температуры, и определите  $T_{\max}$ .
- 1) Определите количество теплоты  $Q_+$ , подведённое к газу за цикл.
- 1) Определите работу  $A$  газа за цикл.
- 1) Определите КПД цикла  $\eta$  и сравните с КПД идеальной тепловой машины, работающей между нагревателем и холодильником с температурами соответственно  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$ .

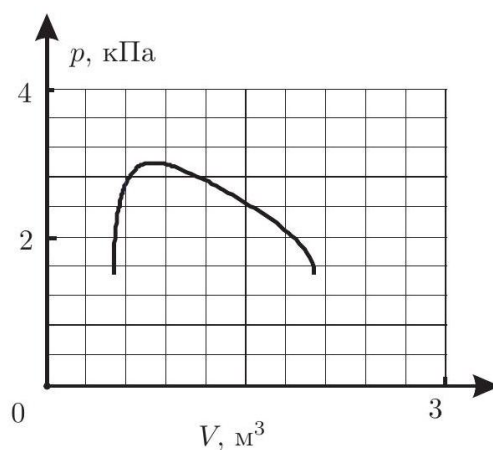


Рис. 23

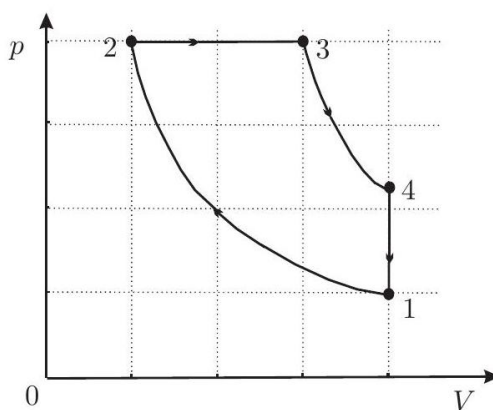


Рис. 24

**ТУЙМ-63. Термодинамический цикл (2004)** Очевидно, что температура газа минимальна на изотерме 1-2 (рис. 131). В процессе 2-3 газ нагревается, поскольку совершает положительную работу, а в процессе 3-4 охлаждается, из-за того что

$$C - C_V = pdV/dT < 0$$

Самая высокая температура оказывается в точке 3. Для нахождения этой температуры воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$T_{\max} = T_{\min} \frac{V_3}{V_2} = 3T_{\min} = 900 \text{ K}.$$

Тепло подводится к газу только на участке 2 – 3, поэтому

$$Q_+ = C_p (T_3 - T_2) = C_p (T_{\max} - T_{\min}).$$

Для одноатомного газа

$$C_p = \frac{5}{2}R$$

откуда

$$Q_+ = \frac{5}{2}R(T_{\max} - T_{\min})$$

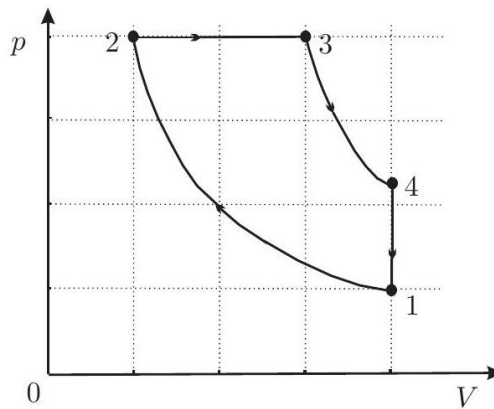


Рис. 131

Подставляя численные данные, находим  $Q_+ = 12,5 \text{ кДж}$ .

Для работы имеем

$$A = A_{23} + A_{34} - A_{21}.$$

Поскольку участок 2-3 - изобара, имеем

$$A_{23} = p_2 (V_3 - V_2) = R (T_3 - T_2) = R (T_{\max} - T_{\min}).$$

Работу в политропическом процессе находим согласно второму началу термодинамики:

$$C (T_4 - T_3) = C_V (T_4 - T_3) + A_{34}, \quad \text{или} \quad (C_V - C) (T_{\max} - T_4) = A_{34}.$$

Для точного определения  $T_4$  найдём уравнение политропы. Из второго начала термодинамики  $pdV = (C - C_V) dT$ . Из уравнения Менделеева-Клапейрона имеем  $pdV + Vdp = RdT$ . Из последних двух уравнений получаем

$$pdV = \frac{C - C_V}{R} (pdV + Vdp) \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \frac{C - C_V}{C_p - C} \int \frac{dp}{p} \Rightarrow pV^{\frac{C-C_p}{C-C_V}} = \text{const}.$$

По условию  $C = R/2$ , значит, на политропе  $pV^2 = RTV = \text{const}$ . Из графика цикла видно, что

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{3}{4}$$

ПоЭТОму

$$T_4 = \frac{3}{4}T_3 = \frac{3}{4}T_{\max} \quad \text{и} \quad A_{34} = (C_V - C) \frac{1}{4}T_{\max} = \frac{RT_{\max}}{4}.$$

Осталось определить работу на изотерме:

$$dA_{21} = pdV = RT_{\min} \frac{dV}{V}$$

откуда

$$A_{21} = RT_{\min} \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_{\min} \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Поскольку  $\frac{V_1}{V_2} = 4$ , получаем  $A_{21} = RT_{\min} \ln 4$ . Окончательно находим

$$A = R(T_{\max} - T_{\min}) + \frac{RT_{\max}}{4} - RT_{\min} \ln 4$$

Подставляя численные значения, находим  $A \approx 3,40$  кДж.

КПД цикла рассчитывается по формуле  $\eta = A/Q_+$ . Она даёт  $\eta \approx 27\%$ . Для идеальной тепловой машины Карно имеем

$$\eta_0 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \approx 67\%$$

что, естественно, больше, чем для цикла, изображённого на рис. 131, как и для любого другого между теми же тепловыми резервуарами.

### ТУЙМ-64. Чайник (2005)

В чайник с нагревательным элементом мощностью  $P = 2200$  Вт налили  $V_1 = 1,5$  л холодной воды и включили его. Когда вода закипела, он автоматически отключился. Через  $\tau_1 = 60$  с его снова включили, а ещё через  $\tau_2 = 6$  с вода закипела и чайник выключился. Сразу после этого его ещё раз включили, но сняв крышку. Автоматический выключатель, срабатывающий под давлением пара, перестал действовать, и вода из чайника начала выкипать. Через  $\tau_3 = 240$  с после последнего включения измерили объём оставшейся воды. Он оказался равным  $V_2 = 1,3$  л. Каково значение удельной теплоты парообразования воды  $r$ ? Удельная теплоёмкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · К), плотность  $\rho = 1000$  кг / м<sup>3</sup>. Теплоёмкостью чайника пренебречь.

**Задача 64. Чайник (2005)** Решение задачи сводится к применению закона изменения энергии в процессах теплообмена и парообразования.

Количество теплоты  $Q_e$ , отданное чайником в окружающую среду до второго включения, равно работе электрического тока в течение времени  $\tau_2$ :

$$Q_e = P\tau_2$$

Количество теплоты, отдаваемое остывающим телом в окружающую среду, пропорционально времени остывания. Чайник остывает до второго включения в течение времени  $\tau_1 + \tau_2$ , так что

$$Q_e = k_1 (\tau_1 + \tau_2)$$

где  $k_1$  - коэффициент теплоотдачи, зависящий от разности температур тела и среды. В данном случае  $k_1$  соответствует некоторой «средней» температуре остывавшего чайника.

При кипении открытого чайника работа электрического тока  $P\tau_3$  равна сумме количества теплоты, необходимого для парообразования  $r(m_1 - m_2)$ , и количества теплоты, отдаваемого в окружающую среду:

$$P\tau_3 = k_2\tau_3 + r(m_1 - m_2)$$

Здесь  $m_1 = \rho V_1$  и  $m_2 = \rho V_2$  - массы воды в чайнике до и после кипения,  $k_2$  - коэффициент теплоотдачи чайника, соответствующий его температуре, равной 100°C. Насколько велико различие коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ ? Для выяснения этого вопроса найдём изменение температуры  $\Delta T$  чайника при его остывании:

$$cm_1\Delta T = Q_e = P\tau_2.$$

Отсюда получаем

$$\Delta T = \frac{P\tau_2}{c\rho V_1} = 1,9^\circ\text{C}$$

Температура окружающей среды комнатная (20°C). Поэтому разность температур чайника и окружающей среды изменяется приблизительно на  $2/80 \approx 0,03 = 3\%$ . Вследствие этого можно считать, что  $k_1 \approx k_2$ . Тогда из формул (176), (177) и (178) находим

$$r = \frac{P\tau_3}{\rho(V_1 - V_2)} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right) = 2,4 \text{ МДж / кг}$$

Чаще всего экспериментальное определение удельной теплоты парообразования производится калориметрически. Однако пример этой задачи показывает, что можно обойтись и без калориметра.

Следует сначала измерить время, в течение которого сосуд с жидкостью охлаждается на небольшую величину от температуры кипения, а затем измерить время, за которое выкипает определённый объём жидкости. При этом коэффициент теплоотдачи можно считать постоянным на протяжении всех измерений.

### ТУЙМ-65. Грелка в аквариуме (2007)

Герметичный аквариум с теплоизолированными стенками содержит воду массой  $M = 100$  кг. Над поверхностью воды в аквариуме имеется небольшое количество воздуха. В толще воды закрепили резиновую грелку  $G$ , имеющую форму плоского неправильного треугольника, вершины которого находятся на глубинах  $h_1 = 30$  см,  $h_2 = 40$  см и  $h_3 = 65$  см от поверхности воды (рис. 25). Равномерно по всей поверхности грелки проделали  $N = 1000$  маленьких отверстий. Горлышко грелки подсоединено через шланг  $S$  к непрерывно работающему компрессору  $K$ , который закачивает

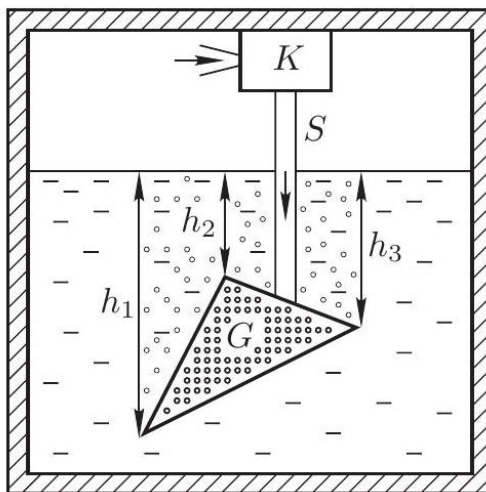


Рис. 25 в грелку воздух, находящийся внутри аквариума над поверхностью воды. В результате этого каждое отверстие в грелке выпускает в среднем один пузырёк радиусом  $r = 1$  мм за время  $\tau = 0,3$  с. Оцените время  $t$ , за которое вода в сосуде нагреется на  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ .

Удельная теплоёмкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ), плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Неидеальность компрессора, вязкость воздуха и поверхностное натяжение воды не учитывайте.

**Задача 65. Грелка в аквариуме (2007)** По мере всплытия пузырька вода опускается, занимая тот объём, который пузырёк вытеснял в предыдущий момент времени. Уменьшение потенциальной энергии воды сопровождается равным увеличением её кинетической энергии, которая в свою очередь за счёт внутреннего трения (вязкости) переходит в тепловую энергию, тем самым повышая температуру воды.

Когда пузырёк радиусом  $r$  всплывает с глубины  $h$  на поверхность, вода объёмом  $V = 4\pi r^3/3$  и массой  $m = V\rho$  опускается на глубину  $h$ . При этом её потенциальная энергия уменьшается на  $\Delta E = mgh$  и выделяется теплота

$$Q_1 = \Delta E = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g h$$

Поскольку грелка плоская и отверстия покрывают её равномерно, можно считать, что все пузырьки отрываются от грелки в её центре масс, который совпадает с точкой пересечения медиан треугольника и расположен на глубине

$$h = \frac{1}{3} (h_1 + h_2 + h_3)$$

За искомое время  $t$  грелку покинет  $n = Nt/\tau$  пузырьков и выделится теплота

$$Q_n = nQ_1 = \frac{4\pi}{9} r^3 \rho g (h_1 + h_2 + h_3) N \frac{t}{\tau},$$

которая приведёт к требуемому повышению температуры:

$$Q_n = cM\Delta T$$

Приравнявая выражения для  $Q_n$ , находим

$$t = \frac{9cM\Delta T\tau}{4\pi r^3 \rho g (h_1 + h_2 + h_3) N} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 77 \text{ су}$$

**ТУЙМ-66. Политропы (2007)**

С некоторым количеством идеального газа провели ряд опытов: процессы  $NI, NA, NB_1, NB_2$  и  $NB_3$  (рис. 26). Начальное состояние газа (точка  $N$ ) было одинаковым во всех опытах: газ находился под давлением  $P_0$  и занимал объём  $V_0$ . Дополнительно было измерено отношение молярных теплоёмкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объёме:  $\gamma = C_P/C_V$ . Универсальная газовая постоянная  $R$  известна. Изображённые графики процессов являются качественными и не предназначены для количественных измерений.

1) В малой области вблизи некоторой точки любой квазистатический процесс можно считать линейным, то есть полагать, что давление является линейной функцией объёма:  $P(V) = aV + b$ . Найдите коэффициенты  $a_i$  и  $a_a$  соответственно для линейного приближения изотермы  $NI$  и адиабаты  $NA$  вблизи точки  $N$ .

1) Процессы  $NB_1, NB_2$  и  $NB_3$  являются политропическими (теплоёмкость постоянна), а их сравнительные графики изображены на рис. 26. Определите знак теплоёмкостей  $C_1, C_2$  и  $C_3$  в этих про-

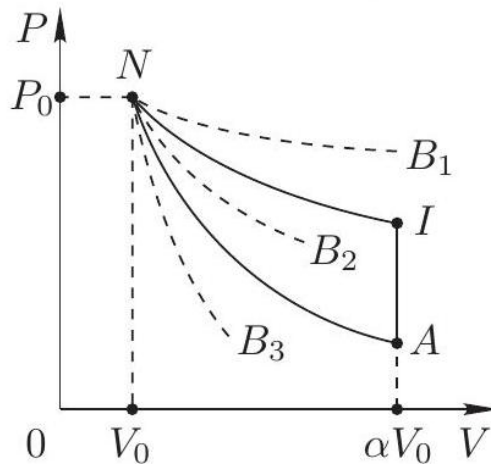


Рис. 26 цессах.

1) Произвольный политропический процесс (политропа) описывается уравнением  $PV^n = \text{const}$ , где  $n = (C - C_P)/(C - C_V)$  - постоянная политропы,  $C$  - молярная теплоёмкость в рассматриваемом процессе. Касательные к графикам процессов  $NI, NA$  и  $NB_2$  в точке  $N$  пересекают некоторую изохору в точках  $I_x, A_x$  и  $B_x$  соответственно. Известно, что  $NB_x$  - медиана треугольника  $NI_xA_x$ . Определите величины  $n$  и  $C$  для процесса  $NB_2$ .

1) В точках  $I$  и  $A$  газ занимает одинаковый объём  $\alpha V_0$ , где  $\alpha$  - известное число. Определите КПД  $\eta$  тепловой машины, работающей по циклу  $NIAN$ .

**ТУЙМ-66. Политропы (2007)** 1) Величина  $a$  является угловым коэффициентом касательной к графику процесса в точке  $N$ , поэтому

$$a = \left. \frac{dP}{dV} \right|_{V=V_0}$$

Уравнения изотермы и адиабаты имеют вид

$$PV = \text{const} = P_0 V_0 \quad \text{и} \quad PV^\gamma = \text{const} = P_0 V_0^\gamma.$$

Выразив отсюда  $P$  как функцию  $V$  и подставив в формулу (179), получим

$$a_i = - \left. \frac{P_0 V_0}{V^2} \right|_{V=V_0} = - \frac{P_0}{V_0}, \quad a_a = - \gamma \left. \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^{\gamma+1}} \right|_{V=V_0} = - \gamma \frac{P_0}{V_0}.$$

1) Общая теплоёмкость определяется формулой  $C = \delta Q/dT$ , где  $\delta Q$  и  $dT$  - количество подведённой теплоты и повышение температуры на бесконечно малом участке процесса. Для определения знака  $C$  можно вместо  $\delta Q$  и  $dT$  подставлять малые конечные значения  $\Delta Q$  и  $\Delta T$ .

В изотермическом процессе  $NI$  температура не изменяется, следовательно, если некоторый процесс начинается в той же точке  $N$  и идёт выше  $NI$ , то температура в этом процессе повышается, а если ниже  $NI$ , то понижается. Таким образом,  $\Delta T_1 > 0, \Delta T_2 < 0, \Delta T_3 < 0$ .

В адиабатическом процессе  $NA$  теплообмен отсутствует, следовательно, если некоторый процесс начинается в той же точке  $N$  и идёт выше  $NA$ , то тепло в этом процессе подводится, а если ниже  $NA$ , то отводится. Таким образом,  $\Delta Q_1 > 0, \Delta Q_2 > 0, \Delta Q_3 < 0$ . Используя полученные соотношения, находим

$$C_1 \approx \frac{\Delta Q_1}{\Delta T_1} > 0, \quad C_2 \approx \frac{\Delta Q_2}{\Delta T_2} < 0, \quad C_3 \approx \frac{\Delta Q_3}{\Delta T_3} > 0$$



1) Аналогично первому пункту выразим угловой коэффициент касательной к графику процесса  $NB_2$  в точке  $N$ :

$$a = -n \frac{P_0 V_0^n}{V^{n+1}} \Big|_{V=V_0} = -n \frac{P_0}{V_0}.$$

Пусть  $V_x$  - объём на указанной в условии изохоре,  $P_{I_x}, P_{A_x}, P_{B_x}$  - давления в точках  $I_x, A_x$  и  $B_x$  соответственно, тогда в силу пропорциональности углового коэффициента тангенсу угла наклона касательной можно записать

$$a_i = \frac{P_{I_x} - P_0}{V_x - V_0}, \quad a_a = \frac{P_{A_x} - P_0}{V_x - V_0}, \quad a = \frac{P_{B_x} - P_0}{V_x - V_0}.$$

По свойству медианы  $P_{I_x} - P_{B_x} = P_{B_x} - P_{A_x}$ , откуда

$$a = \frac{a_i + a_a}{2} = -\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{P_0}{V_0}$$

Сравнивая выражения (180) и (181), находим  $n = (\gamma + 1)/2$ . По определению

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V}$$

откуда

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n - 1} = C_V - \frac{C_P - C_V}{n - 1}$$

Используя соотношение Майера ( $C_P - C_V = R$ ), из которого с учётом равенства  $\gamma = C_P/C_V$  можно выразить  $C_V = R/(\gamma - 1)$ , и подставив значение  $n$ , получим

$$C = \frac{R}{\gamma - 1} - \frac{R}{n - 1} = -\frac{R}{\gamma - 1}$$

1) В процессе  $NI$  к газу подводят теплоту  $Q_1$  и газ совершает работу  $A_1$ . Изменение внутренней энергии идеального газа на изотерме равно нулю, поэтому  $Q_1 = A_1$ . В процессе  $IA$  от газа отводят теплоту  $Q_2$ , а работа не совершается. В процессе  $AN$  над газом совершают работу  $A_2$ , а теплообмена нет. По определению КПД

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{Q_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}$$

Работы  $A_1$  на изотерме и  $A_2$  на адиабате найдём, проинтегрировав  $P(V)$ :

$$A_1 = \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{P_0 V_0}{V} dV = P_0 V_0 \ln V \Big|_{V_0}^{\alpha V_0} = P_0 V_0 \ln \alpha,$$

$$A_2 = \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_{V_0}^{\alpha V_0} = P_0 V_0 \cdot \frac{1 - \alpha^{1-\gamma}}{\gamma - 1}.$$

Таким образом, находим искомый КПД:

$$\eta = 1 - \frac{1 - \alpha^{1-\gamma}}{(\gamma - 1) \ln \alpha}$$

## ТУЙМ-67. Суп экспериментатора Глюка (2008)

Однажды зимой экспериментатор Глюк решил вскипятить воду на свежем воздухе (температура воздуха  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , атмосферное давление  $P_0 = 101$  кПа, относительная влажность воздуха  $\varphi = 25\%$ ). Для этого он налил в кастрюлю достаточное количество холодной воды и развёл под ней небольшой костёр. Поперечное сечение кастрюли имеет форму неправильного треугольника площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Стенки кастрюли тонкие, а их температура всё время равна температуре воды. Однородная треугольная золотая крышка массой  $m = 20$  кг герметично закрывает кастрюлю, но не крепится к ней.

1) При какой температуре  $t_1$  крышка в первый раз приподнимется, чтобы выпустить пар из кастрюли?

1) Какую температуру  $t_2$  будет иметь вода после длительного, но не очень активного кипения?

1) До какой температуры  $t_3$  должна остыть вода после этого, чтобы Глюк не смог открыть крышку, прилагая к ней вертикальную силу  $F = 300$  Н?

Получать ответы в общем виде не требуется. Зависимость давления  $P$  насыщенного пара от температуры  $t$  приведена на графике (рис. 27). Ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>.

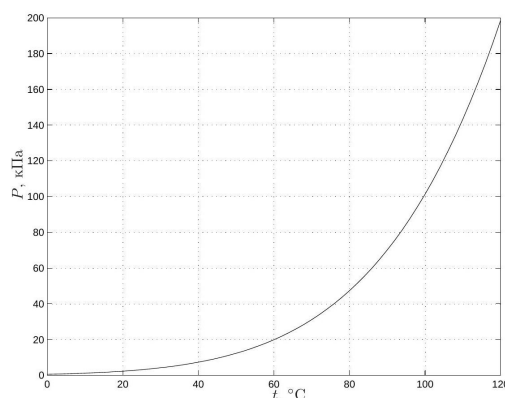


Рис. 27

**ТУЙМ-67. Суп экспериментатора Глюка (2008)** Поскольку все рассматриваемые процессы медленные, можно считать, что пар находится в термодинамическом равновесии с водой, то есть является насыщенным. Давление насыщенного пара при малых температурах пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что сначала под крышкой был сухой воздух при атмосферном давлении. Таким образом, относительная влажность воздуха ни на что не влияет и приведена в условии лишь «для красоты».

1) Условие равновесия крышки непосредственно перед её приподниманием имеет вид

$$(P_1 + P'_0) \cdot S = mg + P_0 S$$

где  $P_1$  и  $P'_0$  - давления соответственно пара и воздуха под крышкой при температуре  $t_1$ . Из уравнения Менделеева-Клапейрона выразим

$$P'_0 = P_0 \cdot \frac{273^\circ\text{C} + t_1}{273^\circ\text{C} + t_0} = P_0 \left( 1 + \frac{t_1}{273^\circ\text{C}} \right)$$

После подстановки выражения (183) в формулу (182) и упрощения получим

$$P_1 = \frac{mg}{S} - \frac{P_0 t_1}{273^\circ\text{C}}$$

Это уравнение можно решить графически: построить графики его левой и правой частей как функций от  $t_1$  и найти их точки пересечения. Поскольку  $P_1$  - давление насыщенного пара, имеем  $P_1 = P(t_1)$ , а график  $P(t_1)$  приведён в условии. График правой части уравнения (184) имеет вид прямой, пересекающей оси в точках

$$P_x = \frac{mg}{S} = 20 \text{ кПа} \quad \text{и} \quad t_x = 273^\circ\text{C} \cdot \frac{mg}{P_0 S} = 54^\circ\text{C}.$$

Таким образом, из графиков (рис. 132) находим  $t_1 \approx 37^\circ\text{C}$ .

**Примечание.** Если не учитывать изменение давления воздуха, то есть вместо условия (183) считать, что  $P'_0 = P_0$ , то давление пара должно возрасти до значения  $P'_1 = mg/S \approx 20$  кПа, откуда по графику находим  $t_1 \approx 60^\circ\text{C}$ , что существенно отличается от правильного ответа.

1) Из условия равновесия крышки следует, что давление газа под крышкой не может превышать

$$P_2 = P_0 + \frac{mg}{S} = 121 \text{ кПа}$$

В процессе нагревания и кипения воды количество пара под крышкой будет расти. Когда давление газа под крышкой превысит величину  $P_2$ , крышка приподнимется и излишек газа выйдет наружу. При этом каждый раз будет выходить смесь пара и воздуха. Однако количество воздуха под крышкой ограничено имевшимся там изначально, а количество пара пополняется за счёт кипения воды. Значит, после длительного кипения воды воздуха под крышкой практически не останется, а давление пара будет примерно  $P_2$ . Из условия  $P(t_2) = P_2$  по графику находим  $t_2 \approx 105^\circ\text{C}$ .

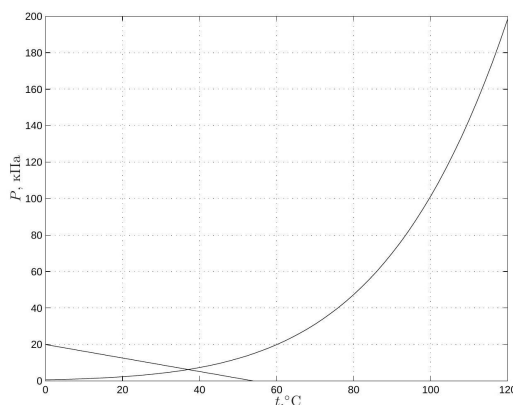


Рис. 132 3. Силы давления воздуха и пара действуют равномерно по всей площади крышки, поэтому можно считать, что они приложены к её центру масс (аналогично силе тяжести, действующей на однородную крышку). Центр масс однородного треугольника расположен в точке пересечения медиан, которая делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины. Для открывания крышки эффективнее всего прикладывать вертикальную силу к одной из вершин треугольника, так как тогда плечо прикладываемой силы относительно оси, проходящей через две другие вершины, будет в 3 раза больше, чем плечи противодействующих сил. Пусть  $P_3$  - давление пара, когда вода остыла до температуры  $t_3$ , тогда из уравнения моментов получаем

$$3 \cdot F = mg + (P_0 - P_3) S$$

откуда

$$P_3 = P_0 + \frac{mg - 3F}{S} \approx 31 \text{ кПа}$$

Поскольку вода остывает медленно, пар является насыщенным. Из условия  $P(t_3) = P_3$  по графику находим  $t_3 \approx 70^\circ\text{C}$ .

**Примечание.** Если не использовать свойства рычага, а прикладывать силу  $F$  к центру масс, то давление пара достаточно уменьшить до  $P'_3 = P_0 + (mg - F)/S = 91 \text{ кПа}$ , откуда по графику находим  $t'_3 \approx 97^\circ\text{C}$ , что существенно отличается от правильного ответа.

## ТУЙМ-68. Бытовой холодильник (2008)

Бытовой холодильник имеет ручку регулировки температуры в камере. Требуемая температура поддерживается с помощью специального устройства, которое периодически включает и выключает холодильную установку. Когда температура в камере поднимается выше требуемой более чем на некоторую небольшую фиксированную величину, данное устройство включает холодильную установку. Когда температура в камере опускается ниже требуемой более чем на некоторую небольшую фиксированную величину, данное устройство выключает холодильную установку.

В установившемся режиме работы холодильника в камере поддерживалась температура  $T_1 = 275 \text{ К}$ . Ручку регулировки температуры повернули, и через некоторое время в камере установилась температура  $T_2 = 270 \text{ К}$ .

- 1) Во сколько раз  $n$  изменилась мощность теплопередачи от окружающей среды к камере?
  - 1) Во сколько раз  $p$  изменилась мощность теплопередачи от камеры к холодильной установке во время её работы?
  - 1) Во сколько раз  $\alpha$  изменилась доля времени, в течение которого работает холодильная установка?
  4. Во сколько раз  $\beta$  изменилось время непрерывной работы холодильной установки?
- Представьте ответы в общем виде и рассчитайте численные значения с точностью до третьей цифры после запятой.

Предельно низкая температура, которая может быть достигнута при непрерывной работе холодильной установки,  $T_3 = 260 \text{ К}$ . Комнатная температура  $T_0 = 295 \text{ К}$ . Мощность, потребляемая холодильником от электрической сети во время работы холодильной установки, постоянна. Различием температур в разных частях камеры можно пренебречь. Считайте, что холодильный коэффициент бытового холодильника в некоторое фиксированное число раз меньше аналогичной величины для идеального холодильника, работающего по циклу Карно в тех же условиях.

**Примечание.** Холодильный коэффициент  $\mu = Q/A$ , где  $Q$  - количество теплоты, отнятое за цикл у охлаждаемого тела,  $A$  - работа, совершённая за цикл над рабочим телом.

**ТУЙМ-68. Бытовой холодильник (2008)** Все величины, относящиеся к установившемуся режиму до поворота ручки, будем отмечать индексом «1», а после поворота - индексом 2.

- 1) По закону теплопроводности можно записать мощности теплопередачи от окружающей среды к камере в виде

$$N_1 = k(T_0 - T_1), \quad N_2 = k(T_0 - T_2),$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности, зависящий только от свойств стенок и размеров камеры. Находим искомое отношение:

$$n = \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} = 1,250$$

1) Холодильный коэффициент идеального холодильника, работающего по циклу Карно, определяется по формуле  $\mu = T_X / (T_O - T_X)$ , где  $T_X$  и  $T_O$  - температуры охлаждаемого тела и окружающей среды соответственно.

Пусть  $P$  - мощность, потребляемая холодильной установкой от электрической сети,  $\eta$  - отношение холодильных коэффициентов бытового и идеального холодильников, тогда мощности теплопередачи от камеры к холодильной установке можно записать в виде

$$P_1 = \eta \cdot \frac{T_1}{T_0 - T_1} \cdot P, \quad P_2 = \eta \cdot \frac{T_2}{T_0 - T_2} \cdot P$$

Находим искомое отношение:

$$p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \approx 0,785$$

1) Пусть  $t_1$  и  $t_2$  - времена непрерывной работы холодильной установки,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  - времена между двумя её последовательными включениями или выключениями (длительности полных периодов работы), тогда усреднённые за периоды  $\tau_1$  и  $\tau_2$  уравнения теплового баланса примут вид

$$P_1 t_1 = N_1 \tau_1, \quad P_2 t_2 = N_2 \tau_2$$

откуда получаем доли времён, в течение которых работает холодильная установка:

$$\alpha_1 = \frac{t_1}{\tau_1} = \frac{N_1}{P_1} = \frac{k(T_0 - T_1)^2}{\eta P T_1}, \quad \alpha_2 = \frac{t_2}{\tau_2} = \frac{N_2}{P_2} = \frac{k(T_0 - T_2)^2}{\eta P T_2}$$

Находим искомое отношение:

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{(T_0 - T_2)^2}{(T_0 - T_1)^2} \cdot \frac{T_1}{T_2} \approx 1,591$$

1) Когда холодильная установка работает непрерывно, мощности теплопередачи от окружающей среды к камере и от камеры к холодильной установке одинаковы:

$$k(T_0 - T_3) = \eta \cdot \frac{T_3}{T_0 - T_3} \cdot P$$

откуда

$$\frac{\eta P}{k} = \frac{(T_0 - T_3)^2}{T_3}$$

Поскольку общая теплоёмкость камеры и допустимые устройством отклонения от требуемой температуры не изменяются, за время непрерывной работы холодильной установки от камеры отводится одно и то же суммарное количество теплоты  $Q$ :

$$Q = (P_1 - N_1) t_1, \quad Q = (P_2 - N_2) t_2,$$

откуда находим искомое отношение:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{t_2}{t_1} &= \frac{P_1 - N_1}{P_2 - N_2} = \frac{\frac{\eta P T_1}{T_0 - T_1} - k(T_0 - T_1)}{\frac{\eta P T_2}{T_0 - T_2} - k(T_0 - T_2)} = \\ &= \frac{(T_1(T_0 - T_3)^2 - T_3(T_0 - T_1)^2)(T_0 - T_2)}{(T_2(T_0 - T_3)^2 - T_3(T_0 - T_2)^2)(T_0 - T_1)} \approx 1,730. \end{aligned}$$

**ТУЙМ-69. «Кругловатый» цикл (2009)**

С одноатомным идеальным газом был совершён цикл (рис. 28), который в  $PV$ -координатах при выбранных масштабах по осям состоит из двух участков: четверти окружности с центром в точке  $(2V; P)$  и четверти окружности с центром в точке  $(V; 2P)$ . Найдите термодинамический КПД  $\eta$  этого цикла.

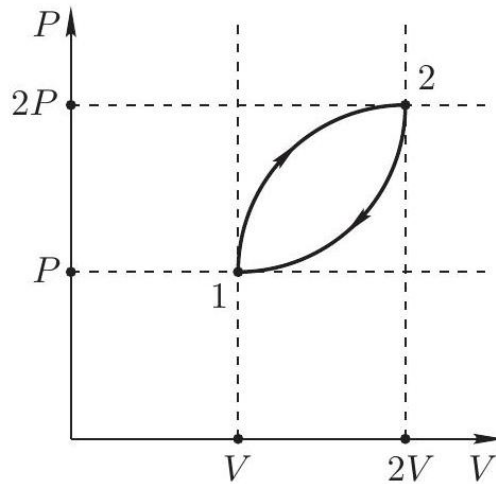


Рис. 28

**ТУЙМ-69. «Кругловатый» цикл (2009)** На участке 1-2 (рис. 133) газ получал теплоту от нагревателя (обозначим её количество через  $Q_+$ ), а на участке 2-1 газ отдавал теплоту холодильнику.

Найдём изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(2P \cdot 2V - PV) = \frac{9}{2}PV$$

Работа газа на каждом из участков может быть найдена как площадь под графиком  $P(V)$  в выбранном масштабе:

$$A_{12} = PV \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$A_{21} = -PV \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Найдём работу газа за цикл:

$$A = A_{12} + A_{21} = \frac{\pi - 2}{2}PV$$

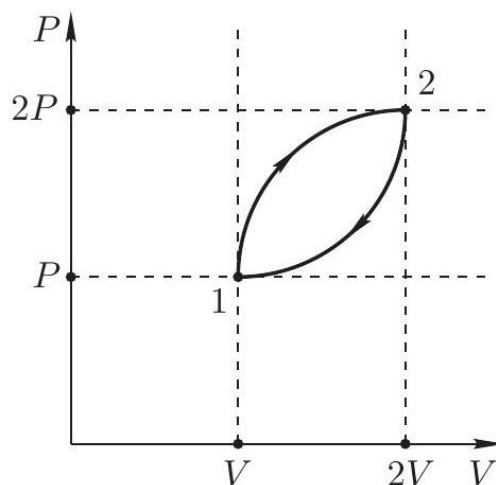


Рис. 133

По первому началу термодинамики

$$Q_+ = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{22 + \pi}{4}PV$$

Найдём КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2\pi - 4}{22 + \pi} \approx 9,1\%$$

### ТУЙМ-70. Относительное равновесие (2009)

Два сосуда объёмами  $V_1 = 4,0$  л и  $V_2 = 1,0$  л соединены короткой трубкой, которая первоначально перекрыта вентилем. В первом сосуде находится влажный воздух под давлением  $P_1 = 2,40$  атм с относительной влажностью  $\varphi_1 = 90\%$ , а во втором - водяной пар под давлением  $P_2 = 0,85$  атм. Вентиль открывают, и в сосудах быстро устанавливается одинаковое давление. Затем при открытом вентиле медленно устанавливается термодинамическое равновесие и достигается одинаковая влажность в обоих сосудах.

1) Найдите давление  $P$  влажного воздуха после установления термодинамического равновесия.

1) Найдите относительную влажность  $\varphi$  воздуха после установления термодинамического равновесия.

3. Найдите минимальное давление  $P_{\min}$  в первом сосуде в процессе установления термодинамического равновесия.

1) Найдите минимальную влажность  $\varphi_{\min}$  в первом сосуде в процессе установления термодинамического равновесия.

Толстые металлические стенки сосудов и скомканная внутри проволока обеспечивают постоянную температуру газов  $T = 373$  К. Объёмом трубки и проволоки, а также возможностью возникновения перенасыщенного пара можно пренебречь. В вопросах 1 и 2 требуются ответы в общем виде и в виде числа, а в вопросах 3 и 4 - только численные ответы.

**ТУЙМ-70. Относительное равновесие (2009)** 1) Из уравнения Менделеева-Клапейрона для смеси газов найдём

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} = 2,09 \text{ атм}$$

1) Из определения относительной влажности и уравнения Менделеева-Клапейрона для пара найдём

$$\varphi = \frac{P_{\text{п}}}{P_0} = \frac{\varphi_1 P_0 V_1 + P_2 V_2}{P_0 (V_1 + V_2)} = 89\%$$

где  $P_0 = 1$  атм - давление насыщенного пара при температуре  $T = 100^\circ\text{C}$ .

1) Сразу после открытия вентиля произойдёт быстрое макроскопическое перемещение газа из первого сосуда во второй. При этом пар во втором сосуде станет насыщенным задолго до установления одинакового давления. Проверим это непосредственным расчётом.

Чтобы пар во втором сосуде стал насыщенным, его давление должно увеличиться на  $1,00 \text{ атм} - 0,85 \text{ атм} = 0,15 \text{ атм}$ . При этом давление воздуха во втором сосуде возрастёт в  $(2,40 \text{ атм} - 90\% \cdot 1,00 \text{ атм}) : (90\% \cdot 1,00 \text{ атм}) = 5/3$  раза сильнее (пропорционально отношению парциальных давлений воздуха и пара в первом сосуде) и станет равно  $0 \text{ атм} + 5/3 \cdot 0,15 \text{ атм} = 0,25 \text{ атм}$ . Таким образом, общее давление во втором сосуде увеличится на  $0,15 \text{ атм} + 0,25 \text{ атм} = 0,40 \text{ атм}$  и станет равно  $0,85 \text{ атм} + 0,40 \text{ атм} = 1,25 \text{ атм}$ . Объём первого сосуда в  $V_1/V_2 = 4$  раза больше, значит, давление в нём изменится в 4 раза слабее и станет равно  $2,40 \text{ атм} - 0,40 \text{ атм} / 4 = 2,30 \text{ атм}$ .

Поскольку пар во втором сосуде стал насыщенным, его давление перестанет возрастать, а поступающий пар будет сразу же конденсироваться. Тогда давление газа во втором сосуде будет увеличиваться только за счёт поступающего воздуха, давление которого составляет  $5/8$  от общего давления в первом сосуде. Следовательно, отношение изменений давлений в первом и втором сосудах станет  $1 : (4 \cdot 5/8) = 2 : 5$  вместо  $1 : 4$ . Деля разность давлений  $2,30 \text{ атм} - 1,25 \text{ атм} = 1,05 \text{ атм}$  в пропорции  $2 : 5$ , находим равновесное давление  $2,00 \text{ атм}$ . После этого начнётся постепенный рост давления и влажности за счёт испарения образовавшейся воды. Таким образом, найденное равновесное давление и является минимальным:  $P_{\min} = 2,00 \text{ атм}$ . 4. Поскольку относительные изменения парциальных давлений воздуха и пара в первом сосуде одинаковы, минимальная влажность достигается одновременно с минимальным давлением и равна  $\varphi_{\min} = \varphi_1 \cdot P_{\min}/P_1 = 75\%$ .

### ТУЙМ-71. Холодильник-кондиционер (2010)

У экспериментатора Глюка стал слабо морозить однокамерный холодильник для хранения продуктов: при работе на полную мощность в камере поддерживалась температура лишь  $T_x = +10,0^\circ\text{C}$ , причём (что самое страшное для не терпящего жару Глюка!) температура в комнате из-за работы холодильника поднималась до  $T_1 = +30,5^\circ\text{C}$ , хотя на улице было всего  $T_0 = +30,0^\circ\text{C}$ .

Поэтому Глюк решил переделать холодильник в кондиционер: прикрепил его снаружи к окну так, что дверца холодильника оказалась в плоскости окна (на месте предварительно вынутого стекла), после чего удалил эту дверцу. Какая температура  $T_2$  установится в комнате теперь?

Холодильник считайте идеальным, поток тепла через дверцу (пока она была) и изменение площади оконных стёкол из-за переделки не учитывайте.

**ТУЙМ-71. Холодильник-кондиционер (2010)** Запишем уравнения теплового баланса:

1) для комнаты с холодильником -

$$P = \alpha (T_1 - T_0)$$

1) для камеры холодильника -

$$P \cdot \eta_1 = \beta (T_1 - T_x)$$

1) для комнаты с кондиционером -

$$P \cdot \eta_2 = (\alpha + \beta) (T_0 - T_2)$$

где  $P$  - мощность холодильника,  $\alpha$  и  $\beta$  - коэффициенты, характеризующие соответственно теплопроводность стен и окон комнаты и стенок холодильника,  $\eta_1 = T_x / (T_1 - T_x)$  и  $\eta_2 = T_2 / (T_0 - T_2)$  - холодильные коэффициенты (численные значения температур перед постановкой обязательно должны быть переведены в кельвины). Подставив формулу для  $\eta_1$ , из соотношений (185) и (186) выразим

$$\alpha = \frac{P}{T_1 - T_0}, \quad \beta = \frac{PT_x}{(T_1 - T_x)^2}.$$

Теперь, подставив  $\eta_2$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  в формулу (187) и сократив на  $P$ , получим

$$\frac{T_2}{T_0 - T_2} = \left( \frac{1}{T_1 - T_0} + \frac{T_x}{(T_1 - T_x)^2} \right) (T_0 - T_2)$$

или, после упрощения,

$$\gamma T_2 = (T_2 - T_0)^2$$

где для краткости записи введено обозначение

$$\gamma = \frac{1}{\frac{1}{T_1 - T_0} + \frac{T_x}{(T_1 - T_x)^2}} \approx 0,374 \text{ К.}$$

Приведа уравнение (188) к каноническому виду

$$T_2^2 - (2T_0 + \gamma) T_2 + T_0^2 = 0$$

и решив его, получим

$$T_2 = \frac{2T_0 + \gamma \pm \sqrt{\gamma(4T_0 + \gamma)}}{2}$$

Выбирая корень  $T_2 < T_0$ , окончательно находим

$$T_2 = T_0 - \frac{\sqrt{\gamma(4T_0 + \gamma)} - \gamma}{2} \approx 19,5^\circ \text{C}$$

## ТУЙМ-72. Водоём зимой (2011)

Большой открытый водоём цилиндрической формы заполнен водой глубиной  $H = 1$  м при температуре  $T_1 = 7^\circ \text{C}$ . Внезапно пошёл снег крупными хлопьями с температурой снежинок  $T_2 = 0^\circ \text{C}$ . На берегу толщина слоя снега растёт со скоростью  $v = 0,1/\text{с}$ , а его масса, отнесённая к площади, со скоростью  $\mu = 10 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{ч})$ . Через какое время  $t$  поверхность водоёма покроется сухим снегом толщиной  $h = 0,05$  м? Найдите изменение  $\Delta H$  глубины воды к этому моменту. Плотность льда  $\rho_s = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность воды  $\rho_w \approx 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$  немного зависит от температуры и имеет максимальное значение при  $T_{\text{max}} = 4^\circ \text{C}$ . Удельная теплоёмкость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ \text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335 \text{ кДж}/\text{кг}$ . Теплопроводностью воды, снега и воздуха можно пренебречь.

Подсказка. На рис. 29 качественно показано состояние, в котором будет находиться система в искомый момент времени.

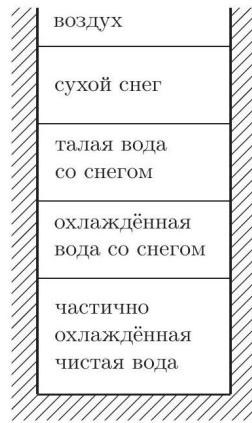


Рис. 29

**ТУЙМ-72. Водоём зимой (2011)** В искомый момент времени  $t$  система будет находиться в следующем состоянии (рис. 134). На дне окажется вода, охлаждённая до температуры  $T_{\max}$ , при которой вода имеет максимальную плотность. Требуемый по условию слой снега толщиной  $h$  над водой будет опираться на подводный слой снега толщиной  $h_{12} = h_1 + h_2$ , причём слой воды глубиной  $h_1$  - это растаявший снег, а слой воды глубиной  $h_2$  - это исходная вода, охлаждённая до равновесной со снегом температуры  $T_2$ .

Из закона Архимеда для плавающего нерастаявшего снега следует, что

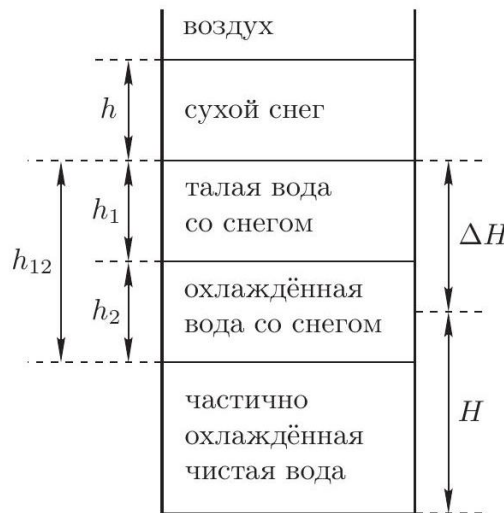


Рис. 134

$$\rho_s (h_{12} + h) = \rho_w h_{12}$$

откуда

$$h_{12} = \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s}$$

Время выпадения и масса нерастаявшего снега соответственно равны

$$t_1 = \frac{h_{12} + h}{v} = \frac{\rho_w h}{(\rho_w - \rho_s) v} = 5 \text{ ч} \quad \text{и} \quad m_1 = \mu S t_1 = \frac{\mu S \rho_w h}{(\rho_w - \rho_s) v},$$

где  $S$  - площадь водоёма.

Часть объёма слоя смеси воды и снега занимает снег, поэтому парциальная плотность воды (отношение массы воды к объёму смеси) составляет

$$\rho'_w = \frac{\rho_w S h_{12} - m_1}{S h_{12}} = \rho_w \left( 1 - \frac{\mu}{\rho_s v} \right)$$

Пусть  $t_2$  - время таяния льда и охлаждения воды в процессе установления теплового равновесия, тогда для массы талой воды в слое смеси можно записать уравнение



$$\rho'_w Sh_1 = \mu St_2$$

откуда

$$h_1 = \frac{\mu t_2}{\rho'_w}, \quad h_2 = h_{12} - h_2 = \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s} - \frac{\mu t_2}{\rho'_w}$$

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$\lambda \mu St_2 = c \rho_w S H (T_1 - T_{\max}) + c \rho'_w S h_2 (T_{\max} - T_2),$$

или, после сокращения на  $S$  и подстановки  $h_2$  и  $\rho'_w$ ,

$$\lambda \mu t_2 = c \rho_w H (T_1 - T_{\max}) + c \left( \frac{\rho_w (\rho_s v - \mu)}{\rho_s v} \cdot \frac{\rho_s h}{\rho_w - \rho_s} - \mu t_2 \right) (T_{\max} - T_2),$$

откуда

$$t_2 = \frac{c \rho_w H (T_1 - T_{\max}) (\rho_w - \rho_s) v + c \rho_w (\rho_s v - \mu) h (T_{\max} - T_2)}{\mu (\lambda + c (T_{\max} - T_2)) (\rho_w - \rho_s) v} = 5,5 \text{ ч.}$$

На самом деле процессы таяния и накопления снега идут одновременно, но можно считать их поочерёдными, поэтому искомое время

$$t = t_1 + t_2 = 10,5 \text{ ч}$$

а повышение уровня воды

$$\Delta H = \frac{\mu St}{\rho_w S} = \frac{\mu t}{\rho_w} = 0,105 \text{ м}$$

### ТУЙМ-73. Абстрактный процесс (2011)

В ходе квазистатического изотермического процесса идеальный газ побывал ровно по одному разу во всех состояниях, в которых его давление  $P$  и объём  $V$  удовлетворяют уравнению

$$\left| \frac{P - P_0}{\Delta P} \right| + \left| \frac{V - V_0}{\Delta V} \right| = 1,$$

где  $P_0, \Delta P, V_0, \Delta V$  - известные константы соответствующей размерности, причём  $P_0 > \Delta P > 0$  и  $V_0 > \Delta V > 0$ . В начальном состоянии в сосуде находился только газ  $X$ , а увеличение количества газа происходило только за счёт добавления газа  $Y$ . Молярные массы обоих газов одинаковы.

- 1) Найдите модуль работы  $A$  газа во всём процессе.
- 1) Во сколько раз  $\alpha$  увеличилось количество газа к концу процесса?
- 1) Найдите долю  $\beta$  газа  $X$  в смеси в конце процесса.

**ТУЙМ-73. Абстрактный процесс (2011)** Графиком уравнения рассматриваемого процесса на  $PV$ -диаграмме является ромб, целиком расположенный в первой четверти (рис. 135). Поскольку газ побывал ровно по одному разу во всех допустимых состояниях, он совершил циклический процесс. Можно считать цикл замкнутым, хотя конечное состояние не совпадает с начальным, а лишь бесконечно близко к нему.

- 1) Работа газа за цикл равна площади, ограниченной циклом на  $PV$ -диаграмме:

$$A = 2\Delta P \Delta V$$

1) Поскольку температура, давление и объём газа в начальном и конечном состояниях одинаковы, согласно уравнению Менделеева-Клапейрона  $PV = \nu RT$  одинаковы и количества газа, откуда  $\alpha = 1$ .

1) При выпуске части смеси из сосуда доли газов не изменяются, поэтому можно не рассматривать выпуск газа, а учитывать толь-

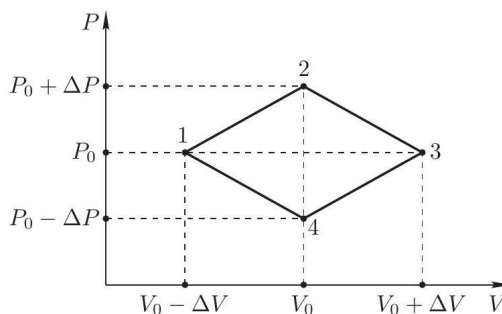


Рис. 135

ко добавление другого газа, тогда  $\beta = \nu_{\min}/\nu_{\max}$ , где  $\nu_{\min}$  и  $\nu_{\max}$  - минимальное и максимальное количество газа в ходе процесса. Можно убедиться, что  $\beta$  не зависит от выбора начального состояния и направления обхода цикла.

Поскольку множество состояний с одинаковыми температурами и количествами газа образуют гиперболу,  $\nu_{\min}$  достигается в одной из точек 1 или 4, а  $\nu_{\max}$  - где-то на отрезке 2-3. Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона

$$\nu_1 RT = P_0 (V_0 - \Delta V), \quad \nu_2 RT = (P_0 - \Delta P) V_0.$$

Сравнивая полученные выражения, находим

$$\nu_{\min} = \frac{1}{RT} \cdot \begin{cases} P_0 (V_0 - \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V} \\ (P_0 - \Delta P) V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} \end{cases}$$

Для нахождения  $\nu_{\max}$  запишем зависимость  $P(V)$  для участка 2-3:

$$P = (P_0 + \Delta P) - \frac{\Delta P}{\Delta V} (V - V_0) = \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{\Delta V} - \frac{\Delta P}{\Delta V} V$$

подставим её в уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\nu RT = \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{\Delta V} V - \frac{\Delta P}{\Delta V} V^2$$

продифференцируем по  $V$  и приравняем к нулю:

$$P_0 + \Delta P + \frac{\Delta P}{\Delta V} V_0 - 2 \frac{\Delta P}{\Delta V} V = 0$$

откуда

$$V = \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{2 \Delta P}$$

Если точка с таким объёмом лежит на отрезке 2 – 3, то есть если

$$V_0 \leq \frac{P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P}{2 \Delta P} \leq V_0 + \Delta V$$

или, после упрощения,

$$\frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1$$

то в этой точке достигается

$$\nu_{\max} = \frac{(P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P)^2}{4 \Delta P \Delta V}$$

Если же она лежит вне отрезка 2-3, то  $\nu_{\max}$  достигается в одном из концов отрезка (наиболее близком к рассматриваемой точке). Таким образом, находим максимальное количество газа:

$$\nu_{\max} = \frac{1}{RT} \cdot \begin{cases} (P_0 + \Delta P) V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} - 1; \\ \frac{(P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P)^2}{4 \Delta P \Delta V}, & \text{если } \frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1; \\ P_0 (V_0 + \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V} + 1. \end{cases}$$

Окончательный ответ имеет вид

$$\beta = \frac{A}{B},$$

$$A := \begin{cases} P_0 (V_0 - \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V}; \\ (P_0 - \Delta P) V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V}; \end{cases}$$

$$B := \begin{cases} (P_0 + \Delta P) V_0, & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} - 1; \\ \frac{(P_0 \Delta V + \Delta P \Delta V + V_0 \Delta P)^2}{4 \Delta P \Delta V}, & \text{если } \frac{V_0}{\Delta V} - 1 \leq \frac{P_0}{\Delta P} \leq \frac{V_0}{\Delta V} + 1; \\ P_0 (V_0 + \Delta V), & \text{если } \frac{P_0}{\Delta P} \geq \frac{V_0}{\Delta V} + 1 \end{cases}$$

**ТУЙМ-74. Авторская методика заварки чая (2012)**

Экспериментатор Глюк решил заварить холодный чай по своей авторской методике. Для этого он взял пустую кастрюлю диаметром  $d = 23$  см и высотой  $h = 13$  см и стал последовательно наливать в неё порции воды объёмом  $\Delta V = 100$  мл каждая, причём первая порция имела температуру  $t_1 = 1^\circ\text{C}$ , а каждая следующая - на  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$  выше, чем предыдущая. Когда кастрюля заполнилась, Глюк высыпал в неё один грамм чая и перемешал. Какую температуру  $t$  чая предпочитает Глюк, если судить по его авторской методике? Общая теплоёмкость стенок кастрюли  $C = 420$  Дж/К, а её начальная температура  $t_0 = 19^\circ\text{C}$ . Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоёмкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · °C).

**Примечание.** Ответ в общем виде в данной задаче не требуется.

P.S. Как вы думаете, почему наш персонаж любит чай именно такой температуры? (Вопрос шуточный и в баллах не оценивается.)

**ТУЙМ-74. Авторская методика заварки чая (2012)** Из величины объёма кастрюли  $V = (\pi d^2/4)h = 5401$  мл следует, что всего было налито  $n = V/\Delta V = 54$  порции воды, а последний 1 мл остался для чая. Найдём среднюю температуру налитой воды:

$$t_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_n}{2} = 27^\circ\text{C}$$

Поскольку теплоёмкость кастрюли мала по сравнению с теплоёмкостью всей налитой воды, конечная температура  $t$  должна быть близка к  $t_{\text{ср}}$ , однако рассчитаем её «точно». Согласно уравнению теплового баланса

$$Ct_0 + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t_{\text{ср}} = Q = Ct + c \cdot n\rho\Delta V \cdot t$$

откуда

$$t = \frac{Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{\text{ср}}}{C + cn\rho\Delta V} = 26,85^\circ\text{C} \approx 27^\circ\text{C}$$

Поскольку  $0^\circ\text{C} = 273,15$  К, искомая температура  $t = 300,00$  К, и тогда становится ясно, почему нашему персонажу нравится именно такая температура чая, - он просто любит «круглые» числа. (-)

**ТУЙМ-75. Тонущий стакан (2012)**

Большой неподвижный герметичный сосуд частично заполнен водой и поддерживается при постоянной температуре  $T$ . В воду пустили плавать открытый сверху цилиндрический тонкостенный стакан радиусом  $r$ , причём края стакана оказались на  $h$  выше, а дно на  $H$  ниже уровня воды (рис. 30). Дно стакана утяжелено, так что стакан плавает вертикально. При температуре  $T$  давление насыщенных паров воды равно  $P$ . Плотность  $\rho_w$  и молярная масса  $\mu$  воды известны. Коэффициент прилипания молекул пара к поверхности воды равен  $\alpha$ .

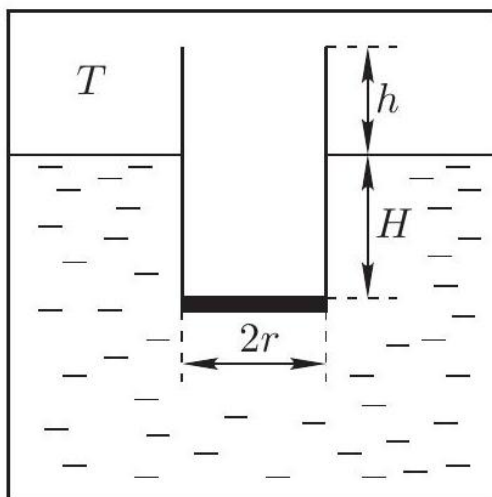


Рис. 30

1) Какая минимальная масса  $m$  воды должна накопиться в стакане, чтобы он утонул? Поверхностным натяжением можно пренебречь.

1) Найдите поток  $\Phi$  молекул, покидающих поверхность воды.

1) Найдите разность концентраций  $\Delta n$  пара над поверхностями воды в стакане и сосуде, предполагая, что процессы диффузии протекают много быстрее процессов испарения.

1) Оцените время  $t$ , через которое стакан утонет.

**Примечание.** Коэффициент прилипания - это вероятность того, что молекула пара, налетевшая на поверхность воды, присоединится к воде. Поток это количество, отнесённое к площади и времени.

**Задача 75. Тонущий стакан (2012)** В силу закона Архимеда разность уровней воды в стакане и в сосуде при погружении стакана будет постоянна и равна  $H$ . Стакан утонет, когда в нём накопится вода массой  $m = \rho_w \pi r^2 h$  (рис. 136).

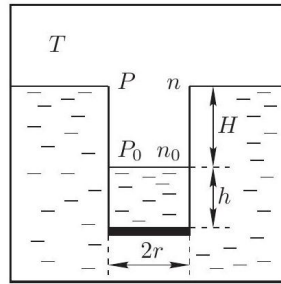


Рис. 136

Когда жидкость находится в термодинамическом равновесии со своим паром, поток молекул, вылетающих из жидкости, равен потоку молекул пара, «прилипающих» к поверхности жидкости:

$$\Phi = \alpha \cdot \frac{1}{4} n v$$

где  $n$  - концентрация,  $v$  - средняя скорость молекул пара. После подстановки

$$n = \frac{P}{kT} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

получаем

$$\Phi = \frac{\alpha P}{k} \sqrt{\frac{R}{2\pi\mu T}}.$$

Здесь приведена точная формула для  $\Phi$ , однако следует считать правильными ответы с немного отличающимися числовыми коэффициентами, которые могут возникнуть, например, из-за подстановки среднеквадратичной скорости  $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{3RT/\mu}$  в качестве  $v$  или из-за использования «школьной» формулы для потока, содержащей коэффициент  $1/6$  вместо  $1/4$ .

1) Давление газа монотонно зависит от высоты, поэтому пар может быть насыщенным лишь на некоторой одной высоте. Поскольку по условию сосуд большой по сравнению со стаканом, насыщенным пар будет именно на уровне поверхности воды в сосуде, а не на уровне поверхности воды в стакане. Пусть  $P_0$  и  $n_0$  - соответственно давление и концентрация пара на уровне поверхности воды в стакане, тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона находим среднюю плотность пара в погружённой части стакана:

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu P}{RT} + \frac{\mu P_0}{RT} \right) \approx \frac{\mu P}{RT}$$

где подставлено  $P_0 \approx P$ , так как в данном случае учёт разницы давлений проявился бы в дальнейшем лишь как поправка второго порядка малости. Теперь найдём добавочное гидростатическое давление столба пара в стакане:

$$\Delta P = P_0 - P = \rho g H = \frac{\mu P g H}{RT}$$

и искомую разность концентраций:

$$\Delta n = n_0 - n = \frac{P_0}{kT} - \frac{P}{kT} = \frac{\Delta P}{kT} = \frac{\mu P g H}{kRT^2}$$

1) Стакан утонет из-за постепенного накопления в нём воды, возникшей в результате конденсации пара. При этом пар будет конденсироваться на внутренней поверхности погружённой части стакана, так как в этой области давление пара будет превышать давление насыщенного пара при данной температуре на величину гидростатического давления столба пара.

Далее приведён расчёт в предположении, что внутренние стенки стакана до уровня поверхности воды в сосуде влажные, то есть покрыты тонким слоем воды, однако можно считать верными решения участников с использованием модели сухих стенок. Общее количество молекул, вылетающих с полной поверхности воды площадью  $S$  за время  $t$ :

$$Z_1 = \Phi \cdot S \cdot t = \frac{\alpha}{4} n v \cdot (\pi r^2 + 2\pi r H) \cdot t.$$

Поток молекул, «прилипающих» к воде за то же время, определяется концентрацией пара на соответствующем уровне:

$$Z_2 = \frac{\alpha}{4} n_0 v \cdot \pi r^2 \cdot t + \frac{\alpha}{4} n_{\text{ср}} v \cdot 2\pi r H \cdot t$$

где  $n_{\text{ср}} = (n + n_0)/2 = n + \Delta n/2$  - средняя концентрация пара в погружённой части стакана. В отличие от рассуждений при расчёте  $\rho$ , здесь нельзя полагать  $n_{\text{ср}} \approx n$ , так как далее основную роль играет именно разность этих величин. Найдём превышение числа «прилипающих» молекул над числом вылетающих:

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 = \frac{\alpha}{4} \Delta n v \cdot \pi r^2 t + \frac{\alpha}{4} \frac{\Delta n}{2} v \cdot 2\pi r H t = \frac{\pi}{4} \alpha \Delta n v r (r + H) t.$$

Стакан утонет, когда общая масса накопившихся в нём молекул воды станет равна  $m$ , то есть при выполнении условия

$$\Delta Z \cdot \frac{\mu}{N_A} = m$$

где  $\mu/N_A$  - масса одной молекулы. Подставим сюда выражения для  $\Delta Z$  и  $m$ :

$$\frac{\pi}{4} \alpha \Delta n v r (r + H) t \cdot \frac{\mu}{N_A} = \rho_w \pi r^2 h$$

Далее подставим выражения для  $\Delta n$  и  $v$ :

$$\frac{\pi}{4} \alpha \cdot \frac{\mu P g H}{k R T^2} \cdot \sqrt{\frac{8 R T}{\pi \mu}} \cdot r (r + H) t \cdot \frac{\mu}{N_A} = \rho_w \pi r^2 h.$$

Используя соотношение  $k N_A = R$ , окончательно получаем

$$t = \frac{\sqrt{2\pi} \rho_w}{\alpha P g} \cdot \left( \frac{R T}{\mu} \right)^{3/2} \cdot \frac{r}{r + H} \cdot \frac{h}{H}.$$

Аналогично второму пункту оценочные ответы, отличающиеся только числовыми коэффициентами, следует считать правильными.

### 11.3 Задачи на идеальный газ

#### О-1.1(1 мин) Соотношение на производные

Доказать, что если три величины  $x, y, z$  связаны функциональным уравнением  $f(x, y, z) = 0$ , то их производные  $(\partial x / \partial y)_z$ ,  $(\partial y / \partial z)_x$ ,  $(\partial z / \partial x)_y$  удовлетворяют соотношению

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1.$$

**Решение** (?? напишу потом это!!!)

Мы хорошо знаем, что это уже выведенное соотношение Максвелла, так что все это не вызывает вопросов.

#### О-1.2

Доказать, что коэффициент объемного расширения  $\alpha$ , температурный коэффициент давления  $\lambda$  и изотермическая сжимаемость  $\beta$  физически однородного и изотропного тела связаны соотношением

$$V_0 \alpha = P_0 V \lambda \beta$$

где  $V_0$  и  $P_0$  - объем и давление тела при  $0^\circ\text{C}$ .

#### О-1.3 Температурный коэффициент ртути

Коэффициент объемного расширения ртути  $\alpha$  при  $0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении равен  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{C}^{-1}$ . Сжимаемость  $\beta = 3,9 \times 10^{-6} \text{atm}^{-1}$ . Вычислить температурный коэффициент давления  $\lambda$  для ртути.

**Решение** (?? из определений все же получится, да?)

**О-1.4**

На сколько надо увеличить внешнее давление, чтобы сохранить постоянным объем ртути при нагревании ее от 0 до  $0,2^\circ\text{C}$ ? (см. предыдущую задачу.)

**О-1.5**

Вычислить для идеального газа следующие величины: коэффициент объемного расширения  $\alpha$ , температурный коэффициент давления  $\lambda$ , изотермическую сжимаемость  $\beta_T$ , изотермический модуль объемной упругости  $K_T = -V(\partial P/\partial V)_T$ . (См. задачу

**О-1.2.**

)

**О-1.6**

Компенсационный маятник состоит из длинной тонкой никелевой трубки пренебрежимо малой массы, небольшая часть объема которой заполнена ртутью. Коэффициент линейного расширения никеля  $\alpha_N = 1,0 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ , коэффициент объемного расширения ртути  $\alpha = 18,0 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ . Какую часть объема трубки следует заполнить ртутью, чтобы период колебаний маятника не изменялся с изменением температуры? Для простоты сначала рассмотреть маятник как математический, т. е. считать, что центр качаний его совпадает с центром масс ртути. Затем учесть несовпадение центра качания с центром масс ртути.

**О-1.7**

Найти плотность  $\rho$  морской воды на глубине 5 км, если на поверхности океана плотность  $\rho_0 = 1,03 \text{ г/см}^3$ , а сжимаемость воды в пределах давлений от 1 до 500 атм равна  $\beta = 47,5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ .

**О-1.8**

Электрическая газонаполненная лампа накаливания наполнена азотом при давлении в 600 мм рт. ст. Емкость лампы  $500 \text{ см}^3$ . Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой при нормальном атмосферном давлении?

**О-1.9**

Цилиндрическая пипетка длиной  $l$  наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Часть ртути вытекает. Какой длины  $x$  столбик ртути останется в пипетке? Атмосферное давление равно  $H$  мм рт. ст.

**О-1.10**

Давление воздуха, заключенного в закрытом колене манометра высотой  $l$ , уравнивает столб ртути высотой  $h$  при барометрическом давлении  $H_0$  и абсолютной температуре  $T_0$ . Какой столб ртути  $h_1$  будет уравнивать давление этого воздуха при барометрическом давлении  $H_1$  и температуре  $T_1$ ?

**О-1.11.**

Два сосуда  $A$  и  $B$  с воздухом соединены между собой капилляром с краном. Сосуд  $A$  погружен в водяную ванну с температурой  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ , а сосуд  $B$  - в охлаждающую смесь с температурой  $t_2 = -20^\circ\text{C}$ . В начале сосуды были разобщены друг от друга краном, и давления воздуха в сосудах  $A$  и  $B$  были равны соответственно  $P_1 = 400 \text{ мм рт. ст.}$  и  $P_2 = 150 \text{ мм рт. ст.}$  Найти давление, установившееся после открытия крана, если объем сосуда  $A$  равен  $V_1 = 250 \text{ см}^3$ , а  $B - V_2 = 400 \text{ см}^3$ .

**О-1.12**

Аэростат объемом  $V \text{ м}^3$  наполнен водородом при температуре  $t_1 = 15^\circ\text{C}$ . При неизменном давлении атмосферы под влиянием солнечной радиации его температура поднялась до  $t_2 = 37^\circ\text{C}$ , а излишек газа вышел через аппендикс, благодаря чему масса аэростата с газом уменьшилась на  $M = 6,05 \text{ кг}$ . Плотность водорода  $\rho_0 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$ . Определить объем аэростата  $V$ .

**О-1.13**

Фабричная труба высотой  $l = 50$  м выносит дым при температуре  $t_1 = 60^\circ\text{C}$ . Определить статическое давление  $P$ , производящее тягу в трубе. Температура воздуха  $t_2 = -10^\circ\text{C}$ . Плотность воздуха  $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ .

**О-1.14**

В тонкостенный сферический баллон массой  $M = 1$  кг нагнетается азот при температуре  $T = 300\text{K}$ . Найти максимальное количество азота, которое можно поместить в сосуд, если допустимое напряжение в стенках баллона  $\sigma = 50 \text{ Н/мм}^2$ . Плотность стали  $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ .

**О-1.15**

Найти число ходов  $n$  поршня, чтобы поршневым воздушным насосом откачать сосуд емкостью  $V$  от давления  $P_1$  до давления  $P_2$ , если емкость хода поршня равна  $v$ . Вредным пространством пренебречь. (?? мб внешним, овч опечатался?)

**О-1.16**

Скорость откачки газа во вращающемся масляном насосе  $150 \text{ см}^3/\text{с}$ . Сколько потребуется времени, чтобы колбу в 5 л откачать от нормального атмосферного давления до давления  $10^{-2}$  мм рт. ст.?

**О-1.17**

Сосуд с объемом 1 литр наполнен водой при температуре  $27^\circ\text{C}$ . Чему стало бы равным давление  $P$  внутри сосуда, если бы взаимодействие между молекулами воды внезапно исчезло?

**О-1.18**

Восемь граммов кислорода занимают объем  $V = 560$  л. Определить давление этого газа в том же объеме при температурах 1)  $T = 820\text{K}$  и 2)  $T = 10$  кэВ, когда атомы кислорода полностью ионизированы.

**О-1.19**

При взрыве атомной (урановой) бомбы в ее центре достигаются температуры порядка  $T \approx 10$  кэВ. Принимая ориентировочно плотность урана в центре бомбы равной  $\rho = 20 \text{ г/см}^3$ , найти давление внутри бомбы при этой температуре. Сравнить это давление с давлением в центре Земли, вычисленным в предположении, что плотность Земли постоянна и равна  $\rho_3 = 5,5 \text{ г/см}^3$ . Давление светового излучения не учитывать.

**О-1.20**

Три сосуда с объемами  $V_0, V_1, V_2$ , содержащие идеальный газ, соединены вместе тонкими трубками (объемом трубок можно пренебречь). Вначале все три сосуда находились при одинаковой температуре  $T_0$ , а давление в них было равно  $P_0$ . Затем сосуд  $V_0$  оставили при температуре  $T_0$ , а сосуды  $V_1$  и  $V_2$  нагрели до температур  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Найти давление  $P$ , установившееся в сосудах.

**О-1.21.**

Определить массу воздуха  $m$ , заключенного между двумя оконными рамами при атмосферном давлении  $P$ , считая, что температура между рамами меняется по линейному закону от  $T_1$  до  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Площадь окна равна  $S$ , расстояние между ними  $-l$ .

**О-1.22**

Оценить размер цилиндра автомобиля «осквич». При засасывании в цилиндр воздуха из атмосферы, смешанного с брызгами бензина, горючая смесь подогревается до температуры  $\sim 80^\circ\text{C}$ . Расход бензина при езде со скоростью  $60 \text{ км/(3000 об/мин двигателя, двигатель четырехцилиндровый)}$  составляет около  $8 \text{ кг на } 100 \text{ км}$ . Бензин представляет собой смесь углеводородов ( $\text{C}_n\text{H}_{2n}$ ) с относительной молекулярной массой  $\sim 100$ ; точка кипения его  $\sim 80^\circ\text{C}$ .

**О-1.23**

Имеется смесь различных идеальных газов с массами  $M_1, M_2, M_3, \dots$  и молярными массами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  соответственно. Показать, что уравнение состояния такой смеси можно записать в виде  $PV = \frac{M}{\mu}RT$ , где  $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$  — полная масса смеси, а постоянная  $\mu$  играет роль средней молярной массы смеси. Найти  $\mu$ .

**О-1.24**

Какую скорость  $v$  должна иметь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стальную плиту она расплавилась? Температура пули  $t_0 = 27^\circ\text{C}$ , температура плавления свинца  $t_1 = 327^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления свинца  $q = 5 \text{ кал/г}$ , удельная теплоемкость свинца  $c = 0,03 \text{ кал / (г} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

**О-1.27**

При полном сгорании моля метана в углекислоту и воду выделяется  $Q_1 = 887 \text{ кДж}$ . При образовании из элементов моля воды выделяется  $Q_2 = 287 \text{ кДж}$ , а при полном сгорании углерода с образованием моля  $\text{CO}_2$  выделяется тепло  $Q_3 = 407 \text{ кДж}$ . Определить теплоту  $Q$  образования моля метана из твердого углерода и газообразного водорода.

**О-1.28**

Согласно закону Джоуля внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры и не зависит от давления. Пользуясь этим и уравнением Клапейрона, показать, что энтальпия  $I = U + PV$  идеального газа не зависит от давления, а является функцией только его температуры.

**О-1.29**

Доказать, что если начальные и конечные продукты реакции являются идеальными газами, то: 1) тепловой эффект реакции при постоянном объеме не зависит от объемов газов после реакции; 2) тепловой эффект реакции при постоянном давлении не зависит от давлений газов.

**О-1.30**

Рассматривая воздух как идеальный газ, показать, что при нагревании воздуха, находящегося в комнате, его внутренняя энергия не изменяется, если только внешнее давление остается постоянным.

**О-1.34**

В цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный газ в равновесии с атмосферой. На поршень начинает действовать внешняя сила, в результате чего газ изотермически сжимается, и его давление возрастает в два раза. Начальный объем газа  $V_1 = 5 \text{ л}$ . Вычислить работу, совершаемую внешней силой, и количество тепла, полученное в этом процессе газом.

**О-1.35**

Найти изменение внутренней энергии  $\Delta U$  массы азота при его квазистатическом адиабатическом расширении от объема  $V_1 = 10 \text{ л}$ , занимаемого при нормальном давлении  $P_1$ , до объема  $V_2 = 320 \text{ л}$ .

**О-1.36**

Батарея конденсаторов емкостью  $C = 100 \text{ мкФ}$ , заряженная до напряжения  $U = 300 \text{ В}$ , разряжается через искровой промежуток, помещенный внутри баллона объемом  $V = 10 \text{ см}^3$ . Баллон наполнен аргонem при нормальных условиях. Оценить изменение  $\Delta P$  давления в аргоне.

**О-1.37**

Для аргона отношение  $\gamma = C_P/C_V = 1,68$ . Определить давление  $P_2$ , получившееся после адиабатического расширения этого газа от объема  $V_1 = 1 \text{ л}$  до объема  $V_2 = 2 \text{ л}$ , если начальное давление  $P_1 = 1 \text{ атм}$ .

**О-1.38**

Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью  $C$ . Кривая, изображающая политропический процесс, называется политропой. Найти уравнение политропы для идеального газа, теплоемкость  $C_V$  которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: 1)  $C = C_V$ ; 2)  $C = C_P$ ; 3)  $C = 0$ ; 4)  $C = \infty$ .



**О-1.39**

При каких значениях показателя политропы  $n$  идеальный газ при сжатии нагревается, а при каких охлаждается?

**О-1.40**

При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема в 4 л до конечного объема в 1 л. Давление при этом возросло от 1 до 8 атм. Найти теплоемкость  $C$  всей массы гелия, если его начальная температура была 300К.

**О-1.43**

Положительную или отрицательную работу совершает идеальный газ при круговом процессе 1 – 2 – 3 – 1 (рис. 376)? Чему равна эта работа для  $m$  граммов азота? Известно, что  $V_2/V_1 = T_2/T_1$ .

**О-1.44**

В теплоизолированном от внешней среды цилиндре под поршнем находится 8 г гелия при температуре  $T_1 = 200\text{К}$ . Общее количество вещества, из которого изготовлен цилиндр и поршень, равно одному молю. Обратимым образом газ за счет движения поршня сжимается до объема  $V_2 = V_1/8$ , но температура стенок за это время не успевает измениться, и лишь потом вся система приходит в равновесие. Найти установившуюся температуру  $T$ .

**О-1.45**

1) Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону  $PV^2 = \text{const}$ ? 2) Какова его молярная теплоемкость в этом процессе?

**О-1.46**

Решить предыдущую задачу для идеального газа, расширяющегося по закону  $P^2V = \text{const}$ .

**О-1.47**

Вычислить молярную теплоемкость идеального газа для процесса; в котором давление  $P$  пропорционально объему  $V$ . Теплоемкость  $C_V$  газа не зависит от температуры.

**О-1.48**

Молярная теплоемкость азота в некотором процессе постоянна и равна 23,556 Дж/(К - моль). Как зависит давление газа  $P$  от температуры  $T$  в этом процессе?

**О-1.49**

Вычислить молярную теплоемкость  $C(V)$  идеального газа с заданным значением параметра  $\gamma = C_P/C_V$  в процессе, представленном на графике (рис. 377). Значения  $P_0$  и  $V_0$  известны. Определить максимальную температуру, которую достигает газ в этом процессе. Указать политропические процессы, графики которых на  $PV$ -диаграмме касаются прямой (на рис. 377) в точках, соответствующих  $C(V) = 0$  и  $C(V) = \infty$ . Начертить график зависимости  $C(V)$ .

**О-1.50**

Найти в координатах  $(V, T)$  уравнение процесса для идеального газа, при котором молярная теплоемкость газа меняется с температурой по линейному закону  $C = C_0 + \alpha T$ , где  $\alpha$  - некоторая постоянная. Рассмотреть частный случай  $C_0 = 0$ .

**О-1.51.**

Найти в координатах  $(V, T)$  уравнение адиабаты для идеального газа в области температур, в которой теплоемкость газа меняется по закону  $C_V = C_{V_0} + \alpha T^2$ , где  $\alpha$  - некоторая постоянная.

**О-1.52**

Для идеального газа с произвольным показателем адиабаты  $\gamma$  найти уравнение процесса, при котором молярная теплоемкость  $C$  зависит от температуры  $T$  по закону  $C = \alpha T^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ .

**О-1.53**

Моль идеального газа с молярной теплоемкостью  $C_V = 5R/2$  три раза обратимо переводится из состояния 1 в состояние 2 в результате поочередного выполнения трех различных термодинамических процессов 1 – 3 – 2, 1 – 4 – 2, и 1 – 2 (рис. 378). Найти количества тепла  $Q_{132}$ ,  $Q_{142}$ , и  $Q_{12}$ , получаемые газом в ходе каждого из этих процессов. Найти молярную теплоемкость  $C_{12}$  газа для процесса 1 – 2.  $T_1$  газа в состоянии 1.

**О-1.54**

Моль идеального газа нагревают в цилиндре под невесомым поршнем, удерживаемым в положении равновесия пружиной, подчиняющейся закону Гука (рис. 379). Стенки цилиндра и поршень адиабатические, а дно проводит тепло. Начальный объем газа  $V_0$ , при котором пружина не деформирована, подобран так, что  $P_0 S^2 = kV_0$ , где  $P_0$  – наружное атмосферное давление,  $S$  – площадь поршня,  $k$  – коэффициент упругости пружины. Найти теплоемкость газа для этого процесса.

**О-1.55**

Боковые стенки цилиндра  $AC$  и  $BD$ , его крышка  $CD$  и поршень  $MN$  сделаны из материала, не проводящего тепло (рис. 380). Дно  $AB$  проводит тепло. Поршень  $MN$  может двигаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу поршня находится по одному молью одного

**О-1.62**

Для создания подземного нефтехранилища в полости с начальным объемом  $V_0$  производят взрыв, при котором высвобождается энергия 4,2 ГДж. Образовавшиеся газообразные продукты взрыва, расширяясь адиабатически, в доли секунды образуют хранилище. При каком начальном объеме полости увеличение ее объема будет максимальным? Взрыв производится на глубине  $H = 100$  м, плотностью, а продукты взрыва – двухатомным газом.

**О-1.63**

Для определения отношения удельных теплоемкостей  $c_P$  и  $c_V$  газа измерили период  $T_1$  малых колебаний ртути в  $U$ -образной стеклянной трубке с незапаянными концами. После этого на обе ветви трубки были насажены большие одинаковые полые стеклянные шары с исследуемым газом, вследствие чего период колебаний изменился и стал равным  $T_2$ . Считая процесс сжатия и разрежения газа в шарах адиабатическим, вывести формулу для  $\gamma = c_P/c_V$ . Объем каждого шара равен  $V$  см<sup>3</sup>, давление газа в них в состоянии покоя  $h$  см рт. ст., а площадь поперечного сечения трубки  $S$  см<sup>2</sup>. Объемом незаполненной части трубки можно пренебречь по сравнению с объемом шара  $V$ .

**О-1.64**

Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке ствола и пули удастся добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры  $T$ , давления  $P$  и плотности  $\rho$  аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массой  $m = 100$  г влетает в ствол, имеющий объем  $V = 200$  см<sup>3</sup>, с начальной скоростью  $v = 250$  м/с. Начальные температура и давление соответственно равны  $T_0 = 300$  К и  $P_0 = 1$  атм.

**О-1.65**

Для измерения теплоемкости газа исследуемый нагретый газ заставляют протекать через спиральную металлическую трубку (змеевик), опущенную в воду калориметра. На одном конце змеевика поддерживают постоянными давление  $P_1$  и температуру  $T_1$ . На выходе змеевика поддерживают давление  $P_2$  и измеряют температуру газа  $T_2$ . По повышению температуры воды в калориметре можно определить количество тепла, отданное газом. Разделив полученную величину на понижение температуры и на число молей прошедшего газа, находят его молярную теплоемкость. Какая теплоемкость измеряется таким методом?

**О-1.66**

В длинной вертикальной цилиндрической трубке, закрытой с нижнего конца, может ходить без трения поршень, масса  $M$  которого велика по сравнению с массой газа, заключенного внутри трубки. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном трубки равно  $l_0$ . Определить период малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня от положения равновесия, в предположении, что они являются изотермическими, а газ идеальным. Площадь поперечного сечения трубки равна  $S$ , нормальное атмосферное давление  $P_0$ . Рассмотреть предельный случай, когда  $P_0 = 0$ .

**О-1.67**

Решить предыдущую задачу в предположении, что колебания - адиабатические. Будет ли сказываться на результате зависимость показателя адиабаты  $\gamma$  для газа от температуры?

**О-1.68**

Два баллона с объемами в  $V_1$  и  $V_2$ , наполненные разными газами, соединены цилиндрической трубой с площадью поперечного сечения, равной  $S$ . В трубе находится поршень массой  $M$ . В положении равновесия давление газов по обе стороны поршня одинаково и равно  $P_0$ . Найти период  $\tau$  малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня от положения равновесия в предположении, что процесс сжатия и расширения газов адиабатический. Показатели адиабат для газов равны соответственно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Объемом трубы по сравнению с объемами  $V_1$  и  $V_2$  пренебречь, трение между поршнем и стенками трубы не учитывать.

**О-1.69**

Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого  $C_P$  и  $C_V$  не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от давления  $P_0$  до промежуточного давления  $P_1$ . Затем сжатый газ при постоянном давлении  $P_1$  охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . Наконец, газ сжимается до окончательного давления  $P_2$ . При каком значении промежуточного давления  $P_1$  полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Давления  $P_0$  и  $P_1$ , а также начальная работа  $A_{\min}$  с работой  $A_1$ , которую надо было бы затратить на сжатие газа до того же давления  $P_2$ , применяя одноступенчатый компрессор? Найти эту связь для гелия и воздуха, если  $P_0 = 1$  атм,  $P_2 = 200$  атм.

**О-1.70**

Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого  $C_P$  и  $C_V$  не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от объема  $V_0$  до промежуточного объема  $V_1$ . Затем сжатый газ при постоянном объеме  $V_1$  охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . После этого газ сжимается до объема  $V_2$ . При каком значении  $p$

**О-1.77**

В объеме  $V_0$  при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  содержится  $\nu$  молей водорода и  $\nu/2$  молей кислорода. Найти выражение для максимального давления  $P$  при той же температуре водяного пара, полученного при взрыве смеси, если молярная теплоемкость водяного пара  $C$ , а молярная теплота образования воды из кислорода и водорода  $Q$ .

**О-1.78**

Смесь газов с известным показателем адиабаты  $\gamma$  допускает нагрев только до максимальной температуры  $T_{\max}$ . Определить число ступеней сжатия  $n$ , необходимое для повышения давления от  $P_0$  до  $P_1$ , если каждое сжатие проводится адиабатически, и после каждой ступени газ охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . Определить также полную работу  $A$ , затраченную при таком сжатии. К чему стремится  $A$  при  $T_{\max} \rightarrow T_0$ ?

**О-1.79  $C_v$  горячего кислорода**

Определить удельную теплоемкость при постоянном объеме кислорода, нагретого до очень высокой температуры (порядка нескольких килоэлектрон-вольт).

**О-1.80(2 мин)  $c_P$  Смеси газов**

Подсчитать по классической теории удельную теплоемкость при постоянном давлении газа следующего молярного состава:

$$\text{He} - 20\%; \text{H}_2 - 30\%; \text{CH}_4 - 50\%.$$

(Молярный состав указывает отношение количества молей данного газа к общему количеству молей всей смеси газов.)

**Решение.** (???? по идее легко же должно быть???)

**О-1.81**

При некоторых условиях часть молекул водорода диссоциирована на атомы с коэффициентом диссоциации  $\alpha$  (отношение числа диссоциированных молекул к исходному числу). Найти молярную теплоемкость  $C_V$  этого газа при  $\alpha = 0,25$ . Молярные теплоемкости атомарного водорода  $C_{V1} = 2,94$  кал / ( моль  $\cdot$  °C), молекулярного водорода  $C_{V2} = 4,9$  кал / ( моль  $\cdot$  °C).

**О-1.82**

Давление водорода при температуре  $T = 350$  К составляет 1 Тор. Каково будет давление газа, если его при постоянном объеме нагреть до температуры 300 эВ? Потенциал ионизации атома водорода 13,6 эВ.

**О-1.83**

Какая часть  $\alpha$  молекул парообразного йода  $I_2$  диссоциирована на атомы при 600°С, если удельная теплоемкость  $c_P$ , измеренная при этой температуре, оказалась равной 0,14 Дж/(г К К)? Относительная атомная масса йода  $A = 126,9$ .

содержащей равное количество атомов дейтерия и трития. Она подвергается кратковременному (в течение времени  $\sim 10^{-11}$  с) всестороннему облучению светом лазера. При этом энергия, поглощенная дейтерием, составляет  $\mathcal{E} = 10^2$  Дж. Оценить температуру мишени и давление в ней сразу после вспышки лазера, предполагая, что вещество мишени еще не успело разлететься. Плотность мишени  $\rho = 0,2$  г/см<sup>3</sup>.

**О-1.91**

Для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в чистом дейтерии необходимо нагреть его до температуры  $T \approx 10^9$  К. Среди различных способов для достижения этого было предложено использовать излучение мощного лазера. Мишень из замороженного дейтерия, имеющая форму шарика, подвергается кратковременному (в течение времени  $\sim 10^{-11}$  с) всестороннему облучению светом лазера. За время облучения вещество мишени еще не успевает разлететься, что необходимо для возможности термоядерной реакции. Какова должна быть энергия  $\mathcal{E}$ , поглощаемая дейтериевым шариком с радиусом  $r = 5$  мкм, чтобы была достигнута необходимая температура? Плотность мишени  $\rho = 0,15$  г/см<sup>3</sup>.

**О-1.92**

Найти адиабатический модуль объемного сжатия идеального газа  $K_{ад} = -V(\partial P/\partial V)_{ад}$  и сравнить его с изотермическим модулем объемного сжатия  $K_T = -V(\partial P/\partial V)_T$ .

**О-1.93**

\* Доказать, что адиабатическая и изотермическая сжимаемости физически однородного и изотропного вещества связаны соотношением

$$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{ад} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T,$$

$\gamma = C_P/C_V$ . Показать, что это соотношение является следствием только первого начала термодинамики и функциональной зависимости между  $P, V$  и  $T$  (уравнения состояния).

**О-1.94**

Доказать, что для любого физически однородного тела имеет место соотношение

$$(C_P - C_V) \frac{\partial^2 T}{\partial P \partial V} + \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = 1.$$

Это соотношение справедливо для всякой эмпирически определенной температуры  $T$  и в принципе может служить для проверки первого начала термодинамики.

**О-1.97**

В предыдущей задаче после того, как установилось состояние равновесия, давление газа снова меняют скачкообразно до первоначального значения  $P_1$ . Вычислить окончательную температуру  $T_3$  и окончательный объем газа  $V_3$ , когда он опять придет в состояние термодинамического равновесия. Показать, что в результате обоих адиабатических процессов температура и объем газа всегда возрастают. Рассмотреть специальный случай, когда изменение давления  $P_2 - P_1$  мало. Определить для этого случая порядок малости изменений температуры  $T_3 - T_1$  и объема  $V_3 - V_1$ .

**О-1.98**

Газ находится в цилиндре с поршнем, нагруженным песком. Стенки цилиндра и поршень - адиабатические. Снимая песчинку за песчинкой, производят адиабатическое расширение газа. Затем газ адиабатически сжимают, возвращая на поршень последовательно по одной песчинке. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, показать, что в предельном случае, когда масса песчинки исчезающе мала, а их число бесконечно велико, газ в обратном процессе пройдет через ту же последовательность равновесных состояний, что и в прямом процессе.

**О-1.99**

По теплоизолированной трубке, разность давлений на концах которой равна 100 атм, течет вода. Температура воды на входе  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . На сколько градусов повысится ее температура на выходе? Сжимаемостью воды пренебречь.

**О-1.100**

Один моль идеального двухатомного газа квазистатически сжимается под поршнем таким образом, что в каждый момент времени количество теплоты, отводимое от газа, равно удвоенному изменению его внутренней энергии. Определить давление газа после того, как его объем изменится в два раза. Начальное давление газа равнялось  $P_1$ .

**О-1.101.**

При квазистатическом расширении одного моля идеального многоатомного газа к нему подводится количество теплоты, в каждый момент времени вдвое превышающее изменение внутренней энергии газа. Определить температуру газа после того, как его объем изменится в три раза. Начальная температура газа равнялась  $T_1$ .

**11.4 Задачи на скорость звука истечение газов (!!?)****О-2.1(2 мин) Скорость звука при нагревании**

Найти увеличение скорости звука в воздухе при нагревании последнего от 0 до  $1^\circ\text{C}$ .

**Решение** (???)

**О-2.2.(2 мин) Скорость звука в водороде (????)**

Скорость звука в воздухе при  $0^\circ\text{C}$  составляет 332м/с. Определить скорость звука в водороде при той же температуре. Молярную массу воздуха принять равной  $\mu = 28, 8\text{г/моль}$ .

**Решение** (???)

**О-2.3(2 мин)  $\gamma$  по скорости звука (???)**

Определить  $\gamma = C_P/C_V$ , если скорость звука в воздухе при температуре  $0^\circ\text{C}$  и нормальном давлении  $P = 76\text{см рт. ст.}$  равна  $v = 332\text{м/с}$  и плотность воздуха  $\rho = 0,001292\text{г/см}^3$ .

**Решение** (???)

**О-2.4**

Найти выражение для скорости звука в смеси  $v_1, v_2, v_3, \dots$  молей различных идеальных газов при температуре  $T$ .

**Решение** (???)

**О-2.5**

Вычислить скорость звука в кислороде при температуре  $T = 1\text{ КэВ}$ .

**Решение** (???)

### О-2.6

Измерением скорости звука в газе можно контролировать его чистоту. С какой относительной точностью  $\Delta v_z/v_s$  нужно измерить скорость звука в гелии, чтобы можно было заметить в нем примесь аргона ( $\mu = 40$  г/моль) в количестве 1% (по количеству молей)?

**Решение** (???)

### О-2.7

Две органннне трубы с одинаковой длиной продувают: одну воздухом при комнатной температуре  $T_0$ , а другую гелием. Какова должна быть температура гелия  $T$ , чтобы тоны второй трубы были на одну октаву выше соответствующих тонов первой (отношение частот равно 2). Считать известными показатели адиабат газов и их молярные массы.

**Решение** (???)

### О-2.8

Для дыхания акванавтов (исследователей морских глубин) употребляется смесь, состоящая из 95% гелия и 5% кислорода (по массе). Во сколько раз изменяются в такой атмосфере характерные частоты голоса акванавтов (по сравнению с обычными)? Считать известными показатели адиабат газов и их молярные массы.

**Решение** (???)

### О-2.9

Оценить скорость звука в снежной лавине, спускающейся по склону горы, считая, что плотность движущегося снега  $\rho = 0,25$  г/см<sup>3</sup>. Размеры кристалликов льда много меньше длины волны звука. Между кристалликами нет твердых связей, они разделены воздушными прослойками.

### О-2.10 Вытекание углекислого газа

Найти конечную температуру  $T_2$  и верхний предел скорости  $v$  стационарного потока углекислого газа  $\text{CO}_2$ , вытекающего через сопло в атмосферу из баллона, где он имел температуру  $T_1 = 300$  К и находился под давлением  $P_1 = 10$  атм, если давление наружного воздуха  $P_2 = 1$  атм. Показатель адиабаты для  $\text{CO}_2$  равен  $\gamma = 1,30$ , удельная теплоемкость  $c_P = 0,202$  кал / (г · °С).

### О-2.11

Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре  $T_1 = 273$  К, вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость  $v = 400$  м/с. Найти температуру вытекающего воздуха  $T_2$  в конце трубки, а также давление  $P_1$  воздуха в баллоне. Процесс истечения газа считать адиабатическим.

### О-2.12.

Найти конечную температуру  $T_2$  и верхний предел скорости  $v$  стационарного потока перегретого водяного пара, вытекающего через сопло в атмосферу из камеры, где он имел температуру  $T_1 = 600$  К и находился под давлением  $P_1 = 5$  атм, если давление наружного воздуха равно  $P_2 = 1$  атм. Перегретый пар считать идеальным газом с молярной теплоемкостью  $C_P = 4R$ .

### О-2.13

Допустим, что температура горения химического горючего для ракетных двигателей  $T = 3000$  К, средняя молярная масса продуктов горения  $\mu = 30$  г/моль и что истечение продуктов горения происходит в вакуум адиабатически. Найти, во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты  $M_0$  должна превышать ее конечную массу  $M$ , чтобы ракета могла достичь первой космической скорости  $v = 8$  км/с. Молярную теплоемкость продуктов горения ориентировочно принять равной  $C_P = 8$  кал / (моль · °С). При вычислении скорости ракеты силу тяжести и трение о воздух не учитывать.

**О-2.14 Течь в космическом корабле**

При полете космического аппарата, заполненного смесью равных по весу аммиака  $\text{NH}_3$  и гелия, образовалась течь. Какова скорость истечения газа через течь, если его температура  $T = 300\text{K}$ ?

**О-2.15 Падение температуры при разовом открытии отверстия**

Баллон с теплоизолированными стенками содержит 5 молей идеального газа ( $\gamma = 4/3$ ) под давлением много больше атмосферного при температуре  $T_0 = 300\text{K}$ . Открыв вентиль, 1 моль газа выпускают в атмосферу. Затем кран закрывают. Найти конечную температуру газа в баллоне.

Решение (??)

**О-2.16**

Два одинаковых баллона с теплоизолированными стенками отделены друг от друга краном. В баллоне 1 находится идеальный газ под давлением 20 атм. Баллон 2 откачан до форвакуума. Открыв кран, из первого баллона выпускают во второй баллон струю газа, затем перекрывают кран и после установления равновесия регистрируют во втором баллоне давление 320 мм рт. ст. Начальная температура газа в первом баллоне была 300K, показатель адиабаты  $\gamma = 1,3$ . Найти конечную концентрацию газа в баллоне 2.

**О-2.17**

Определить максимальную скорость, которой может достигнуть газ при адиабатическом истечении из баллона, если абсолютная температура газа в баллоне равна  $T$ .

**О-2.18**

Найти скорость адиабатического истечения идеального газа из сосуда через небольшое отверстие в вакуум, если известно, что скорость звука в газе равна  $v_z$ .

**О-2.19**

Тело (например, космический корабль) движется в идеальном газе со скоростью  $v$ . В какой точке на поверхности тела температура газа будет максимальной? Определить эту температуру, если температура окружающего газа равна  $T$ .

**О-2.20**

Оценить давление воздуха в точке у самого носа ракеты, летящей со скоростью, соответствующей числу Маха  $M = 1$ , если процесс сжатия воздуха адиабатическим, а скорость воздуха относительно ракеты в точке у самого ее носа равной нулю. Число Маха  $M = v_p/v_{zv}$

**О-2.21**

Оценить расстояние  $L$ , на котором еще будет слышен гром, если он образовался на высоте  $H = 4$  км. Температура атмосферы  $T$  линейно уменьшается с высотой  $T = T_0 - \gamma z$ , где температура воздуха на поверхности Земли  $T_0 = 300\text{K}$ ,  $\gamma = 10^{-2}\text{K/м}$ . Состав воздуха не зависит от высоты, и его можно считать идеальным газом. Рассеянием звука на атмосферных неоднородностях пренебречь, а источник грома считать точечным.

**О-2.23.**

Если в процессе адиабатического истечения через корфтовую трубку скорость газа достигает скорости звука, то в потоке могут возникнуть ударные волны. При каком отношении давлений на входе и выходе трубки такое возможно? Газ считать одноатомным, вязкостью пренебречь.

**О-2.24.**

Сосуд, заполненный азотом  $\text{N}_2$ , при постоянной температуре откачали до такого низкого давления, и в нем из-за диссоциации газа скорость звука возросла на 12%. Определить степень диссоциации азота  $\alpha$  (долю молекул, распавшихся на атомы).

(??? непонятная задача, почему после уменьшения давления диссоциация началась???)

**Решение.**

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{c_1}{c_2} = \left( \frac{\gamma_1 \mu_2 T_1}{\gamma_2 \mu_1 T_2} \right)^{1/2}.$$

### ???. Количество молей в сосуде

Откачанный до высокого вакуума теплоизолированный сосуд объемом  $V_0 = 22,4$  л находится в воздухе при нормальных условиях. Открывается вентиль  $n$  - после выравнивания давления - быстро закрывается. Какое количество молей воздуха окажется при этом в сосуде? Волновыми процессами в окружающем воздухе и теплообменом между окружающим воздухом и воздухом в сосуде пренебречь.

**Решение** Уравнение Пуассона (???) нельзя использовать, потому что нестационарный процесс. пишем первое начало с работой внешних сил.  
разность энергии легко посчитать как изменение энергии газа.  
теперь нужно посчитать работу внешних сил.  
(???)

## 11.5 Задачи на термодинамические циклы (???)

### О-3.3.9

Найти КПД обратимого цикла, изображенного на рис. 387, как функцию максимальной  $T_1$  и минимальной  $T_2$  температур вещества в этом цикле.

Цикл совершает машина с идеальным газом в качестве рабочего тела. Найти также количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла.

### О-3.10 цикл Отто (????)

Найти КПД обратимого теплового цикла Отто, состоящего из адиабат  $1-2, 3-4$  и изохор  $2-3, 4-1$  (рис. 388), если в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Выразить КПД цикла через температуры газа  $T_1$  и  $T_2$  в состояниях 1 и 2.

### О-3.11

Обратимый термодинамический цикл, выполняемый с молекулами идеального газа в качестве рабочего вещества, состоит из двух изотермических процессов  $1-2, 3-4$  и двух политропических процессов  $2-3, 4-1$  с теплоемкостью газа  $C_0$  (рис. 389). Найти работы, совершаемые газом, и количества получаемого им тепла на всех этапах цикла. Найти КПД тепловой машины, работающей по этому циклу.

### О-3.12

Определить КПД цикла, проходящего последовательно через состояния: 1)  $2P, V$ ; 2)  $2P, 8V$ ; 3)  $P, 4V$ ; 4)  $P, 2V$ . Газ идеальный одноатомный, все участки цикла - политропические.

### О-3.13.

Определить КПД цикла, проходящего последовательно через состояния: 1)  $8P, V$ ; 2)  $4P, 2V$ ; 3)  $2P, 2V$ ; 4)  $P, V$ . Газ идеальный одноатомный, все участки цикла - политропические.

### О-3.14(3 мин) Изобара, политропа, изобара, политропа

Моль одноатомного идеального газа, находящийся при давлении  $P_1$  и объеме  $V_1$ , изобарически сжимается до объема  $V_2 = V_1/4$  и затем по политропе переводится в состояние  $P_3 = 8P_1$  и  $V_3 = V_1/8$ . После этого происходит изобарическое расширение до объема  $V_4 = V_1/4$ . Далее газ по политропе возвращается в первоначальное состояние. Найти КПД цикла.

### О-3.15

Вычислить КПД цикла, состоящего из политропы  $1-2$  ( $P \propto V$ ), адиабаты  $2-3$  и изобары  $3-1$ , если в качестве рабочего вещества используется одноатомный идеальный газ, а отношение максимального давления в цикле к минимальному  $P_2/P_1 = 2$  (рис. 390).

### О-3.16

Реальный цикл двигателя внутреннего сгорания можно заменить идеальным замкнутым циклом, состоящим из двух изохор с



**О-3.17**

Найти КПД цикла (рис. 391), состоящего из политропы 1 – 2, изотермы 2-3 и изохоры 3 – 1. Отношение давлений  $P_1/P_2 = 8$ , а отношение объемов  $V_2/V_1 = 2$ . Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

**О-3.18**

Рабочий цикл двигателя внутреннего сгорания можно приближенно представить состоящим из адиабаты, изобары и изохоры. Определить расход горючего (в кг/ч) таким двигателем на киловатт полезной мощности (рис. 392). Известно, что  $V_2/V_1 = 8$ . Продукты горения можно считать идеальным газом с показателем адиабаты  $\gamma = 4/3$ . Теплотворная способность горючего  $4 \cdot 10^7$  Дж/кг.

**О-3.19**

Идеальный двухатомный газ совершает цикл, изображенный на рис. 393. Найти величину полной работы за цикл и вычислить КПД.

**О-3.20**

Холодильная машина с идеальным многоатомным газом в качестве рабочего вещества работает по циклу, состоящему из адиабатического расширения, изохорического нагрева и изотермического сжатия (рис. 394). Коэффициент сжатия 1 : 4. Определить, какое количество электроэнергии будет затрачено такой машиной для охлаждения одного литра воды от  $t_1 = 25^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 5^\circ\text{C}$ . Машину считать идеальной, и потерями за счет теплоподвода к холодильной камере пренебречь.

**О-3.21**

Термодинамическая система, рабочим веществом которой является двухатомный идеальный газ, совершает обратимый круговой процесс, изображенный на рис. 395.

Найти КПД этого цикла, если известно, что все процессы - политропические; в частности, 1-2 - изобара, 2-3 - изохора, а 4-1-изотерма.

**О-3.22**

Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой 100К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, переходит в состояние 2, совершая некоторую работу. Этот переход происходит без подвода и отдачи тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая его в состояние 1.

Сначала сжатие происходит в процессе 2-3, когда давление является линейной функцией объема, а затем в адиабатическом квазистатическом процессе 3 – 1. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в процессе 1 – 2, если при сжатии в процессах 2-3-1 над газом была совершена работа 1091 Дж. Известно, что  $T_2 = T_3$ ;  $V_2 = 2V_3$ .

**О-3.23. Изобара, политропа, изотерма**

Один моль идеального одноатомного газа, занимающего объем  $V_1$  при давлении  $P_1$ , расширяется при постоянном давлении до объема  $2V_1$ , потом сжимается в политропическом процессе до объема  $V_1/2$  и давления  $P_1/4$ , затем изотермически расширяется до исходного объема  $V_1$ . Цикл завершается повышением давления при постоянном объеме. Найти КПД цикла.

**О-3.24**

Идеальная тепловая машина работает по Холодильному циклу между резервуарами с кипящей водой ( $100^\circ\text{C}$ ) и тающим льдом ( $0^\circ\text{C}$ ). Чему равна затраченная работа, если в результате в горячем резервуаре 1 кг воды превратился в пар? Какое количество льда образовалось при этом в холодном резервуаре? В условиях постоянного давления, при котором поддерживаются резервуары, теплота парообразования воды  $\lambda = 2260$  кДж/кг, теплота плавления льда  $q = 335$  кДж/кг

**О-3.25**

Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит  $m_1 = 1$  кг воды при начальной температуре  $T_1 = 373\text{K}$ , а холодильником  $m_2 = 1$  кг льда при температуре  $T_2 = 273\text{K}$ , к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды в этот момент? Удельная теплота плавления льда  $q = 80$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**О-3.26**

Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит  $m_1 = 1$  кг насыщенного водяного пара при температуре  $T_1 = 373$  К, а холодильником  $m_2 = 10$  кг воды при начальной температуре  $T_2 = 273$  К к моменту, когда весь пар сконденсируется в воду.

Чему будет равна в этот момент температура воды в холодильнике? Удельная теплота парообразования для воды (при 373 К) равна  $\lambda = 539$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**О-3.27**

В идеальном холодильнике замораживается вода в ванночке, а тепло отдается воде в банке, масса воды  $M = 10$  кг, начальная температура  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Какая масса льда образуется в ванночке из воды с начальной температурой  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  за то время, пока вода в банке нагревается до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ? Теплоемкостью банки пренебречь. Удельная теплота плавления льда  $q = 80$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**О-3.28**

Один моль воды охлаждается от  $25^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$  и замерзает. Все выделившееся при этом тепло получено холодильной машиной, работающей по обратимому циклу, и передано другому молью воды, в результате чего его температура возросла от  $25^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$ . Определить, какое количество воды обратилось в пар и какую работу при этом совершила холодильная машина. Теплота испарения воды при  $100^\circ\text{C}$   $\lambda = 41$  кДж/моль, а теплота плавления льда при  $0^\circ\text{C}$   $q = 6$  кДж/моль. Теплоемкость воды считать не зависящей от температуры.

**О-3.29**

Постоянная температура  $18^\circ\text{C}$  в комнате поддерживается электронагревателем мощностью 500 Вт. Температура воздуха снаружи  $-21^\circ\text{C}$ . Для поддержания в комнате той же температуры можно использовать вместо электронагревателя тепловой насос (тепловая машина, работающая по холодильному циклу). Какую минимальную мощность будет потреблять от электросети тепловой насос, работающий с максимально возможной эффективностью?

**О-3.30**

Для поддержания в комнате постоянной температуры  $21^\circ\text{C}$  используется кондиционер; температура наружного воздуха  $42^\circ\text{C}$ . На сколько нужно увеличить мощность, потребляемую кондиционером из электросети, чтобы после включения в комнате электролампочки мощностью  $N = 150$  Вт температура не изменилась? Считать, что кондиционер работает с максимально возможной эффективностью.

**Решение** (???)

**О-3.33**

Имеются  $\nu$  молей льда при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  и окружающая среда при температуре  $T$ . Найти максимальную работу, которую может при этом совершить идеальная тепловая машина.

**Решение** (???)

**О-3.34**

Оценить, какую можно совершить работу, имея айсберг объема  $1 \text{ км}^3$  в качестве холодильника и океан в качестве нагревателя. Удельная теплота плавления льда  $q = 335$  кДж/кг, а его плотность  $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$ .

**Решение** (???)

**О-3.35**

Атмосфера Земли может рассматриваться как гигантская тепловая машина, в которой роль нагревателя и холодильника играют экваториальная зона и зоны полюсов, а источником энергии является солнечная радиация. Считая, что полный поток солнечной энергии, поступающей на Землю, равен  $1,7 \cdot 10^{17}$  Вт, а КПД рассматриваемой «машины» на порядок меньше максимально возможного, оценить среднюю мощность ветров в расчете на  $1 \text{ км}^2$  земной поверхности.

**Решение** (???)

**О-3.36**

Оценить максимальную мощность, которую можно получить от циклической установки, использующей термальную энергию океана в области, где скорость океанского течения  $u \approx 0,1 \text{ м/с}$ . Считать, что поверхностный слой толщиной  $h \approx 1 \text{ км}$  имеет избыточную температуру  $\Delta T \approx 20 \text{ К}$ . Ширина установки в направлении, перпендикулярном скорости течения,  $L \approx 1 \text{ км}$ .

**О-3.37**

Какую минимальную работу должен совершить двигатель идеального холодильника, чтобы, работая в среде, имеющей температуру  $T$ ,  $v$  молей воды охладить до  $t_0 = 0^\circ \text{С}$  и превратить в лед?

**О-3.38**

Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами с температурами  $T$  и  $T_1$ . Теплообмен между нагревателем с температурой  $T_2 = 1250 \text{ К}$  и рабочим веществом при  $T < T_2$  осуществляется вследствие теплопроводности по закону  $a(T_2 - T)$ , где  $a = 1 \text{ кВт/К}$ . Теплообмен рабочего вещества с холодильником совершается при температуре холодильника  $T_1 = 200 \text{ К}$ . Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы, найти температуру  $T$ , при которой мощность машины максимальна, и ее величину  $N_{\text{max}}$ .

**О-3.41**

Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и воспользовавшись теоремой Карно, доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость физически однородного и изотропного тела удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

С помощью этих соотношений и уравнения состояния для идеальных газов доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа зависят только от температуры, но не от объема, занимаемого данной массой газа.

**Решение** (???)

**О-3.42**

Энтальпией или тепловой функцией физически однородного и изотропного вещества называется функция состояния, определяемая выражением  $I = U + PV$ . Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и применив к нему теорему Карно, показать, что энтальпия  $I$  и теплоемкость  $C_P$  удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P.$$

**О-3.43**

С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура  $t_1 = -3^\circ \text{С}$  при температуре на улице  $t_2 = -23^\circ \text{С}$ . Предлагается использовать бензин в движке с КПД  $\eta = 0,4(40\%)$ , а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по холодильному циклу теплоту с улицы в комнату. Какой должна быть в этом случае температура в помещении  $t_x$ ? Движок находится вне помещения; расход бензина в нем такой же, как в горелке.

**О-3.44**

Бытовой холодильник при комнатной температуре  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  поддерживает температуру в камере равной  $t_2 = 7^\circ\text{C}$ . Считая холодильный агрегат идеальной машиной, работающей между комнатой и камерой холодильника, определить, какой будет температура в камере  $t_x$  при том же расходе электроэнергии, если температура в комнате снизится до  $t_3 = 20^\circ\text{C}$ .

**О-3.46**

В зимний день температура воздуха на улице, сначала равная  $-9^\circ\text{C}$ , понизилась еще на  $10^\circ\text{C}$ . Для обогрева комнаты используется тепловой насос, работающий между комнатой и улицей. Считая тепловой насос идеальной машиной, определить, во сколько раз при этом изменились затраты энергии для поддержания температуры в комнате, равной  $21^\circ\text{C}$ .

**О-3.47**

В летний день температура воздуха на улице, сначала равная  $26^\circ\text{C}$ , повысилась на  $5^\circ\text{C}$ . Считая кондиционер идеальной машиной (работающей между комнатой и улицей), определить, во сколько раз при этом изменились затраты энергии для поддержания температуры в комнате, равной  $21^\circ\text{C}$ .

**О-3.48 Холодильник с притоком тепла (???)**

В бытовом холодильнике поддерживается температура  $T_0 = 273\text{K}$ , а в комнате, где он установлен,  $T_1 = 295\text{K}$ . Из-за плохой теплоизоляции холодильника внутрь его из комнаты происходит приток тепла  $Q = 8 \cdot 10^6$  Дж/сут и чтобы поддерживать в холодильнике температуру  $273\text{K}$ , требуется непрерывно удалять данную теплоту  $Q$ . Найти мощность  $W$ , которая необходима для работы холодильника, полагая холодильник идеальной холодильной машиной Карно. Определить, сколько воды в сутки можно испарить в котле, если использовать холодильник как тепловой насос с такой же мощностью для перекачки теплоты из тепловой насос тел, имеющий температуру  $T_2 = 373\text{K}$ . Теплота испарения воды  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**О-3.49 Гольфстрим как нагреватель, айсберг как холодильник**

Айсберг массой  $m = 10^{10}$  кг, имеющий температуру  $T_0 = 273\text{K}$ , дрейфует в течении Гольфстрим, температура воды которого  $T_1 = 295\text{K}$ . Найти максимальную работу тепловой машины  $A_{\text{max}}$ , использующей Гольфстрим как нагреватель и айсберг как холодильник, за то время, когда весь айсберг растает. Определить, сколько воды можно испарить в котле за счет этой работы, если использовать ее в тепловом насосе для перекачки теплоты из течения Гольфстрим в котел с температурой  $T_2 = 373\text{K}$ . Теплота плавления льда  $q = 335$  Дж/г, теплота испарения воды  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**11.6 Задачи на энтропию Клаузиуса**

(тут не совсем на это, раскидаю потом!)

**О-4.1 Динамическое отопление**

Идея динамического отопления, высказанная В. Томсоном (1852 г.), заключается в следующем. Топливо сжигается в топке теплового двигателя, который приводит в действие холодильную машину. Холодильная машина отнимает теплоту от природного резервуара воды (например, от грунтовой воды) и отдает ее воде в отопительной системе. Одновременно вода в отопительной системе служит холодильником теплового двигателя. Определить теоретическое (без учета потерь) количество тепла, которое получает отапливаемое помещение от сжигания 1 кг каменного угля, приняв следующие условия: удельная теплота сгорания угля  $q = 8000$  ккал/кг; температура в котле паровой машины  $t_1 = 210^\circ\text{C}$ ; температура воды в отопительной системе  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ ; температура грунтовой воды  $t_3 = 15^\circ\text{C}$

**Решение** (???)

**О-4.2**

Внешнее давление, действующее на воду, увеличивают, одновременно подводя или отводя тепло таким образом, что объем воды остается неизменным. Нагреется или охладится вода, если начальная температура была: 1) ниже  $4^\circ\text{C}$ ; 2) выше  $4^\circ\text{C}$ ?

**Решение** (???)

**О-4.3\*.**

Тепловая машина совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с несколькими тепловыми резервуарами (нагревателями и холодильниками). Пользуясь неравенством Клаузиуса, показать, (???)

**Решение** (???)

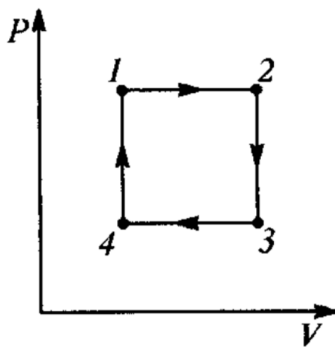
**О-4.4!(1.5 мин) Цикл Карно в  $T(S)$** 

В качестве основных переменных, характеризующих состояние тела, можно принять его температуру и энтропию. Изобразить графически цикл Карно на диаграмме, откладывая по оси абсцисс энтропию, а по оси ординат температуру. Вычислить с помощью этого графика КПД цикла.

**Решение.** Цикл Карно - прямоугольник, а работа - площадь прямоугольника. (??? почему???)  
Задача самой типичной термодинамики циклов.

**О-4.5(1.5 мин) Простейший цикл**

Цикл состоит из двух изохор и двух изобар:



Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$  температуры в точках 1, 2, 3, 4 связаны соотношением  $T_1 T_3 = T_2 T_4$ .

**Решение** Из  $\delta S = \frac{\delta Q}{T}$

$$\int_1^2 C_p \frac{dT}{T} + \int_2^3 C_V \frac{dT}{T} + \int_3^4 C_p \frac{dT}{T} + \int_4^1 C_V \frac{dT}{T} = 0$$

Интегрируя, находим  $(C_p - C_V) \ln \frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} = 0$ , откуда

$$\frac{T_2 T_4}{T_1 T_3} = 1$$

**О-4.6**

Цикл состоит из изобары 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1 (рис. 399). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$  температуры в точках 1, 2, 3 связаны соотношением  $T_2/T_3 = (T_2/T_1)^\gamma$ , где  $\gamma = C_P/C_V$ .

**О-4.7**

Определить работу цикла, совершаемого любым веществом и состоящего из изотермы 1–2, политропы 2–3 и адиабаты 3–1 (рис. 400). Известно, что теплоемкость тела на политропе 2–3 равна  $C$ , а температуры на изотерме 1–2 и в состоянии 3 равны соответственно  $T_1$  и  $T_3$ .

**О-4.8(МФТИ-вступ-маг-2023.2)(1.5 мин) Треугольник в  $T(S)$** 

Тепловые машины с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершают обратимые термодинамические циклы имеют вид: Выразить КПД этих циклов через максимальную  $T_1$  и минимальную  $T_2$  температуры газа.

**Решение.** Мы знаем, что если бы был квадрат, то площадь его была равна подводимой теплоте в цикле Карно. Тут же оно в два раза меньше, поэтому КПД в два раза меньше, чем у цикла Карно:

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

#### О-4.9

Цикл состоит из двух изотерм 1–2, 3–4 с температурами  $T_1$  и  $T_2$  и двух изохор 2–3, 4–1 (рис. 403). На изотерме с температурой  $T_1$  получено тепло  $Q_1$ . Определить работу цикла, если теплоемкость рабочего вещества  $C_V$  зависит только от его температуры, но не зависит от объема.

#### О-4.10

Обратимый цикл состоит из изотермического расширения, изобарического сжатия и адиабатического сжатия (рис. 404). Определить КПД, если отношение максимальной и минимальной температур равно  $\alpha$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что внутренняя энергия зависит только от температуры. Теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  – постоянные величины.

#### О-4.11

Термодинамическая система с произвольным веществом совершает круговой процесс, состоящий из изотермического расширения при температуре  $T_1$ , изобарического сжатия и адиабатического сжатия. Температура в точке, где пересекаются изобара и адиабата, равна  $T_2$ . Теплоемкость системы  $C_P$  на изобаре постоянна. Вычислить работу  $A$ , совершаемую системой в этом цикле.

#### О-4.12

Термодинамическая система с произвольным веществом совершает круговой процесс, состоящий из политроп 2–3 и 3–1 и адиабаты 1–2 (рис. 405). Теплоемкости системы  $C_1$  и  $C_2$  на политропах связаны соотношением  $C_2 = -C_1$ , температуры в точках пересечения политроп с адиабатой равны  $T_1$  и  $T_2$ . Вычислить работу  $A$ , которую совершает система в указанном круговом процессе.

#### О-4.13

Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 двумя способами. В первом варианте система адиабатически охлаждается до температуры  $T_0$ , затем изотермически получает тепло и, наконец, адиабатически переходит в состояние 2. Во втором варианте переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается выше  $T_0$ . Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния 1 в состояние 2 требуются меньшие затраты тепла, чем во втором.

#### О-4.14.

Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 двумя способами. В первом случае система сначала изотермически при температуре  $T_0$  переходит в какое-то промежуточное состояние, поглощая при этом тепло, а затем адиабатически охлаждается, переходя в состояние 2. Во втором случае переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается ниже  $T_0$ . Нокасостояние 2 требуются большие затраты тепла, чем во втором.

#### О-4.15

Обратимый цикл состоит из последовательных процессов адиабатического расширения, изобарического сжатия и изохорического нагревания. Определить КПД, если максимальное изменение энтропии рабочего вещества в цикле в единицах  $C_V$  равно  $b = \Delta S_{\max}/C_V = 0,2$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что теплоемкости  $C_P$  и  $C_V$  постоянны, причем  $\gamma = C_P/C_V = 4/3$

#### О-4.16

Обратимый цикл состоит из последовательных процессов изотермического расширения, изобарического сжатия и изохорического нагревания. Определить КПД, если отношение максимальной и минимальной температур рабочего вещества в цикле  $a = 1,1$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  постоянны, причем  $\gamma = C_P/C_V = 4/3$ .

## О-4.17

Обратимый цикл тепловой машины с произвольным рабочим веществом состоит из политропического нагревания, политропического охлаждения (оба процесса происходят с увеличением энтропии) и замыкается изотермой. Определить КПД цикла, если отношение максимальной и минимальной абсолютных температур в цикле равно  $a = 1,2$ .

## О-4.18

Положительный обратимый цикл с произвольным рабочим веществом состоит из адиабаты, политропического охлаждения и замыкается другой политропой. Определить КПД цикла, если абсолютные температуры на концах адиабаты и в точке пересечения политроп относятся соответственно как  $1 : 2 : 1,5$ .

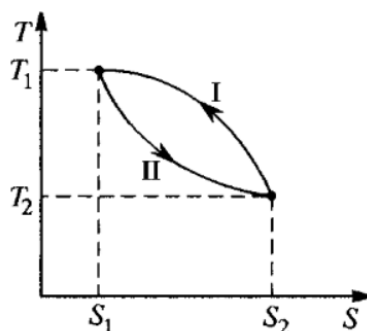
## О-4.21. (????)

Обратимый круговой процесс превращения теплоты в работу состоит из процесса  $1-2$ , в котором теплоемкость растет прямо пропорционально температуре от значения  $C_1 = 20 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$  до  $C_2 = 50 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$ , а также адиабаты  $2-3$  и изотермы  $3-1$ . Вычислить КПД этого цикла. Уравнение состояния рабочего вещества не задано.

**Решение.**

## О-4.19

Холодильная машина работает по обратимому циклу, состоящему из двух ветвей (рис. 406):



процесса I, в котором энтропия уменьшается с ростом температуры как линейная функция квадрата абсолютной температуры и политропы II. Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно. Определить количество тепла, отобранное из холодильной камеры при затраченной работе  $1 \text{ кДж}$ , если отношение максимальной и минимальной абсолютных температур рабочего вещества в цикле  $a = 1,2$ .

## О-4.26

Найти КПД цикла, изображенного на рис. 410. Все процессы политропические;  $T_2 = 2T_1$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано.

## 11.7 Задачи на статистический смысл энтропии

(вроде выше про это были задачи)

## О-4.27

Доказать, что если во всех точках изотермы температурный коэффициент расширения равен нулю, то такая изотерма совпадает с адиабатой.

## О-4.28

В цикле Карно в качестве холодильника выбрана вода при  $4^\circ\text{C}$ . Так как температурный коэффициент расширения при этой температуре равен нулю, то для осуществления цикла Карно не надо сообщать тепла холодильнику (см. предыдущую задачу), т. е. КПД цикла равен единице. В чем ошибочность этого рассуждения?

**О-4.29**

Тепловая машина работает по холодильному циклу между резервуаром с водой при  $11^\circ\text{C}$  и холодильной камерой при температуре  $-10^\circ\text{C}$ . Какое максимальное количество теплоты может быть унесено из холодильной камеры, если затраченная работа равна  $1\text{ кДж}$ ? Как изменится при этом энтропия резервуара и холодильной камеры?

**О-4.30**

Показать, что для любого вещества адиабата может пересекать изотерму не более чем в одной точке.

**О-4.31 Пересечение политроп**

Показать, что для вещества с произвольным уравнением состояния две политропы могут пересекаться только в одной точке.

**О-4.32\*. Максимальная работа (???????)**

Какую максимальную работу можно получить из системы двух тел, нагретых до разных абсолютных температур  $T_{10}$  и  $T_{20}$  ( $T_{10} > T_{20}$ ), если эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине? Теплоемкости тел  $C_1$  и  $C_2$  считать не зависящими от температуры. Найти окончательную температуру  $T$ , которую будут иметь тела, когда установится тепловое равновесие между ними.

**О-4.33**

Пусть есть система двух тел, нагретых до разных абсолютных температур  $T_{10}$  и  $T_{20}$  ( $T_{10} > T_{20}$ ), если эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине. Теплоемкости тел  $C_1$  и  $C_2$  считать не зависящими от температуры. Найти окончательную температуру  $T$ , которую будут иметь тела, когда установится тепловое равновесие между ними. Рассмотреть предельный случай, когда теплоемкость холодильника  $C_2$  бесконечно велика (нагретое тело, погруженное в бесконечную среду, температура которой  $T_{20}$  поддерживается постоянной).

**О-4.34**

Рассмотреть другой предельный случай задачи 4.2, когда бесконечно велика теплоемкость нагревателя  $C_1$  (холодное тело, погруженное в более теплую бесконечную среду, температура которой  $T_{10}$  поддерживается постоянной).

**О-4.35**

До какой максимальной температуры можно нагреть одно из трех одинаковых массивных несжимаемых свободных тел, находящихся первоначально при температурах  $T_{10} = 600\text{K}$ ,  $T_{20} = 200\text{K}$ , и  $T_{30} = 600\text{K}$ . Считать, что теплообмен с внешней средой отсутствует и имеется возможность осуществлять теплообмен между телами любым физически реализуемым способом.

**О-4.36**

В теплоизолированном сосуде постоянного объема находится  $1\text{ моль}$  воздуха при  $T_0 = 300\text{K}$ . Найти минимальную работу, необходимую для охлаждения половины массы этого воздуха до  $T_1 = T_0/2$ . Воздух считать идеальным газом, теплоемкость стенок не учитывать. Тепло, любым способом отводимое от одной половины газа, может передаваться только второй половине.

**О-4.37**

Два цилиндра, заполненных одинаковым идеальным газом, сообщаются с помощью узкой трубки; оба они закрыты поршнями, которые поддерживают в газе постоянное давление  $3\text{ атм}$  (рис. 411).

Первоначально цилиндры разделены, причем значения объемов и температур равны  $V_1 = 1\text{ л}$ ,  $V_2 = 2\text{ л}$ ,  $T_1 = 300\text{K}$ ,  $T_2 = 600\text{K}$ . После соединения цилиндров происходит выравнивание температур. Найти конечную температуру, совершаемую работу и изменение энтропии. Газ - идеальный двухатомный, процесс адиабатический.

**О-4.40**

Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном цилиндре. Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. Насколько возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу, после установления нового равновесного состояния?



**О-4.41**

При некотором политропическом процессе давление и объем определенной массы кислорода меняются от  $P_1 = 4$  атм и  $V_1 = 1$  л до  $P_2 = 1$  атм и  $V_2 = 2$  л. Температура в начале процесса  $T_1 = 500$  К. Какое количество тепла получил кислород от окружающей среды? Насколько изменились энтропия и внутренняя энергия газа?

**О-4.42**

Два баллона с объемами  $V = 1$  л каждый соединены трубкой с краном. В одном из них находится водород при давлении 1 атм и температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , в другом - гелий при давлении 3 атм и температуре  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ . Найти изменение энтропии системы  $\Delta S$  после открытия крана и достижения равновесного состояния. Стенки баллона и трубки обеспечивают полную теплоизоляцию газов от окружающей среды.

**О-4.43**

В объеме  $V_1 = 3$  л находится  $\nu_1 = 0,5$  моль кислорода  $O_2$ , а в объеме  $V_2 = 2$  л  $\nu_2 = 0,5$  моль азота  $N_2$  при температуре  $T = 300$  К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена за счет изотермического смешения этих газов в суммарном объеме  $V_1 + V_2$ .

**О-4.44.**

Решить предыдущую задачу в предположении, что смешивание газов производится адиабатически. Начальная температура газов  $T_1 = 300$  К.

**О-4.49**

В расположенном вертикально теплоизолированном цилиндре сечения  $\sigma$  имеется теплопроводящий поршень массой  $m$ , закрепленный так, что он делит цилиндр на две равные части. В каждой из них содержится  $\nu$  молей одного и того же идеального газа при давлении  $P$  и температуре  $T$ . Крепление поршня удаляется, и под действием силы тяжести он опускается. Определить изменение энтропии системы  $\Delta S$  к моменту установления равновесия. Считать, что  $P\sigma \gg mg$ .

**О-4.50**

Для измерения отношения  $C_P/C_V$  методом Клемана-Дезорма в некоторый объем помещают 1 моль воздуха под повышенным давлением  $P_1$ ; далее, путем быстрого кратковременного открывания клапана выпускают избыток газа, так что давление в объеме сравнивается с атмосферным  $P_0$ , и измеряют давление  $P_2$ , которое установилось в объеме после уравнивания температуры оставшегося газа с температурой окружающей среды. Определить полное изменение энтропии моли.

**О-4.51**

В теплоизолированном от внешней среды цилиндре с поршнем общим количеством твердого вещества, равным одному молю, находится 8 г гелия при температуре  $T_1 = 200$  К. Поршнем медленно сжимают газ до объема  $V_2 = V_1/8$ , так что все время температура стенок и газа одинаковы. Найти конечную температуру и изменение энтропии системы.

**11.8 Задачи на обратимость процессов****О-4.60**

Найти изменение энтропии  $\Delta S$  30 льда при превращении его в пар, если начальная температура льда  $-40^\circ\text{C}$ , а температура пара  $100^\circ\text{C}$ . Теплоемкости воды и льда считать постоянными, а все процессы - происходящими при атмосферном давлении. Удельная теплоемкость льда  $c = 0,5$  кал / (г  $\cdot^\circ\text{C}$ ).

**О-4.61**

Найти суммарное изменение энтропии  $\Delta S$  (воды и железа) при погружении  $m = 100$  г железа, нагретого до  $t = 300^\circ\text{C}$ , в воду при температуре  $t_0 = 14^\circ\text{C}$ . Удельная теплоемкость железа  $c = 0,11$  кал / (г  $\cdot^\circ\text{C}$ ). Считать, что воды так много, что ее температура практически не изменилась.

**О-4.62**

Найти удельную энтропию  $s$  неоднородной системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара. Теплоемкость жидкости считать не зависящей от температуры.

**О-4.63**

Два тела  $A$  и  $B$ , нагретые до разных температур, помещены в жесткую адиабатическую оболочку и приведены в тепловой контакт друг с другом. Тепло переходит от более нагретого тела  $A$  к менее нагретому телу  $B$ , пока температуры обоих тел не сравняются. Показать, что при этом процессе энтропия системы  $A + B$  увеличивается.

**О-4.64.**

Найти изменение энтропии  $\Delta S$  вещества при нагревании, если его удельная теплоемкость  $c$  постоянна, а коэффициент объемного расширения равен нулю.

**О-4.65**

Приводимые в тепловой контакт одинаковые массы вещества имеют разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ . Считая, что  $C_P = \text{const}$ , найти Приращение энтропии в результате установления теплового равновесия при  $P = \text{const}$ .

**О-4.66**

Найти изменение молярной энтропии одноатомного идеального газа при политропическом сжатии вдвое от первоначального объема, если в этом процессе приращение внутренней энергии равно половине работы сжатия, производимой над газом.

**О-4.57 Увеличение в процессе Гей-Люссака**

Найти увеличение энтропии  $\Delta S$  идеального газа массы  $M$  занимающего объем  $V_1$ , при расширении его в пустоту до объема  $V_2$  (процесс Гей-Люссака).

**О-4.58**

Найти изменения внутренней энергии и энтропии одного моля идеального газа при расширении по политропе  $PV^n = \text{const}$  от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов. Вычислить изменения этих величин для случая  $n = 3$ ,  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 3$  л,  $P_1 = 20$  атм. Чему равно при этом количество поглощенного тепла? Температура во время процесса такова, что для молярной теплоемкости можно принять  $C_V = 3R/2$ .

**О-4.75**

В теплонепроницаемом сосуде под подвижным поршнем находится один моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент времени давление на поршень мгновенно увеличивается в два раза. После установления теплового равновесия давление также мгновенно уменьшается в два раза, возвращаясь к первоначальному значению. Определить изменение энтропии  $\Delta S$  газа.

**О-4.76**

Один моль идеального двухатомного газа находится в вертикальном теплоизолированном цилиндре при температуре  $T_0 = 300\text{К}$ . Газ закрыт подвижным не проводящим тепло поршнем, который сначала удерживается от падения, так как его масса  $m$  в  $n = 3$  раза больше уравновешивающей давление газа  $P_0$  массы, т. е.  $mg = nP_0\sigma$  ( $\sigma$  - площадь поршня,  $g$  - ускорение свободного падения). Затем поршень отпускают, и он падает. После остановки его квазистатически поднимают на начальную высоту. Найти конечную температуру газа  $T_k$  и изменение энтропии  $\Delta S$ .

**О-4.77 Максимальная работа от двух газов (??????)**

Определить максимальную работу, которую можно получить от двух находящихся в адиабатической оболочке сосудов с одинаковыми одноатомными идеальными газами. Начальные давления и числа частиц  $N$  в сосудах одинаковы, но у них разные объемы и температуры  $T_1$  и  $T_2$ .

**О-4.78**

Идеальная тепловая машина работает между двумя тепловыми резервуарами, один из которых первоначально содержит массу  $m_1 = 1\text{кг}$  водяного пара при температуре  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ , а другой - массу  $m_2 = 4\text{ кг}$  льда при температуре  $t_2 = -25^\circ\text{C}$ . Машина перестает работать, когда в обоих сосудах оказывается вода при одинаковой конечной температуре. Определить эту конечную температуру  $t_x$  и полное количество полученной работы  $A$ . В сосудах поддерживается нормальное давление. Теплоемкость воды равна  $c_1 = 4,18\text{к Дж / (кг} \cdot \text{К)}$ , льда  $-c_2 = 2,09\text{к Дж / (кг} \cdot \text{К)}$ . Теплота испарения воды  $\lambda = 2,26 \cdot 10^3\text{ кДж/кг}$ , теплота плавления льда  $q = 335\text{ кДж/кг}$ .

**О-4.72**

Тепловая машина с одним молем идеального одноатомного газа в качестве рабочего тела совершает обратимый цикл, состоящий из процесса 1-2, график которого представляет собой в координатах  $(P, V)$  отрезок прямой линии, изобары 2-3 и изохоры 3-1 (рис. 416). Отношение  $V_2/V_1 = 3$ . Температура газа в состояниях 1 и 2 одинакова и равна  $T_1$ . Представить цикл в координатах  $(T, S)$  и определить максимальное изменение температуры  $\Delta T_{\max}$  и энтропии  $\Delta S_{\max}$  рабочего тела в течение цикла.

**О-4.73**

Вещество с неизвестным уравнением состояния совершает замкнутый цикл, в котором оно нагревается в процессе с теплоемкостью, изменяющейся пропорционально температуре, т. е.  $C_1 = \alpha T$ , а затем возвращается в исходное состояние, охлаждаясь в процессе с теплоемкостью  $C_2 = \beta \sqrt{T}$ . Минимальная температура вещества в цикле равна  $T_1$ . Определить КПД цикла  $\eta$ , если  $2\beta = 3\alpha\sqrt{T_1}$ . Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  положительны.

**О-4.81**

На спутнике Юпитера Европе атмосфера состоит из аммиака  $\text{NH}_3$ . Полагая  $\text{NH}_3$  идеальным газом и атмосферу адиабатической, определить ускорение свободного падения, если плотность атмосферы падает в  $n = 1,5$  раза на высоте  $H = 22$  км. Температура у поверхности спутника  $T_0 = 137\text{K}$ . Ускорение силы тяжести не зависит от высоты. порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии.

**О-4.82**

На Юпитере атмосфера состоит из молекулярного водорода  $\text{H}_2$ . Полагая водород идеальным газом и атмосферу адиабатической, определить ускорение свободного падения  $g$ , если на перепаде высоты  $H = 2,1$  км относительное изменение скорости звука  $\left| \frac{a-a_0}{a_0} \right| = 0,01$  ( $a_0$  - скорость звука на меньшей высоте). Температура на меньшей высоте  $T_0 = 180\text{K}$ . Считать, что ускорение свободного падения  $g$  не зависит от высоты. порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии.

**О-4.83**

Атмосфера планеты Марс состоит из углекислого газа  $\text{CO}_2$ . Считая углекислый газ идеальным и атмосферу адиабатической, оценить температуру у поверхности планеты  $T_0$ , если скорость звука, измеренная на высоте  $H = 9,8\text{km}$ , равна  $a = 240\text{м/с}$ . Ускорение свободного падения  $g = 3,72\text{м/с}^2$  и не зависит от высоты. Показатель, адиабаты  $\gamma = 1,3$ .

Ук а 3 а н и е. Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все времл остаются в механическом равновесии.

**11.9 Задачи на термодинамические потенциалы****О-5.1 Внутренняя энергия не зависит от объема**

Исходя из второго начала термодинамики, показать, что внутренняя энергия данной массы идеального газа не зависит от его объема, а является функцией только температуры (закон Джоуля).

**Решение** (???)

**О-5.2 Энтальпия не зависит от давления**

Исходя из второго начала термодинамики, показать, что энтальпия данной массы идеального газа не зависит от его давления, а является функцией только температуры.

**Решение** (???)

**О-5.3 Вещество с  $C_V \neq C_V(T)$  (???)**

Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость  $C_V$  которого не зависит от объема, а зависит только от температуры.

**Решение** (???)

### О-5.4 Вещество с $C_P \neq C_P(P)$ (???)

Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость  $C_P$  которого не зависит от давления, а зависит только от температуры.

**Решение** (???)

### О-5.5.

При  $25^\circ\text{C}$  объем одного моля воды ( в см<sup>3</sup> ) для давлений от 0 до 1000 атм определяется уравнением

$$V = a + bP + cP^2,$$

причем в этом интервале давлений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha + \beta P$$

где коэффициенты  $a = 18,066$ ,  $b = -7,15 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 4,6 \cdot 10^{-8}$ ,  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . Определить работу  $A$ , необходимую для сжатия моля воды от 0 до 1000 атм при  $25^\circ\text{C}$ , и найти приращение ее внутренней энергии  $\Delta U$ .

**Решение** (???)

### О-5.6 Работа не может быть полным дифференциалом

Пользуясь условием, что дифференциальное выражение  $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  есть полный дифференциал, доказать, что элементарная работа  $\delta A$  не может быть полным дифференциалом.

**Решение** (???)

### О-5.7 Аргументы внутренней энергии

Доказать, что если внутренняя энергия физически однородного тела не зависит от его объема, а зависит только от температуры, то она не зависит и от давления. То же справедливо и для энтальпии.

**Решение** (???)

### О-5.8

Как доказывается в термодинамике, необходимыми условиями стабильности физически однородного и изотропного вещества являются

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, C_V > 0$$

Используя их, показать, что для любого вещества  $C_P > 0$ , причем  $C_P > C_V$ .

**Решение** (???)

### О-5.9

Пользуясь методом термодинамических потенциалов, найти термодинамические производные

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T; \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T.$$

**Решение** (???)

### О-5.10

Доказать соотношение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

### О-5.11

Известно уравнение состояния физически однородного и изотропного вещества. Найти разность теплоемкостей  $C_P - C_V$  для этого вещества.

### О-5.12

Выразить разность удельных теплоемкостей  $c_P - c_V$  физически однородного и изотропного вещества через температурный коэффициент расширения  $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ , изотермический модуль всестороннего сжатия  $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  и плотность вещества  $\rho$ .

### О-5.13

Найти разность удельных теплоемкостей  $c_P - c_V$  для воды и ртути при  $t = 0^\circ\text{C}$  ( $T = 273,15\text{K}$ ). Для воды  $\alpha = -6,10 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$ ,  $K = 2 \cdot 10^9\text{H/м}^2$ ,  $\rho = 10^3\text{кг/м}^3$ . Для ртути  $c_P = 140\text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$ ,  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ ,  $K = 2,6 \cdot 10^{10}\text{H/м}^2$ ,  $\rho = 13,6\text{ кг/м}^3$ . В чем причина малой разности  $c_P - c_V$  для воды (см. задачу 5.12)?

### О-5.14

Физически однородное и изотропное вещество расширяется (или сжимается) адиабатически и квазистатически от давления  $P_1$  до давления  $P_2$ . Найти изменение его температуры  $T_2 - T_1$  в этом процессе.

### О-5.15

Воду, находящуюся при  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 100\text{ атм}$ , расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры воды в этом процессе, если коэффициент объемного расширения воды в этих условиях отрицателен:  $\alpha = -6,1 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ .

### О-5.16

Ртуть, находящуюся при  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 100\text{ атм}$ , расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры ртути в этом процессе, если коэффициент объемного расширения ртути в этих условиях положителен и равен  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4}^\circ\text{C}^{-1}$ , удельная теплоемкость ртути  $c_P = 0,033\text{ кал/(г} \cdot ^\circ\text{C)}$ , плотность  $\rho = 13,6\text{ г/см}^3$ .

### О-5.17

Железная проволока радиусом  $r = 1\text{ мм}$  квазистатически и адиабатически нагружается при температуре  $T = 273\text{K}$ . Начальное значение растягивающей силы равно нулю, конечное  $F = 10\text{H}$ . Определить изменение температуры проволоки  $\Delta T$ . Коэффициент

линейного расширения железа  $\alpha_n = 1,2 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ , удельная теплоемкость железа  $c = 0,44\text{ Дж/(г} \cdot ^\circ\text{C)}$ , плотность  $\rho = 7,9\text{ г/см}^3$ .

### О-5.18

Серебряная проволока диаметром  $d = 1\text{ мм}$  адиабатически нагружается при комнатной температуре силой  $F = 10\text{H}$ . Полагая, что удельная теплоемкость серебра  $c = 0,234\text{ Дж/(г} \cdot \text{K)}$ , плотность  $\rho = 10\text{ г/см}^3$ , а линейный коэффициент теплового расширения  $\alpha_n = 1,9 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$ , определить изменение температуры проволоки.

**О-5.19**

Изобарическое нагревание моля жидкости от  $27^\circ\text{C}$  до  $29^\circ\text{C}$  увеличивает ее объем на  $0,1\text{см}^3$ ; последующее изотермическое повышение давления на  $20\text{ кг/см}^2$  возвращает объем к исходному значению. По этим данным найти разность молярных теплоемкостей  $C_P - C_V$ , считая, что объем в указанных выше пределах линейно меняется с давлением и температурой. Найти также изменение энтропии с давлением и температурой. Найти также изм

**О-5.20**

При адиабатическом сжатии ртути на  $100\text{ атм}$  ее объем уменьшился на  $0,035\%$ . Вычислить по этим данным отношение теплоемкостей  $C_P/C_V$ , если изотермическая сжимаемость ртути  $\beta_T =$

**О-5.21**

Коэффициент объемного расширения воды при  $4^\circ\text{C}$  меняет знак, будучи при  $0^\circ\text{C} < t < 4^\circ\text{C}$  величиной отрицательной. Доказать, что в этом интервале температур вода при адиабатическом сжатии охлаждается, а не нагревается, подобно многим другим жидкостям и всем газам.

**О-5.22**

Килограмм ртути сжимают изотермически при температуре  $T = 300\text{K}$ , повышая давление от  $0$  до  $P = 10\text{ атм}$ . Найти работу  $A$ , совершенную над ртутью, и количество тепла  $Q$ , полученное ею, если изотермический коэффициент сжимаемости ртути  $\beta_T = 4 \cdot 10^{-6}\text{ атм}^{-1}$ , а коэффициент теплового расширения  $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6\text{г/см}^3$ .

**О-5.26**

Из измерений найдено, что натяжение резинового жгута определяется выражением  $\tau = A(l)T$ , где  $T$  - абсолютная температура, а функция  $A(l)$  зависит только от длины жгута ( $A > 0$ ). Показать, что внутренняя энергия такого жгута  $U$  не зависит от его длины, а энтропия при изотермическом увеличении длины уменьшается.

**О-5.27**

Некоторое количество воды, взятое при  $0,1^\circ\text{C}$ , помещено под пресс. Цилиндр прессы хорошо теплоизолирован. При сжатии этой воды оказалось, что ее объем уменьшился на  $0,5\%$ . Как изменилась температура воды? Известно, что изотермический коэффициент сжатия (сжимаемость) воды в данном температурном диапазоне  $\beta_T = 5 \cdot 10^{-10}\text{ Па}^{-1}$ , а коэффициент теплового расширения воды  $\alpha = -6 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$ .

**О-5.28**

При изотермическом сжатии ( $T = 293\text{K}$ ) одного моля глицерина от давления  $P_1 = 1\text{ атм}$  до давления  $P_2 = 11\text{ атм}$  выделяется теплота  $Q = 10\text{ Дж}$ . При адиабатическом сжатии этого глицерина же  $10\text{ атм}$  затрачивается работа  $A = 8,76\text{ мДж}$ . Плотность глицерина  $\rho = 1,1$ . Определить по этим данным температурный коэффициент давления глицерина  $(\partial P/\partial T)_V$ , а также коэффициент теплового расширения  $\alpha$  и изотермическую сжимаемость  $\beta_T$ .

**О-5.29**

Модуль Юнга некоторого твердого тела известным образом зависит от температуры:  $E = E(T)$ . Определить плотность энергии тела, обусловленной линейной деформацией  $\varepsilon = \Delta l/l$ . Считать, что изотермическая работа  $\varepsilon^2 E/2$  включает в себя как механическую, так и тепловую часть.

**О-5.30**

При изотермическом сжатии меди при температуре  $273\text{K}$  существует такое давление  $P_0$ , при котором работа, затраченная на увеличение давления на малую величину  $\Delta P \ll P_0$ , равна количеству теплоты, выделяющейся при этом сжатии. Определить давление  $P_0$ , если в диапазоне давлений  $[P_0, P_0 + \Delta P]$  температурный коэффициент объемного расширения  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$ , изотермический модуль объемного сжатия  $K = 1,3 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ .

**О-5.33**

Термодинамический потенциал  $\Phi$  одного моля некоторого вещества дается выражением  $\Phi = -\frac{RT}{2} \ln \frac{AT^5}{P^2}$ , где  $A$  - некоторая константа. Найти теплоемкость  $C_V$  этого вещества.

**О-5.34**

Уравнение состояния термодинамической системы имеет вид  $P = A(V)T^3$ . Найти  $\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T$  в точке  $P = 1$  атм,  $T = 300$ К.

**О-5.35**

Уравнение состояния термодинамической системы имеет вид  $P = A(V)T^3$ . Найти  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T$  в точке  $P = 1$  атм,  $T = 300$ К.

**О-5.36**

Давление электромагнитного излучения, пребывающего в тепловом равновесии с веществом, дается формулой:  $P = \alpha T^4$ , где  $\alpha$  - известная константа. Определить энергию такого излучения в заданном объеме  $V$ .

**Решение** (???)

**О-5.37**

Теплоизолированный сосуд разделен тонкой перегородкой на две равные части. В одной части при температуре  $T_0$  находится 1 моль идеального газа, другая откачана до высокого вакуума. Перегородку быстро убирают, и газ заполняет весь объем. Определить изменение свободной энергии газа после установления термодинамического равновесия.

**Решение** (???)

**О-5.38**

Один из методов получения очень низких температур основан на использовании зависимости термодинамических величин некоторых веществ (парамагнитных солей) от индукции магнитного поля  $B$ . В не слишком сильных полях свободная энергия соли имеет вид  $\Psi = \Psi_0 - \frac{\alpha}{T} B^2$ . Определить количество теплоты, поглощаемое солью при изотермическом размагничивании от поля  $B = B_0$  до поля  $B = 0$  при температуре  $T$ .

**Решение** (???)

**О-5.39**

Найти изменение энтропии равновесного теплового излучения абсолютно черного тела при расширении объема, занятого излучением, от  $V_1$  до  $V_2$ , при постоянной температуре  $T$ . Давление излучения  $P = \rho/3$ , где  $\rho$  [Дж/см<sup>3</sup>] - плотность энергии излучения.

**Решение** (???)

**О-5.43**

В условиях предыдущей задачи найти теплоемкость  $C_P$  и уравнение адиабаты фотонного газа.

**Решение** (???)

**О-5.44**

Давление насыщенного водяного пара при температуре  $17^\circ\text{C}$  равно  $0,02$  атм. Пар занимает объем  $10$  л. Найти изменение свободной энергии  $\Delta\Psi$  и энтропии  $\Delta S$  системы при изотермическом сжатии до объема  $5$  л. Пар можно считать идеальным газом. Теплота парообразования при этой температуре  $\lambda = 2460$  кДж/кг.

**Решение** (???)

**О-5.45**

Теплоемкость процесса, производимого над одним молем метана  $\text{CH}_4$  при давлении  $760$  Тор (температура  $0^\circ\text{C}$ ), оказалась равной  $-8,4$  Дж/(моль  $\cdot$  К). В результате процесса температура понизилась до  $-1^\circ\text{C}$ . Найти совершенную газом работу  $A$  и изменения: давления  $\Delta P$ , объема  $\Delta V$ , энтропии  $\Delta S$ , энтальпии  $\Delta I$ . Построить приблизительный график процесса (в виде прямолинейного отрезка) на диаграмме  $P, V$ . Метан можно считать идеальным газом.

**Решение** (???)

**О-5.46**

Согласно теории теплоемкостей Дебая, свободная энергия твердого тела при низких температурах выражается формулой

$$\Psi = U_0 - AT^4,$$

где  $U_0$  - внутренняя энергия тела при абсолютном нуле (нулевая энергия), а  $A$  - положительный коэффициент, зависящий только от объема  $V$ . Пользуясь этой формулой, показать, что при низких температурах отношение коэффициента объемного расширения тела  $\alpha$  к теплоемкости  $C_V$  не зависит от температуры (закон Грюнгейзена).

**Решение** (???)

**О-5.47**

В процессе Джоуля-Томсона энтальпия газа не изменяется. Пользуясь этим, найти общее термодинамическое выражение для изменения температуры в таком процессе (эффект Джоуля-Томсона).

**Решение** (???)

**О-5.48**

Показать, что для идеальных газов эффект Джоуля-Томсона не имеет места ( $\Delta T = 0$ ).

**Решение** (???)

**О-5.51**

Одним из геологических процессов является просачивание воды сквозь пористые породы из областей с высоким давлением  $P = 1000$  атм в полости, находящиеся при атмосферном давлении  $P_0$ . Оценить долю  $x$  испарившейся при этом воды, если начальная ее температура  $t_0 = 90^\circ\text{C}$ . Теплообменом с горными породами пренебречь, удельную теплоту парообразования  $\lambda$  принять равной  $2260$  Дж/г.

**Решение** (???)



**О-5.52**

Океанские течения не только переносят большие массы воды, но и производят их вертикальное перемешивание. Оценить изменение температуры воды  $\Delta T$ , если большая масса воды быстрым течением перенесена на глубину 1 км. Температура воды в океане  $12^\circ\text{C}$ , а величина температурного коэффициента расширения  $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$ . Оценить по этим данным изотермическую сжимаемость  $\beta_T$  океанской воды, если известно отношение  $C_P/C_V = \gamma = 1,01$  для воды.

**Решение** (???)

**О-5.53 Деформация стержня (!!!???)**

Уравнение состояния железного стержня имеет вид:  $f = E\sigma \left[ \frac{L}{L_0}(1 - \alpha T) - 1 \right]$ , где  $f$  - растягивающая сила,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па  $E$  - модуль Юнга,  $\sigma = \pi r^2$  - площадь поперечного сечения стержня,  $r = 1$  см - его радиус,  $L$  - длина образца,  $L_0 = 1$  м - его начальная длина,  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$  - коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  - температура. Состояние стержня проходит замкнутый цикл, состоящий из трех обратимых процессов: 1 - 2 - изотермического растяжения при  $T_1 = 300\text{K}$  от  $L_0$  до  $L = 1,01L_0$ ; 2-3 - охлаждения при  $L = \text{const}$ ; Изобразить цикл на  $(T, S)$ -диаграмме. Вычислить количество тепла, поглощенного и отданного стержнем при деформации. Теплоемкость всего стержня  $C_L = 1100$  Дж/К и не зависит от температуры и деформации.

**Решение** (???)

**О-5.55.**

В результате изотермического всестороннего сжатия двух одинаковых стальных кубиков величина их относительной деформации  $\varepsilon = \left| \frac{V - V_0}{V_0} \right|$  составила  $\varepsilon_1 = 0,001$  и  $\varepsilon_2 = 0,01$  соответственно. Найти, во сколько раз различаются отношения  $Q/W$  полученного количества теплоты  $Q$  к работе деформации  $W$  кубиков, если их температура одинакова. Полагать, что при сжатии давление пропорционально относительной деформации, а коэффициент объемного теплового расширения и модуль всестороннего сжатия постоянны.

**Решение** (???)

**О-5.56**

Два одинаковых упругих стержня изотермически растянули так, что их относительная деформация  $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$  составила  $\varepsilon_1 = 0,001$  и  $\varepsilon_2 = 0,01$  соответственно. Найти, во сколько раз различаются отношения  $Q/W$  полученного количества теплоты  $Q$  к работе деформации  $W$  стержней. Уравнение состояния стержней можно представить в виде  $\sigma = E \left[ \frac{l}{l_0}(1 - \alpha T) - 1 \right]$ , где  $\sigma$  - напряжение,  $E$  - модуль Юнга,  $\alpha$  - коэффициент линейного теплового расширения,  $\alpha T \ll 1$ . Считать, что температура  $T$  стержней одинакова.

**О-5.57**

Тепловое расширение кристалла можно рассматривать на основе простой модели взаимодействия двух атомов, расположенных по соседству. Оценить величину  $\alpha$  коэффициента линейного теплового расширения кристалла, предположив, что потенциальная энергия взаимодействия соседних атомов имеет вид:

$$V(r) = A(e^{-2a\varepsilon} - 2e^{-a\varepsilon})$$

где  $\varepsilon = (r - d)/d$  ( $d$  - период решетки),  $a = 1,5$ ,  $A = 3$  эВ.

**О-5.58**

Тепловое расширение кристалла можно рассматривать на основе простой модели взаимодействия двух атомов, расположенных по соседству. Оценить величину  $\alpha$  коэффициента линейного теплового расширения кристалла, предположив, что потенциальная энергия взаимодействия соседних атомов имеет вид:

$$V(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^9},$$

где  $A$  и  $B$  - некоторые константы. Считать, что период решетки  $d = 2,8 \cdot 10^{-8}$  см, а постоянная  $A = 1,4 \cdot 10^{-7}$  В· см.

### О-5.59

В некотором диапазоне температур  $T$  и объемов  $V$  свободная энергия  $\Psi$  изучаемой системы описывается соотношением  $\Psi = AT(1 - \ln T) - RT \ln V - TS_0$ , где  $A$  и  $S_0$  - константы. Что это за вещество? Выяснить физический смысл константы  $A$ .

### О-5.60

В некотором диапазоне температур  $T$  и давлений  $P$  термодинамический потенциал  $\Phi$  изучаемой системы описывается соотношением  $\Phi = AT(1 - \ln T) + RT \ln P - TS_0$ , где  $A$  и  $S_0$  - константы. Что это за вещество? Выяснить физический смысл константы  $A$ .

### О-5.61 Особая материя (??????)

Для некоторой материи свободная энергия  $\Psi$  и энтропия  $S$ , нормированные определенным выбором начала отсчета, связаны соотношением  $\Psi = -TS/4$ . Найти выражение для энтропии и уравнение состояния для этой материи через объем  $V$  и температуру  $T$ , если известно, что ее внутренняя энергия пропорциональна занимаемому объему. Что это за материя?

### О-5.62 Еще особая материя (????)

Для некоторой материи термодинамический потенциал Гиббса  $\Phi$  тождественно равен нулю, а ее энтропия, нормированная определенным выбором начала отсчета, равна  $S = 4PV/T$  (здесь  $P, V, T$  - давление, температура и объем определенного количества этой материи соответственно). Найти выражение для внутренней энергии и уравнение состояния для этой материи. Что это за материя?

### О-5.63

При адиабатическом сжатии серебра на  $\Delta V/V = 0,01$  его температура возрастает на  $\Delta T/T = 0,028$ . Определить коэффициент изотермической сжимаемости  $\beta_T$  серебра, если температурный коэффициент объемного расширения  $\alpha \mp 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , удельная теплоемкость серебра  $c_V = 0,23 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{K})$ , плотность  $\rho = 10,5 \text{ г}/\text{см}^3$ .

### О-5.64 Сжатие глицерина (!?!?!?!?!?!?!?!?!?!?)

Определить относительное изменение температуры глицерина  $\Delta T/T$  при адиабатическом его сжатии на  $\Delta V/V = 0,01$ , если скорость звука в глицерине  $u = 1895 \text{ м}/\text{с}$ , температурный коэффициент объемного расширения глицерина  $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , теплоемкость  $C_P = 217 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$ , молярная масса  $\mu = 92 \text{ г}/\text{моль}$ .

### О-5.65

Вещество с неизвестным уравнением состояния совершает замкнутый положительный цикл, в котором сначала оно нагревается от температуры  $T_1 = 200 \text{ K}$  до  $T_2 = 400 \text{ K}$  в процессе с теплоемкостью, возрастающей пропорционально температуре, потом охлаждается в адиабатическом процессе до некоторой температуры, и затем возвращается в исходное состояние по политропе. Определить теплоемкость этой политропы, если КПД цикла  $\eta = 1/3$ .

### О-5.68

Согласно одной из моделей строения Венеры ядро состоит из двух составляющих: внутреннего твердого и внешнего жидкого. Внутреннее ядро представляет шар с центром в центре планеты. В жидком ядре перемешивание происходит очень быстро по сравнению с геофизическими процессами. Внешнее ядро окружено сферической оболочкой - мантией. Температура на границе внутреннего и внешнего ядер  $T_1 = 3500 \text{ K}$ . Оценить величину расстояния  $L$ , при котором температура жидкого ядра изменяется на  $150 \text{ K}$ . Принять, что для вещества жидкого ядра коэффициент объемного теплового расширения  $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ , удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_P = 0,47 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{град})$ . Принять среднее значение ускорения силы тяжести в пределах жидкого ядра равным  $g = 9,0 \text{ м}/\text{с}^2$ .

### О-5.69

Вычислить скорость звука в воде, если ее изотермическая

**О-5.70**

Под действием внешних звуковых волн в воде рождаются пузырьки из растворенного в ней воздуха радиусом  $r = 10$  мкм с концентрацией  $n = 10^6 \text{ см}^{-3}$ . Найти скорость звука  $v_z$  в воде с пузырьками, если в воде при  $t = 20^\circ\text{C}$  она равна  $v_{z0} = 1483 \text{ м/с}$ .

**О-5.71**

При  $20^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм плотность воды равна  $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$ , температурный коэффициент давления воды  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 3,6 \cdot 10^5 \text{ Па/К}$ , коэффициент ее объемного расширения  $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ , а отношение теплоемкостей  $C_P/C_V = 1,1$ . Определить по этим данным скорость звука в воде при этой температуре.

**О-5.72**

Работа при изотермическом сжатии 1 кг ртути от давления 1 атм до давления 11 атм равна  $A_T = 1,86 \text{ МДж}$ . Скорость звука в ртути при той же температуре равна  $v_z = 1451 \text{ м/с}$ . Полагая, что плотность ртути равна  $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$ , определить отношение  $\gamma = C_P/C_V$ .

**Решение** (???)

**О-5.75.**

Термодинамический потенциал Гиббса некоторой системы задается выражением  $\Phi(P, T) = aT(1 - \ln T) + RT \ln P - TS_0 + U_0$ , где  $a, R, S_0, U_0$  - постоянные. Выразить внутреннюю энергию  $U$  и энтальпию  $H$  как функции объема  $V$  и температуры  $T$  и определить физический смысл константы  $a$ .

**Решение** (???)

**О-5.76**

Свободная энергия некоторой системы задается выражением  $\Psi(V, T) = -cT \ln T + fT - \frac{a}{V} - RT \ln(V - b) + \Psi_0$ , где  $a, b, c, f, \Psi_0$  - постоянные. Выразить внутреннюю энергию  $U$  как функцию объема  $V$  и температуры и определить физический смысл констант  $a, b, c$ .

**Решение** (???)

**11.10 Задачи на реальные газы и газ Ван-дер-Ваальса****О-6.1 Критическая точка газа Ван-дер-Ваальса**

Найти выражение для давления, температуры и объема газа Ван-дер-Ваальса в критической точке и установить связь между этими величинами.

**Решение** (???)

**О-6.2**

Записать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных параметрах

$$\tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}, \quad \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}, \quad \varphi = \frac{V}{V_{\text{кр}}},$$

когда за единицы приняты критическая температура, критическое давление и критический объем моля газа.

**Решение**

**О-6.3**

Критическая температура углекислоты ( $\text{CO}_2$ ) равна  $31^\circ\text{C}$ , критическое давление 73 атм. Определить критический объем  $V_{\text{кр}}$  для  $\text{CO}_2$ .

**Решение** (???)

**О-6.4**

Найти постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса для азота, если (??)

**О-6.5 Критическая плотность воды**

Найти критическую плотность воды, если критическое давление для воды равно  $P_{\text{кр}} = 218,3$  атм, а критическая температура  $T_{\text{кр}} = 647,3\text{K}$ , предполагая, что вода подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

**Solution** (по идее нужно просто подставить в ур ВдВ, там подумать про его решение только)

**О-6.6. внутреннее давление**

Принимая постоянной  $a$  Ван-дер-Ваальса для воды равной  $5,45 \cdot 10^6$  атм  $\cdot \text{см}^6 / \text{моль}^2$ , найти внутреннее давление воды  $P$ .

**Solution** (в ур ВдВ еще второй есть параметр, что с ним делать??)

**О-6.7 уравнения Дитеричи**

Было предложено много эмпирических и полуэмпирических уравнений состояния реальных газов. Найти критические параметры  $P_{\text{кр}}$ ,  $V_{\text{кр}}$ ,  $T_{\text{кр}}$ , а также значения критического коэффициента  $s = \frac{RT_{\text{кр}}}{P_{\text{кр}}V_{\text{кр}}}$  для двух уравнений Дитеричи: первое:  $P(V-b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$ ; второе:  $\left(P + \frac{a}{V^{5/3}}\right)(V-b) = RT$ , где  $a$  и  $b$  - постоянные.

**Решение** (???)

**О-6.8**

Критические температура, давление и плотность водорода равны  $T_{\text{кр}} = 33,24\text{K}$ ,  $P_{\text{кр}} = 12,8$  атм,  $\rho_{\text{кр}} = 0,0310\text{г/см}^3$ . Пользуясь этими данными и предполагая, что водород подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти его молярную массу  $\mu$ .

**Решение** (???)

**О-6.9**

Атмосфера Венеры почти целиком состоит из  $\text{CO}_2$ . Найти давление на поверхности планеты, если плотность газа  $\rho = 0,07\text{г/см}^3$  и его температура  $T = 750\text{K}$ . Газ считать ван-дерваальсовским с критическими параметрами  $P_{\text{кр}} = 73,9$  атм,  $V_{\text{кр}} = 94\text{см}^3 / \text{моль}$  и  $T_{\text{кр}} = 304\text{K}$ . Провести сравнение с давлением идеального газа при тех же условиях.

**Решение** (???)

**О-6.10**

Найти выражение для изотермической сжимаемости  $\beta_T$  газа Ван-дер-Ваальса.

**Решение** (???)

**О-6.11**

Найти температурный коэффициент расширения  $\alpha$  для газа Ван-дер-Ваальса при постоянном давлении.

**О-6.12\*.**

На рис. 418 кривая CLMGD представляет одну из реальных изотерм вещества, а штриховая кривая  $ALKGB$  отделяет область однофазного состояния вещества от однофазного состояния вещества от области двухфазного. Показать, что в состоянии, изображаемом точкой  $M$ , массы жидкой и газообразной фаз относятся как  $m_{ж}/m_{г} = MG/LM$  правило рычага).

(! рисунок добавлю!!)

**О-6.13**

Чему равна теплоемкость  $C_P$  вещества в двухфазном состоянии, изображаемом точкой под кривой  $ALKGB$  (рис. 418)?

**О-6.14\*.**

Найти распределение плотности в поле силы тяжести физически однородного вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, в окрестности критической точки.

**Решение** (???)

**О-6.15**

Как впервые было указано А.Г. Столетовым (1892 г.), для приведения жидкости, заключенной в данный объем, в критическое - состояние должно быть взято вполне определенное ее количество. Рассмотреть следующий пример. Сосуд, объем которого  $V_1 = 15\text{см}^3$ , должен быть наполнен водой при температуре  $t_1 = 18^\circ\text{C}$  с таким расчетом, чтобы при нагревании ее в данном сосуде (предварительно откачанном и запаянном) до критической температуры в нем установилось критическое давление. В предположении, что вода подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса, найти, какой объем воды должен быть налит в сосуд, если известно, что критическая температура воды  $T_{кр} = 647,3\text{K}$ , критическое давление  $P_{кр} = 218,3\text{ атм}$ , молярная масса  $\mu = 18\text{г/моль}$ , плотность при  $18^\circ\text{C}$  равна  $\rho = 1\text{г/см}^3$ .

**О-6.16**

Для демонстрации исчезновения мениска в критической точке цилиндрическую ампулу высотой  $h_0$  наполняют смесью жидкости и ее паров со средней плотностью содержимого  $\rho$ . Каково допустимое отклонение  $\rho$  от критической плотности  $\rho_{кр}$ , при котором в процессе нагревания ампулы мениск исчезнет, не коснувшись ее дна или верхушки?

**О-6.17**

После демонстрации критического состояния вещества ампула, заполненная эфиром, охлаждается. Оказалось, что при некоторой температуре  $T$  жидкость, плотность которой  $\rho = 1,9\rho_{кр}$ , 3 - полняет ровно половину пробирки. Определить эту температуру  $T$ . Критическая температура эфира  $T_{кр} = 467\text{K}$ .

**О-6.18**

В откачанную ампулу заливают эфир при температуре  $18^\circ\text{C}$  и запаивают ее. Какая часть ампулы должна быть заполнена жидкостью, чтобы после нагрева до критической температуры  $T_{кр} = 467\text{K}$  эфир оказался в критическом состоянии? Известны  $P_{кр} = 35,5\text{ атм}$ , плотность жидкого эфира  $\rho = 0,714\text{г/см}^3$ ,  $P_{нас}(18^\circ\text{C}) = 400\text{ Тор}$ . Считать, что к указанному эфиру применима модель газа Ван-дер-Ваальса.

**О-6.19**

Рассматривая удельную теплоту испарения  $\lambda$  как работу, затрачиваемую на преодоление внутреннего давления  $P_i$ , найти зависимость между  $P_i$ ,  $\lambda$  и плотностью жидкости  $\rho$ . Считать, что жидкость подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

**О-6.20**

Доказать, что теплоемкость  $C_V$  газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, не зависит от объема, а является функцией только температуры. Найти выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса, теплоемкость которого не зависит от температуры.

**О-6.21**

Два моля газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T$  занимают объем  $V$ . Найти работу, которую совершит газ при квазистатическом изотермическом расширении до объема  $2V$ . Постоянные газа  $a$  и  $b$  считать известными.

**О-6.22**

Моль азота расширяется в вакуум от начального объема 1 л до конечного 10 л. Найти понижение температуры  $\Delta T$  при таком процессе, если постоянная  $a$  в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота равна  $1,35 \cdot 10^6$  атм см<sup>6</sup>/МОлб<sup>2</sup>.

**О-6.25**

Азот при критической температуре  $T_{кр} = 126\text{К}$  имеет критический объем  $V = 92,1\text{см}^3/\text{моль}$ . Считая, что азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти понижение температуры 7 г азота при расширении в вакуум от объема  $V_1 = 5$  до объема  $V_2 = 50$  л.

**О-6.26.**

Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в вакуум от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  его температура не изменилась?

**О-6.27**

Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в вакуум от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  его давление осталось постоянным и равным  $P$ ?

**О-6.28**

Найти  $C_P - C_V$  для моля газа Ван-дер-Ваальса.

**О-6.29**

Найти выражение для энтропии  $\nu$  молей газа Ван-дер-Ваальса.

**О-6.30**

Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, считая, что его теплоемкость  $C$  не зависит от температуры.

**Решение** (???)

**О-6.31**

Показать, что в критической точке для любого вещества разность  $C_P - C_V$ , а также теплоемкость  $C_P$  обращаются в бесконечность.

**Решение** (???)

**О-6.32**

Два моля газа Ван-дер-Ваальса адиабатически и квазистатически расширяются от температуры  $T_1$  и объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Найти работу, совершенную газом. Постоянные газа  $a$  и  $b$  считать известными. Теплоемкость газа  $C_V$  не зависит от температуры.

Решение (???)

### О-6.33

Найти уравнение процесса для одного моля газа Ван-дерВаальса, в котором теплоемкость изменяется по закону  $C = kT^2$ , где  $k$  - постоянная величина. Считать, что  $C_V$  от температуры не зависит.

Решение (???)

### О-6.34

Найти уравнение процесса для произвольного вещества, при котором теплоемкость изменяется по закону  $C = \alpha\sqrt{T}$ , где  $\alpha$  - постоянная величина. Получить как частный случай уравнение такого процесса для газа Ван-дер-Ваальса. Постоянные газа Ван-дерВаальса и его теплоемкость при постоянном объеме ( $C_V = \text{const}$ ) считать известными.

Решение (???)

### О-6.35

Для газа Ван-дер-Ваальса найти уравнение процесса, для которого постоянна внутренняя энергия. Как молярная теплоемкость для этого процесса зависит от температуры  $T$ , если молярная теплоемкость  $C_V$  известна?

Решение (???)

### О-6.36

Два моля азота изотермически сжимаются от объема  $V$  при нормальных условиях до объема  $V/10$ . Какое количество тепла выделяется при этом? Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота  $a$  и  $b$  считать известными.

Решение (???)

### О-6.38

Найти изменение энтропии одного моля газа, константы Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  которого известны, при изотермическом процессе, в результате которого внутренняя энергия его увеличилась на  $\Delta U$ . В начале процесса объем газа был  $V_0$ .

### О-6.39

Найти изменение энтропии одного моля двухатомного газа Ван-дер-Ваальса, расширяющегося по политропе

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^3 = \text{const}$$

при изменении температуры от  $T_1 = 680\text{K}$  до  $T_2 = 250\text{K}$ . Считать, что  $C_V$  не зависит от температуры.

### О-6.40

Газ Ван-дер-Ваальса вначале расширяют в вакуум от исходного объема  $V_0$  до  $2V_0$ , а затем изотермически сжимают до  $V_0/2$ . Найти изменение энтропии одного моля газа, считая известными константы  $a$  и  $b$ , а теплоемкость  $C_V$  не зависящей от температуры  $T$ . Начальная температура газа  $T_0$ .

### О-6.41

Газ Ван-дер-Ваальса сначала изотермически при температуре  $T_0$  сжимают от исходного объема  $V_0$  до  $V_0/2$ , а затем расширяют в вакуум до объема  $2V_0$ . Найти изменение энтропии одного моля газа, считая известными константы  $a$  и  $b$ , а теплоемкость  $C_V$  не зависящей от температуры  $T$ .

**О-6.42**

Для изотермического сжатия одного моля газа Ван-дерВаальса была затрачена работа  $A$ . При этом энтропия газа изменилась по абсолютной величине на  $R/8$ , где  $R$  - универсальная газовая постоянная. Определить температуру этого процесса, если исходный объем был равен утроенному критическому. Постоянные Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  считать известными.

**О-6.43**

Теплонепроницаемый сосуд разделен теплонепроницаемой перегородкой на две части одинакового объема  $V$ . В каждой из частей находится по одному молю одного и того же газа Ван-дерВаальса, причем давление в одной части сосуда  $P_1$ , а в другой -  $P_2$ . Какое давление установится в сосуде после снятия перегородки? Константы  $a$  и  $b$ , а также теплоемкость  $C_V$  известны.

**О-6.46.**

Теплоизолированный сосуд объемом  $V_0$  разделен непроницаемой перегородкой на две равные части, в одной из которых находится один моль газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T_0$ , а другая вакуумирована. Перегородку быстро удаляют, и после того, как газ равномерно заполняет весь сосуд, его квазистатически сжимают до начального объема теплонепроницаемым поршнем. Определить изменение энтропии  $\Delta S$  и внутренней энергии  $\Delta U$  по сравнению с их первоначальными значениями. Для газа Ван-дер-Ваальса известно, что  $a \neq 0$ , а  $b = 0$ . Считать, что  $C_V = \text{const}$ .

**О-6.47**

Теплоизолированный сосуд объемом  $V_0$  разделен непроницаемой перегородкой на две равные части, в одной из которых находится один моль газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T_0$ , а другая вакуумирована. Перегородку быстро удаляют, и после того, как газ равномерно заполняет весь сосуд, этот газ квазистатически сжимают до начального объема теплонепроницаемым поршнем. Определить изменение энтропии  $\Delta S$  и внутренней энергии  $\Delta U$  по сравнению с их первоначальными значениями. Для газа Ван-дер-Ваальса известно, что  $b \neq 0$ , а  $a = 0$ . Считать, что  $b/V_0 \ll 1$  и  $C_V = \text{const}$ .

**О-6.48**

Моль газа адиабатически и квазистатически расширяется от начального объема  $V_0$  до некоторого объема  $V$ . В каком случае охлаждение газа будет больше: когда газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса или когда он идеальный? Теплоемкости  $C_V$  обоих газов равны между собой и не зависят от температуры.

**О-6.49**

Моль газа адиабатически и квазистатически расширяется от начального давления  $P_0$  и температуры  $T_0$  до некоторого давления  $P$ . Считая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянными  $a = 0, b \neq 0$ , найти его конечную температуру. Теплоемкость газа  $C_V$  от температуры не зависит. Сравнить конечную температуру этого газа с температурой, которую будет иметь идеальный газ с той же теплоемкостью  $C_V$ .

**О-6.50**

Найти теплоемкость газа Ван-дер-Ваальса в процессе, в котором тепло, сообщенное газу, равно уменьшению его внутренней энергии. Теплоемкость  $C_V$  и постоянную Ван-дер-Ваальса считать известными.

**О-6.53**

При политропическом расширении одного моля многоатомного газа Ван-дер-Ваальса (теплоемкость процесса  $C = 4R$ ) энтропия увеличилась на  $\Delta S = R$ . Во сколько раз увеличился объем газа, если начальный объем равен утроенному критическому объему?

**О-6.54**

При политропическом расширении одного моля одноатомного газа Ван-дер-Ваальса от критического до утроенного критического объема энтропия газа увеличилась на  $\Delta S = 2R$ . Определить теплоемкость политропического процесса.



**О-6.55**

Вычислить изменение свободной энергии 1 кмоль газа Ван-дер-Ваальса ( $a = 1,39 \cdot 10^5 \text{ Па м}^6/\text{кмоль}^2$ ,  $b = 0,039 \text{ м}^3/\text{кмоль}$ ) при изотермическом расширении ( $T_0 = 300 \text{ К}$ ) от  $V_0 = 0,05 \text{ м}^3$  до  $V_1 = 0,1 \text{ м}^3$ .

**О-6.56.**

Закрытая с обеих сторон металлическая труба заполнена гелием при нормальных условиях. Оценить, с какой точностью надо измерять частоту акустического резонанса этой трубы, чтобы заметить, что газ неидеальный? Считать, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Критическая температура гелия  $T = 5,2 \text{ К}$ , а диаметр атома гелия  $d \approx 2 \text{ \AA}$ .

**О-6.57**

Найти скорость звука в газе Ван-дер-Ваальса вблизи критической точки. Константы  $a$  и  $b$  газа и его молярную массу  $\mu$  считать известными. Теплоемкость  $C_V$  задана и не зависит от температуры. Процесс считать адиабатическим.

**О-6.58**

Определить, во сколько раз отличаются изотермическая  $\beta_T$  и адиабатическая  $\beta_S$  сжимаемости  $\beta_T/\beta_S$  для 1 моля одноатомного газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T = 50 \text{ К}$  и давлении 20 атм. Считать, что теплоемкость  $C_V$  данного газа такая же, как у идеального, константа  $a = 0,0035 \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$ .

**О-6.59**

В вертикальном цилиндре под поршнем массой  $M$  и площадью  $\sigma$  находится один моль газа Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого известны. Найти период малых колебаний поршня  $\tau$  около положения равновесия, считая процесс сжатия и разрежения изопыта принять равным критическому.

**О-6.62**

Найти КПД цикла, состоящего из адиабаты, изотермы (температура  $T_1$ , объем уменьшается от  $V_2$  до  $V_1$ ) и изохоры (объем  $V_1$ , температура увеличивается от  $T_1$  до  $T_2$ ). Рабочим веществом является 1 моль газа Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого известны, а теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры.

**О-6.63**

Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из двух изохор  $V$  и  $2V$  и двух изобар  $P$  и  $2P$ . Рабочим веществом является газ Ван-дер-Ваальса. Константы  $a$  и  $b$  считать известными. Теплоемкость газа  $C_V$  считать постоянной.

**О-6.64**

Определить КПД цикла, состоящего из двух изохор с объемами  $V_1$  и  $V_2$  и двух адиабат. Рабочим веществом является газ Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого заданы, а теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры.

**О-6.65**

Теплоизолированный сосуд объемом 2 л с жесткими стенками разделен подвижной проводящей тепло перегородкой на две части. С обеих сторон перегородки находится кислород: слева 5 молей, справа - 1 моль. В начальный момент перегородка удерживается и делит сосуд на две равные части. Затем она освобождается. Какое количество тепла  $Q$  нужно подвести к газу или отвести от него после установления равновесия для того, чтобы температура газа осталась неизменной? Считать, что кислород подчиняется урав-

(?)

**О-6.66.**

Получить формулу для изменения температуры газа в дифференциальном эффекте Джоуля-Томсона, предполагая, что газ подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса.

**О-6.66.**

Получить формулу для изменения температуры газа в дифференциальном эффекте Джоуля-Томсона, предполагая, что газ подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса.

**О-6.67**

Рассмотреть предельный случай формулы для эффекта Джоуля-Томсона (см. ответ предыдущей задачи), предполагая газ настолько разреженным, что квадратами и высшими степенями поправок  $a$  и  $b$  можно пренебречь. Показать, что при температурах выше так называемой температуры инверсии  $T_{\text{инв}}$  дифференциального эффекта Джоуля-Томсона газ при дросселировании будет нагреваться, а при температурах ниже температуры инверсии - охлаждаться. Получить выражение для  $T_{\text{инв}}$  и установить связь этой температуры с критической температурой  $T_{\text{кр}}$ .

**О-6.68**

Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дерВаальса, с  $a = 0$  в опыте Джоуля-Томсона всегда нагревается. Определить повышение температуры при расширении.

**О-6.69**

Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дерВаальса, с  $b = 0$  в опыте Джоуля-Томсона всегда охлаждается. Определить понижение температуры при расширении.

**О-6.70**

При какой температуре  $T$  углекислый газ в опыте Джоуля-Томсона начнет охлаждаться, если известно, что критическая тем-

**О-6.71**

Предполагая, что газ подчиняется уравнению Ван-дерВаальса, найти уравнение кривой инверсии, т. е. такой кривой в плоскости  $(V, T)$ , при переходе через которую эффект Джоуля-Томсона меняет знак.

**О-6.72**

Расширение газа в процессе Джоуля-Томсона производится от начального состояния  $(T, V)$  до сильно разреженного состояния, в котором газ может считаться идеальным. Если начальные состояния газа изображать на диаграмме  $(T, V)$ , то на ней можно начертить кривую, которая делит плоскость  $T, V$  на две области: точкам одной области соответствует  $\Delta T < 0$  (газ охлаждается), а другой  $\Delta T > 0$  (газ нагревается). Эта кривая называется кривой инверсии интерального эффекта Джоуля-Томсона. Найти ее уравнение и начертить кривые инверсии для азота, водорода и гелия в предположении, что эти газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса.

**О-6.73**

Вычислить, во сколько раз отличаются изменения температуры при эффекте Джоуля-Томсона и при обратимом адиабатическом расширении газа Ван-дер-Ваальса. Перепад давления в обоих случаях одинаков и невелик,  $T_{\text{кр}}/T = 0,4$  и  $V/V_{\text{кр}} = 0,09$ , где  $T_{\text{кр}}$  и  $V_{\text{кр}}$  - критические температура и объем. находится дифференцированием уравнения Ван-дер-Ваальса.

**О-6.74**

Теплоизолированный сосуд наполнен газообразным гелием при температуре  $T_0 = 10\text{К}$  (выше критической точки). Газ медленно вытекает через капиллярную трубку до тех пор, пока давление в сосуде не станет равным  $P_1 = 1$  атм, а температура  $T_1 = 4,2\text{К}$  (точка кипения гелия при нормальном давлении). Найти начальное давление газа в сосуде  $P$ , если в конце процесса сосуд оказался полностью заполненным жидким гелием. Молярная теплота испарения гелия при  $4,2\text{К}$  равна  $\lambda = 20$  кал/моль. Газообразный гелий считать идеальным газом.

**О-6.77 Изменение энергии реального газа при изотермическом расширении (?)**

Определить изменение внутренней энергии одного моля реального газа, подчиняющегося уравнению  $P = \frac{RT(V+b)}{V^2} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$  при изотермическом расширении с температурой  $T$  от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Константы  $a$  и  $b$  известны.

(по идее это не сложно, если знать только уравнение газа? а я забыл, давно не тренировался...)

**О-6.78**

Определить приращение энтропии при изотермическом расширении ( $T_0$ ) одного моля реального газа от объема  $V_0$  до  $V_0 + dV$ , если его уравнение состояния имеет вид:  $P = \frac{RT}{V-b} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$ . Константы  $a$  и  $b$  известны.

**О-6.79**

Найти изменение теплоемкости  $\Delta C_V$  одного моля гелия при изотермическом расширении от объема  $V_1 = 0,5\pi$  до объема  $V_2 = 1$  л при температуре  $T = 10\text{К}$ . Считать газ подчиняющимся уравнению Бертло:  $(P + \frac{a}{TV^2})(V - b) = RT$ , в котором для гелия  $a/R = 1,9\Omega \cdot \text{К}^2/\text{моль}$ .

**О-6.80**

Моль трехатомного газа Ван-дер-Ваальса, находящийся в критическом состоянии, адиабатически расширяется в вакуум, в результате чего его температура падает до  $T = (3/4)T_{\text{кр}}$ . Определить, во сколько раз изменилось давление газа. Считать что теплоемкость  $C_V$  данного газа такая же, как у идеального.

**О-6.81**

Температура моля одноатомного газа Ван-дер-Ваальса при адиабатическом расширении в вакуум из объема  $V_0 = 3V_{\text{кр}}$  меняется при газа. Считать, что теплоемкость  $C_V$  данного газа такая же, как у идеального.

**О-6.82**

Одноатомный газ Ван-дер-Ваальса сжимают в политропическом процессе ( $C = \text{const}$ ), уменьшая его объем от  $V_0 = 3V_{\text{кр}}$  до  $V_1 = 2V$ , а затем адиабатически расширяют в вакуум до исходного объема. Начальная температура газа  $T_0 = 1,5T_{\text{кр}}$ , конечная  $T_2 = (91/40)T_{\text{кр}}$ . Определить молярную теплоемкость газа в политропическом процессе.

**О-6.86**

Определить разность теплоемкостей  $C_P - C_V$  в точке инверсии для дифференциального эффекта Джоуля-Томсона произвольной термодинамической системы с объемом  $V$  при температуре  $T$ . Изотермическая сжимаемость равна  $\beta_T$ .

**О-6.87**

Расширение азота ( $\text{N}_2$ ) в процессе Джоуля-Томсона производится от описываемого уравнением Ван-дер-Ваальса начального состояния с температурой  $T_0 = 3T_{\text{кр}}$  ( $T_{\text{кр}}$  – критическая температура газа) до сильно разреженного, в котором газ можно считать идеальным. Найти начальный объем  $V_0$  и конечную температуру газа, соответствующие его максимально возможному охлаждению. Теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры. Критические параметры:  $T_{\text{кр}} = 126\text{К}$ ,  $V_{\text{кр}} = 114\text{см}^3/\text{моль}$ .

**О-6.88**

Расширение неона ( $\text{Ne}$ ) в процессе Джоуля-Томсона производится от описываемого уравнением Ван-дер-Ваальса начального состояния с температурой  $T_0 = T_{\text{инв}}/2$  ( $T_{\text{инв}}$  – температура инверсии интегрального эффекта) до сильно разреженного, в котором газ можно считать идеальным. Найти начальный объем  $V_0$  и конечную температуру газа, соответствующие его максимально возможному охлаждению. Теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры. Параметры уравнения Ван-дер-Ваальса:  $a = 0,02\text{н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ ,  $b = 17\text{см}^3/\text{моль}$ .

**11.11 Задачи на распределение Максвелла****О-7.1**

Найти отношение числа молекул водорода  $n_1$ , скорости которых лежат в пределах от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул  $n_2$ , имеющих скорости в пределах от 1500 до 1510 м/с, если температура водорода  $300^\circ\text{С}$ .

**Решение** (???)

**О-7.2**

Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат  $x$ -компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

**Решение** (???)

**Средний квадрат кинетической энергии газа (?)**

(пока не уверен, потом напишу)

**Решение** (???)

**Средняя 3-я степень кинетической энергии газа (?)**

**Решение** (???)

**О-7.3**

Найти наиболее вероятную  $v_m$ , среднюю\*\*  $\bar{v}$  и среднюю квадратичную  $\bar{v}_{\text{кв}}$  скорости молекул хлора при температуре  $227^\circ\text{C}$ .

**Решение** (???)

**О-7.4**

При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна таковой же скорости молекул азота при температуре  $100^\circ\text{C}$ ?

**Решение** (???)

**О-7.5**

Показать, что если за единицу скорости молекул газа принять наиболее вероятную скорость, то число молекул, абсолютные значения скоростей которых лежат между  $v$  и  $v + dv$ , не будет зависеть от температуры газа.

**Решение** (???)

**О-7.6**

Как зависит от давления средняя скорость молекул идеального одноатомного газа при адиабатическом сжатии или расширении?

**Решение** (???)

**О-7.7.**

Написать выражение для среднего числа  $dN$  молекул газа, кинетические энергии которых заключены между  $\varepsilon$  и  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

**Решение** (???)

**О-7.8**

Найти наименее вероятное значение кинетической энергии  $\varepsilon$  поступательного движения молекул газа, т. е. такое значение  $\varepsilon_m$ , при котором в фиксированном интервале энергии  $d\varepsilon$  в газе находится максимальное число молекул.

**Решение** (???)

### О-7.9 Максимум молекул в интервале скоростей

При каком значении температуры число молекул, находящихся в пространстве скоростей в фиксированном интервале  $(v, v + dv)$ , максимально?

**Решение** (???)

(распр максвелла все еще не выучено!)

### О-7.10 Скорость между двумя половинами молекул (??)

Вычислить скорость  $v_{1/2}$  теплового движения молекулы газа, определяемую условием, что половина молекул движется со скоростью, меньшей, чем  $v_{1/2}$ , а другая половина - со скоростью, большей, чем  $v_{1/2}$ .

**Решение** (вроде легко должна решаться, но я слишком не уверен в теории.)

### О-7.11 среднее значение обратной величины скорости молекулы (????)

Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.

**Решение** (???)

### О-7.12 Число молекул, которые имеют перпендикулярные и параллельные компоненты в некоторых интервалах (???)

Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале  $(v_{\parallel}, v_{\parallel} + dv_{\parallel})$ , а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости заключены между  $v_{\perp}$  и  $v_{\perp} + dv_{\perp}$ .

(думаю, точно такое должен я решать, если понимаю тему.)

### О-7.13

Во сколько раз изменится число молекул идеального двухатомного газа в малом интервале скоростей  $\Delta v$  с центром в наиболее вероятной скорости  $v_m$  ( $\Delta v \ll v_m$ ) при адиабатическом увеличении объема в два раза?

### О-7.17.

Стационарный точечный источник, находящийся в вакууме, непрерывно и изотропно Рис. 419 испускает частицы массой  $m$ , скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре источника  $T$ . Считая, что, разлетаясь, частицы не сталкиваются, найти их концентрацию на расстоянии  $r$  от источника. Источник испускает  $\nu$  частиц в секунду.

### О-7.18

В центре сферы радиусом  $R$  в некоторый момент времени создается  $N$  молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре  $T$ . Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность  $j$  потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени  $t_0$ , когда поток максимален, и найти скорость молекул  $v_0$ , подлетающих к стенке в этот момент,

### О-7.19\*.

Выразить число молекул  $z$ , ударяющихся о квадратный сантиметр стенки сосуда в одну секунду, через среднюю скорость движения газовых молекул, если функция распределения молекул по скоростям изотропна (т. е. зависит только от абсолютного значения скорости молекулы, но не от ее направления). Рассмотреть частный случай максвелловского распределения

### О-7.22

Записать выражение для среднего числа молекул идеального газа  $dN$ , ударяющихся ежесекундно о квадратный сантиметр стенки сосуда, скорости которых по абсолютной величине заключены между  $v$  и  $v + dv$ . Найти значение скорости  $v_0$ , при котором величина  $dN$  максимальна, если ширина интервала  $dv$  постоянна. Число молекул газа в единице объема равно  $n$ , температура газа  $T$ .

**О-7.23 Энергия ударяющихся молекул (?)**

Найти полную кинетическую энергию  $E$  молекул одноатомного газа, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки в единицу времени. Задачу решить сначала в общем виде для изотропной функции распределения, а затем применить результат к частному случаю максвелловского распределения.  
(я тупой)

**О-7.24 (!!!????)**

В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при температуре  $T$ , имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение  $\bar{\varepsilon}$  кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы.

**Решение** (!!! впишу в 1 часть это тоже!!!)

Важная закономерность, что это  $2kT$  для одноатомного ИГ.

Из распределения Максвелла как-то это получается.

(????)

**О-7.25**

В тонкостенном сосуде объемом  $V$ , стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ. Сосуд помещен в вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул  $n$  газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие площадью  $S$ ? Определить время  $t_{1/2}$ , по истечении которого давление газа внутри сосуда уменьшится в два раза. Считать, что истечение газа происходит настолько медленно, что оно практически не нарушает равновесность состояния во всем сосуде, за исключением малой области вблизи отверстия. Температуру газа в сосуде считать постоянной и равной внешней температуре.

**О-7.26**

Откачанный тонкостенный сосуд, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, погружен в атмосферу идеального газа, поддерживаемого при той же температуре, с постоянной концентрацией молекул  $n_0$ . Как будет меняться с течением времени концентрация молекул газа внутри сосуда, если в его стенке - сделать очень малое отверстие?

**О-7.29**

Полностью откачанный герметический сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси двух газов, молекулярные массы которых относятся как 1 : 4, а отношение концентраций (т. е. числа молекул в единице объема) равно  $\alpha$ . Смесь газов вне сосуда поддерживается при постоянном давлении и температуре. В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое оба газа стали очень медленно натекают в сосуд. Определить максимальное и минимальное значения отношений концентраций легкой и тяжелой компонент газовой смеси в моменты времени, когда достигаются эти значения.

**11.12 Задачи на распределение Максвелла, 2****О-7.30**

Полностью откачанный тонкостенный герметический сосуд помещен в атмосферу кислорода, поддерживаемого при постоянной температуре и невысоком давлении  $P$ . В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое окружающий кислород стал нтекать в сосуд. Через час давление газа в сосуде повысилось от нуля до  $P/2$ . Какое давление было бы в том же сосуде через то же время, если бы после откачки сосуд был помещен в атмосферу водорода при тех же значениях давления и температуры?

**О-7.31**

Тонкостенный сосуд объемом  $V$ , наполненный идеальным газом, поддерживается при постоянной температуре  $T$ . В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площадью  $S$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Какое количество тепла  $Q = Q(t)$  надо подводить к сосуду в единицу времени для поддержания в нем постоянной температуры?

**О-7.32**

В тонкостенном сосуде, помещенном в вакуум, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одной и той же скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к плоскости отверстия. Концентрация молекул в пучке равна  $n_0$ . Найти среднюю скорость  $\bar{v}$ , концентрацию молекул  $n$  и температуру  $T$  газа в сосуде в установившемся равновесном состоянии.

**О-7.35**

В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при давлении  $P$ , имеется маленькое круглое отверстие радиусом  $r$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. На расстоянии  $L$  от отверстия находится круглый диск радиусом  $R$  ( $R \gg r$ ), так что плоскость диска параллельна плоскости отверстия и центры диска и отверстия лежат на прямой, перпендикулярной плоскости отверстия. Определить силу  $F$ , действующую на диск. Считать, что все частицы прилипают к диску.

**О-7.38**

Кроме ракет со сравнительно широким соплом, обеспечивающим адиабатичность истечения, в принципе возможна ракета другого типа, в которой газ вытекает сквозь множество отверстий, размер которых мал по сравнению с длиной свободного пробега. Сравнить силы тяги ракет обоих типов при движении их в вакууме, если в качестве рабочего вещества используется многоатомный идеальный газ. Начальная температура газа и расход топлива в обоих случаях одинаковы.

**О-7.39**

Откачанный тонкостенный теплоизолированный сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси кислорода и гелия с температурой  $T_0$ , причем парциальные давления гелия и кислорода одинаковы. Эти газы натекают в сосуд через малое отверстие. Найти температуру смеси в сосуде, пока давление в нем мало по сравнению с наружным. Считать, что тепловое равновесие успевает устанавливаться.

**О-7.40 (!?)**

Неон вытекает в вакуум из теплоизолированного сосуда через маленькое отверстие. Определить его температуру, когда в сосуде останется половина атомов. Начальные условия газа нормальные. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

7.40 Связать изменение числа частиц и изменение температуры за малое изменение времени и проинтегрировать

**О-7.41**

В теплоизолированном сосуде находится воздух при начальной температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ . В сосуде имеется маленькое отверстие, через которое воздух медленно выходит в вакуум. Определить, как будет изменяться температура оставшегося в сосуде газа в зависимости от его давления.

**О-7.42**

Теплоизолированная полость разделяет два сосуда с одним и тем же газом. Температура газа в одном из сосудов  $T_1 = 200\text{K}$ , в другом  $T_2 = 800\text{K}$ . Давление в обоих сосудах одинаково и равно  $P = 1$  атм. Полость сообщается с сосудами посредством малых отверстий (рис. 421). Оба отверстия одинаковы. Найти давление и температуру, установившиеся внутри полости.

**О-7.43**

Цилиндрический сосуд, стоящий вертикально (рис. 422), отделен от атмосферы поршнем с массой  $M = 1$  кг и площадью  $S = 10\text{см}^2$  с очень мелкими порами; общая площадь сечения пор  $\sigma = 0,01\text{см}^2$ . В сосуде находится воздух, температура которого  $T_1$  поддерживается равной  $400\text{K}$ . На сколько изменится высота поршня за  $10\text{с}$ , если температура окружающего воздуха  $T_0 = 300\text{K}$ ? Воздух считать идеальным газом. Трением поршня о стенки пренебречь. Процесс считать квазистатическим.

**О-7.44**

Одноатомный идеальный газ находится в сосуде объемом  $V$  с теплоизолированными стенками. В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площадью  $S'$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Предполагая, что размеры отверстия настолько малы, что состояние газа в сосуде в любой момент времени можно рассматривать как равновесное, определить закон изменения температуры газа в сосуде во времени. Начальную температуру газа  $T_0$  и все необходимые параметры газа считать известными. Теплоемкостью стенок сосуда пренебречь. Как качественно изменится результат, если сосуд может свободно перемещаться?

**О-7.45**

В замкнутом сосуде находится разреженный идеальный газ под давлением  $P$ . В стенке сосуда сделано малое отверстие площадью  $b$ . Определить реактивную силу  $F$ , испытываемую сосудом при истечении газа через отверстие.

**О-7.46**

Измерение спектра скоростей медленных нейтронов осуществляется при помощи монохроматора и расположенного за ним детектора. Монохроматор формирует одинаковые по длительности импульсы нейтронов со скоростями в интервале  $(v, v + \Delta v)$ , причем ширина его  $\Delta v$  постоянна ( $\Delta v \ll v$ ). Нейтроны регистрируются детектором с использованием реакции, сечение которой  $\sigma \propto 1/v$ . Полагая распределение скоростей нейтронов внутри источника максвелловским со среднеквадратичной скоростью  $v_{\text{Кв}} = 3 \text{ км/с}$ , найти величину  $v$ , при которой регистрируется максимальное число нейтронов.

**О-7.47**

Изотопы урана  $^{23}\text{U}$  и  $^{235}\text{U}$  разделяют, помещая газообразный фторид урана в центрифугу. На оси центрифуги концентрация обоих газов поддерживается постоянной с помощью внешнего источника. Максимальная скорость на периферии центрифуги  $v = 500 \text{ м/с}$ . Во сколько раз изменится отношение концентраций изотопов урана, если опыт Проводить не при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а при  $T_2 = 600 \text{ К}$ ?

**О-7.54**

Найти изменение энтропии  $64 \text{ г}$  кислорода, если в результате некоторого процесса число ударов молекул об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за  $1 \text{ с}$  увеличилось в  $4$  раза, а полная кинетическая энергия этих молекул при этом выросла в  $16$  раз.

**О-7.55**

Как изменится число ударов  $v$  молекул газа об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за  $1 \text{ с}$ , если объем газа адиабатически увеличится в два раза? Газ идеальный двухатомный.

**О-7.56**

Как изменится частота ударов о стенку молекул углекислого газа, если его объем увеличить в  $10$  раз по политропе с теплоемкостью, равной  $8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ ?

**О-7.57.**

Азот расширили по некоторому политропическому процессу. При этом оказалось, что частота ударов молекул о стенку осталась постоянной. Какова теплоемкость при этом процессе?

**О-7.58**

Во сколько раз изменится полная кинетическая энергия молекул двухатомного газа, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за  $1 \text{ с}$ , если объем газа адиабатически увеличится в два раза?

**О-7.59**

Найти изменение энтропии моля одноатомного идеального газа при расширении до удвоенного объема. Число молекул, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда, при расширении остается неизменным.

**О-7.60**

Найти изменение энтропии моля идеального газа при увеличении давления в два раза, если при этом кинетическая энергия молекул газа, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда, также увеличивается в два раза.

**О-7.61**

В сосуде объемом  $V$  находится  $N$  молекул при температуре  $T$ . При соударении со стенкой сосуда каждая молекула может прилипнуть к стенке с вероятностью  $\beta = \text{const} \ll 1$ , если энергия молекулы меньше  $E_0$ . Молекулы с энергией, большей  $E_0$ , не прилипают к стенкам вообще. Определить количество молекул газа  $n$ , осаждающихся на стенках сосуда в единицу времени, если площадь этих стенок равна  $S$ .



**О-7.62**

Частицы с одинаковыми массами  $m$  с равной вероятностью имеют любую скорость  $v_x$  в интервале  $(-v_0, v_0)$ . Равновероятны ли их энергии? Написать законы распределения: по скоростям  $dw_1(v_x)$  и по энергиям  $dw_2(\mathcal{E})$ . Найти  $\langle v_x \rangle$ ,  $\langle |v_x| \rangle$ ,  $\langle v_x^2 \rangle$ .

**О-7.69**

В сосуде находятся по 1 молю гелия ( $\mu_1 = 4$  г/моль) и азота ( $\mu_2 = 28$  г/моль). При какой температуре число молекул со скоростями от 999 до 1001 м/с одинаково для обоих газов? Чему равно это число?

**О-7.70**

Определить, во сколько раз изменится доля молекул водорода, которые имеют скорость, отличающуюся от наиболее вероятной скорости не более, чем на  $\pm 3$  м/с, при уменьшении температуры газа от 600 К до 400 К? Газ считать идеальным.

**О-7.71**

После обработки результатов измерения распределения атомов по абсолютным значениям скорости в парах  $^{108}\text{Ag}$  выяснилось, что в интервалах скоростей  $v_1 = 303 \pm 1$  м/с и  $v_2 = 606 \pm 1$  м/с имелось одинаковое количество атомов. Определить температуру паров  $^{108}\text{Ag}$ .

**О-7.72**

Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое, могут рассматриваться как двумерный идеальный газ. Определить, какая максимальная доля таких электронов может сохранить свои скорости при увеличении температуры  $n = 1,5$  раза.

**О-7.73**

Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое, могут рассматриваться как двумерный идеальный газ. Определить, какая минимальная доля таких электронов должна изменить свои скорости при увеличении температуры в  $n = 2,5$  раза.

**О-7.74**

В сосуде находится одноатомный идеальный газ. Среди соударяющихся со стенкой сосуда частиц определить долю  $\alpha$  тех из них, энергия которых более, чем в 2 раза, превышает среднюю тепловую энергию частиц.

**О-7.75**

В сосуде находится одноатомный идеальный газ. Среди соударяющихся со стенкой сосуда частиц определить долю  $\beta$  частиц с энергией, превышающей среднюю энергию, с которой частицы вылетали бы через малое отверстие в стенке.

**О-7.67**

В тонкостенном сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре  $T$ , имеется небольшое круглое отверстие, через которое атомы газа вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы по сравнению с длиной свободного пробега. Атомы газа имеют массу  $m$ , и в каждый момент времени их скорость описывается максвелловским распределением. 1) Определить наивероятнейшее значение скорости атомов, покидающих сосуд. 2) Определить среднюю по модулю скорость атомов в пучке, вылетающих из отверстия.

указание

$$\int_0^\infty x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a^n} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

**О-7.78**

Если кинетическая энергия молекул  $\varepsilon \geq \varepsilon_\pi = 0,84$  эВ, то при их столкновении с твердой поверхностью на ней происходят химические реакции. Оценить, во сколько раз изменится число молекул, прореагировавших в единицу времени, при увеличении температуры газа от  $T_0 = 300$  К до  $T_1 = 320$  К. Концентрация молекул постоянна, распределение молекул по скоростям максвелловское.

**О-7.79**

В сосуде при температуре 300К находятся равные количества двух газов с одинаковыми молярными массами. Если кинетическая энергия молекул превышает порог ( $\varepsilon \geq \varepsilon_n$ ), то при их столкновении с твердой поверхностью на ней происходят химические реакции. Оценить, во сколько раз отличаются числа реакций в единицу времени для молекул 1-го и 2-го газов, если пороговые энергии реакций для них равны  $\varepsilon_{n1} = 0,63$  эВ и  $\varepsilon_{n2} = 0,84$  эВ. Распределение молекул по скоростям максвелловское.

**О-7.80.**

Тонкая пористая круглая пластинка радиусом  $R = 1$  см облучается с одной стороны направленным по  $2R$  током атомов гелия, летящих под углом  $\theta = 45^\circ$  к ее поверхности (рис. 425).

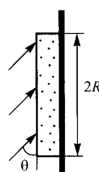


Figure 4

Концентрация молекул в потоке  $n_0 = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ , скорость  $v_0 = 1000 \text{ м/с}$ . Противоположная сторона пластинки закрыта плотной перегородкой. При попадании на пластинку треть атомов,  $\alpha = 1/3$ , отражается от ее поверхности зеркально. Остальные проникают внутрь и, после некоторого блуждания по порам пластинки, вылетают наружу с той же стороны в случайном направлении, имея максвелловское распределение по скоростям, соответствующее температуре пластинки  $T = 300 \text{ К}$ . Какую мощность следует подводить к пластинке для поддержания ее температуры постоянной? Излучение пластинки не учитывать.

7.80 При переизлучении скорости молекул распределены по Максвеллу, поэтому надо бы найти какую энергию они приносят и какую уносят, а эту разницу и надо подводить

**О-7.81**

В откачанном до высокого вакуума сосуде проделано круглое отверстие радиусом  $R = 1 \text{ мм}$ , малое по сравнению с размерами сосуда. На него снаружи под углом  $\theta = \pi/6$  к поверхности падает направленный поток атомов гелия, летящих со скоростью  $v_0 = 600 \text{ м/с}$ . Концентрация частиц в потоке  $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Стенки сосуда поддерживаются при постоянной температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Найти установившуюся концентрацию частиц в сосуде и мощность, которую надо подводить к сосуду для поддержания его температуры постоянной. Излучение не учитывать.

**О-7.82**

В демонстрационном опыте тонкостенную пористую колбу объемом  $V = 100 \text{ см}^3$ , заполненную азотом  $\text{N}_2$ , помещают в сосуд значительно большего объема с гелием  $\text{He}$ , находящимся при том же давлении. Суммарная площадь поперечного сечения пор стенок колбы  $S = 0,01 \text{ см}^2$ , поперечные размеры пор меньше длины свободного пробега молекул. Считая процесс изотермическим при  $T = 300 \text{ К}$ , найти, в какой момент времени давление в колбе будет максимальным.

**О-7.83**

Тонкостенный бак объемом  $V = 100 \text{ дм}^3$ , наполненный водородом  $\text{H}_2$ , находится на планете, атмосфера которой состоит из углекислого газа  $\text{CO}_2$ . В баке возникла щель площадью  $S = 10^{-4} \text{ см}^2$ , причем ширина щели оказалась меньше длины свободного пробега молекул. Считая процесс изотермическим при  $T = 280 \text{ К}$ , найти, через какое время после образования щели давление в баке будет минимальным. Начальное давление водорода равно атмосферному.

**11.13 Задачи на распределение Больцмана (!!)****О-8.1 Масса земной атмосферы (???)**

Вычислить массу земной атмосферы.

**Решение** (???)

**О-8.2 Отношение массы атмосферы к массе планеты**

Найти отношение массы атмосферы  $m$  к массе планеты  $M$ . Гравитационное ускорение на поверхности планеты равно  $g$ , атмосферное давление  $P_0$ . Вычислить это отношение для Земли.

**Решение** (???)

**О-8.3 Атмосфера галактики (???????????)**

Галактику можно представить как тонкий однородный диск (цилиндрический слой). Радиус диска  $R = 10^{21}$  см, масса  $M = 10^{39}$  Г. Диск окружен водородной атмосферой, давление которой у поверхности диска вблизи его оси  $P_0 = 10^{-16}$  дин/см<sup>2</sup>. Оценить массу атмосферы  $m_{\text{атм}}$ , если  $R \ll \frac{\gamma M}{kT_0/m_p}$ , где  $m_p$  - масса протона и  $T_0$  - температура в точке, где определено давление  $P_0$ .

**Решение** (???)

(?? что за атмосфера галактики?????)

**О-8.4**

Теплоизолированный сосуд с идеальным газом подвешен на нити в поле тяжести. Из-за действия силы тяжести плотность газа внизу сосуда больше, чем наверху. Нить пережигают, и сосуд свободно падает. Предполагая, что во время падения успевает установиться термодинамическое равновесие, определить равновесную температуру газа, которая в нем установится при падении.

**Решение** (???)

**О-8.5**

Пользуясь формулой Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию  $\bar{\epsilon}_{\text{пот}}$  молекулы газа в земной атмосфере, считая последнюю изотермической (с температурой  $T$ ), а поле тяжести однородным. Вычислить теплоемкость газа  $C$  при этих условиях.

**Решение** (???)

**О-8.6**

Теплоизолированный герметический цилиндрический сосуд высотой  $H$ , наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна  $T$ . Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа  $\bar{\epsilon}_{\text{пот}}$ .

**Решение** (???)

**О-8.7**

В цилиндре предыдущей задачи помещен моль идеального газа с молярной массой  $\mu$ . Найти теплоемкость этого газа, учитывая влияние поля тяжести и предполагая, что  $\mu gH \ll RT$ .

**Решение** (???)

**О-8.8**

Смесь двух идеальных газов, состоящая из  $N_1$  и  $N_2$  частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно, заключена в цилиндрический сосуд высотой  $h$ , находящийся в поле тяжести. Определить положение центра масс этой смеси  $z_{\text{с'}}$ , если температура смеси равна  $T$ .

**Решение** (???)

## О-8.9

Вычислить, где больше содержится воздуха: в слое у поверхности Земли толщиной 10 см или в слое толщиной 1 км на высоте 100 км. Считать атмосферу изотермической при  $T = 300\text{K}$ . Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

**Решение** (???)

## О-8.10

Вблизи поверхности Земли концентрация аргона  $^{40}\text{Ar}$  составляет 0,9%. Оценить, какой была бы концентрация аргона на высоте, где давление воздуха падает в 10 раз, если бы атмосфера была равновесной и изотермической.

**Решение** (???)

## О-8.11(4 мин) Скорость звука на планете из гелия и азота

Атмосфера планеты, на поверхности которой сила тяжести равна земной, состоит только из гелия и азота ( $N_r/N_a = 7$ , где  $N$  - полное число соответствующих молекул в атмосфере). Найти скорость звука у поверхности такой планеты. Атмосферу считать изотермической с температурой  $T = 200\text{K}$ , изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

**Решение** Считаем массу через плотность, её - через давление:

$$m = \int_0^\infty \rho(z) dz = \int_0^\infty \frac{\mu P(z)}{RT} dz = \frac{\mu}{RT} \int_0^\infty P_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right) dz = \frac{P_0}{g} = \frac{\rho_0 RT}{g\mu}$$

Считаем массы через молярные массы, используем соотношение из условия: так как  $m_{He} = \mu_{He} N_{He} m_{N_2} = \mu_{N_2} N_{N_2}$

$$\frac{\mu_{He}}{\mu_{N_2}} = \frac{N_{N_2}}{N_{He}} \Rightarrow m_{He} = m_{N_2} \Rightarrow \left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)_{He} = \left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)_{N_2} \Rightarrow v_{He} = v_{N_2}$$

То есть число молей одинаково.

Скорость звука получим из средних постоянной адиабаты и молярной массы:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \frac{v\mu_{He} + v\mu_{N_2}}{v+v} = \frac{1}{2}(\mu_{He} + \mu_{N_2}) = 16 \frac{\text{г}}{\text{моль}} \\ \langle \gamma \rangle &= \frac{\langle C_P \rangle}{\langle C_V \rangle} = \frac{\frac{vC_{P_{He}} + vC_{P_{N_2}}}{v+v}}{\frac{vC_{V_{He}} + vC_{V_{N_2}}}{v+v}} = \frac{C_{P_{He}} + C_{P_{N_2}}}{C_{V_{He}} + C_{V_{N_2}}} = \frac{3}{2} \\ c &= \sqrt{\frac{\langle \gamma \rangle RT}{\langle \mu \rangle}} \approx 400 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Если на какой-то высоте скорость звука требуется, то как делать??? отработаю потом - пойму.

Самые обычные формулы и решают задачу. Разве что еще про скорость звука нужно помнить формулу.

## О-8.12

В столбе воды при температуре  $20^\circ\text{C}$  взвешены шарообразные частицы смолы радиусом  $2,1 \cdot 10^{-5}\text{см}$ , плотность которых равна  $1,19\text{ г/см}^3$ . Отношение концентраций частиц при разности высот  $1,1 \cdot 10^{-2}\text{ см}$  оказалось равным  $100 : 12$ . Из этих данных найти число Авогадро, если известна газовая постоянная  $R$ .

## О-8.13

Для определения числа Авогадро Ж. Перрен измерял распределение по высоте шарообразных частиц гуммигута, взвешенных в воде. Он нашел, что отношение  $\alpha$  числа частиц в слоях, отстоящих друг от друга на расстояние  $l = 30\text{ мкм}$ , равно 2,08. Плотности частиц  $\rho = 1,194\text{ г/см}^3$ , воды  $\rho_0 = 1\text{ г/см}^3$ . Радиусы частиц  $r = 0,212\text{ мкм}$ . На основании этих данных вычислить число Авогадро  $N$ . Температура воды  $t = 18^\circ\text{C}$ .

### О-8.14. Сферический сосуд (???)

Сферический сосуд радиусом  $R$ , наполненный идеальным газом, расположен в области однородного поля тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . При какой температуре газа  $T$  наиболее вероятное положение молекулы газа будет находиться вблизи горизонтальной плоскости на расстоянии  $R/2$  от центра сферы? Масса молекулы газа  $m$ .

**Решение.** (?!?! про геометрии напишу указания, это важно! Геометрия дает число частиц!)  
Распределение Больцмана для концентраций:

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$$

Распределение числа частиц через элемент объема:

$$S(z) = \pi (R^2 - (R - z)^2) = \pi z(2R - z)$$

$$N(z) = n(z)dV = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) S(z)dz$$

Функция распределения:

$$f(z) = \pi n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) z(2R - z) = \pi n_0 \exp(-\alpha z) z(2R - z)$$

Найдем максимум функции распределения:

$$\frac{df(z)}{dz} = n_0 \pi e^{-\alpha z} (2R(1 - \alpha z) + z(z\alpha - 2))$$

$$z_{\max} = R + \frac{1}{\alpha} - \sqrt{R^2 + \frac{1}{\alpha^2}}$$

Если  $z = R/2$ ,

$$\frac{R}{2} = R + \frac{1}{\alpha} - \sqrt{R^2 + \frac{1}{\alpha^2}}$$

$$\frac{mg}{kT} = \frac{4}{3R}$$

Ответ  $T = \frac{3mgR}{4} \frac{m}{k}$ .

**Решение для случая фермионов (??????).** (???? ну и тут я не знаю, тут я приехал. когда-то потом подумаю, статфиз учить заново нужно.)

### О-8.15. Конус (????)

Конический сосуд высотой  $H$ , наполненный идеальным газом, расположен в области однородного поля тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Ускорение  $g$  параллельно оси конуса и направлено к его вершине. При какой температуре  $T$  наиболее вероятное положение молекулы газа будет находиться вблизи горизонтальной плоскости на высоте  $H/2$ ? Масса молекулы газа  $m$ .

**Решение.** Найдем распределение молекул по высоте, если газ поместить основанием против направления силы тяжести, а угол при вершине  $2\alpha$ .

Выделим объем слоя газа.

$$dV = \pi r^2(z) dz = \pi \operatorname{tg}^2(\alpha) z^2 dz$$

Распределение Больцмана дает распределение молекул газа по высоте:

$$dN = A \pi \operatorname{tg}^2(\alpha) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) z^2 dz$$

Здесь  $A$  - нормировочная постоянная, из  $\int_{z=0}^{z=H} dN = N_0$  получаем  $A = \frac{N_0}{\pi J \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

А в  $J$  мы занесли все, что осталось:

$$J = \int_0^H z^2 \exp(-\beta z) dz = \frac{2}{\beta^3} \left( 1 - e^{-\beta H} \left( 1 + \beta H + \frac{1}{2} \beta^2 H^2 \right) \right)$$

И в случае бесконечной высоты имеем распределение следующего вида:

$$dN = \frac{N_0}{2} \left( \frac{mg}{kT} \right)^3 \exp \left( -\frac{mgz}{kT} \right) z^2 dz$$

Можно посмотреть на его свойства.

Например, наиболее вероятное положение молекул определяется из максимума  $dN/dz$ :

$$z_{\text{max.prob.}} = \frac{2kT}{mg}$$

(потом что-нибудь еще допишу про это все)

### О-8.19

Ракета с теплоизолированной кабиной, представляющей собой цилиндр высотой  $h$ , движется с ускорением  $a$  в направлении оси цилиндра. Масса воздуха внутри кабины равна  $M$ . Как изменится энтропия воздуха в кабине после выключения двигателя? Воздух рассматривать как идеальный газ с молярной массой  $\mu$ . Считать, что  $\mu ah/(RT) \ll 1$ , где  $T$  - температура воздуха в кабине. Рассмотреть два случая выключения двигателя: 1) мгновенно; 2) квазистатически.

**Решение** (???)

### О-8.20

Вычислить значение компоненты скорости молекулы, параллельной поверхности Земли,  $v_{\parallel}$  такое, что в среднем у одной молекулы из всей земной атмосферы наблюдалась бы указанная компонента скорости, превышающая  $v_{\parallel}$ . При расчетах принять модель изотермической атмосферы, находящейся в однородном поле тяжести с  $T = 300\text{К}$ ,  $\mu = 29$  г/моль. Распределение молекул по скоростям максвелловское.

**Решение** (???)

### О-8.21

Сосуд разделен перегородкой на две половины. В первой половине находится двухатомный идеальный газ. Вторая откачана. В некоторый момент времени в перегородке открывается небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из первой половины во вторую. Вскоре отверстие закрывается. Найти температуру газа во второй половине сосуда после закрытия отверстия. Рассчитать массу газа во второй половине сосуда. Начальная температура газа равна  $T_0$ , давление  $P_0$ , площадь отверстия  $S$ , время натекания  $\Delta t$ , молярная масса газа  $\mu$ . Стенки сосуда и перегородку считать теплонепроницаемыми, их теплоемкостью можно пренебречь.

**Решение** (???)

### О-8.22

Закрытый сосуд разделен на две равные части вертикальной перегородкой, в верхней части которой имеется очень маленькое отверстие площадью  $b$ . Одна часть наполнена водой до уровня отверстия, уровень воды в другой части находится на расстоянии  $H$  ниже отверстия. Система поддерживается при постоянной температуре  $T$ . Предполагая площадь отверстия  $\sigma$  настолько малой, что в каждой из частей вода практически находится в равновесии с паром, определить время, в течение которого разность уровней воды уменьшится в два раза. Пар приближенно считать идеальным газом; давление насыщенных паров при температуре  $T$  равно  $P_0$ ; площадь основания каждой из частей сосуда равна  $S$ .

**Решение** (???)

### О-8.23

Цилиндр радиусом  $R$  и длиной  $H$ , наполненный химически однородным газом, равномерно вращается в однородном поле тяжести вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти распределение концентрации молекул газа внутри цилиндра, если его ось направлена вертикально.

**Решение** (???)

### О-8.24

Для определения относительных молекулярных масс коллоидальных частиц исследуют распределение их концентрации в поле центробежной силы, возникающей при вращении центрифуги. Найти относительную молекулярную массу  $\mu$  коллоидальных частиц, если известно, что отношение их концентраций в местах, расположенных от оси центрифуги на расстояниях  $r_2$  и  $r_1$ , равно  $\alpha$ . Плотности частиц  $\rho$ , растворителя -  $\rho_0$ . Угловая скорость вращения центрифуги  $\omega$ .

**Решение** (???)

### О-8.25 Теплоемкость вращающегося газа (!?)

Найти, на сколько возрастает теплоемкость вращающегося газа по сравнению с теплоемкостью неподвижного газа. Аргон с молярной массой  $\mu = 40$  г/моль заполняет цилиндр радиуса  $a = 2,5$  см и вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  при температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Измерения производятся во вращающейся вместе с газом системе отсчета.

**Решение** (??) 8.25 Посмотреть на добавку к средней энергии молекул от того, что они находятся во вращении по стандартной формуле для средней энергии распределения  
Переизлучается по Максвеллу (???)

Считаем энергии, разница - тепло, которое нужно подводить (?????)

### О-8.26

Цилиндрический сосуд радиуса  $r_0$ , заполненный газом с температурой  $T_0$ , вращается в невесомости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси, и при этом плотность газа около оси вращения равна  $\rho_0$ . Цилиндр затормаживают. Определить установившееся значение плотности газа  $\rho_1$ . Различия в плотности газа в разных частях сосуда при его вращении считать малыми. Измерения производятся во вращающейся вместе с газом системе отсчета.

### О-8.32

В теплоизолированном цилиндрическом сосуде радиусом  $a$  при температуре  $T_0$  находится 1 моль идеального газа. Сосуд равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Затем оболочка сосуда быстро затормаживается. Пренебрегая теплоемкостью оболочки, найти изменение энтропии  $\Delta S$  газа и его температуры  $\Delta T$  после установления равновесия. Для упрощения расчетов принять, что линейная скорость  $v$  оболочки много меньше скорости звука в газе ( $v \ll v_3$ ), а значит, допустимо пренебречь неравномерностью распределения плотности по радиусу. Молярную массу  $\mu$  и теплоемкость  $C_V$  газа считать известными.

### О-8.34

Как изменится энтропия одного моля идеального газа, находящегося в термостатированном цилиндрическом сосуде радиусом  $a$ , в результате медленного раскручивания сосуда вокруг своей оси до угловой скорости  $\omega \ll a^{-1} \sqrt{RT/\mu}$ , где  $\mu$  - молярная масса газа,  $T$  - его температура?

### О-8.35

Найти момент инерции одного моля идеального газа, помещенного в цилиндрический сосуд радиусом  $R$ , который вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Масса молекулы газа  $m$ , температура газа  $T$ . Вычислить момент инерции в пределе  $T \rightarrow \infty$ .

### О-8.36

Два одинаковых цилиндрических сосуда расположены рядом вертикально в поле тяжести и заполнены одноатомными газами с молярными массами соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ;  $\mu_1 > \mu_2$ . Давление в верхней части обоих сосудов одинаково и равно  $P_0$ , температура одинакова везде и равна  $T$ . На глубине  $h$  (считая от крышки) между сосуда открылась течь площадью  $S$ , ее линейные размеры меньше длины свободного пробега молекул. Определить направление и величину потока энергии  $q$  между сосудах в начальный момент, считая, что относительный перепад давлений по высоте невелик.

**О-8.37**

В вертикальном цилиндрическом сосуде бесконечной высоты с площадью основания  $S$ , помещенном в однородное гравитационное поле, находится 1 моль идеального газа. В момент времени  $t = 0$  в боковой стенке цилиндра на высоте  $h$  пробивают отверстие сечением  $\sigma$  (рис. 431). Определить, как изменяется во времени давление газа около дна сосуда, считая температуру газа  $T$  постоянной, стенки сосуда тонкими, а давление вне сосуда равным 0. Считать, что длина свободного пробега молекул много больше размеров отверстия.

**О-8.38.**

Пользуясь распределением Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию молекул идеального газа в поле  $U(x) = ax^2$ ;  $a > 0$ .

**О-8.39**

Вычислить среднюю энергию  $\bar{E}$  моля одноатомного газа, состоящего из молекул, имеющих два дискретных уровня энергии:  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Показать, что при очень низких температурах теплоемкость такого газа равна  $3R/2$ . Вращением молекул пренебречь. Для упрощения записи формул принять  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon$ .

**О-8.40**

Энергия молекулы в магнитном поле может принимать три значения  $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_{1,2} = \pm \varepsilon$ . Определить энергию  $\varepsilon$  взаимодействия одного моля таких молекул при температуре  $T = \varepsilon/k$  с магнитным полем, где  $k$  - постоянная Больцмана.

**О-8.43**

Двухатомный газ мгновенно нагревается от температуры  $T_0$  до  $T_1$ , после чего происходит постепенное возбуждение колебательных степеней свободы (при этом выполняется условие  $kT_1 \gg \hbar\omega$  и  $kT_0 \lesssim \hbar\omega$ , где  $\omega$  - собственная частота колебаний в молекулах). Считая, что процесс возбуждения колебаний происходит при постоянном объеме, определить изменение температуры и энтропии массы газа  $M$  в этом процессе. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

**О-8.44**

Вакансией называется дефект кристалла, возникающий при удалении атома из узла кристаллической решетки. При быстром охлаждении кристалла число вакансий, соответствовавших термодинамическому равновесию при высокой температуре, почти не изменяется, т. е. вакансии могут быть «заморожены». После чего при низкой температуре происходит медленный процесс установления нового термодинамического равновесия, как говорят, «отжиг» вакансий. Определить изменение температуры алюминиевого образца при адиабатическом отжиге вакансий, замороженных в результате быстрого охлаждения образца от температуры плавления алюминия  $t_1 = 660^\circ\text{C}$  до комнатной температуры  $t_0$ . Теплоемкость алюминия можно определить из классической теории. Энергия образования вакансий в алюминии  $\varepsilon = 0,75$  эВ.

**О-8.45**

Определить среднеквадратичную угловую скорость вращения молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Расстояние между ядрами в молекуле  $\text{N}_2 r = 1,1 \text{ \AA}$ .

**О-8.46**

Найти значение средней энергии  $\bar{\varepsilon}$ , приходящейся согласно классической кинетической теории газов, на одну степень свободы вращательного движения молекулы газа при  $t = 27^\circ\text{C}$ . Найти значение средней квадратичной частоты вращения молекулы кислорода при этих условиях. Момент инерции молекулы кислорода вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии молекулы,  $I_\perp = 19,2 \cdot 10^{-40} \text{ Г} \cdot \text{см}^2$ .

**О-8.48**

Определить энергию вращательного движения водорода  $\text{H}_2$ , находящегося при давлении  $P = 10^5$  Па в объеме  $V = 1$  л. Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.



**О-8.49**

Определить энергию вращательного движения метана  $\text{CH}_4$ , находящегося при давлении  $P = 10^5$  Па в объеме  $V = 1$  л. Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.

**О-8.50**

Какова будет средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода, если первоначально он находился при нормальных условиях, а затем был адиабатически сжат в 32 раза?

**О-8.51**

Найти выражение для энтропии системы не взаимодействующих друг с другом  $N$  электронов, помещенных в магнитное поле с индукцией  $B$ . Магнитный момент электрона  $\mu$  может принимать две ориентации: по полю  $B$  и против поля. Разница в энергиях для этих двух ориентаций  $\Delta E = 2\mu B$ . Электроны находятся в тепловом равновесии со средой, имеющей температуру  $T$ . Рассмотреть частный случай  $kT \gg \Delta E$ .

**О-8.52**

Найти значения средней колебательной энергии теплового движения для двух различных атомных осцилляторов при температуре  $T = 300$  К. Частота колебаний осцилляторов  $\nu_1 = 10^{13}$  Гц и  $\nu_2 = 10^{14}$  Гц. Сравнить полученные значения с соответствующим классическим значением. Найти колебательную теплоемкость  $C_V$  одного моля газа таких осцилляторов для случая  $\nu = 4,7 \cdot 10^{13}$  Гц (кислород  $\text{O}_2$ ).

**О-8.53**

Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести при температуре  $T$ . Температуру газа увеличили в  $\alpha$  раз. На какой высоте  $h$  концентрация молекул осталась прежней?

**О-8.55. Сепаратор-вращатель (?????????)**

После отбора сливок в молочном сепараторе остался обрат - раствор белка (молярная масса  $\mu = 22 \cdot 10^3$  г/моль, плотность  $\rho = 1,1$  г/см<sup>3</sup>) в воде. Моделируя сепаратор цилиндром радиусом  $r_0 = 10$  см, вращающимся вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>, определить, на каком расстоянии  $r_x$  от оси концентрация молекул белка будет равна их средней концентрации в отсутствие вращения. Температура раствора  $T = 295$  К. Распределение молекул по высоте не учитывать.

**Решение.** (хорошая задача, еще раз о ней потом подумаю.)

(!!!!!! повторю центробежные потенциалы, пока такое сразу у меня не выскакивает в голове, хотя и понятно, что должна быть парабола. пропишу в механике!!!)

(нужно догадаться про эффективную массу!!)

То же самое, что и всегда, но нужно быть готовым к центробежным потенциалам.

Потенциальная энергия в поле центробежной силы:

$$U(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 (R^2 - r^2)$$

(???? что за  $R$ ???)

Уменьшение массы молекулы белка из-за силы Архимеда:

$$m_{\text{эфф}} = m_B - m_A = m_B \cdot \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}}} = \frac{\mu}{N_A} \cdot \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}}}$$

Распределение молекул белка по радиусу:

$$n(r) = n_0 \exp \left( -\mu \frac{\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ст}}} \cdot \frac{\omega^2 (r_0^2 - r^2)}{RT} \right) = n_0 \exp (-\alpha (r_0^2 - r^2))$$

Всего частиц:

$$N = \int_0^{r_0} n(r) 2\pi r dr = 2\pi n_0 \cdot \frac{\exp(-\alpha r_0^2) - 1}{2\alpha}$$

Среднее число частиц в объеме для средней плотности  $\langle n \rangle = \frac{N}{\pi r_0^2}$ :

$$n_0 \exp(-\alpha (r_0^2 - r^2)) = \frac{2\pi n_0}{\pi r_0^2} \cdot \frac{\exp(-\alpha r_0^2) - 1}{2\alpha} \rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\exp(\alpha r_0^2) - 1}{\alpha r_0^2}} \approx 8 \text{ см}$$

**О-8.57**

Энергия частиц некоторой системы может принимать три значения  $\mathcal{E}_0 = 0$ ;  $\mathcal{E}_1 = \varepsilon$ ;  $\mathcal{E}_2 = 2\varepsilon$ . Определить число частиц системы, если известно, что при температуре  $T = \varepsilon/k$  полная энергия системы равна  $1000\varepsilon$ .

**О-8.58**

Вычислить температуру  $T$  моля одноатомного газа, состоящего из частиц, имеющих два дискретных уровня энергии:  $-\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_0$ . Разность между числом атомов в состоянии с энергией  $\varepsilon_0$  и числом атомов в состоянии с энергией  $-\varepsilon_0$  равна  $\Delta N$ . Построить график зависимости энтропии газа от внутренней энергии:  $S(U)$ .

**О-8.59**

Вычислить теплоемкость одного моля одноатомного газа, состоящего из частиц, имеющих два дискретных уровня энергии:  $-\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_0$ .

**О-8.60**

Имеется система  $N$  не взаимодействующих между собой частиц со спином 1 (возможные квантовые состояния  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ ). Энергия частицы в состояниях  $m = \pm 1$  равна  $\varepsilon$ , а в состоянии  $m = 0$  равна 0. Вычислить теплоемкость системы  $C$  для случая  $0 < \varepsilon \ll kT$ .

**О-8.61**

Частота колебаний атомов в молекуле газообразного фтора  $F_2$  равна  $\nu = 3,42 \cdot 10^{13} \text{с}^{-1}$ . Определить показатель адиабаты  $\gamma = C_P/C_V$  для фтора при температуре  $T = 300\text{К}$ , когда можно принимать во внимание переход молекул только на первый возбужденный уровень колебаний.

**О-8.62**

Температура ансамбля квантовых гармонических осцилляторов, собственная частота которых равна  $\nu = 10^{12} \text{с}^{-1}$ , повысилась в  $\alpha = 1,5$  раза, при этом заселенность уровня с энергией  $\varepsilon_{20} = 20h\nu$  ( $h$  - постоянная Планка) не изменилась. Определить начальную температуру ансамбля  $T_0$ , если можно принять, что  $h\nu \ll kT_0$ .

**О-8.65**

Оценить, во сколько раз изменится теплоемкость при постоянном давлении  $C'_P$  моля молекул брома  $\text{Br}_2$  при увеличении его температуры от  $T_1 = 230\text{К}$  до  $T_2 = 460\text{К}$ . Характеристическая вращательная температура брома  $T_{\text{вр}} = 0,23\text{К}$ , собственная частота колебаний атомов  $\nu = 9,7 \cdot 10^{12} \text{с}^{-1}$ . Разность энергии между основным и первым возбужденным электронными состояниями равна  $\varepsilon = 0,45 \text{эВ}$ , другие возбужденные состояния не учитывать.

**О-8.66**

Колебательная характеристическая температура молекулы хлора  $\theta = 780\text{К}$ . Определить минимальный номер  $n$  колебательного уровня, на котором при  $T = 1000\text{К}$  находится не более 1% молекул хлора.

**О-8.67**

Колебательная характеристическая температура молекулы йода  $\theta = 305\text{К}$ . Определить максимальный номер  $n$  колебательного уровня, на котором при  $T = 395\text{К}$  находится не менее 1% молекул йода.

**О-8.68**

При температуре  $17^\circ\text{С}$  показатель адиабаты углекислого газа  $\gamma = 1,30$ . Молекула  $\text{CO}_2$  - линейная. При данной температуре кроме полностью возбужденных поступательных и вращательных степеней свободы частично возбуждены две колебательные степени свободы с идентичными спектрами. Оценить длину волны излучения, соответствующего переходам с первого возбужденного колебательного уровня на невозбужденный.

**О-8.69**

Оценить, при какой температуре отношение числа молекул NO, находящихся в чисто вращательных состояниях с квантовыми числами  $l = 1$  и  $l = 0$ , равно  $\alpha = 0,1$ . Межъядерное расстояние в молекуле равно  $d = 1,15 \text{ \AA}$

**О-8.70**

Определить вращательную теплоемкость паров HD вблизи температуры конденсации  $T_K = 22 \text{ К}$ . Для дейтероводорода характеристическая вращательная температура  $\theta = \frac{\hbar^2}{2Ik_B} = 64 \text{ К}$ .

**О-8.73**

Водный раствор двух белков с молярными массами  $\mu_1 = 20 \cdot 10^3 \text{ г/моль}$  и  $\mu_2 = 25 \cdot 10^3 \text{ г/моль}$  находится в цилиндрической центрифуге радиусом  $r_0 = 25 \text{ см}$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega = 250 \text{ с}^{-1}$ . Полные массы белков в смеси и их плотности ( $\rho = 1,1 \text{ г/см}^3$ ) одинаковы. Найти отношение концентраций белков у стенки центрифуги. Температура раствора  $T = 300 \text{ К}$ , плотность воды  $\rho_0 = 1/\text{см}^3$ , распределение молекул по высоте не учитывать.

**О-8.74**

Смесь двух изотопов газообразного хлора  $^{35}\text{Cl}_2$  и  $^{37}\text{Cl}_2$  с исходным отношением концентраций  $\frac{n(^{35}\text{Cl}_2)}{n(^{37}\text{Cl}_2)} = 3,065$  находится в цилиндрической центрифуге. Линейная скорость на периферии вращающегося цилиндра  $v = 5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$ . Найти отношение концентраций изотопов у стенки центрифуги. Температура газа  $300 \text{ К}$ , распределение молекул по высоте не учитывать.

**О-8.75**

В воздухе при нормальных условиях выделен объем  $v = 3,72 \cdot 10^{-20} \text{ см}^3$ . Какова доля времени, в течение которого в этом объеме находится менее двух молекул?

**О-8.76**

В воздухе при нормальных условиях выделен объем  $v = 7,44 \cdot 10^{-20} \text{ см}^3$ . Какова доля времени, в течение которого в этом объеме находится более двух молекул?

**11.14 Задачи на Теплоемкость****11.15 Задачи на флуктуации в термодинамике****О-9.1**

Пусть  $f$  и  $g$  - произвольные физические величины, флуктуирующие вокруг своих средних значений  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$ , так что  $f = \bar{f} + \Delta f$ ,  $g = \bar{g} + \Delta g$ . Найти среднее значение произведения  $fg$ .

**Решение** (???)

**О-9.2**

Выразить средний квадрат флуктуации  $\overline{\Delta f^2} = \overline{(f - \bar{f})^2}$  произвольной физической величины  $f$  через  $\overline{f^2}$  и  $\bar{f}^2$ .

**Решение** (???)

**О-9.3**

Величины  $f$  и  $g$  называются статистически независимыми, если  $\overline{\Delta f \Delta g} = 0$ . Показать, что для статистически независимых величин  $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$ .

**Решение** (???)

**О-9.4\*.**

В закрытом сосуде объемом  $V$  в отсутствие силовых полей находятся  $N$  молекул идеального газа. Определить среднее число молекул и его флуктуации в объеме  $v$ , являющемся малой частью объема  $V$ .

**Решение** (???)

**О-9.5**

В кубическом сосуде емкостью  $V = 1$  л при комнатной температуре находится  $N$  молекул водорода. Найти вероятность  $P$  того, что эти молекулы соберутся в одной половине сосуда. Оценить величину  $N$ , при которой такое событие можно ожидать один раз на Протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной ( $T \sim 10^{10}$  лет).

**Решение** (???)

**О-9.6**

Определить величину объема  $V$  в идеальном газе, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет  $\alpha = 10^{-6}$  от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц  $\bar{n}$  в таком объеме. Газ находится в стандартных условиях в сосуде, объем которого намного превышает заведомо малый объем  $V$ .

**Решение** (???)

**О-9.7**

В идеальном газе выделен объем  $V$ , содержащий  $N$  частиц. Давление  $P$  и температура  $T$  газа постоянны. Какова относительная флуктуация плотности в этом объеме?

**Решение** (???)

**О-9.8**

Оценить предельную чувствительность  $\Delta T/T$  идеального газового термометра, в котором температура измеряется по объему газа при постоянном давлении. Количество газа в термометре равно  $10^{-3}$  моля.

**Решение** (???)

**О-9.9**

В адиабатически изолированном сосуде, содержащем 1 моль кислорода при нормальных условиях, выделен объем размером  $10^{-6} \text{ см}^3$ . Во сколько раз вероятность состояния, в котором температура в этом объеме отличается от средней на  $10^{-3} \text{ К}$  (при сохранении числа молекул внутри этого объема), меньше вероятности равновесного состояния?

**Решение** (???)

**О-9.10**

Определить, в каком объеме гелия средняя относительная флуктуация температуры (при сохранении числа молекул в этом объеме) составляет  $10^{-4}\%$ ? Гелий находится при нормальных условиях в контакте с термостатом.

**Решение** (???)

**О-9.11**

Найти отношение вероятности флуктуации температуры идеального одноатомного газа на величину  $\Delta T = 0,1\text{К}$  в объеме  $v = 1\text{ мкм}^3$  к вероятности равновесного состояния. Объем, занимаемый всем газом,  $V_0 = 25\text{ л}$ , температура  $T_0 = 300\text{К}$ , давление  $P_0 = 10^5\text{ Па}$ .

**Решение** (???)

**О-9.12**

Во сколько раз изменится средний квадрат флуктуаций температуры  $\langle \Delta T^2 \rangle$  одноатомного идеального газа, находящегося в фиксированном малом объеме  $v$  при адиабатическом увеличении объема всей системы  $V$  в 8 раз ( $v \ll V$ )?

**Решение** (???)

**О-9.13**

Два одинаковых сообщающихся сосуда заполнены газом при нормальных условиях. Каким должен быть объем  $V$  каждого сосуда, чтобы вероятность состояния, при котором давление в сосудах изотермически изменится на  $10^{-7}\%$ , была бы в  $e^{100}$  раз меньше, чем вероятность исходного состояния?

**Решение** (???)

**О-9.14**

Теплоизолированный цилиндр, наполненный идеальным одноатомным газом, герметически разделен теплонепроницаемым массивным поршнем на два равных объема  $V_0$ . Определить относительную флуктуацию каждого из этих объемов, если число частиц в цилиндре равно  $N$ .

**О-9.15**

\* Сосуд, в котором находится  $N$  молекул идеального газа, разделен перегородкой на две части с объемами  $V_1$  и  $V_2$ . Найти вероятность того, что в первой части будет содержаться  $N_1$ , а во второй  $N_2$  молекул.

**О-9.16**

Газообразный водород при температуре  $T = 300\text{К}$  и давлении  $P = 10^{-6}\text{ атм}$  вытекает в вакуум из тонкостенного сосуда через отверстие с площадью  $S = 0,1\text{ мм}^2$ . Через определенные промежутки времени на опыте измеряется полный поток атомов через отверстие за интервал времени  $t = 10^{-3}\text{ с}$ . Предполагая, что давление водорода в сосуде остается постоянным, найти относительную флуктуацию этого Потока.

**О-9.17**

Молекулярный пучок  $\text{O}_2$  вылетает в высокий вакуум из камеры с давлением  $P = 10^{-7}\text{ атм}$  и  $T = 300\text{К}$  через систему двух последовательных щелей с размерами  $1\text{ см} \times 2 \cdot 10^{-2}\text{ см}$  каждая, разделенных промежутком в  $1\text{ мм}$ . Оценить интенсивность пучка  $j$  (число частиц, прошедших через вторую щель в секунду). Какова будет относительная флуктуация числа частиц в импульсах с продолжительностью  $\tau = 10^{-3}\text{ с}$ ?

**О-9.18**

Атомный пучок  $\text{He}$  вылетает в высокий вакуум из камеры с давлением  $P = 10^{-4}\text{ Тор}$  и  $T = 300\text{К}$  через систему из двух коаксиальных круглых отверстий с  $d = 0,2\text{ мм}$ , разделенных расстоянием  $l = 1\text{ см}$ . Оценить интенсивность пучка  $j$  (число частиц, прошедших через второе отверстие в секунду). Какова будет относительная флуктуация числа частиц в импульсах с продолжительностью  $\tau = 10^{-3}\text{ с}$ ?

**О-9.19**

Два одинаковых сосуда, в которых находится по моллю одного и того же идеального газа при одинаковых условиях, сообщаются между собой через отверстие. Какое число молекул  $n$  должно перейти из одного сосуда в другой, чтобы возникшее состояние стало в  $\alpha = e$  раз менее вероятным, чем исходное?

**О-9.20**

Решить предыдущую задачу, используя формулу Больцмана  $S = k \ln P$  и термодинамическое выражение для энтропии идеального газа.

**О-9.24**

Зеркальце висит на кварцевой нити, модуль кручения которой равен  $D$ , и освещается таким образом, что его повороты, вызванные ударами окружающих молекул газа, можно регистрировать на шкале. Положению покоя соответствует угол поворота  $\varphi = 0$ . Как изменяется средний квадрат угловой скорости  $\langle \dot{\varphi}^2 \rangle$  и средний квадрат углового отклонения  $\langle \varphi^2 \rangle$ , если момент инерции зеркальца, длину нити и ее диаметр увеличить соответственно в  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  раз? Какое значение получится для числа Авогадро  $N$  из измерений при температуре  $T = 287\text{K}$ , если  $D = 9,43 \cdot 10^{-9}$  дин · см,  $\langle \dot{\varphi}^2 \rangle = 4,18 \cdot 10^{-6}$ ? (Данные взяты из опытов Герлаха и Капплера.)

**О-9.25**

Определить относительную флуктуацию длины свободного пробега молекулы газа, если средняя длина пробега молекулы много меньше размеров сосуда.

**Решение** (???)

**О-9.26**

Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету  $K = 0,12\text{А/Вт}$ . Какова относительная флуктуация  $\alpha$  числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью  $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-11}$  Вт? Время регистрации  $\tau = 10^{-3}\text{с}$

**О-9.27**

Известно, что тепловое движение механизма пружинных весов определяет при заданной температуре  $T$  предел их чувствительности. Оценить предельно малую массу, которая может быть определена при однократном взвешивании на пружинных весах, считая, что коэффициент жесткости пружины равен  $\alpha$ .

**О-9.28**

Найти среднюю квадратичную относительную флуктуацию объема капельки ртути радиусом  $r = 0,01$  мм в воздухе при температуре  $T = 300\text{K}$ . Изотермическая сжимаемость ртути  $\beta_T = 3,9 \cdot 10^{-6}\text{атм}^{-1}$ .

**О-9.29**

Определить относительную флуктуацию числа частиц воздуха в малом объеме  $\Delta V$  как функцию расстояния  $h$  от поверхности Земли. Воздух считать идеальным газом. Его плотность у поверхности Земли  $\rho_0$ , молярная масса  $\mu$ , температура атмосферы постоянна и равна  $T$ .

**О-9.30**

Цилиндрический сосуд вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить относительную флуктуацию числа частиц идеального газа в малом объеме  $\Delta V$  этого сосуда как функцию расстояния  $r$  от оси цилиндра. Плотность газа на оси цилиндра  $\rho_0$ , молярная масса  $\mu$ . Температура газа постоянна и равна  $T$ . Силу тяжести не учитывать.

**О-9.31**

Найти относительную среднеквадратичную изотермическую флуктуацию высоты столбика жидкости в капиллярной трубке, опущенной в широкий сосуд. Плотность жидкости  $\rho$ , ее температура  $T$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ , угол смачивания  $\theta = 0$ . (В равновесии высота столбика жидкости меньше длины капилляра.)

**О-9.32**

Вычислить относительную среднеквадратичную флуктуацию объема мыльного пузыря радиусом  $r$ . Давление воздуха вне пузыря равно  $P_0$ , коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки  $\sigma$ . Считать, что при флуктуациях форма пузыря остается сферической, а температура воздуха в нем - постоянной и равной температуре окружающей среды  $T$ .

**О-9.33**

Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию объема  $V$  газа Ван-дер-Ваальса в условиях, когда объем равен критическому, а  $T$  немного превышает  $T_{кр}$ .

**О-9.34**

Сферический мыльный пузырь, содержащий 0,1 моля воздуха при температуре  $T = 300\text{К}$ , несколько превышающей температуру окружающей среды, плавает в атмосфере комнаты. Считая массу пузыря пренебрежимо малой по сравнению с массой заключенного в нем воздуха, оценить абсолютную среднеквадратичную флуктуацию скорости пузыря.

**О-9.35**

Вычислить среднюю относительную флуктуацию потенциальной энергии  $\Pi$  внутримолекулярных колебаний двухатомной молекулы идеального газа, а также одного моля таких молекул.

**О-9.36**

Найти выражение для флуктуации плотности жидкости или газа, возникающей из-за теплового движения в малом объеме  $V$ , мысленно выделенном в рассматриваемой среде.

**О-9.37\*.**

Вычислить флуктуацию кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа.

**О-9.38\*.**

Малая макроскопическая часть системы (подсистема) является частью большой замкнутой системы. Флуктуации энергии и энтальпии такой подсистемы в принципе можно вычислить так же, как это было сделано для молекулы идеального газа (см. предыдущую задачу). Только вместо максвелловского распределения надо пользоваться его обобщением на макроскопические подсистемы (так называемым распределением Гиббса). Таким путем можно показать, что флуктуации внутренней энергии и энтальпии подсистемы определяются выражениями

$$\langle (\Delta U^2)_V \rangle = kT^2 C_V, \quad \langle (\Delta I^2)_P \rangle = kT^2 C_P$$

где  $C_V$  и  $C_P$  - теплоемкости подсистемы, а индексы  $V$  и  $P$ , как всегда, означают, что в первой формуле остается постоянным объем подсистемы  $V$ , а во второй - давление  $P$ . Пользуясь этими выражениями, найти для подсистемы  $\langle (\Delta T^2)_V \rangle$ ,  $\langle (\Delta S^2)_V \rangle$ ,  $\langle (\Delta S^2)_P \rangle$ ,  $\langle (\Delta P^2)_T \rangle$ , и  $\langle (\Delta P^2)_S \rangle$ .

**Решение** (???)

9.38: Решение. Рассматривая температуру подсистемы  $T$  как функцию  $U$  и  $V$ , пишем

$$(\Delta T)_V = \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_V \Delta U = \frac{\Delta U}{C_V}$$

откуда

$$\langle (\Delta T^2)_V \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_V \rangle}{C_V^2} = \frac{kT^2}{C_V}$$

Аналогично поступаем и в остальных случаях и получаем:

$$\begin{aligned}\langle(\Delta S^2)_V\rangle &= \frac{\langle(\Delta U^2)_V\rangle}{T^2} = kC_V \\ \langle(\Delta S^2)_P\rangle &= \frac{\langle(\Delta U^2)_V\rangle}{T^2} = kC_P \\ \langle(\Delta P^2)_T\rangle &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^2 \langle(\Delta V^2)_T\rangle = -kT \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \\ \langle(\Delta P^2)_S\rangle &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S^2 \langle(\Delta V^2)_S\rangle = -kT \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\end{aligned}$$

**О-9.39.**

Найти молярную энтропию кристаллического  $^{37}\text{Ag}$  при низкой температуре. Ядро  $^{37}\text{Ag}$  имеет спин  $3/2$ . Считать, что температура хоть и близка к абсолютному нулю, но все же достаточна, чтобы обеспечить полную разупорядоченность направлений.

**Решение** (???)

**О-9.40**

Манометр с площадью мембраны  $S \sim 10^{-1}\text{см}^2$  измеряет давление газа  $P \sim 1$  мм рт. ст. при нормальной температуре. Оценить относительную среднеквадратичную флуктуацию показаний манометра, если время его инерционности  $\tau \sim 10^{-3}\text{с}$ .

**Решение** (???)

**О-9.41**

Упругие свойства углеродной нанотрубки (англ. buckytube) описываются моделью, в которой она представляет собой тонкостенный цилиндр из вещества с модулем Юнга алмаза  $E = 10^{12}$  Па. Определить относительную среднеквадратичную флуктуацию радиуса трубки, если ее равновесное значение  $r = 0,45$  нм, толщина стенки  $\Delta = 0,1$  нм, а длина  $l = 10$  нм. Температура  $T = 300\text{К}$ , форма трубки при флуктуациях не меняется.

**Решение** (???)

**О-9.45**

Сосуд разделен перегородкой на два различных объема, так что в одном объеме содержится  $N_1$  атомов газа, в другом  $N_2$ . Температуры и давления газов одинаковы. Затем перегородку убирают, и газы перемешиваются. Вычислить изменение энтропии после смешения, если: а) газы различны; б) газы одинаковы. Газ одноатомный, идеальный.

**Решение** (???)

**О-9.46**

Имеется система  $N$  не взаимодействующих между собой частиц со спином 1 (возможные квантовые состояния  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ ). Энергия частицы в состояниях  $m = \pm 1$  равна  $\varepsilon$ , а в состоянии  $m = 0$  равна 0. Вычислить энтропию  $S$  системы для случая  $\varepsilon \ll kT$ .

**Решение** (???)



## О-9.47

\* Согласно одной из моделей плавления (Леннард-Джонса-Девоншира) систему, состоящую из твердого тела и жидкости, можно рассматривать как систему, содержащую  $N$  одинаковых атомов и  $2N$  мест ( $N$  мест в твердой фазе и  $N$  мест в жидкой). При температурах ниже температуры плавления все атомы расположены в твердой фазе. В результате нагрева в какой-то момент  $N/4$  атомов переходят из твердой фазы в жидкую. Определить изменение энтропии системы при таком переходе системы с температурой, равной температуре плавления, если  $N = N_A$  и начальная энтропия  $S_0 = 0$ .

**Решение** (???)

$$9.47^* \Delta S = R \left( 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) \simeq 1,125R.$$

Решение.  $S = k \ln w$ . При температуре плавления в твердом состоянии системы  $S_0 = 0$  (по условию). При температуре плавления число возможных способов перехода  $N/4$  атомов из  $N$  «твердых мест» и распределения их среди  $N$  мест в жидкой фазе равно

$$w = \frac{N!}{\frac{N}{4}! \frac{3N}{4}!} \frac{N!}{\frac{3N}{4}! \frac{N}{4}!} = \left( \frac{N!}{\frac{N}{4}! \frac{3N}{4}!} \right)^2$$

Отсюда энтропия

$$\begin{aligned} S &= k \ln w = 2k \ln \left( \frac{N!}{\frac{N}{4}! \frac{3N}{4}!} \right)^2 \simeq 2kN \left( \ln N - \frac{1}{4} \ln \frac{N}{4} - \frac{3}{4} \ln \frac{3N}{4} \right) = \\ &= 2kN \left( 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \ln 3 \right) = R \left( 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) \approx 1,125R \end{aligned}$$

## О-9.48

При низких температурах все атомы находятся в узлах кристаллической решетки. При высоких температурах атом может выйти из любого узла решетки, перемещаясь, занять новое положение либо в узле, либо в междоузлии. Пусть  $n$  атомов случайным образом переместились из узлов решетки в междоузлия. Определить максимальное изменение энтропии  $\Delta S_{\max}$  в зависимости от  $n$ , если число узлов  $N$  в кристалле (простой кубической решетки) равно числу междоузлий  $N$ . Считать, что в начальном состоянии энтропия  $S_0 = 0$ .

## О-9.49

Расстояние  $r$  между концами цепочки нуклеиновой кислоты, состоящей из  $N$  звеньев одинаковой длины  $L$  ( $N \gg 1, NL \gg r$ ), можно найти из модели случайного блуждания вдоль прямой  $x$  (рис. 434). Звенья могут свободно поворачиваться в соединениях и ориентироваться случайным образом в пространстве. Поэтому среднеквадратичная проекция каждого звена на ось  $x$  равна  $\sqrt{a_x^2} = L/\sqrt{3}$ . Вычислить изменение энтропии цепи, когда ее концы будут на расстоянии, меньшем  $b$  ( $NL \gg b$ ).

Решение. При  $N \gg 1$  и  $NL \gg r$  функция распределения вероятностей по  $r$  имеет вид распределения Гаусса

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N a_x^2}} e^{-r^2/(2N a_x^2)}$$

Подставляя сюда значение  $\overline{a_x^2} = L^2/3$  (по условию), получим

$$f(r) = \sqrt{\frac{3}{2\pi NL^2}} e^{-3r^2/(2NL^2)}.$$

Вероятность, при которой  $r \leq b$ , равна

$$w = \int_0^b f(r) dr = \sqrt{\frac{3}{2\pi NL^2}} \int_0^b e^{-3r^2/(2NL^2)} dr$$

По условию  $NL \gg b$ , поэтому экспонента под интегралом  $e^{-3r^2/(2NL^2)} \approx 1$ , т. е.  $w = b \sqrt{\frac{3}{2\pi NL^2}}$ . Отсюда искомое изменение энтропии цепи  $\Delta S = k \ln w = k \ln b + \frac{k}{2} \ln \frac{3}{2\pi L^2} - \frac{k}{2} \ln N$ .

Ответ:  $\Delta S = \frac{k}{2} \ln \frac{3}{2\pi L^2} + k \ln b - \frac{k}{2} \ln N$ .

### 11.16 Задачи на явления переноса

(по идее тут как раз идеальная подготовка к кинетике! прорешать этот раздел, прописать теорию к нему!)

#### О-10.1

Сколько столкновений  $z$  испытывает в среднем молекула  $\text{CO}_2$  за одну секунду при нормальном давлении и температуре? Газокинетический диаметр молекулы  $\text{CO}_2 d = 10^{-7} \text{ см}$ .

**Решение** (???)

#### О-10.2

Какое число столкновений  $\nu$  происходит каждую секунду в  $1 \text{ см}^3$  между молекулами кислорода, находящегося при нормальных условиях? Газокинетический диаметр молекулы кислорода  $d = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ см}$

**Решение** (???)

#### О-10.3

Идеальный газ нагревают при постоянном давлении. Как изменяются длина свободного пробега  $\lambda$  и число  $z$  столкновений его молекул в одну секунду с изменением температуры?

**Решение** (???)

#### О-10.4

Идеальный газ сжимают изотермически. Найти зависимости  $\lambda$  и  $z$  от давления.

**Решение** (???)

#### О-10.5

Идеальный газ сжимают адиабатически. Найти зависимость  $\lambda$  и  $z$  от давления.

**Решение** (???)

#### О-10.6

Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений между молекулами газа в единице объема в единицу времени остается неизменным.

**Решение** (???)

#### О-10.7

Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений между молекулами во всем объеме газа в единицу времени остается неизменным.

**Решение** (???)

**О-10.8**

Во сколько раз изменится число столкновений  $z$ , испытываемых одной молекулой в единицу времени, и длина свободного пробега  $\lambda$  молекул одноатомного газа, если в процессе, при котором теплоемкость газа равна  $C_P/2$ , объем газа увеличивается вдвое?

**Решение** (???)

**О-10.9**

Во сколько раз изменится длина свободного пробега  $\lambda$  некоторой частицы в смеси аргона и неона, если концентрацию аргона увеличить вдвое, а концентрацию неона уменьшить в два раза? Исходная концентрация обоих газов одинакова. Отношение радиусов аргона и неона равно 1,2. Рассматриваемая частица значительно легче атомов смеси, а ее размеры существенно меньше размеров атомов смеси.

**Решение** (???)

**О-10.11**

Найти верхний предел давления  $P'$  водорода в сосуде объемом  $V = 1$  л, при котором длина свободного пробега молекулы больше размеров сосуда. Газокинетический диаметр молекулы водорода  $d = 2,2 \cdot 10^{-8}$  см, а температура  $T = 300$  К.

**Решение** (???)

**О-10.12**

Стальной стержень длиной  $l = 20$  см площадью поперечного сечения  $S = 3$  см<sup>2</sup> нагревается с одного конца до температуры  $t_1 = 300^\circ\text{C}$ , а другим концом упирается в лед. Предполагая, что передача тепла происходит исключительно вдоль стержня (без потерь через стенки), подсчитать массу  $m$  льда, растаявшего за время  $\tau = 10$  мин. Теплопроводность стали  $\kappa = 0,16$  ккал/(с · см · °C).

**Решение** (???)

**О-10.13 Распределение температуры между двумя цилиндрами**

Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра  $t_1$ , а внешнего  $t_2$ .

(типичная задача, без проблем она должна решаться, если тема усвоена. пока большие проблемы с теорией!)

**О-10.14 Распределение температуры между двумя сферами**

Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , заполненным проводящим тепло однородным веществом если температуры обеих сфер постоянны и равны  $t_1$  и  $t_2$ .

**О-10.15**

Урановый шар радиусом  $R = 10$  см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия  $q = 100$  Вт/см<sup>3</sup>. Температура воды  $T_0 = 373$  К, теплопроводность урана  $\kappa = 400$  Вт/(м · К). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

**О-10.16**

По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ .

**О-10.17**

Для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в дейтерии (или в смеси дейтерия с тритием) необходимо нагреть вещество до температуры порядка  $10^8\text{К}$ . При таких температурах вещество находится в состоянии плазмы, т. е. полностью ионизованного газа. При этом сильно возрастают потери энергии за счет теплопроводности. Как показывает теория, теплопроводность плазмы пропорциональна абсолютной температуре в степени  $5/2$ , т. е.  $\kappa = aT^{5/2}$ , где для дейтериевой или тритиевой плазмы в системе СГС  $a \approx 10^{-6}$ . Внутри малого объема, выделенного в плазме и имеющего форму шара радиуса  $r_0 = 1\text{ см}$ , поддерживается температура  $T = 10^8\text{К}$ . Вне шара температура убывает в соответствии с законами теплопроводности. Какую мощность  $W$  надо подводить к этому объему, чтобы компенсировать потери энергии за счет теплопроводности? К остальным частям плазмы энергия не подводится.

**О-10.18**

В трубу с водой вставлена термопара медь-константан, один спай которой расположен на оси трубы, а другой - у ее стенки. Труба подвергается воздействию излучения метрового диапазона, которое поглощается водой равномерно во всем объеме, и при этом на  $1\text{ см}$  длины трубы выделяется мощность  $W = 0,01\text{ Вт}$ . Найти термоЭДС в стационарном режиме, если чувствительность термопары  $A = 40\text{ мкВ/К}$ . Теплопроводность воды  $\kappa = 6 \cdot 10^{-3}\text{ Дж/(см} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$ . Конвекцией пренебречь.

**О-10.19**

Тонкая пластинка толщиной  $2a$  изготовлена из сплава, удельная электропроводность которого  $\lambda$  не зависит от температуры, а теплопроводность пропорциональна абсолютной температуре:  $\kappa = \alpha\lambda T$ , где  $\alpha$  - известная постоянная (закон Видемана-Франца).

**О-10.20**

К пластинке длиной  $l$  приложено напряжение  $U_0$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти распределение температуры по толщине пластинки. Температура поверхностей пластинки  $T_0$ .

**О-10.22**

Цилиндрический сосуд длиной  $L$ , боковые стенки которого не проводят тепло, а торцы проводят, зажат между тепловыми резервуарами с температурами  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 436). Внутри сосуда находится тонкий поршень, проводящий тепло, по обе стороны от которого в сосуде содержится по одному молю идеального газа. Определить, какое положение займет поршень после установления равновесия. Теплопроводность газа считать во всем объеме одинаковой.

**О-10.23**

В два рядом стоящих сосуда опущен  $U$ -образный медный стержень с поперечным сечением  $S = 1\text{ см}^2$ . В каждый сосуд налита вода с массой  $M = 900\text{ г}$ . Начальные температуры воды в сосудах  $t_{10} = 65^\circ\text{С}$ ,  $t_{20} = 10,6^\circ\text{С}$ . Находящаяся в воздухе часть стержня имеет длину  $l = 24\text{ см}$ . Через какое время  $\tau$  разность температур между сосудами делается равной  $t_1 - t_2 = 20^\circ\text{С}$ ? Считать, что обмен теплом между сосудами осуществляется исключительно через стержень. Теплопроводность меди  $\kappa = 3,9\text{ Вт/(К} \cdot \text{см)}$ .

**О-10.24**

Сосуд, наполненный водой с массой  $M = 1,2\text{ кг}$ , стоит в печи. Температура его внешних стенок  $t_0 = 150^\circ\text{С}$ . Нагреваемая поверхность воды  $S = 300\text{ см}^2$ , толщина стенок сосуда  $h = 1\text{ см}$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa = 0,008\text{ Вт/(К} \cdot \text{с)}$ . Сколько времени потребуется для нагревания воды от  $t_1 = 14^\circ\text{С}$  до  $t_2 = 100^\circ\text{С}$ ?

**О-10.25**

Капля воды радиусом  $a = 0,2\text{ см}$ , падающая в воздухе с температурой  $t_1 = 0^\circ\text{С}$ , попадает в слой воздуха с температурой  $t_2 = -10^\circ\text{С}$ . Оценить время  $\tau$ , в течение которого она замерзнет. Теплота плавления льда  $q = 335\text{ Дж/г}$ , коэффициент теплопроводности льда  $\kappa = 0,022\text{ Вт/(К} \cdot \text{см)}$ . Теплом, выделяющимся при охлаждении льда, можно пренебречь по сравнению с теплом, выделяющимся при замерзании воды. В этом приближении нет смысла различать плотность льда и воды. Температуру поверхности капли все время считать равной температуре окружающего воздуха.

## О-10.26

Два теплоизолированных тела 1 и 2 с бесконечными теплопроводностями (например, два куска металла) соединены между собой однородным, также теплоизолированным стержнем длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$  и теплопроводностью  $\kappa$ . Теплоемкости тел  $C_1$  и  $C_2$  очень велики по сравнению с теплоемкостью стержня. Найти температуры тел  $T_1$  и  $T_2$  в любой момент времени  $t$ , если при  $t = 0$  они были равны соответственно  $T_{10}$  и  $T_{20}$ . Найти также разность этих температур и время  $t_{1/2}$ , по истечении которого она уменьшается в два раза.

## О-10.27

Определить толщину льда, образующегося в течение заданного времени  $t$  на спокойной поверхности озера. Считать, что температура  $T$  окружающего воздуха все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда ( $T < T_{\text{пл}}$ , где  $T_{\text{пл}}$  - температура плавления льда). Произвести численный расчет, предполагая, что  $T = 263,15\text{K}$ , а время наблюдения равно одним суткам. Для льда (???)

**Решение** (???)

10.27\*  $x = 11,3 \text{ см}$ .

Решение. При охлаждении воды через поверхность большое значение имеет конвекция. Однако конвекция прекращается при  $t < 4^\circ\text{C}$ . Лед образуется за счет превышения оттока тепла в атмосферу над подводом тепла из глубины водоема. Обозначим буквой  $x$  толщину образовавшегося слоя льда к моменту времени  $t$ . Если замерзание идет не очень быстро, как это в действительности имеет место в естественных условиях, то в слое льда установится линейное падение температуры от  $T_{\text{пл}}$  до  $T$ . В этом случае тепло, уходящее наружу с единицы поверхности льда за время  $dt$ , представится выражением  $\kappa \frac{T_{\text{пл}} - T}{x} dt$ . Но ту же величину можно представить в виде  $q\rho dx$ , где  $dx$  - толщина льда, образовавшегося за время  $dt$ ,  $\rho$  - плотность льда,  $q$  - удельная теплота плавления льда. Это приводит к уравнению

$$\kappa \frac{T_{\text{пл}} - T}{x} dt = q\rho dx.$$

Интегрируя уравнение, получим

$$\kappa (T_{\text{пл}} - T) t = \frac{1}{2} q\rho x^2 + A.$$

Примем за начало отсчета времени момент, когда образование льда на поверхности воды только что началось. Тогда  $x = 0$  при  $t = 0$ , а потому  $A = 0$ . В результате получим

$$x = \sqrt{\frac{2\kappa (T_{\text{пл}} - T) t}{q\rho}} = 11,3 \text{ см}$$

## О-10.28

Сферический кусок льда с начальным радиусом  $R_0 = 1 \text{ см}$  погружен в большую массу воды с температурой  $10^\circ\text{C}$ . Предполагая, что теплопередача в жидкости связана только с ее теплопроводностью, определить время  $\tau$ , в течение которого лед полностью растает. Теплопроводность воды  $\kappa = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{см} \cdot ^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $q = 335 \text{ Дж}/\text{г}$ .

## О-10.29

Жидкий гелий при температуре  $T_1$  и давлении насыщенных паров  $P_1$  течет по цилиндрической кварцевой трубке, наружная поверхность которой омывается жидким азотом при температуре  $T_2$ . При таких низких температурах теплопроводность кварца сильно зависит от температуры:  $\kappa = \alpha T^3$ . Внутренний диаметр трубки  $-R_1$ , внешний  $-R_2$ . На какую максимальную длину  $L$  может быть рассчитан такой трубопровод для подачи жидкого гелия с расходом (на выходе)  $q/[c]$ , если допустимые потери жидкости при испарении 50%? Удельная теплота испарения  $\lambda$ .

## О-10.30

Оценить глубину промерзания почвы на широте Москвы за бесснежную зиму (120 суток). Теплопроводность грунта принять  $\kappa \sim 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , его теплоемкость  $c \sim 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ .

**О-10.31**

Найти стационарное распределение температуры в идеальном газе между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга. Температуры пластин  $T_1$  и  $T_2 > T_1$  поддерживаются постоянными. Зависимостью эффективного сечения столкновения молекул от температуры пренебречь.

**О-10.32**

По оси длинного цилиндра, заполненного идеальным газом, расположена тонкая проволока радиусом  $r$ , по которой течет ток. При этом выделяется постоянная мощность на единицу длины  $q[\text{Вт/м}]$ . Температура  $T_0$  внешнего цилиндра поддерживается постоянной, его радиус  $R$ . Найти разность температур  $\Delta T$  между нитью и цилиндром, учитывая зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры. При температуре  $T_0$  теплопроводность известна и равна  $\kappa_0$ .

**О-10.33**

Сфера радиусом  $R$  имеет постоянную температуру  $T_0$  и находится в бесконечной среде идеального газа. На большом удалении от сферы температура газа пренебрежимо мала по сравнению с  $T_0$ . Определить тепловую мощность  $q[B]$ , которая подводится к сфере. Учесть зависимость теплопроводности газа от температуры. При температуре  $T_0$  коэффициент теплопроводности равен  $\kappa_0$ .

**О-10.34**

Вдоль оси длинной вертикальной цилиндрической трубки натянута тонкая металлическая нить, по которой можно пропускать электрический ток. Сначала трубка наполнена воздухом, и нить накалена электрическим током до температуры  $830^\circ\text{C}$ . Затем (при выключенном токе) трубка заполняется водородом при атмосферном давлении. Пренебрегая потерями энергии на лучеиспускание, вычислить температуру нити  $t$ , если по ней пропускается ток прежней мощности. Полагая коэффициенты теплопроводности не зависящими от температуры, принять, что отношение коэффициентов теплопроводности водорода и воздуха равно 5,8. Температуру стенок трубки можно считать равной комнатной температуре  $18^\circ\text{C}$ .

**О-10.37**

В цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ при температуре  $T_0$ . Боковые стенки сосуда не пропускают тепла. Днище сосуда нагревают до  $T = 9T_0$ , а температура поршня поддерживается равной  $T_0$ . Во сколько раз изменится первоначальный объем после установления стационарного режима теплопередачи? Коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Внешнее давление постоянно.

**О-10.38**

Оценить, при каком давлении  $P$  воздуха в нем может распространяться звук с частотой  $\nu = 100$  кГц при комнатной температуре.

**О-10.39**

Оценить, на какое расстояние распространяется звук чатать, что затухание звука обусловлено только теплопроводностью.

**О-10.40**

Найти среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекулы кислорода при нормальном давлении, если коэффициент диффузии кислорода при том же давлении и температуре  $0^\circ\text{C}$  равен  $D = 0,19\text{см}^2/\text{с}$ .  $\rightarrow$  вак.

**О-10.42**

Найти изменение энтропии Рис. 437 64 г газообразного кислорода в процес- се, в результате которого коэффициент теплопроводности вырос в 2 раза, а коэффициент диффузии остался неизменным.

**О-10.43**

Как изменится коэффициент диффузии молекул одноатомного газа при его адиабатическом расширении в 8 раз?

**О-10.44**

Найти теплоемкость политропического процесса при котором коэффициент диффузии в идеальном газе остается постоянным.

**О-10.45**

Газообразный водород при нормальных условиях, непрерывно протекая по трубе, на небольшом участке трубы диффундирует через стенку с чрезвычайно мелкими порами в откачиваемое пространство (рис. 437). Во сколько раз изменится концентрация

**О-10.42**

Найти изменение энтропии Рис. 437 64 г газообразного кислорода в процессе, в результате которого коэффициент теплопроводности вырос в 2 раза, а коэффициент диффузии остался неизменным.

**О-10.43**

Как изменится коэффициент диффузии молекул одноатомного газа при его адиабатическом расширении в 8 раз?

**О-10.44**

Найти теплоемкость политропического процесса при котором коэффициент диффузии в идеальном газе остается постоянным.

**О-10.45**

Газообразный водород при нормальных условиях, непрерывно протекая по трубе, на небольшом участке трубы диффундирует через стенку с чрезвычайно мелкими порами в откачиваемое пространство (рис. 437). Во сколько раз изменится концентрация

**О-10.46**

Два сосуда разделены пористой перегородкой. В начальный момент первый сосуд наполнен гелием ( $A_1 = 4$ ), а второй ксеноном ( $A_2 = 131$ ) при нормальных условиях. Перегородка не влияет на скорость диффузии, она лишь препятствует перемешиванию газов при заполнении системы. Через некоторое время концентрация Хе в Не на расстоянии  $l = 1$  см от перегородки стала равной 0,01 атомных процентов. На каком расстоянии  $x$  от перегородки в этот момент концентрация Не в Хе также составит 0,01 атомных процентов? Сравнить также частоту соударений  $Z_1$  атомов гелия в ксеноне с частотой соударений  $Z_2$  атомов ксенона в гелии.

**О-10.47**

Сосуд представляет собой сферическую бомбу радиусом  $R_0$ , к которой пристыкована трубочка радиусом  $r$  и длиной  $l$ . Трубочка присоединена к масс-спектрометру, а весь сосуд заполнен некоторым газом. Концентрация газа  $n$ , температура  $T$ , молярная масса  $\mu$ . Эффективное сечение рассеяния молекул б таково, что  $(nr)^{-1} \gg \sigma \gg (nR_0)^{-1}$ . Внутри бомбы в некоторый момент времени возникает примесь изотопа того же газа, незначительно отличающегося по массе. Оценить время, через которое масс-спектрометр сможет его зарегистрировать.

**О-10.48**

В атмосфере газа  $A$  имеется точечный источник другого газа  $B$ , испускающий атомы с тепловыми скоростями, которые диффундируют в газе  $A$ . Длина свободного пробега атома  $B$  в газе  $A$  равна  $\lambda$ . В среднем после  $n$  соударений ( $n \gg 1$ ) атомы  $B$  соединяются с атомами  $A$ , образуя молекулы  $AB$ . Определить средний квадрат удаления атомов  $B$  от источника до момента образования молекул  $AB$ .

**О-10.49**

Свободный пробег молекул  $H_2$  в Не при нормальных условиях равен приблизительно  $3 \cdot 10^{-5}$  см. Найти среднеквадратичное смещение  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  молекул  $H_2$  в Не за 1с; за 100с. Как изменится результат, если: 1) давление Не увеличить в 4 раза; 2) температуру Не увеличить в 4 раза; 3) давление и температуру увеличить в 4 раза?

**О-10.53**

Рассеянный физик, уходя в отпуск, забыл в лаборатории тонкостенный резиновый мешок с гелием объемом около 20 л. Когда он вернулся, весь гелий продиффундировал наружу. Оценить изменение энтропии гелия. В обычном воздухе на один атом гелия приходится  $10^7$  молекул других газов. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать гелий обратно в мешок?

**11.17 Задачи на явление переноса 2****О-10.54 Скорость дрейфа в поле по длине свободного пробега (??)**

Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе равна  $10^{-5}$  см, найти (приблизительно) среднюю скорость дрейфа  $v$  иона в этом газе под действием однородного электрического поля  $E = 300$  В/см. Температура газа комнатная.

**О-10.55**

При прохождении электрического тока через слабо ионизованный газ энергия ионов превышает тепловую энергию нейтральных атомов. Оценить величину напряженности электрического поля, при которой это превышение энергии становится порядка тепловой энергии  $kT$ , если давление газа  $P = 0,01$  мм.рт.ст., а эффективное сечение рассеяния ионов на атоме  $\sigma = 5 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

**О-10.56**

Оценить температуру  $T$  электронов, двигающихся под действием электрического поля напряженностью  $E = 100$  В/см в воздухе при нормальных условиях. Концентрация электронов мала, сечение столкновения их с молекулами воздуха  $\sigma \approx 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

**О-10.57**

При прохождении быстрых заряженных частиц через камеру Вильсона, наполненную аргоном при давлении  $P = 1$  атм и насыщенными парами воды, происходит образование ионов аргона, являющихся центрами конденсации паров воды. Считая, что движение ионов обусловлено только диффузией, оценить ширину следа частиц, если конденсация наступает через  $\tau = 0,01$  с после пролета частиц. Эффективное сечение рассеяния ионов аргона на атомах  $\sigma = 10^{-15}$  см<sup>2</sup>. Относительная атомная масса аргона  $A = 40$ , температура  $T = 300$  К.

**О-10.60**

Для защиты от газообразных радиоактивных продуктов распада ториевую руду засыпают песком. При этом радиоактивный газ торон  ${}^{220}_{86}\text{Rn}$ , выделяемый рудой, во время прохождения через песок в значительной мере распадается. Вычислить расстояние, на котором концентрация торона падает в  $10^5$  раз. Период полураспада торона  $T = 54,5$  с, а коэффициент диффузии его в песке  $D = 0,04$  см<sup>2</sup>/с. Диффузию считать одномерной.

**О-10.61**

Космические лучи блуждают в Галактике, отклоняясь в межзвездных магнитных полях. Этот процесс подобен диффузии. Найти время  $\tau$ , за которое частицы пройдут путь порядка размеров Галактики  $R \approx 5 \cdot 10^{22}$  см, если эффективная длина свободного пробега  $\lambda \approx 3 \cdot 10^{20}$  см.

**О-10.62**

Изотермическая эффузия газа через пористую перегородку (поры которой малы по сравнению с длиной свободного пробега) используется для разделения изотопов. Естественная смесь изотопов помещается в сосуд с пористыми стенками. Газ, прошедший через поры сосуда в результате эффузии, откачивается и собирается в специальном резервуаре. С ним производится второй цикл эффузии, затем третий и т. д., пока не будет достигнута требуемая степень разделения изотопов. Сколько циклов эффузии необходимо произвести, чтобы отношение концентраций частиц легкого и тяжелого изотопов увеличилось в 10 раз, если относительные молекулярные массы их равны соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ?

**О-10.63**

Вязкость азота при нормальных условиях составляет величину  $\eta = 16,8 \cdot 10^{-5}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Найти значение средней длины свободного пробега  $\lambda$  молекул азота при этих условиях.



**О-10.69**

Камера объемом  $V = 100\pi$  откачивается при комнатной температуре с помощью идеального насоса (т. е. улавливающего все попадающие в него молекулы воздуха) через трубку радиусом  $r = 2\text{ см}$  и длиной  $L = 1\text{ м}$ . Оценить время откачки от давления  $P_1 = 10^{-4}$  Тор до давления  $P_2 = 10^{-7}$  Тор.

**О-10.70**

Из большого объема откачивается воздух при давлении  $10^{-4}$  Тор и температуре  $T = 300\text{ К}$  через трубку длиной  $L = 2\text{ м}$  и радиусом  $r = 10\text{ см}$ . Насос имеет производительность  $V_1 = 10(0)\Omega/\text{с}$ . При какой производительности насоса  $V_2$  будет обеспечена такая же скорость откачки (т.е. масса газа за одну секунду), если насос присоединен непосредственно к откачиваемому объему?

**О-10.71**

Сосуд через трубку откачивается идеальным (т. е. улавливающим все попадающие в него молекулы) высоковакуумным насосом. Из-за течей в стенках сосуда давление в нем не падает до нуля, а после длительной откачки устанавливается на уровне  $10^{-6}$  Тор. Как изменится этот предельный вакуум, если диаметр трубки уменьшить вдвое?

**О-10.72**

Из сосуда воздух вытекает в атмосферу через трубку, изготовленную из хорошего теплоизолятора. Найти массу газа  $m$ , вытекающую за секунду из трубки, если давление и температура в сосуде равны соответственно  $P_1$  и  $T_1$ , наружное давление  $-P_0$ , длина трубки равна  $l$ , ее диаметр  $-d$ . Поток газа в трубке считать ламинарным; пренебречь зависимостью вязкости  $\eta$  от температуры.

**О-10.73**

Вода вытекает из широкого открытого сосуда через цилиндрический капилляр радиусом  $R = 1\text{ мм}$  и длиной  $l = 10\text{ см}$ , расположенный у дна сосуда. Какая энергия  $N$  расходуется каждую секунду на выделение тепла, когда высота воды в сосуде  $h = 5\text{ см}$ ? Температура окружающего воздуха равна  $20^\circ\text{С}$ .

**О-10.75**

\* Течение ультраразреженного газа через трубу можно рассматривать как процесс диффузии. Коэффициент диффузии определяется исключительно столкновениями молекул газа со стенками трубы. Столкновениями молекул между собой можно полностью пренебречь. Роль длины свободного пробега играет диаметр трубы  $2r$ . Исходя из этих представлений, оценить число молекул  $N$ , каждую секунду проходящих через поперечное сечение цилиндрической трубы длиной  $l$ , если на одном конце трубы концентрация молекул газа равна  $n_1$ , а на другом - нулю. Течение считать изотермическим.

**О-10.76**

Решить предыдущую задачу в предположении, что на одном конце трубы концентрация молекул равна  $n_1$ , а на другом  $-n_2$ . Результат сравнить с формулой Пуазейля.

**О-10.77 Два сосуда**

Два сосуда одинакового объема соединены трубками. Диаметр одной из трубок очень велик, а другой очень мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, находящегося в сосуде. Первый сосуд поддерживается при постоянной температуре  $T_1 = 800\text{ К}$ , а второй - при постоянной температуре  $T_2 = 200\text{ К}$ . В каком направлении будет перетекать газ по узкой трубке, если перекрыть краном широкую трубку? Какая масса  $m$  газа перейдет при этом из одного сосуда в другой, если общая масса газа в обоих сосудах равна  $M$ ?

**О-10.78**

Стекланный сосуд с толщиной стенок  $l = 5\text{ мм}$  и объемом  $V = 1\text{ л}$  наполнен азотом и окружен вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиусом  $a = 0,1\text{ мм}$ . Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время  $\tau$ , по истечении которого давление газа в сосуде уменьшится в  $e$  раз, если температура поддерживается постоянной и равной  $T = 300\text{ К}$ .

**Решение** (???)

$$10.81^* u \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

Решение. При оценке эффекта можно предположить, что одна шестая молекул воздуха движется направо, а одна шестая - налево. Молекулы, движущиеся параллельно плоскости диска, можно не принимать во внимание. Скорости молекул  $v$  будем считать одинаковыми. Пусть диск движется равномерно со скоростью  $u$  менее нагретой поверхностью вперед. Число ударов, испытываемое квадратным сантиметром этой поверхности в одну секунду:  $n(v+u)/6$ . Для оценки эффекта можно предположить, что в системе отсчета, движущейся вместе с диском, молекула отражается со скоростью  $v_2$ , соответствующей температуре  $T_2$  поверхности. В неподвижной системе скорость отразившейся молекулы будет  $v_2 + u$ , а изменение скорости  $v_2 + u + v$ . Следовательно, давление газа на менее нагретую поверхность

$$P_2 = \frac{nm}{6}(v+u)(v_2+u+v)$$

Аналогично, давление на более нагретую поверхность

$$P_1 = \frac{nm}{6}(v-u)(v_1+v-u)$$

При установившемся движении  $P_2 = P_1$ . Из этого условия нетрудно получить

$$u = \frac{v_1 - v_2}{4v + v_1 + v_2} v \approx \frac{v_1 - v_2}{6} \approx \frac{v}{12} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v^2} \approx \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \frac{T_1 - T_2}{T} \approx 1,4 \text{ м/с}$$

**О-10.82 Два диска с вязким воздухом между ними (????)**

Определить, на какой угол  $\varphi$  повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии  $h = 1$  см вращается с угловой скоростью  $\omega = 50$  рад/с второй такой же диск. Радиус дисков  $R = 10$  см, модуль кручения нити  $f = 100$  дин · см/рад, вязкость воздуха считать равной  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин · с/см<sup>2</sup>. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

**Решение** (???)

$$10.82. \varphi = \frac{\pi \eta \omega}{2fh} R^4 = 81^\circ.$$

**Об учете других эффектов (???)** (?? эффект Казимира если учесть, что будет? или так нельзя, ибо если есть газ, то уже не вакуум между ними.)

**О-10.83**

Решить предыдущую задачу в предположении, что диски помещены в сильно разреженный воздух с давлением  $P = 10^{-4}$  Тор, когда длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с расстоянием между дисками. Для упрощения расчета считать, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, равными средней скорости молекул воздуха  $v = 450$  м/с

**Решение** (???)

10.83. Р е ш е н и е. Рассмотрим кольцо на вращающемся диске с внутренним радиусом  $r$  и наружным радиусом  $r + dr$ . С площади этого кольца ежесекундно отражаются  $nv \cdot 2\pi r dr / 4$  молекул. Каждая из них уносит момент количества движения  $mr^2\omega$ , который передается неподвижному диску. Полный момент импульса, передаваемый в одну секунду неподвижному диску, легко найти интегрированием. Приравнявая его моменту силы  $f\varphi'$ , действующему со стороны закрученной нити, получим для угла закручивания

$$\varphi' = \frac{3\pi P}{8vf} \omega R^4 = \frac{3}{4} \frac{Ph}{\eta v} \varphi \approx 1^\circ$$

$\varphi$  - значение угла закручивания, соответствующее тому случаю, когда расстояние между дисками велико по сравнению с длиной свободного пробега молекулы. (См. предыдущую задачу.)

**О-10.84**

Известно, что в атмосфере Венеры, состоящей в основном из  $\text{CO}_2$ , сплошной облачный покров на высоте  $H = 50$  км вращается относительно планеты вокруг ее оси с периодом  $T = 3,6 \cdot 10^4$  с. Считая движение ламинарным, оценить мощность  $N$  на единицу площади поверхности, диссипирующую при этом движении вблизи экватора. Атмосфера предполагается изотермической с температурой  $T = 600$  К, радиус Венеры  $R = 6000$  км.

## О-10.85

Две частицы с радиусами  $a_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  см и  $a_2 = 6 \cdot 10^{-6}$  см взвешены в растворе с вязкостью  $\eta = 10^{-2}$  П. Оценить время  $\tau$ , которое расстояние между частицами изменится на  $\Delta l = 10^{-2}$  см. Температура раствора  $T = 300$  К.

## О-10.86

В жидкости находятся одинаковые броуновские частицы, концентрация которых зависит только от одной координаты  $x$ . Выравнивание концентрации частиц происходит вследствие диффузии. Выразить коэффициент диффузии броуновских частиц  $D$  через средний квадрат смещения частицы в направлении оси  $X$  за время  $\tau$ .

**Решение** (?? это большая задача...?)

10.86. Решени е. Пусть в одной жидкости в отсутствие внешних силовых полей распределены тождественные броуновские частицы с концентрацией  $n(x)$ , меняющейся только в направлении оси  $X$ . Вычислим диффузионный поток  $\Gamma$  таких частиц через произвольное сечение, перпендикулярное оси  $X$ . Возьмем в этом сечении бесконечно малую площадку  $dS$  (рис. 484).

Выделим группу броуновских частиц, которые за время  $\tau$  смещаются на один и тот же вектор  $\Delta \mathbf{r}_i$ . Пусть будет велика не только полная концентрация броуновских частиц  $n$ , но и концентрация их  $n_i(x)$  в каждой группе. Число частиц  $i$ -й группы  $dN_i$ , проходящих через площадку  $dS$  за время  $\tau$ , будет равно числу их в косом цилиндре  $ABB'A'$  с основанием  $AB$  и образующей  $\Delta r_i$ , т.е.

$$dN_i = \int n_i(x) dV$$

Линейные размеры площадки  $dS$  можно выбрать малыми по сравнению с  $\Delta r_i$ . Тогда элемент объема  $dV$  можно представить в виде  $dV = dS dx$  и написать

$$dN_i = dS \int n_i(x) dx = dS \int_{-\Delta x_i}^0 n_i(x_0 + \xi) d\xi$$

где  $x_0$  - координата центра  $O$  площадки  $dS$ . Выбрав  $\tau$ , а следовательно, и  $\Delta x_i$  достаточно малыми, разложим функцию  $n_i(x_0 + \xi)$  по степеням  $\xi$  и оборвем это разложение на линейном члене. Тогда

$$dN_i = n_i(0) dS \int_{-\Delta x_i}^0 d\xi + \left( \frac{dn_i}{dx} \right)_{x=x_0} dS \int_{-\Delta x_i}^0 \xi d\xi,$$

или после интегрирования

$$dN_i = dS \left[ n_i \Delta x_i - \frac{1}{2} \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2 \right]$$

Аргумент  $x_0$  мы опустили, предполагая, что концентрация  $n_i$  и ее производная  $dn_i/dx$  берутся в центре площадки  $dS$ .

Избыток  $dN$  броуновских частиц, проходящих через площадку  $dS$  в положительном направлении оси  $X$ , над числом частиц, проходящих в противоположном направлении, найдется суммированием предыдущего выражения по всем группам частиц:

$$dN = dS \int_i n_i \Delta x_i - \frac{dS}{2} \sum_i \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2$$

Среднее значение первой суммы равно нулю. Действительно, концентрации  $n_i$  относятся к центру площадки  $dS$ , а смещения броуновских частиц в положительном и отрицательном направлениях равновероятны. Для вычисления второй суммы заметим, что по определению среднего

$$n \overline{\Delta x^2} = \sum n_i (\Delta x_i)^2$$

Величины  $\Delta x_i$  как независимые параметры не зависят от  $x$ . Средний квадрат смещения  $\overline{(\Delta x)^2} \equiv \overline{\Delta x^2}$  также не может зависеть от  $x$  ввиду однородности жидкости и отсутствия силовых полей. Поэтому дифференцирование предыдущего соотношения по  $x$  дает

$$\overline{\Delta x^2} \frac{dn}{dx} = \sum \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2$$

В результате для среднего значения  $d\bar{N}$  получаем

$$d\bar{N} = -dS \frac{\overline{\Delta x^2}}{2} \frac{dn}{dx}$$

Чтобы найти средний диффузионный поток броуновских частиц  $\Gamma$ , надо эту величину разделить на  $dS$  и  $\tau$ . Таким путем получаем

$$\Gamma = -\frac{\overline{\Delta x^2}}{2\tau} \frac{dn}{dx}$$

Отсюда видно, что выравнивание концентраций броуновских частиц можно рассматривать как процесс диффузии с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta x^2}}{\tau}$$

По смыслу вывода под  $\overline{(\Delta x)^2}$  следует понимать «среднее по совокупности частиц». Однако в силу одинаковости последних и отсутствия взаимодействия между ними это среднее может быть заменено «средним по времени» для одной частицы.

### О-10.88

Используя результаты решения двух предыдущих задач, найти связь между средним квадратом смещения броуновской частицы за время  $\tau$  в каком-либо определенном направлении  $\overline{\Delta x^2}$  с подвижностью этой частицы. Какой вид принимает эта связь для шарообразной частицы радиусом  $a$ ? (По формуле Стокса подвижность частицы  $B = 1/(6\pi\eta a)$ , где  $\eta$  - динамическая вязкость Жидкости.)

### О-10.89

Определить среднее квадратичное горизонтальное перемещение зерен гуммигута в воде при температуре  $20^\circ\text{C}$  за 1 мин, если известно, что их радиус  $a = 0,5$  мкм, а вязкость воды  $\eta = 0,01\text{П}$ .

### О-10.90

Согласно Эйнштейну и Смолуховскому, число Авогадро  $N$  можно определить, наблюдая броуновское движение зерен гуммигута и измеряя среднее квадратичное перемещение их в некотором фиксированном направлении. Чему равно это число, если среднее квадратичное перемещение за 5 мин зерен гуммигута радиуса  $a = 0,385$  мкм в глицерине при температуре  $20^\circ\text{C}$  равно  $1,5$  мкм? Вязкость глицерина  $\eta = 1,49\text{П}$ .

### О-10.91

При обработке экспериментальных данных, относящихся к броуновскому движению, удобнее и проще вычислять не  $\langle \Delta x^2 \rangle$ , а  $\langle |\Delta x| \rangle$ . Предполагая, что распределение смещений  $\Delta x$  подчиняется закону ошибок Гаусса, найти выражение для среднего смещения броуновской частицы  $\langle |\Delta x| \rangle$  за время  $\tau$ .

### О-10.87

Подвижностью  $B$  незаряженной броуновской (или какойлибо другой) частицы называется коэффициент пропорциональности между скоростью установившегося движения ее под действием постоянной силы  $f$  и величиной самой силы:

$$u = Bf$$

Взвесь одинаковых броуновских частиц в жидкости находится в поле силы тяжести. Написать выражение для суммарного потока частиц вследствие диффузии и поля силы тяжести. В стационарном состоянии суммарный поток должен равняться нулю. В то же время стационарное распределение броуновских частиц по высоте дается формулой Больцмана (барометрической формулой). Исходя из этих соображений, установить связь между подвижностью частицы и коэффициентом диффузии.

### О-10.95

Оценить минимальный радиус  $R_{\min}$  сферических водяных капель тумана, начиная с которого происходит падение этих капель на Землю. Температура атмосферы постоянна  $T = 300\text{К}$ . Вязкость воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}\text{П}$ .

### О-10.96

В сферическом сосуде радиусом  $R = 0,015$  см при температуре  $T = 300\text{К}$  и давлении в несколько атмосфер в воздухе находятся шарообразные частицы различного радиуса  $r$ . Плотность пылинки  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. При столкновении со стенкой частицы прилипают к ней. Коэффициент прилипания частиц не зависит от их размера и не уменьшается со временем. Концентрация пыли достаточно мала, так что столкновениями пылинок друг с другом можно пренебречь. Оценить радиус частиц пыли, которые будут наиболее долго удерживаться в воздухе.

**О-10.97**

Определить величину среднеквадратичного момента импульса капельки воды радиусом  $r = 10^{-5}$  см, совершающей броуновское движение при  $T = 300$  К.

**О-10.98**

В микроскоп рассматривают тонкий слой крови. Какое время потребуется, чтобы заметить броуновское смещение эритроцитов (красных кровяных телец), если минимальное расстояние, которое можно зафиксировать, составляет  $l = 10^{-6}$  м? Вязкость крови  $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3}$  Па с; эритроцит считать шариком радиусом  $r = 3 \cdot 10^{-6}$  м. Температура  $t = 27^\circ\text{C}$ .

**О-10.99**

Оценить размер алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости с плотностью  $\rho = 1/\text{см}^3$  и вязкостью  $\eta = 1$  П, для которой скорость вязкого падения сравнивается со скоростью теплового движения при комнатной температуре. Будут ли выпадать в осадок такие частицы в алюминиевой краске?

**О-10.107**

Открытый цилиндрический сосуд с теплоизолированными стенками частично заполнен водой, которая понемногу испаряется. Установившаяся температура воды на  $4^\circ$  ниже температуры окружающего воздуха (300 К). Оценить разность концентраций пара над поверхностью воды и вне сосуда, считая, что перемещение пара вверх определяется диффузией. Средний свободный пробег молекул воды и воздуха считать одинаковым. Молярная теплота испарения воды  $\Lambda = 44$  кДж/моль.

**О-10.108**

Вода из чайного блюдца испаряется в комнате за время порядка суток. Оценить соотношение между числом вылетающих из жидкости в секунду молекул  $N_1$  и числом возвращающихся в жидкость  $N_2$ . Можно считать, что испарение небольшого количества воды практически не изменяет влажность воздуха, равную 70%. Какими явлениями определяется число возвращающихся в жидкость молекул? Оценить время испарения, пренебрегая токами воздуха в комнате.

**О-10.109**

Найти плотность потока  $j$  молекул жидкости, испаряющихся с единицы площади поверхности в единицу времени в вакуум при температуре  $T$ , если известно давление насыщенных паров равен отношению числа молекул пара, прилипающих к поверхности Жидкости, к полному числу молекул пара, ударяющихся за это время о поверхность жидкости.

**О-10.125**

При температуре  $T$  вязкость некоторого газа с относительной молекулярной массой  $\mu$  равна  $\eta$ . Оценить по этим данным плотность сжиженного газа. Газ считать идеальным.

**11.18 Задачи на явление переноса 3****О-10.126**

При теоретическом описании свойств реальных газов энергию взаимодействия двух атомов как функцию расстояния часто записывают в форме потенциала Леннарда-Джонса  $U(r) = 4\varepsilon_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$ . Принимая, что для ксенона относительная атомная масса  $A = 131$ ,  $\varepsilon_0 = 0,025$  В,  $r_0 = 4\text{\AA}$ , оценить в рамках этой модели коэффициент самодиффузии ксенона в критической точке.

У к а з а н и е. Эффективное сечение столкновений определить из условия, что энергия взаимодействия при максимальном сближении частиц порядка кинетической энергии.

**О-10.127**

При теоретическом описании свойств реальных газов энергию взаимодействия двух атомов как функцию расстояния часто записывают в форме потенциала Леннарда-Джонса  $U(r) = 4\varepsilon_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$ . Принимая, что для неона относительная атомная масса  $A = 20$ ,  $\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  В,  $r_0 = 2,8\text{\AA}$ . Определить в рамках этой модели температурную зависимость вязкости неона в пределе низких плотностей и высоких температур, т. е. когда  $kT \gg \varepsilon_0$ . (См. указание к задаче 10.126.)

**О-10.128**

Доска Гальтона имеет вид квадрата со стороной  $H$ , в который вбиты  $N \gg 1$  гвоздиков. Сверху в нее запускают стальной шарик радиусом  $r$ , который много больше радиуса гвоздика, но много меньше расстояния между ними. Оценить, насколько шарик отклонится от вертикальной прямой, проведенной через точку бросания, когда достигнет нижнего края доски.

**О-10.133**

Тонкостенная шарообразная колба с радиусом  $R$  заполнена газом. Колба облучается излучением, для которого стенки прозрачны. В стационарном режиме в единице объема газа поглощается мощность излучения  $q$ . Стенки колбы охлаждаются так, что их температура равна  $T_0$ . Коэффициент теплопроводности газа при этой температуре равен  $\kappa_0$ . Считая, что теплоотвод определяется теплопроводностью газа, определить температуру в центре колбы.

**О-10.134**

Медный шарик находится в воздухе при нормальном давлении. Вдали от шарика поддерживается постоянная температура  $T_0 = 273\text{К}$  в постоянная относительная молярная концентрация примеси озона  $\alpha = 0,01(1\%)$ . Молекулы озона, диффундируя в воздухе, попадают на поверхность шарика и мгновенно вступают к химическую реакцию с выделением некоторого количества теплоты  $q$  на одну молекулу. В стационарном режиме температура шарика установилась на величину  $\Delta T = 40\text{К}$  выше, чем температура воздуха вдали от шарика. Определить величину  $q$ . Зависимостью теплопроводности воздуха ( $\kappa = 2,4 \cdot 10^{-2}\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ) и коэффициента диффузии озона в воздухе ( $D = 1,6 \cdot 10^{-5}\text{м}^2/\text{с}$ ) от температуры пренебречь.

**О-10.135**

Тонкостенная длинная цилиндрическая пробирка радиусом  $R$  заполнена газом. Пробирка облучается излучением, для которого ее стенки прозрачны. В стационарном режиме в единице объема газа поглощается мощность излучения  $q$ . Стенки пробирки охлаждаются так, что их температура равна  $T_0$ . Коэффициент теплопроводности газа при этой температуре равен  $\kappa_0$ . Считая, что теплоотвод определяется теплопроводностью газа, определить температуру на оси пробирки вдали от ее концов.

**О-10.137**

Над горизонтальной неподвижной плоскостью на расстоянии  $L$  от нее движется с горизонтальной скоростью  $v = 3\text{м}/\text{с}$  параллельная ей другая плоскость. Между плоскостями находится вязкая Жидкость (вязкость  $\eta = 1,48\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa = 0,285\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{с})$ ). Движение жидкости ламинарное. Температура плоскостей поддерживается равной  $t_0 = 20^\circ\text{С}$ . Коэффициенты вязкости и теплопроводности от температуры не зависят. Определить стационарное распределение температуры между плоскостями. Учесть, что при вязком трении в единице объема выделяется тепловая мощность, равная  $q = \eta \left(\frac{dv}{dz}\right)^2$ .

**О-10.138**

Над горизонтальной массивной плитой из материала с большой теплопроводностью расположен диск, плоскость которого параллельна поверхности плиты. Диск вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, скорость вращения равна  $v = 80\text{об}/\text{мин}$ . Температура плиты равна  $20^\circ\text{С}$ . Диск изготовлен из теплоизолирующего материала. Пространство между плитой и диском заполнено вязкой жидкостью с коэффициентом вязкости  $\eta = 1,48\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$  и коэффициентом теплопроводности  $\kappa = 0,285\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{град})$ . Радиус диска равен  $R = 20\text{см}$ , расстояние между поверхностью плиты и нижней поверхностью диска равно  $L = 2\text{мм}$ . Пренебрегая зависимостью  $\kappa$  и  $\eta$  от температуры, определить распределение установившейся температуры на нижней поверхности диска. Движение жидкости ламинарное. Учесть, что при вязком трении в единице объема выделяется тепловая мощность, равная  $q = \eta \left(\frac{dv}{dz}\right)^2$ .

**О-10.139**

В сосуде с водой взвешены частицы ртути, способные прилипать к стенкам сосуда. Оценить время, за которое вода очистится от взвеси, задавшись определенными размерами частиц. При каких условиях сила тяжести будет существенно влиять на процесс?

**О-10.140**

В тропосфере, то есть до высоты  $H = 11,5\text{Км}$ , температура воздуха убывает со скоростью  $\alpha = 6,5\text{К}/\text{км}$ . Определить длину свободного пробега молекул на верхней границе тропосферы. Температура на уровне моря  $T_0 = 288\text{К}$ , давление  $P_0 = 10^5\text{Па}$ . Газокинетический диаметр молекул  $d = 3,6 \cdot 10^{-10}\text{м}$ .

**О-10.141**

В тропосфере, то есть до высоты  $H = 11,5 \text{ км}$ , температура воздуха убывает со скоростью  $\alpha = 6,5 \text{ К/км}$ . На какой высоте длина свободного пробега молекул равна  $\lambda = 10^{-7} \text{ м}$ ? Температура на уровне моря  $T_0 = 288 \text{ К}$ , давление  $P_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Газокинетический диаметр молекул  $d = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

**О-10.142**

По медной трубе диаметром  $d = 10 \text{ см}$  и длиной  $L = 20 \text{ м}$  из реактора выводятся ультрахолодные нейтроны. Их движение по трубе с шероховатыми стенками носит характер одномерной диффузии. Оценить, во сколько раз возрастет поток нейтронов по трубе с гладкими стенками с зеркальным отражением нейтронов. Столкновениями между нейтронами пренебречь.

**О-10.143**

Оценить отношение скоростей испарения двух одинаковых капель воды радиусом  $R = 1 \text{ см}$ , одна из которых находится в вакууме, а другая - в сухом воздухе. Длина свободного пробега молекул воды в воздухе  $\lambda = 10^{-5} \text{ см}$ .

**О-10.144**

В длинном и тонком металлическом стержне возбуждены продольные колебания. Модуль Юнга для материала стержня  $E = 10^{12} \text{ дин/см}^2$ , удельная теплоемкость  $c = 0,1 \text{ кал/град}$ , теплопроводность  $\kappa = 1 \text{ кал/(см} \cdot \text{град} \cdot \text{с)}$ . В какой области частот колебания будут изотермическими?

**О-10.145**

Две колбы с одинаковыми объемами  $V$  соединены трубкой длиной  $L$  с малым поперечным сечением  $S (L \cdot S \ll V)$ . В начальный момент времени одна из колб наполнена смесью газов  $\text{CO}$  и  $\text{N}_2$  с парциальными давлениями, соответственно,  $P_0$  и  $P - P_0$ , а другая колба наполнена  $\text{N}_2$  под давлением  $P$ . Коэффициент диффузии  $\text{CO}$  в  $\text{N}_2$  или  $\text{N}_2$  в  $\text{CO}$  равен  $D$ . Определить зависимость парциального давления  $\text{CO}$  в первой колбе от времени.

**О-10.146**

В центре сферы радиусом  $R_1 = 5 \text{ см}$  находится шарик радиусом  $R_0 = 0,5 \text{ см}$ , на поверхности которого протекает химическая реакция с постоянной скоростью  $W_s = 3,0 \cdot 10^{-8} \text{ моль/(см}^2 \cdot \text{с)}$ . Температура сферы поддерживается постоянной. Тепловой эффект реакции  $Q = 8,0 \cdot 10^4 \text{ Дж/моль}$ . Теплоотвод определяется теплопроводностью смеси исходных веществ и продуктов реакции. Коэффициент теплопроводности  $\kappa = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Вт} \cdot \text{Т/}(\text{см} \cdot \text{К})$  не зависит от температуры. Определить разность температур  $T_0 - T_1$  между поверхностями шарика и сферы.

**О-10.149**

В объеме сферического сосуда радиусом  $R = 2 \text{ см}$  протекает реакция с образованием атомов водорода. Скорость реакции  $W_0 = 6,0 \cdot 10^{19} \text{ атомов/}(\text{см}^3 \cdot \text{с})$ . При столкновении со стенкой сосуда атомы водорода захватываются с вероятностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Определить среднюю концентрацию атомов водорода в сосуде, если температура в сосуде  $T = 788 \text{ К}$ , а коэффициент диффузии  $D = 60 \text{ см}^2/\text{с}$ .

**О-10.150**

Шарообразные частицы золота радиусом  $a_1 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  и шарообразные частицы соли  $\text{NaCl}$  радиусом  $a_2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  испытывают броуновское движение в воде, имеющей температуру  $T = 293 \text{ К}$ . При сближении частиц в результате случайных блужданий на малое расстояние  $R = 8 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  друг от друга частица золота и частица соли коагулируют (т. е. слипаются). Оценить полное число коагуляций частиц  $v$  золота и соли в единице объема в единицу времени, если концентрации золота и соли  $n_1 = n_2 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , а вероятность тройных, четверных и т. д. сближений частиц пренебрежимо мала. Вязкость воды  $\eta = 0,01 \text{ дин} \cdot \text{с/см}^2$ .

**О-10.151**

Шарообразные частицы оксида железа  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  радиусом  $a_1 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  и шарообразные частицы соли  $\text{KCl}$  радиусом  $a_2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  испытывают броуновское движение в воде, имеющей температуру  $T = 293 \text{ К}$ . При сближении частиц в результате случайных блужданий на малое расстояние  $R = 18 \cdot 10^{-8} \text{ см}$  друг от друга частица  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и частица  $\text{KCl}$  коагулируют (т. е. слипаются). Оценить полное число коагуляций  $\vee$  частиц  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и  $\text{KCl}$  в единице объема в единицу времени, если концентрации  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и

$KCl n_1 = n_2 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , а вероятность тройных, четверных и т. д. сближений частиц пренебрежимо мала. Вязкость воды  $\eta = 0,01$  дин  $\text{с}/\text{см}^2$ .

### О-10.152

Оценить максимальный размер водяной капли, падение которой в воздухе может быть еще описано с использованием формулы Стокса.

### О-10.154

**Решение** (???)

$$10.154. \tau = \frac{3R_0^2}{8\pi a^3 D n_0} \left[ 1 - \left( \frac{V}{V_0} \right)^{2/3} \right] \approx 4900 \text{ с} \approx 1,4 \text{ час.}$$

### О-10.155

Температура воздуха внутри жилого помещения равна  $T_1 = 295 \text{ К}$ , а за окном  $-T_0 = 273 \text{ К}$ . Сечение столкновений молекул изменяется с температурой таким образом, что коэффициент вязкости газа в указанном диапазоне температур можно аппроксимировать формулой  $\eta = \eta_0 (T/T_0)^{0,7}$ , где  $\eta_0$  - значение коэффициента вязкости воздуха при температуре  $T_0$ . Во сколько раз среднее число двойных столкновений молекул воздуха, происходящих в единичном объеме за единицу времени в помещении, отличается от соответствующей величины за окном?

**Решение** (???)

$$10.155. \frac{z(P, T_1)}{z(P, T_0)} = \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{1,7} \approx 0,88.$$

### О-10.156

Атмосферное давление за бортом самолета, летящего на большой высоте, равно  $P_1 = 26,5 \text{ кПа}$ , а температура  $-T_1 = 223 \text{ К}$ , в пассажирском салоне давление равно  $P_0 = 75 \text{ кПа}$ , а температура  $-T_0 = 295 \text{ К}$ . Сечение столкновений молекул изменяется с температурой таким образом, что коэффициент теплопроводности газа в указанном диапазоне температур можно аппроксимировать формулой  $\kappa = \kappa_0 (T/T_0)^{0,86}$ , где  $\kappa_0$  - значение коэффициента теплопроводности воздуха при температуре  $T_0$ . Во сколько раз число столкновений, испытываемых молекулой воздуха в единицу времени с другими молекулами воздуха внутри пассажирского салона, отличается от соответствующей величины в окружающей самолет атмосфере? Различия в химическом составе воздуха внутри самолета и в окружающей атмосфере можно не учитывать, зависимость теплоемкости воздуха от температуры пренебречь.

**Решение** (???)

$$10.156. \frac{z(P_0, T_1)}{z(P_1, T_1)} = \frac{P_0}{P_1} \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{0,86} \approx 2,2.$$

### О-10.157

У открытого конца горизонтально расположенной теплоизолированной трубки поддерживаются постоянными температура воздуха  $T_0$ , а также небольшая концентрация  $n_0$  примеси, содержащейся в воздухе. Попадая на тонкую пластинку, прикрепленную к теплоизолированному дну трубки, молекулы примеси поглощаются, так что их концентрацию вблизи пластинки можно считать равной нулю. При поглощении каждой молекулы выделяется количество тепла  $w$ . Учитывая зависимость коэффициентов переноса от температуры, определить температуру пластинки  $T_n$ . Известно, что при температуре  $T_0$  коэффициент диффузии примеси в воздухе равен  $D_0$ , а коэффициент теплопроводности воздуха  $\kappa$ .

## 11.19 Задачи на Теплопроводность

## 11.20 Задачи на Броуновское движение

### О-10.113.

Найти изменение энтропии 88 г углекислого газа, если в результате некоторого процесса его вязкость увеличилась в  $\sqrt{2}$  раз, а коэффициент диффузии - вдвое.



**О-10.114.**

Найти изменение энтропии 132 г углекислого газа в процессе, в результате которого его динамическая вязкость уменьшилась в 2 раза, а число ударов молекул об 1 см<sup>2</sup> стенки сосуда за 1 с уменьшилось в 4 раза.

**О-10.115.**

Как изменится скорость падения маленькой капли жидкости в камере Вильсона после адиабатического увеличения объема в 2 раза. Воздух в камере для простоты считать идеальным газом.

**О-10.116.**

При измерении вязкости методом Стокса стальные шарики плотностью  $\rho$  и радиусом  $r$  сбрасываются точно в центре сосуда в жидкости с плотностью  $\rho$  и температурой  $T$ . Каково среднеквадратичное расстояние  $\langle \Delta R^2 \rangle$  точек удара шариков о дно сосуда от его центра, если высота столба жидкости равна  $H$ ?

**О-10.117.**

Установка для разделения изотопов методом газовой эффузии состоит из  $N$  каскадов, в каждом из которых газообразная смесь изотопов проходит через малое отверстие в тонкой перегородке, разделяющей две камеры. Прошедший во вторую камеру газ откачивается и направляется в первую камеру следующего каскада. Во всех первых камерах поддерживается одинаковое давление, во много раз большее давления газа во всех вторых камерах. Определить обогащение смеси легким изотопом т. е. отношение конечной относительной концентрации  $a = n_{\text{лег}}/n_{\text{тяж}}$  к начальной, для случая водорода (изотопы с атомными массами 1 и 2) при  $N = 20$ .

**О-10.118.**

Найти разность молярных энтропий для молекулярного кислорода в условиях эффекта Кнудсена внутри стакана с пористыми стенками и вне его, если температура внутри стакана составляет  $T_1 = 350\text{K}$ , а вне его  $-T_2 = 300\text{K}$

**О-10.119.**

Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа  $n$ . Определить среднюю кинетическую энергию атомов в единице объема между пластинами. Предполагается, что в пространстве между пластинами атомы имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

**О-10.120.**

Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа  $n$ , масса атома  $m$ . Определить плотность теплового потока  $q$  между пластинами. Предполагается, что атомы газа в пространстве между пластинами имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

**О-10.121.**

Цилиндр с теплоизолированными стенками разделен на две равные части теплопроводящей перегородкой, слева от которой находится фтористый водород  ${}^1\text{H}^{19}\text{F}$ , а справа  ${}^{20}\text{Ne}$ . В торцевых стенках находится по одному очень маленькому отверстию площадью  $S$ , через которые молекулы газов начинают вытекать в вакуум, причем из-за теплообмена температуры газов можно считать одинаковыми. Определить тепловой поток  $j$  через перегородку в начальной стадии процесса, когда изменением концентрации молекул газа в цилиндре можно пренебречь. Начальная температура  $T$  и давление газов  $P$  одинаковы.

**О-10.122.**

В центре куба, составленного из чередующихся пластин разного материала, в результате ядерной реакции образовались моноэнергетические нейтроны. Найти отношение времен, через которые эти нейтроны будут зарегистрированы у граней куба, параллельной и перпендикулярной плоскости пластин. Пластины имеют одинаковую толщину и содержатся в одинаковом количестве. Длины свободного

пробега нейтронов в материале пластин равны соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  много меньше толщины пластины).

### О-10.123.

Пучок молекул азота, летящих со скоростью  $10^7$  см/с, проходит через сантиметровый слой азота, находящегося при давлении  $10^{-4}$  Тор и температуре  $0^\circ\text{C}$ . Оценить, как быстро будет расти температура азота, если плотность пучка такова, что через каждый квадратный сантиметр проходит  $10^6$  молекул в секунду. Диаметр молекул считать равным  $3,7 \cdot 10^{-8}$  см.

**? Число оборотов вокруг центра масс молекулы азота** Оцените, сколько оборотов вокруг центра масс совершают молекулы азота между столкновением друг с другом при нормальных условиях. Межатомное расстояние в молекуле азота  $a = 1,1 \cdot 10^{-8}$  см, эффективный диаметр молекулы азота  $d = 3,7 \cdot 10^{-8}$  см.

**Решение** (???? не готов по формулам к таким задачам!? 1-ю часть буду доделывать к этой задаче!!! формул много пропишу еще!)

Пусть она повернется на  $N$  углов  $2\pi$  за время  $\tau$  между столкновениями. тогда  $\omega = \frac{2\pi N}{\tau}$ , отсюда

$$N = \frac{\omega \tau}{2\pi}$$

Длина между столкновениями - это длина свободного пробега

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p_0\sigma},$$

где  $n$  - число молекул,  $n = p_0/kT$ .

Подставим в  $\tau = \lambda/\bar{v}$  величины  $\lambda$ ,  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  и  $\sigma = \pi d^2$ :

$$\tau = \frac{kT}{\sqrt{2}p_0\pi d^2} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} = \frac{1}{4p_0d^2} \sqrt{\frac{mkT}{\pi}}$$

Далее  $\omega$  найдем из теоремы о равнораспределении энергии:

$$\frac{I\omega^2}{2} = kT$$

где  $I = \frac{m}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2$  - момент инерции относительно центра.

$$\omega = \frac{4}{a} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Подставим, получим

$$N = \frac{kT}{\sqrt{3}\pi^2 d^2 p_0 a} \approx 160$$

## 11.21 Задачи на фазовые переходы

### О-11.1\*

В закрытом сосуде при  $0^\circ\text{C}$  находится один моль воды, Какое количество тепла надо затратить, чтобы повысить температуру системы до  $100^\circ\text{C}$  и чтобы при этом вся вода превратилась в насыщенный пар? Удельная теплота испарения воды при  $100^\circ\text{C}$  и постоянном давлении  $\lambda = 539$  кал/г, Давлением насыщенного пара при  $0^\circ\text{C}$  и теплоемкостью стенок сосуда пренебречь, Пренебречь также объемом воды по сравнению с объемом ее насыщенного пара.

**Решение**

**О-11.2**

Какую работу совершает за один цикл  $1-2-3-4-5-6-1$  машина Карно, рабочим телом которой является один моль воды, испытывающий во время работы машины фазовые превращения в пар и обратно (рис. 438). Изотермам  $1-2-3-4$  и  $5-6$  соответствуют температуры  $T_1 = 500$  К и  $T_2 = 373$  К. Нижняя изотерма  $5-6$  целиком лежит в двухфазной области вещества, так что в 6 имеется только жидкость, а в 5 - только пар, Кривые  $1-6$  и  $4-5$  - адиабаты, Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2,26$  кДж/г (при  $T = 373$  К).

**О-11.4**

, Рассмотрев цикл Карно для системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара, и применив к нему теорему Карно, выразить производную давления насыщенного пара по температуре  $dP/dT$  через удельные объемы пара и жидкости  $v_{\pi}, v$  и удельную теплоту парообразования  $\lambda$ .

**О-11.5**

, Ромбическая сера превращается в моноклинную при  $t = 96,5^{\circ}\text{C}$ . При атмосферном давлении удельная теплота превращения  $q = 2,2$  кал/г, Скачок удельного объема серы при фазовом превращении  $\Delta v = 0,014$  см<sup>3</sup>/Г, Найти смещение  $\Delta T$  точки фазового перехода серы при изменении давления на  $\Delta P = 1$  атм.

**О-11.6**

, Уксусная кислота при атмосферном давлении плавится при температуре  $t = 16,6^{\circ}\text{C}$ , Разность удельных объемов жидкой и твердой фаз уксусной кислоты  $\Delta v = 0,16$  см<sup>3</sup>/г, Точка плавления уксусной кислоты смещается на  $\Delta T = 1$  К при изменении давления на  $\Delta P = 41$  атм, Найти удельную теплоту плавления  $q$  уксусной кислоты.

**О-11.7**

, Найти давление насыщенного водяного пара при температуре  $101^{\circ}\text{C}$ . Считать пар идеальным газом.

**О-11.8**

, Найти повышение температуры кипения воды при увеличении давления ее насыщенного пара на одну избыточную атмосферу вблизи точки кипения воды при давлении воздуха 1 атм, Удельная теплота испарения воды в этих условиях  $\lambda = 539$  кал/г.

**О-11.9**

, Часть закрытого сосуда занимает вода при температуре  $T = 300$  К, Найти относительное изменение плотности насыщенного пара при увеличении температуры на 10 К, Теплота испарения при этой температуре  $\lambda = 580$  кал/г, Пар считать идеальным газом.

**О-11.10**

, Найти температуру приготовления пищи в скороварке, если диаметр отверстия предохранительного клапана скороварки  $d = 5$  мм, а масса грузика, закрывающего клапан,  $m = 60$  г, Теплоту парообразования для воды принять равной  $\lambda = 2260$  кДж/кг, Пар считать идеальным газом.

**О-11.11**

, Насыщенный водяной пар, находящийся в цилиндре под поршнем при  $100^{\circ}\text{C}$ , нагревают на  $1^{\circ}\text{C}$  и перемещают поршень так, что пар остается насыщенным, а конденсации не происходит, Найти относительное изменение объема пара, считая его идеальным газом, Теплота парообразования воды при  $100^{\circ}\text{C}$   $\lambda = 539$  кал/г.

**О-11.12**

, Найти удельный объем водяного пара  $v_{\pi}$  при  $100^{\circ}\text{C}$  и нормальном давлении, если известно, что при давлении 735,5 мм рт. ст, температура кипения воды равна  $99,1^{\circ}\text{C}$ , Удельная теплота парообразования при  $100^{\circ}\text{C}$   $\lambda = 539$  кал/г.

**О-11.13**

, Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом (рис. 439), Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период заполнен водой, Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения, Глубина канала  $h = 90$  м, Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**О-11.15**

, На дне сосуда, заполненного воздухом, разлито немного воды, Сосуд закрыт поршнем, который медленно выдвигают, поддерживая при этом температуру постоянной, Когда объем увеличивается в два раза, вода исчезает, Определить давление пара, а также полную массу воды (в жидкой и парообразной фазах) и массу воздуха в камере, если известно, что вначале давление было  $P_1 = 3$  атм, а затем стало  $P_2 = 2$  атм, а начальный объем  $V_0 = 22,4$  л, Молярные массы воды и воздуха считать известными.

**О-11.16**

, В закрытом сосуде с объемом  $V_0 = 5$  л находится 1 кг воды при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ , Пространство над водой занято насыщенным водяным паром (воздух выкачан), Найти увеличение массы насыщенного пара  $\Delta m$  при повышении температуры системы на  $\Delta T$  а з а н и е, Пар считать идеальным газом, Удельным объемом воды пренебречь по сравнению с удельным объемом пара.

**О-11.17**

, Вода в сосуде нагревается до температуры кипения и затем быстро на лифте поднимается на 30-й этаж ( $h = 100$  м), так что изменением температуры воды за время подъема можно пренебречь, Оценить относительное изменение массы воды к моменту, когда после подъема прекратится процесс кипения, Теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г · К), Пар считать идеальным газом.

**О-11.18**

, Вычислить удельную теплоту парообразования  $\lambda_1$  для воды при температуре  $T_1 = 323$  К, зная эту величину при температуре  $T_2 = 373$  К ( $\lambda_2 = 539$  Кка/), Теплоемкость воды считать постоянной, т. е, не зависящей от  $P$  и  $T$ , Пар считать идеальным газом, теплоемкость которого можно вычислить по классической теории, Удельным объемом воды по сравнению с удельным объемом пара пренебречь.

**О-11.19**

, С помощью цикла, составленного из ветвей кривых, проходящих по границе фаз ввода-пар" и двух двухфазных изотерм при  $T_1 = 323$  К и  $T_2 = 373$  К, определить удельную теплоту парообразования воды при 323 К  $\lambda_{(323)}$ , Сжимаемостью жидкости пренебречь, пар считать идеальным газом, Известны  $\lambda_{(373)} = 2260$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c_B = 4,18$  Дж/(г К), молярная теплоемкость водяного пара  $C_V = 3,3R$ .

**О-11.20**

, При определении влажности по точке росы было установлено, что конденсация водяного пара наблюдается при охлаждении поверхности гигрометра до температуры  $10^\circ\text{C}$ , Найти значение абсолютной влажности, т. е, количество водяного пара (в граммах), находящегося в  $1 \text{ m}^3$  воздуха, считая, что удельная теплота парообразования воды не зависит от температуры и равна  $\lambda = 2480$  Дж/г, Пар считать идеальным газом.

**О-11.23**

, В запаянной  $U$ -образной трубке содержится эфир и его пары (рис. 440), Оценить чувствительность этого дифференциального конденсационного термометра  $h/\Delta T$  при  $T_1 \sim T_2 \sim 300$  К, когда давление насыщенного пара  $P \sim 1$  атм, а плотность жидкости  $0,7 \text{ г/см}^3$ , Молярная теплота испарения эфира  $\lambda = 3,88 \cdot 10^4$  Дж/моль, Температура кипения эфира при давлении 1 атм  $T_K = 467$  К.

**О-11.24**

, Вывести формулу, выражающую зависимость давления насыщенного пара от температуры при следующих предположениях: 1) пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона; 2) удельная теплота испарения  $\lambda$  является линейной функцией температуры, т. е,  $\lambda = \lambda_0 - aT$ ; 3) удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом насыщенного пара.

**О-11.25**

, Определить температуру кипения воды  $T$  на высоте  $H$  от поверхности Земли, Атмосферу предполагать изотермической с температурой  $T_a$ , Давление воздуха на поверхности Земли равно  $P_0$ , Удельная теплота парообразования  $\lambda$  не зависит от температуры.

**О-11.26**

, Найти изменение температуры кипения воды на одной из вершин Памира ( $H = 7150$  м), Температуру воздуха считать постоянной и равной  $0^\circ\text{C}$ .

**О-11.27**

, Из большого теплоизолированного объема выкачан воздух, В нем установлены два открытых сосуда с эфиром, один на три метра выше другого, Определить разность температур эфира в сосудах после установления равновесия, если в начальный момент температура в обоих сосудах  $t = 27^\circ\text{C}$ , Удельная теплота испарения эфира  $\lambda = 355$  Дж/г Удельным объемом жидкого эфира по сравнению с удельным объемом паров пренебречь.

**О-11.28**

, Терморегулятор автомобильного двигателя представляет собой цилиндрический сосуд с гофрированными стенками (сильфон), наполненный спиртом и его парами, При низкой температуре воды давление в сильфоне малое, он сжат и закрывает клапан, ослабляя таким образом циркуляцию воды в системе охлаждения двигателя (рис, 441), При достаточно высокой температуре воды сильфон растягивается и открывает клапан, вода начинает циркулировать сильнее, охлаждается и т. д, Какова должна быть сила давления пружины клапана, чтобы клапан открывался при температуре  $t = 90^\circ\text{C}$ ? Диаметр сильфона  $d = 20$  мм, точка кипения спирта при  $P_0 = 1$  атм  $t_0 = 78^\circ\text{C}$  (формула спирта  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ), Удельная теплота испарения спирта  $\lambda = 850$  Дж /г.

**О-11.29**

, Насыщенный водяной пар при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$  адиабатически расширяется, при этом его температура падает на  $\Delta T = 1$  К. Считая, что равновесие между жидкой и газообразной фазами успевает установиться, определить, какая часть водяного пара при этом конденсируется, Пар считать идеальным газом.

**О-11.30**

, Насыщенный водяной пар при температуре  $T = 300$  К подвергается адиабатическому сжатию и адиабатическому расширению, В каком из этих процессов пар превращается в ненасыщенный и в каком в пересыщенный?

**О-11.31**

, Теплоизолированный сосуд разделен неподвижной теплопроводящей перегородкой на две равные части (рис, 442), В части I находятся 1,2 моля азота и 1 моль паров воды с относительной влажностью  $\varphi = 0,9$ ; в части II - 4 моля неона, Температура газов  $T_0 = 373$  К, Отделяющий неон от внешней среды поршень АВ начинают медленно выдвигать, При каком относительном увеличении объема части II начинается конденсация паров воды на стенках сосуда? Молярная теплота парообразования воды  $\lambda = 41$  кДж/моль, теплоемкостью стенок пренебречь.

**О-11.32**

, Пары воды вытекают в атмосферу через капилляр диаметром  $d = 2 \cdot 10^{-3}$  и длиной  $l = 0,1$  м из закрытого сосуда, в который налита вода, Сосуд поддерживается при температуре  $T = 374$  К, Оценить количество тепла  $\dot{Q}$ , подводимое к сосуду за 1 с, Теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г, Пар считать идеальным газом, Предполагается, что в каждый момент времени успевает установиться равновесие между водой и паром, Вязкость паров воды принять равной  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-5}$  П · с.

**О-11.33**

При  $0^\circ\text{C}$  давление насыщенного водяного пара над льдом  $P_1 = 4,58$  мм рт. ст, Удельная теплота плавления льда при  $0^\circ\text{C}$   $q = 80$  кал/г, Удельная теплота испарения воды при  $0^\circ\text{C}$   $\lambda = 596$ /г, Найти давление насыщенного водяного пара над льдом при температуре  $t = -1^\circ\text{C}$ .

**О-11.34**

, Кусок льда помещен в адиабатическую оболочку при температуре  $0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении. Как изменится температура льда, если его адиабатически сжать до давления  $P = 100 \text{ атм}$ ? Какая доля льда  $\Delta m/m$  при этом расплавится? Удельные объемы воды  $v_v = 1 \text{ см}^3/\text{г}$ , льда  $v = 1,09 \text{ см}^3/\text{г}$ , Теплоемкости воды и льда связаны соотношением  $c \approx 0,6 \text{ кДж/кг}\cdot^\circ\text{C}$ .

**О-11.35**

, В Антарктиде под почти четырехкилометровой толщей льда (3,7 км) обнаружены озера пресной воды. Определить температуру воды в этих озерах, если удельная теплота плавления льда  $q = 335 \text{ кДж/кг}$ , а отношение плотности льда и плотности воды составляет 0,917.

**О-11.42**

Определить изменение энтропии системы, состоящей из воды и насыщенного пара, при переходе ее в насыщенный пар. Начальная температура системы  $T_1$ , конечная  $T_2$ . Начальная масса пара  $m_1$ , конечная  $m_2$ . Зависимостью удельной теплоты парообразования  $\lambda$  от температуры пренебречь. Пар рассматривать как идеальный газ.

**О-11.43**

, Три фазы 1, 2, 3 находятся в равновесии друг с другом в тройной точке (рис. 443). Их удельные объемы в этой точке равны соответственно  $v_1, v_2, v_3$ . Пусть  $P_{12} = P_{12}(T), P_{23} = P_{23}(T), P_{31} = P_{31}(T)$  - уравнения кривых равновесия между фазами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1. Показать, что в тройной точке имеет место соотношение

$$(v_1 - v_2) \frac{dP_{12}}{dT} + (v_2 - v_3) \frac{dP_{23}}{dT} + (v_3 - v_1) \frac{dP_{31}}{dT} = 0.$$

**О-11.44**

, Определить приближенно давление и температуру (по шкале Цельсия) в тройной точке воды, пользуясь следующими данными. Давление насыщенного пара над жидкой водой  $P_1 = 4,579 \text{ мм рт. ст.}$  при  $t = t_1 = 0^\circ\text{C}$ ,  $P_2 = 4,926 \text{ мм рт. ст.}$  при  $t = t_2 = 1^\circ\text{C}$ . Удельный объем льда при  $0^\circ\text{C}$  и нормальном атмосферном давлении ( $P_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ )  $v_1 = 1,091 \text{ см}^3/\text{г}$ ; удельный объем воды при тех же условиях  $v_2 = 1 \text{ см}^3/\text{г}$ . Удельная теплота плавления льда  $q = 80 \text{ кДж/кг}$ .

**О-11.45**

Температура воды в тройной точке  $t = 0,0075^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления льда при той же температуре  $q_{12} = 80 \text{ кДж/кг}$ . Удельный объем водяного пара в тройной точке  $v_3 = 206000 \text{ см}^3/\text{г}$ . По сравнению с ним удельными объемами льда  $v_1$  и воды  $v_2$  можно пренебречь. Что больше: давление насыщенного пара над водой  $P_1$  или над льдом  $P_2$  при температуре  $0^\circ\text{C}$ ? Чему равна разность  $P_1 - P_2$ ?

**О-11.46**

, В цилиндре под поршнем помещена вода, над которой находится смесь воздуха и насыщенных водяных паров. Начальное давление на поршень равно атмосферному (1 атм). Затем давление на поршень увеличивают в два раза. На сколько процентов изменится давление насыщенного водяного пара в цилиндре, если температура ( $T = 300 \text{ К}$ ) сохраняется неизменной?

**О-11.47**

В закрытом сосуде при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  находится влажный воздух с относительной влажностью  $\varphi = 80\%$ . На сколько градусов надо понизить температуру стенок сосуда, чтобы на них начала выпадать роса? Удельная теплота парообразования воды при  $20^\circ\text{C}$   $\lambda = 600 \text{ кДж/кг}$ . Водяной пар рассматривать как идеальный газ.

**Решение** (???)

11.47: Решение. Для приближенной оценки в уравнении

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\lambda}{Tv} \approx \frac{\mu \lambda P}{RT^2}$$

заменим производную  $dP/dT$  отношением конечных приращений. Получим

$$\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{RT_1^2}{\mu \lambda P_1}$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — давления насыщенного пара при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Давление пара в воздухе при температуре  $T_1$  и относительной влажности  $\varphi$  будет  $\varphi P_1$ , а потому  $P_2 = \frac{T_2}{T_1} \varphi P_1$ . Подставляя эти значения в предыдущее соотношение, найдем

$$T_2 - T_1 = \frac{\varphi - 1}{\mu\lambda - \varphi RT_1} RT_1^2 = -3,3 \text{ K}.$$

Для нахождения более точного решения получаем

$$\ln \left( \frac{\varphi T_2}{T_1} \right) = \frac{\mu\lambda}{RT_1 T_2} (T_2 - T_1)$$

Подставляя численные значения и переходя к десятичным логарифмам, преобразуем это уравнение к виду

$$T_2 - T_1 = 0,124 T_2 \lg \left( \frac{\varphi T_2}{T_1} \right)$$

Для решения уравнения (\*) применяем метод последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем  $T_2 = T_1$ . Пользуясь этим, находим первое приближение:

$$T_2 - T_1 = 0,124 T_1 \lg \varphi = -3,52 \text{ K}$$

Вычислив отсюда  $T_2$  и подставив в правую часть уравнения (\*), найдем второе приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,66705 \text{ K}$$

Поступая так дальше, получим третье приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,67313 \text{ K}$$

четвертое приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,67360 \text{ K}$$

С точностью до трех значащих цифр

$$T_2 - T_1 = -3,67 \text{ K}$$

Таким образом, замена производной  $dP/dT$  отношением конечных приращений приводит к ошибке  $\sim 10\%$ .

## О-11.50

, В закрытый сосуд диаметром  $d = 10$  см налита вода до уровня  $H = 20$  см, Пары воды могут истекать в атмосферу через капилляр радиусом  $r = 1$  мм и длиной  $l = 10$  см, вставленный в крышку сосуда, Оценить время, в течение которого испарится вся вода, Температура системы постоянна и равна  $t = 101^\circ\text{C}$ , Пар считать идеальным газом, Коэффициент внутреннего трения пара  $\eta = 128$  мкП.

## 11.22 Задачи на фазовые переходы 2

### О-11.51

, В предварительно откачанный закрытый сосуд диаметром  $D$  налита вода до уровня  $H_1$ , В боковой стенке у дна сосуда вделан горизонтальный трубопровод круглого сечения радиусом  $r$ , длиной  $l$ , через который вода вытекает в атмосферу, Через какое время уровень воды в сосуде понизится до  $H_2$ ? Температура воды в сосуде постоянна и превышает температуру кипения  $T_0$  при нормальном давлении  $P_0$  на  $\Delta T \ll T_0$ , Удельная теплота парообразования воды равна  $\lambda$ , Течение воды в трубопроводе считать ламинарным, вязкость воды равна  $\eta$ , Плотностью водяного пара по сравнению с плотностью воды  $\rho$  пренебречь, Пар считать идеальным газом.

### О-11.52

, В предварительно откачанный закрытый широкий сосуд налита вода до уровня  $h = 20$  см, В боковой стенке у дна сосуда сделано отверстие, которое можно закрывать пробкой, До какой температуры  $T$  следует нагреть воду в сосуде, чтобы скорость ее истечения через боковое отверстие при этой температуре превышала в два раза скорость истечения при температуре  $T_0 = 373 \text{ K}$ ?

**О-11.53**

, В воздухе помещения при температуре  $15^{\circ}\text{C}$  и некоторой относительной влажности содержится 1 паров воды, При какой температуре  $T$  (и той же относительной влажности) количество воды в воздухе достигнет 2,7 кг? Считать, что в этих условиях удельная теплота испарения воды постоянна и равна  $\lambda = 2420 \text{ Дж/г}$ .

**О-11.54**

, В сосуде находятся один моль воды при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$  и пренебрежимо малое количество водяного пара, Система нагревается до температуры  $T$ , так что вся вода превращается в пар, Теплота парообразования при температуре  $T_0$  равна  $\lambda_0$ , Определить изменение внутренней энергии системы в этом процессе, Считать пар идеальным газом.

**О-11.55**

, В теплоизолированном сосуде при температуре  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$  находится большой кусок льда, Сверху в лед с силой  $F = 400\text{Н}$  вдавливается медный стержень сечением  $S = 0,1 \text{ см}^2$ , Оценить, за какое время стержень погрузится в лед на глубину  $H = 1 \text{ см}$ , Температура стержня надо льдом тоже равна  $0^{\circ}\text{C}$ , коэффициент теплопроводности меди  $\kappa_m = 4 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см} \cdot \text{K})$ , удельная теплота плавления льда  $q = 80 \text{ кал/г}$ , плотность льда  $\rho_{\Omega} \approx 0,9 \text{ г/см}^3$ , коэффициент теплопроводности льда  $\kappa_{\Omega} \ll \kappa$ .

**О-11.56**

, Тонкая проволока, охватывающая петлей брусок льда, под действием нагрузки способна пройти сквозь лед, Полагая, что скорость движения проволоки  $v$  определяется скоростью подвода тепла через проволоку от области над проволокой, где вода замерзает, к области под проволокой, где плавится лед, оценить величину скорости  $v$ , Теплопроводностью льда пренебречь, Температура льда  $0^{\circ}\text{C}$ , теплота плавления  $q = 335 \text{ Дж/г}$ , плотность льда  $\rho = 0,917 \text{ г/см}^3$ , Диаметр проволоки  $d = 0,1 \text{ мм}$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa = 130 \text{ ВТ}/(\text{М} \cdot \text{K})$ , давление  $P$ , создаваемое под проволокой, принять равным 10 атм.

**О-11.59**

, Определить адиабатическую сжимаемость двухфазной системы, состоящей из насыщенного пара и небольшого количества Жидкости, Пар считать идеальным газом.

**О-11.60**

, В теплоизолированном цилиндре с поршнем заключено небольшое количество Жидкого гелия, находящегося в равновесии со своими парами, Температура гелия  $T = 4,2 \text{ К}$ , Поршень медленно выдвигают до тех пор, пока весь гелий не испарится, В результате такого адиабатического процесса относительное приращение объема гелия оказалось равным  $\Delta V/V = 0,02$ , Определить относительное изменение давления  $\Delta P/P$  газообразного гелия, предполагая, что он подчиняется уравнению состояния идеального газа, Теплота испарения гелия  $\lambda = 21,8 \text{ Дж/г}$ , Считать, что в начальный момент масса пара существенно превышает массу жидкости.

Определить удельную теплоемкость  $s$  насыщенного пара, расширяющегося (или сжимающегося) таким образом, что во время процесса он все время остается насыщенным, Пренебречь удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом ее насыщенного пара, Считать, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона, Произвести численный расчет для воды при температуре  $T = 373 \text{ К}$ , считая, что к водяному пару применима классическая теория теплоемкостей, Удельная теплота парообразования для воды при  $373 \text{ К}$  равна  $\lambda = 539 \text{ кал/г}$ .

**О-11.62**

Решить предыдущую задачу, зная удельную теплоту испарения  $\lambda$  и ее производную по температуре  $d\lambda/dT$ , но не предполагая, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона, Для воды при  $t = 100^{\circ}\text{C}$   $d\lambda/dT = -0,64/(\text{Г} \cdot \text{K})$ ,  $c_P = 1,01 \text{ ккал}/(\text{Г} \cdot \text{K})$ .

**О-11.63**

, Под невесомым теплопроводящим поршнем, разделяющим цилиндрический замкнутый сосуд на две части, помещен один моль воды, Над поршнем находится 1 моль воздуха, Давление и температура в сосуде соответственно равны  $P = 760 \text{ Тор}$  и  $t = 100^{\circ}\text{C}$ , Определить теплоемкость системы (без учета материала сосуда и поршня), Удельная теплота парообразования  $\lambda = 2260 \text{ Дж/г}$ .



**О-11.64**

, В условиях предыдущей задачи определить теплоемкость вещества под поршнем, если поршень теплонепроницаемый, а воздух над поршнем поддерживается при постоянной температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ .

**О-11.65**

, В замкнутом сосуде находится вода в равновесии с насыщенным паром при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ , Отношение масс пара и Найти удельную теплоемкость  $s$  такой системы, Пар считать идеальным газом, удельная теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**О-11.66**

, Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме редкого тумана (т, е, насыщенного пара с капельками воды, полная масса которых много меньше массы пара) при  $t = 100^\circ\text{C}$ . Молярная теплота испарения воды  $\lambda = 41$  кДж/моль не зависит от температуры.

**О-11.67**

, Найти скорость изменения удельной теплоты испарения жидкости от температуры  $d\lambda/dT$ , считая насыщенный пар идеальным газом, Удельная теплоемкость жидкости равна  $s$ , коэффициент объемного расширения жидкости -  $\alpha$ , Рассчитать  $d\lambda/dT$  для воды вблизи точки кипения при атмосферном давлении.

**О-11.68**

, Конденсация пара на ионах, образованных заряженной частицей в газе камеры Вильсона, осуществляется путем адиабатического расширения объема камеры, Камера наполняется газом и содержит насыщенные пары жидкости, Найти отношение  $m_1/m_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  - массы насыщенных паров до и после расширения камеры в  $\Pi$  раз, Для смеси газа и пара  $C_P/C_V = \gamma$ , начальная температура  $T$  много ниже критической, Молярную теплоту испарения  $\Lambda$  считать, постоянной, а пар - идеальным газом, Теплом, выделенным при конденсации, пренебречь.

**О-11.69**

, Стенки сосуда объемом  $V = 1$  л, в котором помещен водород при давлении 760 Тор и температуре 273 К, резко охлаждаются до температуры тройной точки ( $P = 60$  Тор,  $T = 14$  К), Оценить время «вымораживания» водорода, т, е, время, в течение которого давление в сосуде существенно уменьшится, Как будет влиять присутствие гелия на этот процесс?

**О-11.70**

, Превращение  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  из ромбической в ромбоэдрическую форму происходит при атмосферном давлении при  $32,0^\circ\text{C}$ , Оно сопровождается поглощением тепла 1600 Дж/моль, плотность при этом уменьшается с 1,72 до 1,66 г/см<sup>3</sup>, Найти температуру такого превращения при давлении 10 атм.

**О-11.71**

, В тонкостенном откачанном сосуде помещен твердый антрацен  $\text{C}_{10}\text{H}_8$ , Пары антрацена, образующиеся при его сублимации, вытекают наружу через малое отверстие в стенке сосуда, В течение фиксированного промежутка времени измеряется потеря веса антрацена в сосуде, Оказалось, что при повышении температуры от  $T_1 = 283$  К до  $T_2 = 303$  К потеря веса антрацена за одно и то же время увеличилась в  $a = 9,6$  раза, Вычислить теплоту сублимации антрацена  $q$ , предполагая, что в каждый момент времени успевает устанавливаться равновесие между твердым антраценом и его паром, Пар можно рассматривать как идеальный газ, Удельным объём пренебречь.

**О-11.74**

, Молярная энтропия жидкого гелия-3 при низких температурах меняется по закону  $S = RT/\theta$ , константа  $\theta \approx 0,46$  К при давлениях, близких к 30 атм, Энтропия одного моля твердого гелия при этих условиях не зависит от температуры и равна  $S_{\text{тв}} = 0,7R$ , Зная, что при  $T_1 = 0,25$  К гелий-3 затвердевает при давлении  $P_1 = 29$  атм, найти давление, когда он затвердевает при  $T = 0,1$  К, Разность молярных объемов жидкого и твердого гелия-3 при этих температурах  $\Delta V = V - V_r = 1,25$  см<sup>3</sup>

**О-11.75**

, Согласно одной из моделей, центральная часть Земли (так называемое ядро) состоит из железа, Внешняя часть ядра расплавлена, а внутренняя радиусом  $R \approx 1200$  km, твердая, Ядро остывает со скоростью  $u$ , примерно равной 100 K за  $10^9$  лет, На сколько изменится радиус твердой части ядра за  $3 \cdot 10^9$  лет? Считать, что теплота плавления железа при условиях, соответствующих поверхности ядра,  $q \approx 125$  Дж/г, температура на ней  $T \approx 3700$  K и изменение плотности железа при затвердевании  $\Delta\rho = 0,3$  г/см<sup>3</sup>.

**О-11.76**

, Определить теплоту испарения жидкого гелия в пределе  $T \rightarrow 0$ , считая, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, Известно, что для гелия  $T = 5,2$  K.

**О-11.77**

, Влажный шарик находится в воздухе с плотностью водяного пара на больших расстояниях от шарика равной  $\rho_0 = 8,6 \cdot 10^{-6}$ /см<sup>3</sup>, Оценить установившуюся разность температур шарика и воздуха (на больших расстояниях от шарика), Плотность насыщенных паров воды при комнатной температуре (20°C) равна  $\rho_{\text{нас}}^0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>, Коэффициент диффузии паров воды в воздухе равен  $D = 3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, Коэффициент теплопроводности воздуха равен  $\kappa = 2,4 \cdot 10^{-2}$  В/(М·К), Теплота испарения воды равна  $\lambda = 2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг, Считать, что движения воздуха не происходит.

**О-11.79**

, При сжижении газов по простой схеме Линде доля сжиженного газа  $\alpha$  определяется его давлением  $P$  и температурой  $T$  на входе, Максимальное значение  $\alpha$  наблюдается, когда при постоянной температуре  $T$  энтальпия газа  $I$  в зависимости от его энтропии  $S$  минимальна, т.е.  $(\frac{\partial I}{\partial S})_T = 0$ , Рассматривая водород как газ Ван-дер-Ваальса с критическими значениями давления и температуры  $P_{\text{кр}} = 13$  атм и  $T_{\text{кр}} = 33$  K, оценить при  $T = 80$  K величину давления  $P$  на входе.

**О-11.80**

, Кривая плавления неона описывается формулой  $P = A(T - T_0)^c - B$ , где  $A = 15,7 \cdot 10^5$  Па К<sup>-c</sup>,  $B = 0,59 \cdot 10^8$  Па,  $T_0 = 11,7$  K,  $c = 1,42$ , Определить изменение энтропии  $\Delta S$  неона при плавлении, если  $T_{\text{пл}} = 24,6$  K, Разность молярных объемов при этой температуре  $\Delta V = 2,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/моль.

**О-11.81**

, Кривая плавления аргона описывается формулой  $P = A(T - T_0)^c - B$ , где  $A = 5,0 \cdot 10^5$  Па К<sup>-c</sup>,  $B = 1,48 \cdot 10^8$  Па,  $T_0 = 30,2$  K,  $c = 1,43$ , Определить молярную теплоту плавления  $\Lambda$  аргона при  $T_{\text{пл}} = 83,8$  K, Разность молярных объемов при этой температуре  $\Delta V = 3,6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/моль.

**О-11.82**

, Давление насыщенного пара на кривых фазового равновесия (испарения и сублимации) вблизи тройной точки описывается формулой Кирхгофа  $\ln P \approx A - B/T$ , где  $A$  и  $B$  - экспериментальные постоянные, Если измерять давление в Па, то на кривой испарения жидкой углекислоты  $A_{\text{и}} = 21,6$ , а на кривой сублимации твердого  $\text{CO}_2$   $A_{\text{с}} = 25,6$ , Тройная точка для  $\text{CO}_2$   $P = 5,11$  атм,  $t = -56,6^\circ\text{C}$ , Определить молярную теплоту плавления  $\Lambda$  углекислоты вблизи тройной точки.

**О-11.83**

, Давление насыщенного пара бензола  $\text{C}_6\text{H}_6$  вблизи тройной точки описывается формулой Кирхгофа  $\ln P \approx A - B/T$ , где  $A$  и  $B$  - экспериментальные постоянные, Если измерять давление в Па, то на кривой испарения жидкости  $A_{\text{и}} = 14,0$ ,  $B_{\text{и}} = 1541$  K, а на кривой возгонки  $A_{\text{в}} = 18,2$ ,  $B_{\text{в}} = 2713$  K, Определить температуру и давление в тройной точке бензола, а также удельную теплоту плавления твердого бензола  $\lambda_{\text{пл}}$ .

**О-11.86**

, При температуре ниже  $0^\circ\text{C}$  упругость насыщенных паров над переохлажденной водой и над льдом по разному уменьшается при понижении температуры, и при определенной температуре насыщенный пар по отношению к воде оказывается пересыщенным паром по отношению ко льду, Этот эффект приводит к росту ледяных частиц в облаках и образованию града и снега, Оценить температуру, при которой наблюдается максимальная разность между упругостью насыщенных паров вблизи капелек воды и вблизи частиц льда  $\Delta P = P - P_{\Omega}$  и величину этой разности, считая водяной пар идеальным газом, Давление

насыщенного пара над льдом и водой при  $0^\circ\text{C}$  одинаково и равно  $P_0 = 610$  Па, Считать при низких температурах постоянными удельную теплоту парообразования  $\lambda = 2500$  Дж/г и удельную теплоту плавления  $q = 335$  Дж/г.

### О-11.87

, При температуре ниже  $0^\circ\text{C}$  упругость насыщенных паров над переохлажденной водой и над льдом по разному уменьшается при понижении температуры, и при определенной температуре насыщенный пар по отношению к воде оказывается пересыщенным паром по отношению ко льду, Этот эффект приводит к росту ледяных частиц в облаках и образованию града и снега, Оценить, во сколько раз изменится отношение  $P_{\text{л}}/P_{\text{в}}$  упругости насыщенных паров над льдом к упругости насыщенных паров над переохлажденной водой при понижении температуры от  $-5^\circ\text{C}$  до  $-20^\circ\text{C}$ , считая водяной пар идеальным газом, Давление насыщенного пара над льдом и водой при  $0^\circ\text{C}$  одинаково, удельную теплоту плавления считать при низких температурах постоянной и равной  $q = 335$  Дж/г.

### О-11.88

, Определить температуру кипения воды на высоте  $h = 5$  км от поверхности Земли, Можно считать, что температура атмосферы  $T_{\text{а}}$  до этой высоты уменьшается линейно:  $T_{\text{а}}(h) = T_{\text{а}0} - \alpha h$ , где  $T_{\text{а}0} = 293$  К - температура воздуха у поверхности Земли ( $h = 0$ ),  $\alpha = 6,5$  К/ - величина вертикального температурного градиента, Температура кипения воды у поверхности Земли  $T_0 = 373$  К, удельную теплоту парообразования воды  $\lambda = 2260$  Дж/г в этом диапазоне температур считать постоянной, Водяной пар и воздух считать идеальными газами, Ускорение свободного падения вплоть до высоты  $h$  считать постоянным.

### О-11.90

, В запаянной пробирке объемом  $V = 15$  мл, из которой предварительно откачан воздух, находится  $m = 10$  мг воды при температуре  $0^\circ\text{C}$  в жидком состоянии, До какой температуры нужно нагреть Пробирку, чтобы вся вода испарилась? Молярная теплота парообразования воды при  $100^\circ\text{C}$  равна  $\Lambda = 40,7$  кДж/моль, Пар считать идеальным газом.

## 11.23 Задачи на поверхностные явления

(одним из последних разделов буду учить этот. вообще, тут много крутых задач, так что порешаю!)

### О-12.1 поверхностное натяжение воды по параметрам капли (?????)

Для определения поверхностного натяжения воды взвешивают капли, отрывающиеся от капилляра, и измеряют диаметр  $d$  шейки капли в момент отрыва. Оказалось, что масса 318 капель воды равна 5 г, а  $d = 0,7$  мм. Найти поверхностное натяжение воды.

### О-12.2

Как велико поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ , если петля из резинового шнура длиной  $l$  с поперечным сечением  $S$ , положенная на пленку этой жидкости, растянулась в окружность радиусом  $IR$  после того, как пленка была проколота внутри петли? Считать, что при малых растяжениях для резины справедлив закон Гука и модуль Юнга резины равен  $E$ .

### О-12.3

Капля несжимаемой жидкости совершает пульсационные колебания, становясь последовательно вытянутой, сферической, сплюснутой, сферической, снова вытянутой и т. д. Как зависит период этих пульсаций  $T$  от плотности  $\rho$ , поверхностного натяжения  $\sigma$  и радиуса капли  $r$ ?

### О-12.4

Известно, что видимая яркость некоторых звезд (пульсаров) Периодически колеблется. По одной из теорий изменение яркости связано с изменением формы звезд, колеблющихся подобно капле воды под действием силы поверхностного натяжения. Предполагается, что пульсары состоят из нейтронов. Оценить поверхностное натяжение нейтронного вещества, если положить, что масса звезды  $M = 2 \cdot 10^{33}$ , а период колебаний  $T$  составляет около 1 с. Капля воды массой  $m = 1$  г колеблется с периодом  $\tau = 0,05$  с. Коэффициент поверхностного натяжения воды равен  $\sigma_0 = 70$  дин /см.

**О-12.5**

Рассмотрев цикл Карно для пленки Жидкости в предположении, что температуры нагревателя и холодильника бесконечно мало отличаются друг от друга, и применив теорему Карно, найти производную поверхностного натяжения  $\sigma$  жидкости по температуре  $T$

**О-12.6**

Найти выражение для внутренней энергии пленки  $U$ .

**О-12.7**

Определить изменение температуры пленки при адиабатическом расширении.

**О-12.8**

Мыльная пленка имеет толщину  $h = 10^{-3}$  мм и температуру  $T = 300$  К. Вычислить понижение температуры этой пленки, если ее растянуть адиабатически настолько, чтобы площадь пленки удвоилась. Поверхностное натяжение мыльного раствора убывает на 0,15 дин/см при повышении температуры на 1 К.

**О-12.9**

В сосуде с адиабатическими стенками находится мыльный пузырь радиусом  $r = 5$  см. Общее количество воздуха в сосуде и в пузыре  $\nu = 0,1$  моль, его температура  $T = 290$  К (предполагается, что она одинакова внутри и вне пузыря). При этой температуре поверхностное натяжение  $\sigma = 70$  дин/см,  $d\sigma/dT = -0,15$  дин/(см · К). Как изменится температура воздуха в сосуде, если пузырь лопнет? Теплоемкостью образовавшихся капелек пренебречь.

**О-12.10**

Показать, что вблизи абсолютного нуля поверхностное натяжение жидкости перестает зависеть от температуры, т.е.  $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dT} = 0$ . (Конкретно речь может идти только о гелии - единственном веществе, остающимся жидким при абсолютном нуле температуры.)

**О-12.11**

Чему равно капиллярное давление  $P$  в капельке ртути с диаметром  $d = 1$  мкм при температуре  $15^\circ\text{C}$ , если поверхностное натяжение ртути при этой температуре  $\sigma = 487$  дин/см?

**О-12.12**

Чему равно добавочное давление  $P$  внутри мыльного пузыря с диаметром  $d = 0,8$  см, если поверхностное натяжение мыльной воды  $\sigma = 40$  дин/см?

**О-12.13**

Оценить максимальное количество воды, которое можно налить в решето с парафинированным дном с диаметром  $D = 20$  см, если последнее сделано из металлического листа с круглыми отверстиями диаметром  $d = 1$  мм. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 70$  дин/см. Как зависит максимальное количество наливаемой жидкости от ее плотности?

**О-12.17**

С какой силой  $F$  притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погруженные в воду так, что расстояние между ними равно  $d = 0,1$  мм? Ширина пластинок  $l = 15$  см,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\theta = 0^\circ\text{C}$ . Высота пластинок такова, что поднявшаяся вода не доходит до их верхних краев.

**О-12.18**

Какова разность уровней жидкости в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ ? Поверхностное натяжение жидкости равно  $\sigma$ , Плотность -  $\rho$ . Краевые углы менисков равны нулю.

**О-12.19**

Вертикально расположенный стеклянный капилляр длиной  $l$  и радиусом  $r$  запаян с верхнего конца. На какую высоту  $h$  поднимется вода в капилляре, если его нижний конец привести в соприкосновение с поверхностью воды?

**О-12.20**

На какую высоту  $h$  поднимается вода между двумя вертикальными стеклянными пластинками, частично погруженными в эту Жидкость, если расстояние между ними  $d = 0,5$  мм? Для воды  $\sigma = 73$  дин/см. Краевой угол  $\theta$  в этом случае можно считать равным 0.

**О-12.21**

Две стеклянные вертикальные пластинки, погруженные частично в жидкость, образуют друг с другом очень малый двугранный угол  $\alpha$ . Найти высоту поднятия жидкости  $h$  как функцию расстояния  $x$  от ребра двугранного угла.

**О-12.22**

Капля воды с массой  $m = 0,1$  г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми водой, причем краевой угол  $\theta = 0$ . Как велика сила  $F$  притяжения между пластинками, если они находятся друг от друга на расстоянии  $d = 10^{-4}$  см? Поверхностное натяжение воды (при  $18^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 73$  дин / см.

**О-12.23**

Грамм ртути помещен между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу  $F$  надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть приняла форму круглой лепешки однородной толщины и радиусом  $R = 5$  см. Поверхностное натяжение ртути (при  $15^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 487$  дин /

**О-12.28**

Мыльный пузырь радиусом 1 см нагревается от температуры  $20^\circ\text{C}$  до температуры  $52^\circ\text{C}$ . Найти радиус  $r$  нагретого пузыря. Коэффициент поверхностного натяжения принять равным 40 дин/см и считать, что он не зависит от температуры.

**О-12.29**

В вакуумную камеру помещен масляный пузырь, внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Газ внутри пузыря нагревают. Найти молярную теплоемкость  $C$  газа в этом процессе. Зависимостью поверхностного натяжения от температуры пренебречь.

**О-12.30**

Определить молярную теплоемкость воздуха  $C$  внутри мыльного пузыря, который при внешнем давлении  $P_0$ , температуре  $T_0$  имеет радиус  $r$ . Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки  $\sigma$  от температуры не зависит.

**О-12.31**

В вакуумной камере находится масляный пузырь радиусом  $r_0 = 3$  см. Введением поверхностно-активного вещества коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_0 = 60$  эрг/см<sup>2</sup> был понижен в  $a = 1,29$  раз. Какое количество тепла надо подвести к газу внутри пузыря, чтобы температура его осталась неизменной? Газ считать идеальным.

**О-12.32**

Мыльный пузырь радиусом  $r$ , поднявшийся до некоторой высоты, увеличил свой радиус вдвое. Считая атмосферу Земли изотермической, найти изменение энтропии мыльного пузыря. Давление у поверхности Земли равно  $P_0$ , коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки -  $\sigma$ , удельная теплота образования мыльной пленки -  $q$ .

**О-12.33**

Мыльный пузырь выдут через цилиндрическую трубку с внутренним радиусом  $r = 1$  мм и длиной  $l = 10$  см. Когда радиус пузыря достигает значения  $R_0 = 10$  см, перестают дуть, и воздух из пузыря начинает выходить через трубку. Через какое время, начиная с этого момента, пузырь исчезнет? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 50$  дин/см, вязкость воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Изменением плотности воздуха за время процесса пренебречь.

**О-12.35**

Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны  $R_1$  ее поверхности в нижней точке от радиуса кривизны  $R_2$  в верхней точке, если расстояние между этими точками  $d = 2$  мм? Поверхностное натяжение  $\sigma = 70$  дин/см.

**О-12.36\*. Зависимость размеров пузыря от температуры (????)**

Внутри мыльного пузыря радиусом  $r_0$  находится воздух (идеальный газ) при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ . Поверхностное натяжение мыльного раствора при этой температуре равно  $\sigma_0$ . Удельная теплота изотермического образования единицы поверхности мыльной пленки при той же температуре равна  $q_0$ . Найти производную радиуса пузыря по температуре  $dr/dT$  для  $T = T_0$ . Наружное давление остается постоянным.

**О-12.37 Поверхностное натяжение по высоте столбика в капилляре**

Найти поверхностное натяжение  $\sigma$  жидкости, если в капилляре с диаметром  $D = 1$  мм она поднимается на высоту  $h = 32,6$  мм. Плотность жидкости  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Краевой угол мениска равен нулю.

**О-12.38**

В вакуумной камере на двух концах трубки находятся два почти одинаковых по размеру масляных пузыря, наполненных воздухом. В начальный момент трубка перекрыта краном. Что произойдет после открытия крана? Считая процесс изотермическим, вычислить, насколько изменится суммарная энтропия газа. Начальные радиусы пузырей  $r_0 = 5$  см. Поверхностное натяжение масла  $\sigma = 30$  дин/см. Температура  $T = 300$  К.

**О-12.39**

В вакуумной теплоизолированной камере на двух концах трубки находятся два почти одинаковых по размеру масляных пузыря, наполненных гелием. В начальный момент трубка перекрыта краном. Что произойдет после открытия крана? Во сколько раз изменятся температура и давление в пузырях? Изменится ли энтропия системы? Теплоемкостью пленки и трубки пренебречь по сравнению с теплоемкостью газа. Считать, что поверхностное натяжение не зависит от температуры.

**О-12.42**

Определить глубину  $h$  ртутной лужицы на плоском горизонтальном стекле. Поперечные размеры лужицы велики по сравнению с ее глубиной. Поверхностное натяжение ртути на границе с воздухом  $\sigma = 490$  дин/см, краевой угол на стекле  $\theta = 140^\circ$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**О-12.43**

Известно, что в поршневых насосах вода из бассейна при нормальных внешних условиях не поднимается за поршнем выше 10 м. На какую высоту поднимется вода в абсолютно смачиваемом капилляре практически неограниченной длины и диаметром 1 МКМ?

**О-12.44 Пленка в канале**

Абсолютно смачиваемый канал переменного сечения, радиус которого связан с высотой как  $r = r_0 e^{-h/r_0}$ , расположен вертикально в однородном гравитационном поле (рис. 446). Внутрь канала помещается мыльная пленка массой  $m$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Считая пленку плоской, определить, на какой высоте она установится.

**Решение** (!!! нужна картинка! пока не понял, что происходит.)

**О-12.45 Просачивание дождя (?????)**

Во время дождя можно наблюдать, как через брезент палатки начинает пробиваться мельчайшая водяная пыль. Принимая, что размер отверстий между нитями в брезенте  $d = 0,05$  мм, оценить минимальный размер капель дождя, способных «пробить» брезент. Ткань палатки тонкая, несмачиваемая водой, а сила сопротивления  $F$  воздуха движению капли радиусом  $R$  равна  $\rho_{\text{возд}} v^2 \pi R^2$ .

**Решение** (!!! интересно, но не знаю пока что, не готов.)

**О-12.48**

При работе с отравляющими веществами опасно находиться в комнате, зараженной их мелкими каплями (пример - последствия от разбитого ртутного термометра). Определить, во сколько раз давление пара над ртутью в виде капель с радиусом  $10^{-6}$  см выше, чем над плоской поверхностью. При температуре 293 К коэффициент поверхностного натяжения ртути  $\sigma = 487$  дин /см, молярная масса ртути  $\mu = 200,6$  г/моль, Плотность ртути  $\rho = 13,55$  г/см<sup>3</sup>.

**О-12.49**

Вычислить давление насыщенного водяного пара при 20°C над сферической поверхностью капли воды, если ее радиус: 1)  $r_1 = 10^{-5}$  см (капелька тумана), 2)  $r_2 = 10^{-7}$  см. При такой температуре для воды  $\sigma = 72,7$  дин /см,  $v = 1,002$  см<sup>3</sup>/,  $P_0 = 17,5$  мм рт. ст.

**О-12.50**

Сосуд с водой нагревают при постоянном давлении  $P_0 = 1$  атм. Оценить, на сколько температура вскипания воды будет выше 100°C, если из нее предварительно удалены растворенные газы, а максимальный размер твердых песчинок находящейся в ней взвеси составляет  $r_{\text{max}} = 10$  мкм. Коэффициент поверхностного натяжения принять равным  $\sigma = 60$  эрг/см<sup>2</sup>, а теплоту испарения  $\Lambda = 9,7$  ккал/моль.

**О-12.51**

Вода без примесей нагревается до температуры  $t = 101^\circ\text{C}$  при внешнем давлении  $P_0 = 1$  атм. Оценить минимальный размер песчинки, которая при попадании в воду вызовет вскипание воды. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 58,8$  эрг/см<sup>2</sup>, удельная теплота парообразования  $\lambda = 2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг, удельный объем водяного пара  $v_n = 1,7$  м<sup>3</sup>/ при  $t = 100^\circ\text{C}$ .

**О-12.52**

Пары воды, находящиеся в помещении, начинают конденсироваться на гладкой поверхности при охлаждении ее до  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ . Начиная с какой температуры они будут конденсироваться на пористом теле с радиусом пор  $r = 10^{-5}$  см? Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2,48$  кДж /г, а коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см. Считать, что поверхность пор смачивается водой, причем угол смачивания равен нулю.

**О-12.55**

Оценить максимальное давление, при котором водяной пар может оставаться пересыщенным при температуре 100°C, находясь в сосуде с несмачиваемыми стенками. Коэффициент поверхностного натяжения воды принять  $\sigma = 70$  дин/см.

**О-12.56**

Переохлажденный водяной пар находится при давлении  $P_0 = 1$  атм и температуре  $t_0 = 99^\circ\text{C}$  в сосуде с несмачиваемыми стенками. Каков минимальный размер капли, которая должна образоваться, чтобы произошла конденсация пара? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять  $\sigma = 70$  дин/см, удельную теплоту испарения  $\lambda = 2,3$  кДж /.

**О-12.57**

Небольшое облако, состоящее из водяных капель диаметром  $d = 0,1$  мкм, постепенно сконденсировалось в одну каплю массой  $M = 1$  г. Считая процесс адиабатическим, вычислить изменение энтропии и температуру капли. Температура облака  $t = 27^\circ\text{C}$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см, а  $d\sigma/dT = -0,15$  дин / (см · К).

**О-12.58**

Туман состоит из капелек воды с радиусом 0,0005 мм. Насколько должен быть пересыщен водяной пар в окружающем пространстве, температура которого 10°C, чтобы капельки находились в равновесии с паром? Давление пара, насыщающего пространство при 10°C, равно 9,2 Тор. Коэффициент поверхностного натяжения равен 70 дин /см.

**О-12.59**

Мельчайшая капелька воды ( $r = 10$  мкм) находится в замкнутой полости объемом  $V$  в равновесии с паром. При каком размере полости это равновесие может быть устойчивым? Стенки полости несмачиваемы, других капель и центров конденсации нет. Рассмотреть изотермические условия с  $T = 300$  К, пар считать идеальным газом, его давление  $P_n = 27$  мм рт. ст.

**О-12.60**

Жидкий  $^4\text{He}$  ( $\text{He} - \text{I}$ ) при нормальном атмосферном давлении в точке кипения имеет плотность  $\rho = 0,122$  г/см<sup>3</sup>. При этом коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,38$  дин / см. Оценить удельную теплоту парообразования  $\lambda^4 \text{He}$  при этих условиях. В качестве модели жидкого гелия принять плотную упаковку шаров.

**О-12.62**

В центре сферы радиусом  $a = 1$  см находится капля воды. Пространство между каплей и сферой заполнено насыщенным паром. На внутренней поверхности сферы имеется очень тонкий слой воды. В начальный момент времени радиус капли  $b_0 = 0,5$  см. Полагая температуру системы  $T = 300$  К постоянной, оценить время  $\tau$ , за которое масса капли уменьшится на  $\Delta m = 10$  мг. При этой температуре давление насыщенного пара над плоской поверхностью  $P_\infty = 3,5 \cdot 10^3$  Па, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин /см, эффективный коэффициент диффузии  $D = 10$  см<sup>2</sup>/с. Насыщенный пар считать идеальным газом.

**О-12.63**

В центре сферы радиусом  $a = 1$  см находится капля воды. Пространство между каплей и сферой заполнено насыщенным паром. На внутренней поверхности сферы имеется очень тонкий слой воды. В начальный момент времени радиус капли  $b_0 = 0,1$  мм. При постоянной температуре системы  $T_1 = 300$  К время испарения 20% капли составило  $\tau_1 \sim 1$  ч. Оценить относительное изменение времени испарения  $(\tau_2 - \tau_1) / \tau_1$  20% массы такой же капли, если температура системы  $T_2 = 320$  К. При температуре  $T_1 = 300$  К коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см,  $\frac{d\sigma}{dT} = -0,15$  дин / (см · К). Насыщенный пар считать идеальным газом.

**О-12.64**

Неподвижная маленькая водяная капля находится в пересыщенной водяным паром атмосфере. Парциальная плотность водяного пара на большом расстоянии от капли  $\rho_\infty$  больше плотности насыщенного пара над плоской поверхностью  $\rho_0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$  /см<sup>3</sup> при температуре  $T_0 = 293$  К в  $f = \rho_\infty / \rho_0 = 1,002$  раз. В некоторый момент времени радиус капли равен  $r = 10^{-5}$  см. Считая процесс изменения размера капли квазистатическим, оценить для указанного радиуса разницу между температурой вблизи поверхности капли и температурой на большом расстоянии от капли. Насыщенный пар воды рассматривать как идеальный газ. Коэффициент диффузии паров воды в воздухе  $D = 0,3$  см<sup>2</sup>/с; коэффициент теплопроводности воздуха  $\chi = 2,4 \cdot 10^3$  эрг/(с · см · град). Удельная теплота испарения воды  $\lambda = 2,2 \cdot 10^{10}$  эрг/г. Поверхностное натяжение  $\sigma = 70$  дн/см.



## Part IV

# Special Thermodynamics in a Nutshell

## 5 Термодинамика в технических приложениях в двух словах

## 6 Особые явления термодинамики в двух словах

### 0.1 О термодинамике в электромагнитных явлениях

(связь с ЛЛ8, там много используется этих формул, но они же у меня в статфизе обсуждены и указаны)

## 7 Другие свойства термодинамики в двух словах

### 1 Парадоксы и мысленные эксперименты в двух словах

#### 1.1 Парадоксы о вечных двигателях

#### 1.2 Квантовые мысленные эксперименты

В качестве простейшего примера необратимой системы рассмотрим разреженный атомарный газ при высокой температуре, чтобы не требовалось учитывать тип статистики части (?).

Пусть газ находится внутри замкнутого сосуда с размерами во многом больше длины пробега...

Пусть также газ находится в термостате при полном термодинамическом равновесии.

Проведем с этим газом мысленные эксперименты.

Если атом заменить на частицу, то энтропия системы уменьшится на величину

$$\Delta S = k \ln(V/\Delta V)$$

## Part V

# Другие темы термодинамики

(этим пока не занимаюсь, потому что все это в других записях пишется.)

## 8 Различные неочевидные явления

### 0.1 Теплоёмкость подвешенного шарика по Коткину, Образовскому

**Теория** В этом разделе рассмотрена задача: одинакова ли теплоёмкость твердого шарика в случае, если он подвешен, и в случае, если лежит?

В физическом фольклоре" с давних пор имеет хождение задача о разнице между теплоёмкостями шарика, когда он лежит на столе и когда он подвешен. Обычно эту задачу предлагают школьникам и считают нетрудной. Во многих случаях удовлетворяются следующим неправильным решением.

Теплоёмкость лежащего шарика  $C_1$  больше, чем висящего  $C_2$ , так как в первом случае при нагревании на  $\Delta T$  градусов кроме увеличения внутренней энергии шарика нужно совершить еще и работу по подъёму его центра тяжести  $A = mgr\alpha\Delta T$ , а во втором - подобная работа имеет другой знак ( $m$  - масса шарика,  $r$  его радиус,  $\alpha$  - линейный коэффициент теплового расширения). Поэтому

$$C_1 - C_2 = 2mgr\alpha$$

Разоблачить" это решение несложно. Представим себе тепловую машину, в которой используется указанная работа  $2A$ . (Скажем, днем, когда шарик нагрет, закрепляем его на подвесе, а вечером, когда он, охладившись, подтянется вверх, поднимаем подставку). Коэффициент полезного действия такой тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{C_1\Delta T} = \frac{2mgr\alpha}{C_1}$$

окажется не зависящим от разницы температур  $\Delta T$ , а это противоречит условию Карно:

$$\eta \leq \frac{\Delta T}{T}$$

( $T$  - температура холодильника", в данном случае - вечерняя температура). Таким образом, мы получаем фактически вечный двигатель второго рода.

Правильное решение нам будет удобнее изложить для несколько изменённой модели: будем считать, что шарик тяжёлый, но маленький и подвешивается на длинной нити; подъём его обеспечивается изменением длины нити при изменении её температуры и речь идет о разности теплоёмкостей нити, растягиваемой силой  $f = mg$  или висящей свободно. Очевидно, все возникшие вопросы сохраняются. В согласии с задачей о шарике примем, что длина нити  $l$  зависит от температуры и не зависит от приложенной силы

$$l = l_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

Стартуя от основного соотношения

$$dE = TdS + fdl,$$

где  $dE$  - приращение энергии нити,  $dS$  - приращение её энтропии, а  $dl$  - её удлинение, удобно перейти к потенциалу Гиббса  $\Phi = E - TS - fl$ , для которого

$$d\Phi = -SdT - ldf \quad (1)$$

Ключом к задаче является рассмотрение изотермических процессов включения" и выключения" силы  $f$ . Изменение потенциала

$\Phi$  в таком изотермическом процессе сразу же следует из равенства (1):

$$\Phi(T, f) = \Phi(T, 0) - l(T)f$$

Теперь, используя соотношение  $S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_f$ , можно найти прирост энтропии в процессе нагружения нити силой:

$$S(T, f) = S(T, 0) + f \frac{dl(T)}{dT} = S(T, 0) + fl\alpha \quad (2)$$

(Подразумевается медленное, равновесное нагружение). Теплоёмкость нити при заданной нагрузке определяется соотношением

$$C_f = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_f$$

так что

$$C(T, f) = C(T, 0) + Tf \frac{d^2l}{dT^2} = C(T, 0) :$$

теплоёмкость нагруженной нити равна теплоёмкости ненагруженной. Очевидно, то же относится и к шарик, с которого мы начинали.

Откуда же берётся работа в нашей тепловой машине? Прирост энтропии в изотермическом процессе нагружения означает, что в этом процессе нить поглощает тепло  $Q = T(S(T, f) - S(T, 0)) = fl\alpha T$ . Нагружаем мы нить днём, при температуре  $T + \Delta T$ , а разгружаем вечером, при температуре  $T$ . Поэтому различны и количества тепла, поглощенного при нагружении  $Q_a = fl\alpha(T + \Delta T)$  и выделенного при разгрузке  $Q_b = fl\alpha T$ . Работа  $A$ , совершаемая поднимающей шарик нитью, как раз и равна  $Q_a - Q_b = fl\alpha \Delta T$ . Разумеется, коэффициент полезного действия удовлетворяет условию Карно:

$$\eta = \frac{A}{C_1 \Delta T + Q_a} = \frac{\Delta T}{T + \Delta T + (C_1/fl\alpha) \Delta T} \leq \frac{\Delta T}{T}.$$

Внутренняя энергия нагруженной нити (нерастяжимой!)

$$E(T, f) = \Phi(T, f) + TS(T, f) + fl(T) = E(T, 0) + fl(T)\alpha T - fl(T)$$

зависит и от температуры и от силы, в отличие от внутренней энергии идеального газа  $E_g = C_v T$ .

Любопытно оценить, на сколько изменилась бы температура нити при адиабатическом нагружении. Это изменение температуры  $\delta T$  можно найти из условия

$$S(T + \delta T, f) = S(T, 0)$$

Подставив сюда  $S(T + \delta T, f)$  из (2) и разложив  $S$  по  $\delta T$ , получим

$$\delta T = -\frac{l\alpha T f}{C}$$

что совпадает, конечно же, с  $-Q_a/C$ . Введя сечение нити  $s$ , её плотность  $\rho$  и удельную теплоёмкость  $c$ , получаем

$$\delta T = \frac{f}{s} \frac{\alpha T}{c \rho}.$$

Для численной оценки примем, что на стальную проволоку сечения  $1 \text{ мм}^2$  подвешен груз массы  $10 \text{ кг}$ ; это вызовет натяжение  $f/s \approx 0,1 \text{ ГПа}$ , лишь раз в пять меньше предела прочности. Подставив значения  $\alpha \approx 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $c \approx 500 \text{ Дж/(кг К)}$ , получаем  $\delta T \approx -0,1 \text{ К}$  — эффект совсем не большой.

Удлинение нити (которым мы пренебрегали)

$$\delta l = \frac{l}{sY} f \quad (3)$$

где  $Y$  — модуль упругости. Для стали  $Y \approx 200 \text{ ГПа}$ , так что

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{f}{sY} \approx 0,005$$

действительно, мало.

Даже при таком большом натяжении энергия упругой деформации  $\delta E = f \delta l / 2$  в несколько раз меньше теплового эффекта  $Q_a$ :

$$\frac{\delta E}{Q_a} = 0,2$$

Микроскопический механизм, приводящий к отмеченному тепловому эффекту, не очевиден. Чтобы лучше его понять, построим специальную модель стержня. Пусть стоящий вертикально цилиндр с идеальным газом закрыт поршнем. Высота столба газа  $h$ , сечение его  $s$ , высота стержня  $l$ , вес поршня  $Mg$ . В своей модели стержня мы будем учитывать только тепло, получаемое или отдаваемое газом, давление же поршня изображает молекулярное сцепление. Теплоёмкость стержня сводится в таком случае к теплоёмкости газа при постоянном давлении, которая от величины давления не зависит. Имея в виду, что прилагаемые к настоящему стержню силы малы в сравнении с молекулярными силами сцепления ( $f/s \ll Y$ ), будем считать поршень очень тяжелым,

$$P_0 = Mg/s \gg f/s \quad (4)$$

Удлинение стержня  $\Delta l$  при его нагревании на  $\Delta T$  определяется уравнением состояния газа

$$\frac{P_0(V + s\Delta l)}{T + \Delta T} = \frac{P_0 V}{T}, V = hs$$

Отсюда

$$\Delta l = h \frac{\Delta T}{T}$$

что определяет коэффициент теплового расширения  $\alpha = h/lT$ .

Поскольку внутренняя энергия идеального газа определяется его температурой, тепло, поглощаемое газом в изотермическом процессе, равно совершаемой им в этом процессе работе. Если приложить к стержню силу  $f$ , то он растянется на длину  $x$ , определяемую соотношением

$$(Mg/s)(hs) = (Mg - f)(h + x), x = \frac{h}{Mg} f$$

Газ совершит над поршнем работу  $Mgx = fh = f\alpha T$ , как раз равную  $Q$ . Это работа, совершенная внутренними силами" и проявляющаяся в поглощении тепла. Работа же силы  $f$ , равная  $fx/2$ , соответствует энергии упругой деформации. Эта работа мала и мы её не учитываем. Таким образом, сила  $f$ , приложенная к стержню, провоцирует" очень малое изменение его длины, и при этом во много раз большие внутренние силы совершают работу, уже не столь малую.

Для настоящего твердого тела тепловое расширение обусловлено ангармоничностью колебаний атомов. Обсуждаемый эффект в этом случае не так подчеркнут, как в приведённой выше модели, где атомы движутся фактически между двумя стенками, в предельно ангармоничном" поле.

Интересный и гораздо больший эффект изменения температуры наблюдается для резины: для неё коэффициент теплового расширения намного больше и к тому же отрицательный (см. задачу 2.1). Правда, нерастяжимой резину считать не приходится. Термодинамика стержней с учётом их сжимаемости рассмотрена в учебнике [7].

## 9 Другие вопросы термодинамики

### 1 термодинамика диэлектриков и магнетиков

(см Райгородский, просто это больше в статфизе рассматривается, так что пока так)

#### 1.1 термодинамика диэлектриков

Рассмотрим описание диэлектриков. Как и всегда, метод состоит в том, чтобы ввести функцию состояния, которая учитывала бы все свойства диэлектриков, а далее из нее с помощью термодинамических преобразований получить соотношения макро характеристик (???)

Функций для описания диэлектриков может быть несколько, приведем здесь соображения для прихода к ним.

При наличии электрического поля  $\mathbf{E}$  дифференциал внутренней энергии единицы объема системы  $u$  будет иметь добавку:

$$du = Tds + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} d\mathbf{D}$$

Здесь  $\zeta = \frac{\mu}{m}$  — химический потенциал, отнесенный к единице массы,  $m$  — масса диэлектрика,  $\rho = \frac{Nm}{V}$ , а  $\mathbf{D}$  — индукция электрического поля.

Таким образом, учтена теплопередача, изменение числа частиц и изменение электрического заряда.

Наряду с  $u$  можно рассматривать функцию

$$u_1 = u - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \mathbf{D}$$

которая получается из  $u$  преобразованием Лежандра по переменным  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Поэтому

$$du_1 = Tds + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D} d\mathbf{E}$$

(далее просто переписывание этого выражения через схожие параметры, не уверен, что это нужно)

$$u_2 = u - \frac{E^2}{8\pi}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

$$du_2 = Tds + \zeta d\rho + \mathbf{E}d\mathbf{P}$$

$$du_3 = Tds + \zeta d\rho - \mathbf{P}d\mathbf{E}$$

Функциям  $u_2$  и  $u_3$  можно дать наглядную интерпретацию в соответствии с характером описываемой ими части плотности полной энергии системы  $u$ .

Например,  $u_2$  описывает плотность энергии системы за вычетом плотности энергии электрического поля.

Использование функции  $u_1$  вместо  $u$  соответствует ситуации, когда полный электрический заряд системы остается неизменным, а изменяются электрические потенциалы.

Выбор функций  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  определяется тем, какая часть энергии электрически заряженной системы рассматривается в конкретной задаче.

(???теперь про применение собственно этого???)

## 1.2 термодинамика магнетиков

Термодинамические соотношения для магнетиков весьма сходны с аналогичными соотношениями для диэлектриков.

Выражение для дифференциала внутренней энергии единицы объема имеет вид

$$du = Tds + \zeta d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}d\mathbf{B}$$

$$u_1 = u - \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\mathbf{B}$$

$$du_1 = Tds + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}d\mathbf{H}$$

$$u_2 = u - \frac{H^2}{8\pi}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$$du_2 = Tds + \zeta d\rho + \mathbf{H}d\mathbf{M}$$

$$u_3 = u_2 - \mathbf{M}\mathbf{H}$$

$$du_3 = Tds + \zeta d\rho - \mathbf{M}d\mathbf{H}$$

$$u'_2 = Tds + \zeta d\rho - \mathbf{M}d\mathbf{B}$$

Осталось понять, где и зачем это нужно?

решить задачи и посмотреть это все нормально.

**модель ландау**

(статфиз мфти 1я лекция)

$$\mathcal{F}(T, H, M) = F_0(T) + a(T)M^2 + \frac{1}{2}bM^4 - HM$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial M} = a(T)M + bM^3 - H = 0$$

$$M = \frac{H}{a(T)}, \quad T > T_c$$

Кюри-Вейсс

$$\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H=0} = \frac{1}{\alpha(T_c - T)}, \quad T > T_c$$

$$M = M_0 + \delta M$$

$$a(T)\delta M + 3bM_0^2\delta M - H = 0; \quad a(T)\delta M - 3a(T)\delta M - H = 0$$

$$\delta M = \frac{H}{2|a(T)|}$$

$$\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H=0} = \frac{1}{2\alpha(T_c - T)}, \quad T > T_c$$

**N спинов в магнитном поле**

$$H = -2\mu B \sum_{i=1}^N \left( s_i^z - \frac{1}{2} \right) - 2\mu B s^z$$

число способов:

$$\Delta\gamma_M = \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

$$\Delta\gamma = \left( \frac{N}{e} \right)^N \left( \frac{e}{M} \right)^M \left( \frac{e}{N-M} \right)^{N-M} = \frac{N^N}{M^M (N-M)^{N-M}}$$

$$\sigma^* = \ln \Delta\gamma = -N(n \ln(n) + (1-n) \ln(1-n))$$

$$n = \frac{M}{N} = \frac{E}{(N\Delta E)}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\Delta E} \ln \left( \frac{1-n}{n} \right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE^2} = -\frac{1}{N(\Delta E)^2 n(1-n)}$$

## 2 Применения термодинамики к задачам механики

просто соберем примеры разных температурных явлений

### 2.1 Методы (??)

(пока точно ими не владею, тут профессиональный был бы уровень.)

### 2.2 Механико-термодинамические свойства резины (??)

(ну есть такой пример, пока тут побудет. мб удалю, если совсем он бестолковый, пока вроде сойдет тоже.)

#### вывод теплоемкости и внутренней энергии резины

**Пример 1.** Используя уравнения состояния упругой пружины  $f = kl$ , где  $f$  — сила натяжения, а  $l$  — удлинение пружины от ненапряженного равновесного состояния, а также выражение для дифференциала свободной энергии

$$dF = -SdT + fdl$$

Найдите теплоемкость  $C_l$  при постоянном удлинении  $l$ , теплоемкость  $C_f$  при постоянном натяжении пружины и внутреннюю энергию системы.

Проинтегрируем свободную энергию при постоянной температуре от ненапряженного состояния пружины ( $l = 0$ ) до некоторого значения  $l$ , найдем

$$F = F_0(T) + \frac{kl^2}{2}$$

Найдем энтропию

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_l = S_0(T) - \frac{l^2}{2} \frac{dk}{dT}$$

Последнее слагаемое в правой части (1.53) учитывает зависимость коэффициента жесткости  $k$  пружины от температуры.

Производная от коэффициента жесткости пружины по температуре вычисляется в рамках линейного приближения, при котором  $k$  считается функцией температуры и не зависит от удлинения пружины.

Для теплоемкостей  $C_l$  и  $C_f$  получаем

$$\begin{aligned} C_l &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_l = T \frac{\partial S_0(T)}{\partial T} - \frac{l^2 T}{2} \frac{d^2 k}{dT^2} \\ C_f &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_f = T \frac{\partial S_0(T)}{\partial T} - \frac{l^2 T}{2} \frac{d^2 k}{dT^2} + \frac{l^2 T}{k} \left( \frac{dk}{dT} \right)^2 = \\ &= C_l + \frac{l^2 T}{k} \left( \frac{dk}{dT} \right)^2 \end{aligned}$$

При получении выражения для  $C_f$  учтено, что выражение (1.53) для энтропии можно записать в виде:

$$S = S_0(T) - \frac{f^2}{2k^2} \frac{dk}{dT}$$

Из выражений (1.54) следует, что

$$C_f - C_l = \frac{l^2 T}{k} \left( \frac{dk}{dT} \right)^2 > 0$$



Выражение для внутренней энергии может быть получено так же, как в предыдущей задаче. С помощью (1.52) и (1.53) имеем:

$$U = F + TS = U_0(T) + \frac{kl^2}{2} \left( 1 - \frac{T}{k} \frac{dk}{dT} \right)$$

Где

$$U_0(T) = F_0(T) + TS_0(T)$$

Выражение (1.55) показывает, что изменение внутренней энергии при изотермическом процессе не равно совершенной механической работе  $\frac{kl^2}{2}$ , а больше или меньше этой величины в зависимости от знака производной  $\frac{dk}{dT}$ .

Тем самым равенство (1.55) указывает на обязательное присутствие процесса теплопередачи при изотермическом совершении работы.

В случае теплоизолированной системы с  $\frac{dk}{dT} \neq 0$  совершение механической работы обязательно сопровождается изменением температуры системы.

## резина как одномерная цепочка

### эмпирические факты про резину следующие

Изобарический коэффициент объемного расширения резины отрицателен:  $\frac{\partial V}{\partial T} < 0$

Эффект Гука-Джоуля: если резину, подвешенную к потолку, держащий внизу груз, нагреть, то она поднимется. Это же можно проверить, если нагреть часть колеса в поле тяжести: колесо начнет вращаться за счет смещения центра масс.

Суперэластичность: ее легко растягивать, ее модуль юнга меньше на 6 порядков, чем металлов.

Из опыта следует, что  $k \approx T$

поэтому если мы запишем

$$f dx = dE - T dS$$

можно догадаться, что  $dE$  не будет влиять на свободную энергию.

Также нужно знать, что это длинная полимерная молекула.

поэтому нужно предложить простую модель, пусть она будет одномерной: пусть у нас резина - это цепь молекул, которые могут напарвляться одна после предыдущей вперед, а может и назад.

число звеньев крайне велико.

поскольку звенья поворачиваются свободно, внутренняя энергия не зависит от  $x$  - общей длины резины вдоль линии, на которой она расположена.

толщина атомов - несколько ангстрем. Тогда несколько

вычислим статистический вес:

у нас  $N_+$  и  $N_-$  - звенья, идущие вперед и назад.

тогда всего звеньев  $N = N_+ + N_-$

тогда общая длина  $x = (N_+ - N_-)a$ .

$$\Delta\gamma_x = C_N^{N_+}$$

$$N_{\pm} = (N \pm x/a)/2$$

Воспользуемся формулой стирлинга:

$$\Delta\gamma(x) = N!/N_+!N_-!$$

$$S(x) = N(\ln 2 - \frac{1}{2}(1 + x/Na) \ln(1 + \frac{x}{Na})) - \frac{1}{2}(1 - x/Na) \ln(1 - \frac{x}{Na})$$

таким образом

$$f(x) = \frac{\partial F}{\partial x} = -T \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{T}{2a} \ln \frac{(1 + \frac{x}{Na})}{(1 - \frac{x}{Na})} = \frac{T}{Na^2} x =$$

(далее пример 11 из райгора.)

Эмпирическое уравнение состояния резиновой ленты имеет вид:

$$f = aT \left( \frac{l}{l_0} - \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 \right)$$

где  $l$  — длина ленты,  $l_0$  — длина ленты в нерастянутом состоянии,  $f$  — сила натяжения ленты,  $a$  — некоторая положительная постоянная.

От каких термодинамических переменных зависит внутренняя энергия ленты?

Найти работу, совершенную при изотермическом растяжении ленты от длины  $l_1$  до  $l_2$ , и количество поглощенной ею при этом теплоты.

Найти конечную температуру ленты при ее обратимом растяжении между значениями длины  $l_1$  и  $l_2$ , если начальная температура  $T_1$ .

Теплоемкость  $C_l$  ленты при постоянной длине считать постоянной.

Уравнение состояния ленты задано в явном виде, поэтому интегрируем выражение

$$dF = -SdT + fdl$$

при постоянной температуре от значения  $l_0$  до  $l$ , получим

$$F = F_0(T) + ab(l)T$$

где  $b(l) = \frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{l} - \frac{3}{2}l_0$

Энтродия ленты  $S$  есть

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_l = S_0(T) - ab(l)$$

так что для ее внутренней энергии  $U$  получаем

$$U = F + TS = F_0(T) + TS_0(T) = U_0(T)$$

Внутренняя энергия ленты зависит только от температуры и не зависит от ее длины. Разумеется, этот результат можно было получить и с помощью уравнения

$$\left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_T = -T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_l + f = 0$$

Которое можно вывести с помощью соотношения (1.56). Для Теплоемкости ленты  $C_l$  с помощью (1.57) имеем:

$$C_l = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_l = T \frac{\partial S_0(T)}{\partial T}$$

Видно, что  $C_l$  может зависеть от температуры, но по условию задачи она считается постоянной.

Работа, совершаемая при изотермическом растяжении ленты, легко вычисляется с помощью уравнения состояния и оказывается положительной, как это и следует из элементарных соображений:

$$A = \int_{l_1}^{l_2} f dl = aT \int_{l_1}^{l_2} \left( \frac{l}{l_0} - \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 \right) dl = aT \frac{l_2 - l_1}{l_0} \left( \frac{l_1 + l_2}{2} - \frac{l_0^3}{l_1 l_2} \right)$$

При изотермическом процессе внутренняя энергия ленты с заданным уравнением состояния не изменится. Поэтому  $Q = -A$ : лента не поглощает, а отдает тепло, величина которого равна совершенной работе при ее растяжении.

При обратимом растяжении ленты ее энтропия остается постоянной, поэтому на основании фундаментального равенства Гиббса

$$dU = TdS + fdl$$

имеем

$$C_l dT = fdl$$

Используя уравнение состояния ленты, получаем

$$C_l \frac{dT}{T} = a \left( \frac{l}{l_0} - \frac{l_0^2}{l^2} \right) dl$$

что после интегрирования дает:

$$C_l \ln \frac{T_2}{T_1} = a \frac{l_2 - l_1}{l_0} \left( \frac{l_1 + l_2}{2} - \frac{l_0^3}{l_1 l_2} \right)$$

Отсюда находим значение  $T_2$

## 2.3 Упругие деформации (?)

### модули упругости

(почему они такие?)

изотермический  $K_T$  и адиабатическим  $K_{ад}$  модули упругости имеют вид:

$$K_T = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T ; \quad K_{ан} = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ал}$$

(зачем они??)

установим между ними связь...

(тупо скопировано из райгора, пока не до этого)

**Р е ш е н и е.** Эту задачу можно решить, не используя второго начала термодинамики. Для этого нужно вывести уравнение адиабаты и вычислить производную  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ад}$ . Записав первое начало термодинамики в виде

$$\delta Q = dU + pdV = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT$$

и учитывая, что

$$\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V, \quad \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] = (C_p - C_V) \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p$$

получим, полагая  $\delta Q = 0$ , уравнение адиабаты в виде:

$$C_V dT + (C_p - C_V) \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV = 0$$

Поскольку для  $dT$  справедливо соотношение

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV + \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp$$

то уравнение (1.35) можно переписать как

$$C_V \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + C_p \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV = 0$$

Входящие в уравнение адиабаты (1.36) дифференциалы  $dp$  и  $dV$  не независимы, а соответствуют производной  $\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\text{ад}}$ . Поэтому с помощью (1.36) имеем

$$\left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_a = -\frac{C_p}{C_V} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

При получении (1.37) использовано тождество (1.9) и введено обозначение  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ . Равенство (1.37) дает ответ на поставленный вопрос:

$$K_a = \gamma K_T$$

## 2.4 Термодинамика вращающихся тел (!?!?!?)

(интересный очень вопрос)

## 3 Некоторые модели газовой динамики

(очень много крутых моделей построить на это все)

Коэффициенты переноса в газах.

Уравнение стационарной теплопроводности

здесь соберем общую теорию, далее тут или где-то в другом месте задачи на текущий газ

### 3.1 динамика комнатного воздуха

Интересно, какова же скорость, с которой окружающий нас воздух перемещается? Оказывается, скорость движения молекулы в воздухе при комнатной температуре - 500 м/с. и...

Покажем это и исследуем вообще воздух.

но сразу же мы приходим к вопросу (на который я не знаю ответа), какого фига скорость ветра пару метров в секунду, а в закрытом помещении она пренебрежима мала, а скорость молекулы такая огромная?

и как ее так можно сразу на пальцах посчитать?

от столкновения до столкновения  $10^{-5}$  см проходит молекула. (почему?)

ну и интересные задачи тут.

### 3.2 о скорости звука

Подробная теория звука содержится в физике конденсированных сред, где звук описывается фононами и...

Здесь приведена прикладная теория скорости звука, которая нужна для газовой динамики.

Короче говоря, пользуемся формулой

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

### 3.3 протекание газа сквозь сопло ракеты

покажем, как то, что мы уже выше писали применяется в решении прикладной задачи.

**протекание через цилиндр** (!!! выделить нужно методы решения!! чтобы сразу про них сказать, а тут было бы только пояснение их)

Начнем с простой задачи о газе в цилиндре. Задача очень показательная, так как мы многое про динамику газа на этом примере начинаем видеть.

на нее ранее были отсылки в теоретических частях, мб даже какие-то формулы еще раз приведены, которые тут выводятся.

также задача интересна тем, что тут есть и смещения и деформации одновременно и следует не путаться в этом.

научимся описывать распределение давлений в цилиндре. (мб даже дойду и запрогаю красивую диаграмму, как все меняется, но это больше умф)

выделим малый цилиндрический объем, для него запишем:

$$ma = \Delta PS$$

Заметим, что хотя газ течет, его масса в данный момент времени одинакова в трубе, так как течение стационарнл. Для всей трубы менделеева-Клапейрона уравнение имеет вид:

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

поэтому масса выделенной части  $m = \frac{P_0 S M}{RT_0} l_0$

из формулы для ускорения находим ускорение всех частиц в цилиндре:

$$a = \frac{RT}{P_0 l_0 M} \Delta P$$

Интуитивно понятно, что давление как-то падает при перемещении вдоль поршня. Найдем эту зависимость количественно.

Будем считать, что ускорение в каждой части цилиндра одинаковое и равное выше. Подставим это во второй закон Ньютона для этой порции газа, в итоге получаем:

$$\frac{\delta P}{\Delta x} = -\frac{\Delta P}{l_0}$$

Получаем, что давление в трубе меняется по линейному закону:

$$P = P_0 + \Delta P(1 - \frac{x}{l})$$

Теперь рассмотрим вопрос о деформации слоев газа при их смещении. Деформацию запишем через относительную деформацию:

$$\delta x = (1 + \varepsilon)\Delta x$$

На первом приближении протекания газа мы пренебрегаем всем чем угодно, так что рассмотрим это протекание как адиабатический процесс.

$$P_0(\Delta x)^\gamma = P((1 + \varepsilon)\Delta x)^\gamma$$

Поэтому давление примерно меняется так:

$$P \approx P_0(1 - \gamma\varepsilon)$$

В то же время мы помним найденную ранее линейную зависимость давления от координаты, так что (позже проверю)

$$\varepsilon = -\frac{\Delta P}{\gamma P_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)$$

заметим, что она менее 0, то есть при таком протекании газ сожмется. Если же при этом его закрыть поршнями, то они сместятся друг к другу на расстояние:

$$\Delta l_1 = l_0 \cdot \langle \varepsilon \rangle = -\frac{\Delta P}{2\gamma P_0}l_0$$

Посмотрим далее на температурные зависимости. (где-то выше должна быть теория как исследовать эти зависимости, чтобы я брал ее тут и применял, все)

Рассмотрим смещающийся газ, для него уравнение Клапейрона  $\frac{PV}{T} = \text{const}$  для начального и смещенного состояния дает:

$$\frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1 + \varepsilon)\Delta x}{T}$$

Подставим сюда найденные зависимости давления и деформации. Получаем:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right) \left(1 - \frac{\Delta P}{\gamma P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right)$$

Или, примерно:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right)$$

(позже пересмотрю это)

Теперь посмотрим приход к тепловому равновесию.

)про переходы к равновесию сказать мало что могу(?) вроде методы тут хорошие кстати)

Установившуюся температуру можно искать как среднюю от всех температур в каждой координате.

$$\bar{T} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0}\right)$$

Приход к тепловому равновесию это по сути когда температура из  $T_0$  переходит в  $\bar{T}$ , поэтому действуем по тому же методу: уравнение Клапейрона, относительная деформация, ее усреднение и домножение на длину всей трубки:

$$\begin{aligned}\frac{P_0 S \Delta x}{T_0} &= \frac{P S (1 + \bar{\varepsilon}) \Delta x}{\bar{T}} \rightarrow 1 + \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{T}}{T_0} \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\right) \approx \\ &\approx 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)\end{aligned}$$

Средняя относительная деформация оказывается равной

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{2P_0} = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0}$$

изменение расстояния между поршнями становится равным

$$\Delta \bar{l}_2 = \langle \bar{\varepsilon} \rangle l_0 = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} l_0$$

Газ в этом процессе расширится.

**протекание через сопло переменного сечения** Рассмотрим движение газа через сопло переменного сечения.

Процесс все так же адиабатический, так что давление и плотность с перемещением по координате изменяются с сохранением соотношения:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}$$

отсюда легко получить:

$$\Delta \rho \approx \Delta p \frac{\rho}{\gamma p} \equiv \frac{\Delta P}{c^2}$$

Закон сохранения массы:

$$\rho v S - (\rho + \Delta \rho)(v + \Delta v)(S + \Delta S) = 0$$

Из него получаем примерно

$$\Delta \rho v S + \rho \Delta v S + \rho v \Delta S$$

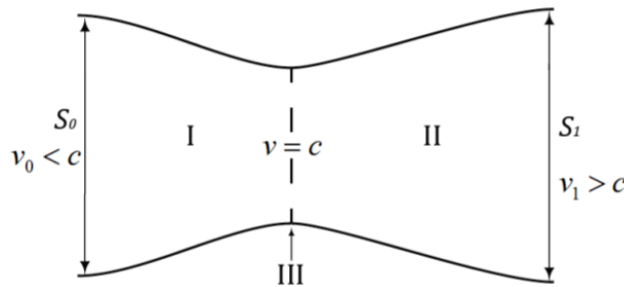


Figure 5: примерный вид реактивного сопла

Сюда нужно подставить найденные выражения изменения остальных слагаемых. (потом тут все доделаю)

Получим формулу для скорости течения газа

$$\Delta v = \frac{v \Delta S}{S \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)}$$

анализ изменения  $S$  для того, чтобы всегда она увеличивалась приведен на ???. Посмотрим на формулу для изменения скорости:

Чтобы было  $\Delta v = \frac{v \Delta S}{S(\frac{v^2}{c^2} - 1)} > 0$ , нужно, если  $v < c$ , чтобы было  $\Delta S < 0$ ; если  $v > c$ , чтобы было  $\Delta S > 0$

Вот так вот мы и разобрались с задачей о ракете.

### 3.4 вязкость

### 3.5 динамика атмосферы

**Барометрическая формула** Вспоминая распределения (еще раз тут быстро те идеи повторяю)

...

Из уравнения механического равновесия  $\partial P / \partial z = -mgP/kT$  следует:

$$P = P_0 \exp \left( -mg \int_0^z \frac{dz_1}{kT(z_1)} \right)$$

Это барометрическая формула для разных температур. посмотрим на ее применения и графики.

.... (тут они) ...

## 4 Термодинамика тел при больших плотностях

(отношусь к этому как к простым моделями, которые по потребности доделаю, но пока что нужно как следует прописать основы! и много тренироваться!)

### обзор тел с большими плотностями

кратко всё, что тут подробно рассказывается

### 4.1 Уравнение состояния вещества при больших плотностях

#### теория

Принципиальный интерес представляет исследование свойств вещества при чрезвычайно больших плотностях.

Проследим качественно за изменением этих свойств по мере постепенного увеличения плотности.

Когда объем, приходящийся на один атом, становится меньше обычных атомных размеров, атомы теряют свою индивидуальность, так что вещество превращается в сильно сжатую электронно-ядерную плазму. Если температура вещества не слишком высока, то электронная компонента этой плазмы представляет собой вырожденный ферми-газ. В конце § 57 было отмечено своеобразное свойство такого газа: его идеальность возрастает по мере увеличения плотности. Поэтому при достаточном сжатии вещества роль взаимодействия электронов с ядрами (и друг с другом) становится несущественной, так что можно пользоваться формулами идеального ферми-газа.

Согласно условию (57,9) это наступает при выполнении неравенства

$$n_e \gg \left( \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \right)^3 Z^2$$



где  $n_e$  -плотность числа электронов,  $m_e$  -масса электрона,  $Z$  некоторый средний атомный номер вещества.

Отсюда получаем для полной плотности массы вещества неравенство

$$\rho \gg \left( \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \right)^3 m' Z^2 \sim 20 Z^2 2 / \text{CM}^3$$

где  $m'$  -масса, приходящаяся на один электрон, так что  $\rho = n_e m'$ . Что касается «ядерного газа», то благодаря большой массе ядра Он еще может быть далек от вырождения, но его вклад, например,

в давление вещества во всяком случае совершенно несуществен по сравнению с давлением электронного газа.

Таким образом, термодинамические величины вещества в рассматриваемых условиях определяются полученными в § 57 формулами, примененными к электронной компоненте.

В частности, для давления имеем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e} \left( \frac{\rho}{m'} \right)^{5/3}$$

Условие для плотности (106,1) дает для давления численное неравенство  $P \geq 5 \cdot 10^5 Z^{10/3}$  бар.

В написанных формулах электронный газ предполагается нерелятивистским. Это требует малости граничного импульса Ферми  $p_F$  по сравнению с  $mc$  (см. §61), что приводит к численным неравенствам

$$\rho \ll 2 \cdot 10^6 \text{e/cm}^3, \quad P \ll 10^{17} \text{ бар.}$$

Когда плотность и давление газа становятся сравнимыми с указанными значениями, электронный газ делается релятивистским, а при выполнении обратных неравенств - ультрарелятивистским. В последнем случае уравнение состояния вещества определяется формулой (61, 4), согласно которой <sup>2)</sup>

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left( \frac{\rho}{m'} \right)^{4/3}$$

Дальнейшее повышение плотности приводит к состояниям, в которых термодинамически выгодными оказываются ядерные реакции, заключающиеся в захвате электронов ядрами (с одновременным испусканием нейтрино).

В результате такой реакции уменьшается заряд ядра (при неизменном его весе), что, вообще говоря, приводит к уменьшению энергии связи ядра, т. е. уменьшению его масс-дефекта. Энергетическая невыгодность такого процесса при достаточно больших плотностях вещества с избытком компенсируется уменьшением энергии вырожденного электронного газа вследствие уменьшения числа электронов.

Не представляет труда написать термодинамические условия, определяющие «химическое равновесие» описанной ядерной реакции,

которую можно записать в виде символического равенства

$$A_z + e^- = A_{z-1} + \nu$$

где  $A_z$  обозначает ядро с весом  $A$  и зарядом  $Z$ ;  $e^-$  -электрон,  $\nu$  - нейтрино. Нейтрино не задерживаются веществом и покидают тело; такой процесс должен вести к непрерывному охлаждению тела. Поэтому тепловое равновесие в этих условиях имеет смысл рассматривать, только принимая температуру вещества равной нулю. Химический

потенциал нейтрино при этом в уравнение равновесия не должен входить. Химический потенциал ядер определяется в основном их внутренней энергией, которую мы обозначим посредством  $-\varepsilon_{A,Z}$  (энергией связи обычно называют положительную величину  $\varepsilon_{A,Z}$ ).

Наконец, обозначим посредством  $\mu_e(n_e)$  химический потенциал электронного газа как функцию плотности  $n_e$  числа частиц в нем. Тогда условие химического равновесия напишется в виде  $-\varepsilon_{A,Z} + \mu_e(n_e) = -\varepsilon_{A,Z-1}$  Или, вводя обозначение  $\varepsilon_{A,Z} - \varepsilon_{A,Z-1} = \Delta$  :

$$\mu_e(n_e) = \Delta$$

Воспользовавшись формулой (61,2) для химического потенциала ультра релятивистского вырожденного газа, получаем отсюда

$$n_e = \frac{\Delta^3}{3\pi^2(\hbar c)^3}$$

Таким образом, условие равновесия приводит к некоторому постоянному значению электронной плотности. Это значит, что при постепенном увеличении плотности вещества рассматриваемая ядерная реакция начнется, когда электронная плотность достигнет значения (106,4). При дальнейшем сжатии вещества все большее число ядер будет захватывать по электрону, так что общее число электронов будет уменьшаться, но их плотность будет оставаться неизменной. Вместе с электронной плотностью

будет постоянным также и давление вещества, которое по-прежнему определяется в основном давлением Электронного газа; Именно, подстановка (106,4) в (106,3) дает

$$P = \frac{\Delta^4}{12\pi^2(\hbar c)^3}$$

Так будет продолжаться до тех пор, пока все ядра не захватят по электрону.

При еще больших плотностях и давлениях будет происходить дальнейший захват электронов ядрами, сопровождающийся дальнейшим уменьшением заряда последних. В конце концов ядра, содержащие слишком много нейтронов, станут неустойчивыми и распадутся. При плотности  $\rho \sim 3 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$  (и давлении  $P \sim 10^{24} \text{ бар}$ ) нейтроны начинают преобладать по своему числу над электро-

нами, а уже при  $\rho \sim 10^{12} \text{ г/см}^3$  начинают преобладать и по создаваемому ими давлению (F. Hund, 1936). Здесь начинается область плотностей, в которой вещество можно рассматривать в основном как вырожденный нейтронный ферми-газ с небольшой примесью электронов и различных ядер, концентрации которых определяются условиями равновесия соответствующих ядерных реакций. Уравнение состояния вещества в этой области есть

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} \rho^{5/3} = 5,5 \cdot 10^3 \rho^{5/3} \text{ бар}$$

где  $m_n$  -масса нейтрона. Наконец, при плотностях  $\rho \gg 6 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$  вырожденный нейтронный газ станет ультрарелятивистским, а уравнение состояния будет определяться формулой

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left( \frac{\rho}{m_n} \right)^{4/3} = 1,2 \cdot 10^9 \rho^{4/3} \text{ бар}$$

Следует, однако, иметь в виду, что при плотностях порядка плотности вещества ядер становятся существенными специфические ядерные силы (сильное взаимодействие нуклонов). В этой области значений плотности формула (106,7) может иметь лишь

качественный смысл. При современном состоянии наших знаний о сильных взаимодействиях нельзя сделать сколько-нибудь определенных заключений и о состоянии вещества при плотностях, значительно превосходящих ядерную. Отметим лишь, что в этой области следует ожидать возникновения, наряду с нейтронами, также и других частиц. Поскольку частицы каждого рода заполняют свой отдельный ряд состояний, то превращение нейтронов в другие частицы может оказаться термодинамически выгодным деления нейтронов.

## 4.2 равновесие тел с большой массой

### теория

Рассмотрим тело очень большой массы, части которого удерживаются вместе силами гравитационного притяжения. Реальные тела большой массы известны нам в виде звезд, непрерывно излучающих энергию и отнюдь не находящихся в состоянии теплового равновесия. Представляет, однако, принципиальный интерес рассмотрение равновесного тела большой массы. При этом мы будем пренебрегать влиянием температуры на уравнение состояния, т. е. будем рассматривать тело находящимся при абсолютном нуле («холодное» тело). Поскольку в реальных условиях температура наружной поверхности значительно ниже, чем внутренняя температура, рассмотрение тела с отличной от нуля постоянной температурой во всяком случае лишено физического смысла,

Будем далее предполагать тело невращающимся; тогда в равновесии оно будет иметь сферическую форму, и распределение плотности в нем будет центрально-симметричным.

Равновесное распределение плотности (и других термодинамических величин) в теле будет определяться следующими уравнениями. Ньютоновский гравитационный потенциал  $\varphi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho$$

где  $\rho$  -плотность вещества,  $G$  -ньютоновская гравитационная постоянная; в центрально-симметричном случае имеем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 4\pi G\rho$$

Кроме того, в тепловом равновесии должно выполняться условие (25,2); в гравитационном поле потенциальная энергия частицы с массой  $m$  есть  $m'\varphi$ , так что имеем

$$\mu + m'\varphi = \text{const},$$

где  $m'$  -масса частицы тела, а  $\mu$  химического потенциала вещества в отсутствие поля для краткости опущен индекс нуль. Выразив  $\varphi$  через  $\mu$  из (107,2) и подставив в уравнение (107,1), мы можем написать последнее в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\mu}{dr} \right) = -4\pi m'G\rho$$

При увеличении массы гравитирующего тела возрастает, естественно, и его средняя плотность (это обстоятельство будет подтверждено следующими ниже вычислениями). Поэтому при достаточно большой полной массе  $M$  тела можно, согласно изложенному в предыдущем параграфе, рассматривать вещество тела как вырожденный электронный ферми-газ -сначала нерелятивистский, а затем, при еще больших массах, релятивистский.

Химический потенциал нерелятивистского вырожденного электронного газа связан с плотностью тела  $\rho$  равенством

$$\mu = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2} \frac{\hbar^2}{m_e m'^{2/3}} \rho^{2/3}$$

(формула (57,3), в которую подставлено  $\rho = m'N/V$ ;  $m'$  — масса, приходящаяся на один электрон,  $m_e$  — электронная масса). Выразив отсюда  $\rho$  через  $\mu$  и подставив в (107,3), получим следующее уравнение <sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\mu}{dr} \right) = -\lambda \mu^{3/2}, \quad \lambda = \frac{2^{7/2} m_e^{3/2} m'^2 G}{3\pi \hbar^3}$$

Обладающие физическим смыслом решения этого уравнения не должны иметь особенности в начале координат:  $\mu \rightarrow \text{const}$  при  $r \rightarrow 0$ . Это требование автоматически приводит к условию для первой производной

$$\frac{d\mu}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0$$

как это непосредственно следует из уравнения (107,5) после интегрирования по  $dr$ :

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{\lambda}{r^2} \int_0^r r'^2 \mu^{3/2} dr'$$

Ряд существенных результатов можно получить уже путем применения к уравнению (107,5) простых соображений размерности. Решения уравнения (107,5) содержат лишь два постоянных параметра — постоянную  $\lambda$  и, например, радиус тела  $R$ , заданием которого однозначно определяется выбор решения. Из этих двух величин можно образовать всего одну величину с размерностью длины — самый радиус  $R$ , и одну величину с размерностью энергии:  $1/\lambda^2 R^4$  (постоянная  $\lambda$  имеет размерность  $\text{см}^{-2} \cdot \text{эрг}^{-1/2}$ ). Поэтому ясно, что функция  $\mu(r)$  должна иметь вид

$$\mu(r) = \frac{1}{\lambda^2 R^4} f\left(\frac{r}{R}\right)$$

$r/R$ . Поскольку плотность  $\rho$  пропорциональна  $\mu^{3/2}$ , то распределение плотности должно иметь вид

$$\rho(r) = \frac{\text{const}}{R^6} F\left(\frac{r}{R}\right)$$

Таким образом, при изменении размеров сферы распределение плотности в ней меняется подобным образом, причем в подобных точках плотность меняется обратно пропорционально  $R^6$ . В частности, средняя плотность сферы будет просто обратно пропорциональна  $R^6$ :

$$\bar{\rho} \propto \frac{1}{R^6}$$

Полная же масса  $M$  тела, следовательно, обратно пропорциональна кубу радиуса:

$$M \propto \frac{1}{R^3}$$

Эти два соотношения можно написать также в виде

$$R \propto M^{-1/3}, \quad \bar{\rho} \propto M^2$$

Таким образом, размеры равновесной сферы обратно пропорциональны кубическому корню из ее полной массы, а средняя плотность пропорциональна квадрату массы. Последнее обстоятельство подтверждает сделанное выше предположение о том, что плотность гравитирующего тела растет с увеличением его массы.

Тот факт, что гравитирующая сфера из нерелятивистского вырожденного ферми-газа может находиться в равновесии при любом значении полной массы  $M$ , можно было усмотреть заранее из следующих качественных соображений. Полная кинетическая энергия частиц такого газа пропорциональна  $N(N/V)^{2/3}$  (см. (57,6)) или, что то же,  $M^{5/3}/R^2$ , а гравитационная энергия газа в целом отрицательна и пропорциональна  $M^2/R$ . Сумма двух выражений такого типа может иметь минимум (как функция от  $R$ ) при любом  $M$ , причем в точке минимума  $R \subset M - 1/3$ .

Подставляя (107,7) в (107,5) и вводя безразмерную переменную  $\xi = r/R$ , найдем, что функция  $f(\xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{df}{d\xi} \right) = -f^{3/2}$$

с граничными условиями  $f'(0) = 0, f(1) = 0$ . Это уравнение не может быть решено в аналитическом виде и должно интегрироваться численно. Укажем, что

$$f(0) = 178,2, \quad f'(1) = -132,4$$

С помощью этих численных значений легко определить значение постоянной  $MR_3$ . Умножив уравнение (107,1) на  $r^2 dr$  и интегрируя от 0 до  $R$ , получим

$$GM = R^2 \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=R} = - \frac{R^2}{m'} \frac{d\mu}{dr} \Big|_{r=R} = - \frac{f'(1)}{m' \lambda^2 R^3}$$

откуда

$$MR^3 = 91,9 \frac{\hbar^6}{G^3 m_e^3 m' 5} = 2,2 \cdot 10^{13} \left( \frac{m_n}{m'} \right)^5 \odot \kappa M^3$$

где  $\odot = 2 \cdot 10^{33}$  е-масса Солнца. Наконец, для отношения центральной плотности  $\rho(0)$  к средней плотности  $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$  легко найти

$$\frac{\rho(0)}{\bar{\rho}} = - \frac{f^{3/2}(0)}{3f'(1)} = 5,99$$

На рис. 50 (кривая 1) изображен график отношения  $\rho(r)/\rho(0)$  как функции  $r/R^1$ .

Перейдем к исследованию равновесия сферы, состоящей из вырожденного ультрарелятивистского электронного газа. Полная кинетическая энергия частиц такого газа пропорциональна  $N(N/V)^{2/3}$  (см. (61,3)), или иначе  $M^{4/3}/R$ ; гравитационная же энергия про-

порциональна  $-Ma/R$ . Таким образом, обе эти величины зависят от  $R$  одинаковым образом, и их сумма тоже будет иметь вид  $\text{const} \cdot R^{-1}$ . Отсюда следует, что тело вообще не сможет находиться в равновесии: если  $\text{const} > 0$ , то оно будет стремиться расширяться (до тех пор, пока газ не станет нерелятивистским); если же  $\text{const} < 0$ , то уменьшению полной энергии будет соответствовать стремление  $R$  к нулю, т. е. тело будет неограниченно сжиматься. Лишь в особом случае  $\text{const} = 0$  тело может находиться в равновесии, причем в безразличном равновесии с произвольными размерами  $R$ .

Эти качественные соображения, разумеется, полностью подтверждаются точным количественным анализом. Химический потенциал рассматриваемого релятивистского газа связан с плотностью (см. (61,2)) посредством

$$\mu = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c \left( \frac{\rho}{m'} \right)^{1/3}$$

Вместо уравнения (107,5) получаем теперь

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\mu}{dr} \right) = -\lambda \mu^3, \quad \lambda = \frac{4Gm^2}{3\pi c^3 \hbar^3}$$

находим, что химический потенциал как функция от  $r$  должен иметь вид

$$\mu(r) = \frac{1}{R\sqrt{\lambda}} f\left(\frac{r}{R}\right)$$

а распределение плотности

$$\rho(r) = \frac{\text{const}}{R^3} F\left(\frac{r}{R}\right)$$

Таким образом, средняя плотность будет теперь обратно пропорциональна  $R^3$ , а полная масса  $M$  с  $R^3$  оказывается не зависящей от размеров постоянной:

$$\bar{\rho} \text{cs} \frac{1}{R^3}, \quad M = \text{const} \equiv M_0$$

$M_0$  есть единственное значение массы, при котором возможно равновесие; при  $M > M_0$  тело будет стремиться неограниченно сжиматься, а при  $M < M_0$  оно будет расширяться.

Для точного вычисления «критической массы»  $M_0$  необходимо произвести численное интегрирование уравнения

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{df}{d\xi} \right) = -f^s, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

которому удовлетворяет функция  $f(\xi)$  в (107,14). Теперь получается

$$f(0) = 6,897, \quad f'(1) = -2,018$$

Для полной массы находим

$$GM_0 = R^2 \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{f'(1)}{m' \sqrt{\lambda}}$$

откуда

$$M_0 = \frac{3,1}{m'^2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} = 5,8 \left( \frac{m_n}{m'} \right)^2 \odot$$

Положив  $m' = 2m_n$ , получим  $M_0 = 1,45 \odot$ . Наконец, отношение центральной плотности к средней оказывается равным

$$\frac{\rho(0)}{\bar{\rho}} = -\frac{f^3(0)}{3f'(1)} = 54,2$$

На рис. 50 (кривая 2) дан график  $\rho(r)/\rho(0)$  в ультрарелятивистском случае как функции  $r/R^i$ .

Полученные результаты о зависимости между массой и радиусом равновесного «холодного» сферического тела можно представить во всей области измерения  $\hat{R}$  в виде единой кривой, определяющей зависимость  $M = M(R)$ . При больших  $R$  (и соответственно малых плотностях тела) электронный газ можно рассматривать как нерелятивистский, и функция  $M(R)$  спадает по закону  $M \propto R^{-3}$ . При достаточно же малых  $R$  плотность настолько велика, что имеет место ультрарелятивистский случай, и функция  $M(R)$  имеет почти постоянное (равное  $M_0$ ) значение (строго говоря,  $M(R) \rightarrow M_0$  при  $R \rightarrow 0$ ). На рис. 51 изображена кривая  $M = M(R)$ , вычисленная с

$m' = 2m_n^2$ ). Следует обратить внимание на то, что предельное значение  $1,45\odot$  достигается лишь весьма постепенно; это связано с тем, что плотность быстро падает по мере удаления от центра тела; поэтому газ может быть уже ультрарелятивистским вблизи центра и в то же время нерелятивистским в значительной части объема тела. Отметим также, что начальная

часть кривой (слишком малые  $R$ ) не имеет реального физического смысла. Действительно, при достаточно малых радиусах плотность станет настолько большой, что в веществе начнут происходить ядерные реакции. При этом давление будет возрастать с увели-

чением плотности медленнее чем  $\rho^{4/3}$ , а при таком уравнении состояния никакое равновесие вообще невозможно <sup>1)</sup>.

Наконец, эта кривая теряет смысл также и при слишком больших значениях  $R$  (и малых  $M$ ); как уже было указано (см. примечание на стр. 352), в этой области становится неприменимым использованное нами уравнение состояния вещества. В этой связи следует указать, что существует верхний предел размеров, которыми вообще может обладать «холодное» тело. Действительно,

большим размерам тела соответствуют на кривой рис. 51 малые массы и малая плотность вещества. Но при достаточно малых плотностях вещество будет находиться в обычном «атомном» состоянии, и при интересующих нас низких температурах оно будет твердым. Размеры тела, построенного из такого вещества, будут, очевидно, уменьшаться при дальнейшем уменьшении его массы,

а не увеличиваться, как на рис. 51. Истинная кривая  $R = R(M)$  должна, следовательно, иметь при некотором значении  $M$  максимум. Порядок величины максимального значения радиуса легко определить, заметив, что он должен соответствовать плотности, при которой становится существенным взаимодействие электронов с ядрами, т. е. при

$$\rho \sim \left( \frac{m_e e^2}{\hbar^2} \right)^3 m' Z^2$$

(см. (106,1)). Комбинируя это соотношение с равенством (107, 10), получим

$$R_{\max} \sim \frac{\hbar^2}{G^{1/2} e m_e m' Z^{1/3}} \sim 10^5 \frac{m_n}{m' Z^{1/3}} \kappa M$$

### 4.3 Энергия гравитирующего тела

#### теория

Гравитационная потенциальная энергия тела  $E_{\text{гр}}$  определяется, как известно, интегралом

$$E_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \quad (108, 1)$$

взятым по всему объему тела. Нам, однако, будет удобнее исходить из другого представления этой величины, которое можно получить следующим образом. Представим себе, что тело постепенно «составляется» из вещества, «приносимого» из бесконечности. Пусть  $M(r)$  есть масса вещества, заключенного внутри сферы радиуса  $r$ . Предположим, что масса  $M(r)$  с некоторым определенным  $r$  уже принесена из бесконечности; тогда работа, необходимая для доставления дополнительной массы  $dM(r)$ , равна потенциальной энергии этой массы (распределенной в виде шарового слоя радиуса  $r$  и толщины  $dr$ ) в поле массы  $M(r)$ , т. е.

$$-\frac{GM(r)dM(r)}{r}$$

Поэтому полная гравитационная энергия сферы радиуса  $R$  есть

$$E_{\text{гр}} = -G \int \frac{M(r)dM(r)}{r}$$

Продифференцировав условие равновесия (107, 2), получим

$$v \frac{dP}{dr} + m' \frac{d\varphi}{dr} = 0$$

(дифференцирование должно производиться при постоянной температуре,  $(\partial\mu/\partial P)_T = v$  -объем, отнесенный к одной частице). Производная  $-d\varphi/dr$  есть сила тяготения, действующая на единицу массы на расстоянии  $r$  от центра; она равна  $-GM(r)/r^2$ . Вводя также плотность  $\rho = m'/v$ , получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}$$

Выразив отсюда  $GM(r)/r$  через  $dP/dr$  и написав  $dM(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$ , представим выражение (108,2) в виде

$$E_{\text{гр}} = 4\pi \int_0^R r^3 \frac{dP}{dr} dr$$

Интегрируя теперь по частям (и учитывая, что на границе тела  $P(R) = 0$  и что  $r^3 P \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ ), получим

$$E_{\text{гр}} = -12\pi \int_0^R P r^2 dr = -3 \int P dV$$

Таким образом, гравитационная энергия равновесного тела может быть выражена в виде интеграла от его давления по объему. Применим эту формулу к рассмотренным в предыдущем параграфе телам из вырожденного ферми-газа. При этом произведем вычисления в общем виде, положив, что химический потенциал вещества пропорционален некоторой степени его плотности:

$$\mu = K \rho^{1/n}$$

Имея в виду, что  $d\mu = v dP = \frac{m'}{\rho} dP$ , находим давление

$$P = \frac{K}{(n+1)m'} \rho^{1+1/n}$$

В условии равновесия  $(\mu/m') + \varphi = \text{const}$  постоянная в правой стороне равенства есть не что иное, как потенциал на границе тела, где  $\mu$  обращается в нуль; этот потенциал равен  $-GM/R$  ( $M = M(R)$  -полная масса тела), так что можно написать

$$\varphi = -\frac{\mu}{m'} - \frac{GM}{R}$$

Подставляем это выражение в интеграл (108,1), определяющий гравитационную энергию, и, воспользовавшись формулами (108, 5 – 6), находим

$$E_{\text{гр}} = -\frac{1}{2m'} \int \mu \rho dV - \frac{GM}{2R} \int \rho dV = -\frac{n+1}{2} \int P dV - \frac{GM^2}{2R}$$

Наконец, выразив интеграл в правой части равенства через  $E_{\text{гр}}$ , согласно (108, 4), получим

$$E_{\text{гр}} = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}$$



Таким образом, гравитационная энергия тела выражается простой формулой через его полную массу и радиус. Аналогичную формулу можно получить и для внутренней энергии тела  $E$ . Внутренняя энергия, отнесенная к одной частице, равна  $\mu - Pv$  (при равной нулю температуре и энтропии); поэтому энергия, отнесенная к единице объема, есть

$$\frac{1}{v}(\mu - Pv) = \frac{\rho\mu}{m'} - P = nP$$

(в последнем равенстве использованы (108, 5–6)). Поэтому внутренняя энергия всего тела

$$E = n \int PdV = -\frac{n}{3}E_{\text{гp}} = \frac{n}{5-n} \frac{GM^2}{R}$$

Наконец, полная энергия тела

$$E_{\text{поли}} = E + E_{\text{гp}} = -\frac{3-n}{5-n} \frac{GM^2}{R}$$

Для нерелятивистского вырожденного газа имеем  $n = 3/2$ , так что <sup>1)</sup>

$$E_{\text{гp}} = -\frac{6}{7} \frac{GM^2}{R}, \quad E = \frac{3}{7} \frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = -\frac{3}{7} \frac{GM^2}{R}. \quad (108, 10)$$

В ультрарелятивистском же случае имеем  $n = 3$ , так что

$$E_{\text{гp}} = -E = -\frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}, \quad E_{\text{полн}} = 0$$

Полная энергия равна в этом случае нулю в соответствии с изложенными в предыдущем параграфе качественными соображениями о равновесии такого тела <sup>2)</sup>.

#### 4.4 Равновесие нейтронной сферы

##### теория

Для тела с большой массой существуют две возможности равновесного состояния. Одна из них соответствует электронно-ядерному состоянию вещества, как это предполагалось при численных оценках в §107. Другая же соответствует нейтронному состоянию вещества, в котором почти все электроны захвачены протонами и вещество можно рассматривать как нейтронный газ. При достаточно

больших массах тела вторая возможность во всяком случае должна стать термодинамически более выгодной, чем первая (W. Baade, F. Zwicky, 1934). Хотя превращение ядер и электронов в свободные нейтроны и связано со значительной затратой энергии, но при достаточно большой полной массе тела эта затрата будет с избытком компенсирована освобождением гравитационной энергии, связанным с уменьшением размеров и увеличением плотности тела. Прежде всего исследуем вопрос о том, при каких условиях нейтронное состояние тела вообще может соответствовать какому бы то ни было термодинамическому равновесию (хотя бы и метастабильному). Для этого исходим из условия равновесия  $\mu + m_n\varphi = \text{const}$ , где  $\mu$  - химический потенциал (термодинамический потенциал, отнесенный к одному нейтрону),  $m_n$  - масса нейтрона,  $\varphi$  - гравитационный потенциал.

Поскольку на границе тела давление должно быть равно нулю, ясно, что в некотором внешнем слое вещество будет иметь небольшое давление и плотность и, следовательно, будет находиться в электронно-ядерном состоянии. Хотя толщина такой «оболочки» и может оказаться сравнимой с радиусом внутреннего плотного нейтронного «ядра», тем

не менее благодаря значительно меньшей плотности этого слоя его полную массу можно считать малой по сравнению с массой ядра <sup>1)</sup>).

Сравним значения  $\mu + m_n\varphi$  в двух местах: в плотном ядре вблизи его границы и вблизи внешней границы оболочки. Гравитационный потенциал  $\Phi$  в этих точках можно считать равным  $-GM/R$  и  $-GM/R'$ , где  $R$  и  $R'$  - радиусы ядра и оболочки, а  $M$  - масса ядра, совпадающая в нашем приближении с полной массой тела. Что касается химического потенциала, то он в обоих случаях определяется в основном внутренней энергией (энергией связи) соответствующих частиц, большой по сравнению с их тепловой энергией. Поэтому разность обоих химических потенциалов можно положить равной просто разности приходящейся на

единицу атомного веса энергии покоя нейтрального атома (т. е. Ядра и  $Z$  электронов) и энергии покоя нейтрона; обозначим эту величину посредством  $\Delta$ . Таким образом, приравнявая значения  $\mu + m_n$  в двух рассматриваемых местах, получим

$$m_n MG \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) = \Delta$$

Отсюда видно, что, каким бы ни был радиус  $R'$ , масса и радиус нейтронного ядра должны удовлетворять неравенству

$$\frac{m_n MG}{R} > \Delta$$

С другой стороны, применив результаты §107 к сферическому телу, состоящему из вырожденного (нерелятивистского) нейтронного газа, мы найдем, что  $M$  и  $R$  связаны друг с другом соотношением

$$MR^3 = 91,9 \frac{\hbar^6}{G^3 m_n^8} = 3,6 \cdot 10^3 \odot \kappa \mu^3$$

(формула (107, 10), в которой надо заменить  $m_e$  и  $m'$  на  $m_n$ ). Выразив отсюда  $M$  через  $R$  и подставив в (109, 1), получим неравенство для  $M$ . Численно оно дает

$$M > \sim 0,2 \odot$$

Так, взяв значение  $\Delta$  для кислорода, получим  $M > 0,17 \odot$ , для железа  $M > 0,18 \odot$ . Таким массам соответствуют радиусы  $R < 26$  км <sup>1)</sup>. Полученное неравенство определяет нижний предел масс, за которым нейтронное состояние тела вообще не может быть устойчивым. Однако оно еще не обеспечивает полной устойчивости состояния, которое может оказаться метастабильным. Для определения границы метастабильности надо сравнить полные энергии тела в обоих состояниях: нейтронном и электронно-ядерном. С одной стороны, переход всей массы  $M$  из электронно-ядерного состояния в нейтронное требует затраты энергии

$$\frac{M}{m_n} \Delta$$

для компенсации энергии связи ядер. С другой стороны, при этом произойдет освобождение энергии за счет сжатия тела; согласно формуле (108,10) этот выигрыш в энергии равен

$$\frac{3GM^2}{7} \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_e} \right)$$

где  $R_n$  - радиус тела в нейтронном состоянии, определяемый формулой (109, 2), а  $R_e$  - радиус тела в электронно-ядерном состоянии, определяемый формулой (107,10). Поскольку  $\hat{R}_e \gg R_n$ , то величиной  $1/R_e$  можно пренебречь, и мы получаем следующее

условие, обеспечивающее полную устойчивость нейтронного состояния тела (индекс у  $R_n$  опускаем):

$$\frac{3GMm_n}{7R} > \Delta$$

Сравнивая это условие с условием (109,1) и учитывая (109,2), мы видим, что определяемый неравенством (109,3) нижний предел массы в  $(7/3)^{3/4} = 1,89$  раз выше, чем получающийся из (109, 2).

Численно граница метастабильности нейтронного состояния лежит, таким образом, при массе

$$M \approx 1/3\odot$$

(и радиусе  $R \approx 22$  км)<sup>1)</sup>. Перейдем к вопросу о верхнем пределе значений массы, при которых нейтронное тело может находиться в равновесии. Если мы применили бы результаты §107 (формулу (107,17) с  $m_n$  вместо  $m'$ ), то мы получили бы для этого предела значение  $6\odot$ .

В действительности, однако, эти результаты неприменимы к данному случаю по следующей причине. В релятивистском нейтронном газе кинетическая энергия частиц порядка величины (или больше) энергии покоя, а гравитационный потенциал  $\varphi \sim c^2$ ). Ввиду этого становится незаконным применение ньютоновской теории тяготения, и вычисления должны производиться на основе общей теории относительности. При этом, как мы увидим ниже, оказывается, что ультрарелятивистский случай вообще не достигается; поэтому вычисления должны производиться с помощью точного уравнения состояния вырожденного ферми-газа (см. задачу 3 К\$61). Вычисления производятся путем численного интегрирования уравнений центрально-симметрического статического гравитационного поля и приводят к следующим результатам<sup>3)</sup>.

Предельное значение массы равновесного нейтронного шара оказывается равным всего  $M_{\max} = 0,76\odot$ , причем это значение достигается уже при конечном (равном  $R_{\min} = 9,4$  км) его радиусе; на рис. 52 изображен график получающейся зависимости массы  $M$  от радиуса  $R$ . Устойчивые нейтронные сферы большей массы или меньшего радиуса, таким образом, не могут существовать. Следует указать, что под массой  $M$  мы понимаем здесь произведение  $M = Nm_n$ , где  $N$  - полное число частиц (нейтронов) в сфере. Эта величина не совпадает с гравитационной массой тела  $M_{\text{гр}}$ , определяющей создаваемое им в окружающем пространстве гравитационное поле. Благодаря «гравитационному масс-дефекту» в устойчивых состояниях всегда  $M_{\text{гр}} < M$  (в частности, При  $R = R_{\min}$   $M_{\text{гр}} = 0,95M$ )<sup>1)</sup>.

Что касается вопроса о поведении сферического тела с массой, превышающей  $M_{\max}$ , то за ранее ясно, что оно должно стремиться неограниченно сжиматься. Исследование характера такого неуправляемого гравитационного коллапса изложено в другом томе. Следует отметить, что принципиальная возможность гравитационного коллапса, неизбежного (для рассматриваемой модели сферического тела) при  $M > M_{\max}$ , не ограничена в действительности большими массами. «Коллапсирующее» состояние существует для любой массы, но при  $M < M_{\max}$  оно отделено от статического равновесного состояния очень высоким энергетическим барьером<sup>2)</sup>.

#### 4.5 температурные явления в гидродинамике

правда, очень интересно, как же их описывать?

#### 4.6 Термодинамика некоторых реальных тел

(переназову потом раздел. пока что тут про волноводы писать буду)

## Термодинамика волновода (???!!!)

(пока вопросы про них тут собирать буду, потом подумаю.)

**Тепловые флуктуации волновода за счет колебаний Земли** (почитаю как-то, когда пойму, как)

## 5 Термодинамика поверхностного натяжения и границ сред

(мб когда-то дойду, но скорее всего просто крайне крайне не скоро)

### 5.1 Основные методы описания

**Обзор** Скорее всего нам понадобится диффгем и теория поверхностей, которую я скорее всего доучу и здесь приведу ее выводы.

высота капиллярного поднятия жидкости:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_{\text{ж}}} g r \cos \theta$$

(рисунок тут)

### 5.2 термодинамика поверхностного натяжения

(лабник, конец)

Термодинамика поверхностного натяжения. Из определения коэффициента поверхностного натяжения следует, что для увеличения поверхности жидкости на единицу площади при постоянной температуре нужно затратить работу, равную  $\sigma$ . Таким образом, эта величина есть поверхностная свободная энергия единицы площади поверхности жидкости (формула (5.8)). Остановимся на этом более подробно.

Для исследования термодинамики поверхностного натяжения будем использовать первое (1.2) и второе (1.7) начала термодинамики. По первому началу  $\delta Q = dU + \delta A$ . Работа по увеличению площади поверхности жидкости на величину  $dF$  внешними силами равна  $\sigma dF$  а работа поверхностного слоя жидкости, ее пленки, равна этой же величине с другим знаком  $\delta A = -\sigma dF$ . Следовательно, для пленки первое начало имеет вид

$$\delta Q = dU_n - \sigma dF$$

где  $U_n$  — полная поверхностная энергия.

По второму началу термодинамики для любого вещества можно ввести энтропию  $dS = \delta Q/T$ , являющуюся функцией состояния, и поэтому  $dS$  есть полный дифференциал. Используя первое начало термодинамики, получим соотношение в полных дифференциалах:

$$dU_n = T dS + \sigma dF$$

Введем в эту формулу свободную энергию  $\Psi_n$ , равную по определению

$$\Psi_n = U_n - TS$$

Получим

$$d\Psi_n = -S dT + \sigma dF$$

Это соотношение между полными дифференциалами, поэтому

$$S = - \left( \frac{\partial \Psi_I}{\partial T} \right)_F$$

$$\sigma = \left( \frac{\partial \Psi_I}{\partial F} \right)_T$$

Интегрируем последнюю формулу при условии, что при отсутствии пленки нет и свободной энергии:  $\Psi_n = 0$  при  $F = 0$ . Следовательно:

$$\Psi_n = \sigma F$$

Подставив это выражение для  $\Psi_n$  в (5.6), получим

$$S = -F \frac{d\sigma}{dT}$$

Используя эту формулу и формулу (5.8), находим из (5.4) полную поверхностную энергию:

$$U_{II} = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) F$$

При изотермическом процессе полная поверхностная энергия  $U_n$  увеличивается только из-за увеличения площади пленки, и по первому началу термодинамики (5.2) при этом к ней нужно подвести тепло

$$Q = \Delta U_n - \sigma \Delta F = -T \frac{d\sigma}{dT} \Delta F$$

**формула Лапласа** хз, потом дойду

## 10 Эксперименты по термодинамике

(важный раздел, просто пока не занимался им, потом чуть что буду заполнять.)

## 11 Введение в другие после термодинамики разделы физики

### 1 Введение в статистическую физику

(вкратце итог всего статфиза для термодинамики)

(математические методы отдельно нужно выделить для этой главы. пока я их просто не знаю. также особенно приложения подронные в запись про статистику добавлю, тут - максимум 60 страниц просто основ и общей теории, прямо подробно - в записи про статфиз. потом многое выкину в запись про статфиз)

Соберем тут другой взгляд на происходящее, с точки зрения статистики.

идея в том, что у нас есть состояния и система - это те или иные заполненные состояния.

Определяется число состояний

соберем теперь эту теорию.

эти же понятия применяются в твердом теле, в дискретных разных системах, и можно даже не знать термодинамику, просто начать с этого.

потом с твердым телом свяжу кстати, это не сложно.

Здесь изложение идет в стиле: вот определим достаточно интуитивно понятные объекты, а потом покажем, что из них следуют свойства того, что мы описывали, когда понятно излагали, что из чего следует. Такой стиль используется в статфизе, он удобен, однако следует помнить и другие подходы.

Ну то есть пояснений и всего на самом деле интересного тут на первых главах не будет, но в этом и смысл этой главы, чтобы сосредоточиться на технике, а все пояснения уже и даны были раньше.

используется уже известные нам потенциалы, которые прекрасно описаны в первой главе. тут не место их писать подробно, мы хотим как можно скорее считать состояния и макро свойства находить.

вообще, в статфизе многое изначально определяется и дальше из определений все выводится, я хотел бы также дописать, почему определения именно такие.

## основные идеи статистической физики

какие конкретно формулы и методы мы используем.

все это сюда выпишу, задачами потом натренирую.

(работаем с чем мы????)

сперва считаем статсумму

дальше считаем свободную энергию,

дальше легко перейти к другим параметрам с помощью дифференцирования и других преобразований свободной энергии.

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$$

### 1.1 Основы статистической физики

дадим рецепты действий, которыми дальше все время и будем пользоваться.

сама система определяется как  $M$  статистически независимых подсистем. статистическая независимость означате, что коррелятор двух равен нулю.

**обзор ансамблей** Совокупность независимых макроскопических параметров, полностью определяющих состояние системы (вне зависимости от ее предыстории), называется ансамблем.

микроканоническим  $(E, V, N)$ , каноническим  $(T, V, N)$ , большим каноническим  $(T, V, \mu)$ , Богуславского  $(T, P, N)$  и т.д.

**средние значения** (?)

Чтобы перейти из микро статистик в макро состояния, нужно средние значения находить.

существуют два средних.

Например, можно долго наблюдать за средним, так что формула будет иметь вид:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T A(t) dt$$

заметим, что в таком смысле среднее имеет смысл только в случае равновесных систем. а также можно взять очень много копий системы и взять усреднение по ансамблю.

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \langle A_1 + \dots + A_n \rangle$$

среднеквадратическая флуктуация или дисперсия, называется:  $\sigma_{tot}^2 = \langle \Delta E_{tot}^2 \rangle$   
теперь запишем наши системы:

$$\langle E_{tot} \rangle = \left\langle \sum_i^M E_i \right\rangle = M \langle E_1 \rangle$$

$$\sigma_{tot}^2 = \langle \Delta E_{tot}^2 \rangle = \left\langle \sum_i \Delta E_i \sum_j \Delta E_j \right\rangle = \sum_i \langle (\Delta E_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \Delta E_i \Delta E_j \rangle = M \sigma_1^2 + 0 = M \sigma_1^2$$

теперь можно написать закон больших чисел, для этого разделим что-то, что раньше мы получили:

$$\frac{\sigma_{tot}}{\bar{E}_{tot}} = \frac{\sigma_1}{\bar{E}_1 \sqrt{M}}$$

заметим, что это не для всех систем, а только для статистически независимых.

**об эргодичности** эргодическая гипотеза утверждает, что для некоторых систем среднее по времени такое же, как и среднее по ансамблю. А также что за бесконечно времени система побывает в любых своих состояниях.

стекла и спиновые стекла такими свойствами не обладают.

потому что переход в некоторые состояния крайне невероятен.

**термодинамический предел** этот предел в случае, если  $EVNM \rightarrow \infty$ , в то же время отношения  $\frac{V}{N} \approx const$

## Подсчет состояний

(в чем идея то????)

Число состояний определяется число состояний с энергией меньше данной  $\varepsilon$ :

$$\gamma(\varepsilon) = \sum_n \theta(\varepsilon - \varepsilon_n)$$

Плотность состояний: (???) короче определяется так:

$$g(\varepsilon) = \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n)$$

Нужна плотность состояний для

....

и для статсуммы:

$$Z = \int g(\varepsilon) e^{-\varepsilon/T} d\varepsilon$$

и плотность состояний нужна для энтропии:

$$S = \int d\varepsilon g(\varepsilon) w(\varepsilon) \ln \frac{1}{w(\varepsilon)}$$

**примеры применения идей статфиза** введение в разные модели и отсылки на другие места, где их прописываю.

**Идеальный газ** посмотрим, как это все применяется для идеального газа. (удостовериться, что это стоит того, мкт не хватает что ли?)

итак, создадим простейшую модель газа.

Самое простое - пусть частицы одинаковые и взаимодействие между ними не будет. такой газ называется идеальным.

Посмотрим на свойства такого газа:

Оказывается, задача сводится к определению статсумы одной частицы, действительно: энергия всех частиц равна:

$$\varepsilon_{n_1, \dots, n_N} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N$$

посчитаем статсумму:

### статистический вес и статистическая сумма

что это такое?

### Статистическая энтропия

В статфизе энтропия определяется как логорифм числа состояний

$$S = k \ln G$$

То есть просто монотонная функция статистического веса. (почему?)

Посмотрим на свойства.

аддитивность энтропии

если разбить систему на подсистемы, то энтропия общая складывается из энтропий каждой:

$$S = k \ln G = S_1 + S_2$$

число состояний

$$\gamma(E) = \int_0^E dE' \frac{d\gamma}{dE'}$$

разлагая

$$\gamma(E) = \frac{1}{\Delta E \frac{d\sigma^*}{dE}} e^{\sigma^*(E)}$$

$$\sigma(E) = \ln \gamma(E) = \sigma^*(E) - \ln \left( \Delta E \frac{d\sigma^*}{dE} \right)$$

$$\sigma^* = \sigma$$

$$\sigma|_{E=0} = \min$$

$$\beta = \frac{d\sigma}{dE} > 0$$

$$\frac{d^2\sigma}{d^2E} < 0$$

$$\gamma_{AB}(E) = \sum_a \sum_b \theta(E - E_a - E_b)$$

$$\gamma_{AB}(E) = \sum_a \gamma_b(E - E_a)$$



$$\gamma_{AB}(E) = \int dE_a \frac{d\gamma_a}{dE_a} e^{\sigma_b(E-E_a)} = \int dE_a \left( e^{\sigma_a(E_a)} \frac{d\sigma_a}{dE_a} \right) e^{\sigma_b(E-E_a)} = \int dE_a \beta_a e^f$$

$$f(E_a) = \sigma_a(E_a) + \sigma_b(E - E_a)$$

метод перевала

$$\left. \frac{df}{dE_a} \right|_{E^m} = \beta_a - \beta_b = 0$$

$$\gamma(E) = \beta_a e^{f^m} \int dx e^{-\frac{1}{2}|f''|x^2}$$

$$\sigma_{AB}(E) = \ln \gamma_{AB}(E) = \sigma_a(E_a^m) + \sigma_b(E_b^m) + \ln \left( \beta \sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}} \right)$$

$$\sigma_{AB}(E) = \sigma_a(E_a^m) + \sigma_b(E_b^m)$$

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\tau}$$

**неравновесная энтропия** (лекция 3 мфти)

была равновесная:

$$S(E) = \int_0^E \frac{dE}{T(E)}$$

$$S = -\langle \ln w \rangle = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \ln w_{\alpha}$$

$$S = -Sp(\rho \ln \rho)$$

$$w_{\alpha} = w(n_{p_1}) w(n_{p_2}) w(n_{p_3}) \dots$$

$$S = - \sum_{\alpha} w_{\alpha} \ln w_{\alpha} =$$

$$- \sum_{n_{p_1}} \sum_{n_{p_2}} \sum_{n_{p_3}} \dots \{ w(n_{p_1}) w(n_{p_2}) w(n_{p_3}) \dots \}$$

$$S = - \left\{ \sum_{n_{p_1}} w(n_{p_1}) \ln w(n_{p_1}) + \sum_{n_{p_2}} w(n_{p_2}) \ln w(n_{p_2}) + \sum_{n_{p_3}} w(n_{p_3}) \ln w(n_{p_3}) + \dots \right\}$$

$$\sum_{n_p} w(n_p) \ln w(n_p) = w(0_p) \ln w(0_p) + w(1_p) \ln w(1_p)$$

(далее я много чего пропустил)

в итоге:

$$S = - \langle \ln w \rangle = - \sum_{\alpha \in M} w_{\alpha} \ln w_{\alpha} = \sum_{\alpha \in M} w_{\alpha} \ln \Delta \gamma = \ln \Delta \gamma$$

**закон возрастания энтропии** (лекция 4 мфти)  
лиувилля:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

$$-\frac{\partial \langle \ln \hat{\rho} \rangle}{\partial t} = -Sp \left[ \ln \hat{\rho} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right]$$

$$\rho_{ab}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_a - E_b)t} \rho_{ab}(0)$$

$$\langle \rho_{ab}(t) \rangle_{\tau} = \int dt' G(t', \tau) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_a - E_b)(t+t')} \rho_{ab}(0) = \rho_{ab}(t) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r(E_a - E_b)}{\hbar} \right)^2}$$

$$L = + \sum_p [(\eta + n_p) \ln(1 + \eta n_p) - n_p \ln n_p] - \beta \sum_p n_p E_p - \gamma \sum_p n_p, \quad \eta = \pm 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_p} = \ln(1 + \eta n_p) - \ln n_p - \beta E_p - \gamma = 0$$

$$L = -Sp(\rho \ln \rho) - \beta Sp(\rho H) - \gamma Sp \rho$$

**статистическая температура** (научпоп введение)

Пусть система, имеющая энергию  $E$  находится в состоянии, близким к равновесному. энтропия подсистемы максимальна и имеет определенное значение  $S$ .

Если энергия системы изменится, то изменится и ее энтропия (!!), потому что имеет место связь  $S = S(E)$ .

(???я хз, почему) Статистическая температура определяется

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}$$

В предположении, что при изменении энергии системы, ее объем останется неизменным. в распределение Гиббса входит именно термодинамическая температура.

**свободная энергия**

**шаблоны статистических систем**

**дискретные системы**

**Пример 2.** задача про двухуровневые системы. много систем, у которых два уровня. какая теплоемкость такой системы?

эта модель работает хорошо для лазеров, для спиновых систем.

нужно выбрать ансамбль и провести расчеты используя методы статфиза.

выберем микроканонический ансамбль, то есть параметры будут  $E, V, N$ .

а в каноническом ансамбле были бы заданы  $T, V, N$

рассмотрим  $N$  двухуровневых систем.

статвес

$$\Delta\gamma = \frac{N!}{M!(N-M)!} \equiv C_N^M$$

и это для разных шаров, но у нас одинаковые атомы, почему так можно делать?

оставим этот вопрос. мб кст потому что они в разных положениях находятся окей, как от сюда получить термодинамические соотношения?

можно найти температуру. для этого найдем энтропию  $S = \ln \Delta\gamma$  и найти температуру  $1/T = (dS/dE)$ .

нужно продифференцировать факториал, для этого воспользуемся формулой стирлинга  $N! = (N/e)^N$ .

вообще все расчеты статфиза верны в ее главном приближении.

в итоге мы получили формулу, которую можем дифференцировать, с помощью формулы стирлинга.

потом еще учтем кратности вырождения  $g_0, g_\varepsilon$

(хз, как)

считая уровни, находим:

$$\left( \frac{1}{T} \right) \frac{E}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + e^{\varepsilon/T}}$$

график - кривая из нуля типа кривой дебая, и сверху в пределе  $1/2$ .

почему  $1/2$  предел, а не единица? половина что ли только нагрелась?

чтобы посмотреть на вид теплоемкости, просто дифференцируем по температуре.

в итоге график имеет вид пика.

и тут распространенные очень графики, график пика и график теплоемкости.

на теплоемкости пик называется аномалией шоттки

кстати, в других газов графики проще: у идеального газа константа, у дебая начинается с  $T^3$  и выходит на константу.

а тут у нас впервые теплоемкость пошла вниз.

эта особенность аномалии систем, у которых спектр ограничен сверху, поэтому больше система не способна переходить на следующие энергии, таким образом, теплоемкость постоянная.

таким образом, к закону дебая может добавляться максимум.

а кстати если количество уровней большое сверху, то пик на теплоемкости будет большой

## 1.2 О гиббсовых системах

(очень интересная, неактуальная, мутная тема, которую отдельно смотреть нужно, пока лишь знаю, что такая есть)

### Суть гиббсовых систем

вероятность изменения энергии  $\delta E$  дается формулой  $e^{\delta E/T}$

все хотят быть как свои соседи.

ниже критической температуры происходят две фазы.

интересно посмотреть о случае, когда  $T = 0$ , тогда только состояния с минимальной энергией допускаются.

### Обзор применений гиббсовых систем

хз, нужно гуглить

### 1.3 квантовые основы и подсчет состояний

Приведем теорию квантовой механики, которой будем пользоваться в дальнейшем для описания систем.

статистическое описание - значит найти ее функцию распределения по состояниям. Посмотрим на то, как можно конструировать системы с помощью статистической физики.

Про системы известно следующее:

Физическая система характеризуется гамильтонианом  $H$ , у которого  $n$  собственных значений. Далее через гамильтониан мы выразим все свойства системы.

У каждого состояния  $|n\rangle$  есть своя энергия  $\varepsilon_n$ . Также сама система в данном состоянии имеет параметр  $T$ , который определяет ее свойства.

по умолчанию мы берем распределение Гиббса. То есть для каждого состояния  $|n\rangle$  вероятность системы находиться в нем равна

$$w_n = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right)$$

Здесь  $Z$  называется статистической суммой и служит для нормировки, то есть для того, чтобы  $\sum_n w_n = 1$ , поэтому:

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right)$$

Видим, что с ростом  $T$ , состояния системы становятся менее вероятными.

Также через Гамильтониан статсумму можно записать так:

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right) = \sum_n \langle n | \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{T}\right) | n \rangle = \sum_n \langle n | \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\hat{H}}}{T}\right) | n \rangle \equiv \text{Tr} \exp\left(-\frac{\hat{H}}{T}\right)$$

Энергия системы определяется средним от всех энергий, и через гамильтониан имеет вид: (посчитаю позже это!!!! пока не так понимаю. нужно задачи порешать)

$$E = \langle \varepsilon \rangle = \sum_n \varepsilon_n w_n = \text{Tr}(\hat{H} \hat{w})$$

Дале  $\beta = 1/T$  – обратная температура.

Из статсуммы можно получить энергию:

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

И также средний квадрат флуктуаций энергии (дисперсию): (позже явно прогой посмотрю, как это выглядит)

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle (\varepsilon - \langle \varepsilon \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$

#### составные системы и методы их создания

Посмотрим, как из этого можно конструировать системы. Если у нас есть два гамильтониана  $H_1$  и  $H_2$ , то общая система имеет вид  $H = H_1 + H_2$ , для которой

#### Ферми газ

он применяется в твердом теле, там же теория поверхности ферми вроде и все такое. наконец-то соберем все про него в одном месте.

Суть

Обзор применений

Теория

Бозе газ

Суть

Обзор применений

Теория

вторичное квантование и матрица плотности

(5 лекция мфти)

квантование решетчи

$$U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j + \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = U(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) + \\ + U^\alpha(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(u_i^\alpha - u_j^\alpha) + \frac{1}{2}U^{\alpha\beta}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(u_i^\alpha - u_j^\alpha)(u_i^\beta - u_j^\beta) + \dots$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} [U^\alpha(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(u_i^\alpha - u_j^\alpha)] = 0$$

$$\sum_j U^\alpha(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) = 0$$

гамильтониан кристалла в гармоническом приближении:

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{2} U^{\alpha\beta}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(u_i^\alpha - u_j^\alpha)(u_i^\beta - u_j^\beta)$$

фурье

$$u_j^\alpha = u^\alpha(\mathbf{R}_j) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}, \quad u_{\mathbf{k}}^\alpha = (u_{-\mathbf{k}}^\alpha)^* = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\mathbf{R}} u^\alpha(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

$$p_j^\alpha = p^\alpha(\mathbf{R}_j) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^\alpha e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}, \quad p_{\mathbf{k}}^\alpha = (p_{-\mathbf{k}}^\alpha)^* = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\mathbf{R}} p^\alpha(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{p_{\mathbf{k}}^\alpha p_{-\mathbf{k}}^\alpha}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^\alpha u_{-\mathbf{k}}^\beta U_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$$

$$U_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \sum_{\mathbf{R}} \frac{1}{2} U^{\alpha\beta}(\mathbf{R}) (e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} - 1) (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} - 1) = \sum_{\mathbf{R}} U^{\alpha\beta}(\mathbf{R}) (1 - \cos(\mathbf{k}\mathbf{R}))$$

$$u_{\mathbf{k}}^\alpha = \sum_s u_{\mathbf{k}s} e_{\mathbf{k}s}^\alpha, \quad U_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} e_{\mathbf{k}s}^\beta = M(\omega_{\mathbf{k}s})^2 e_{\mathbf{k}s}^\alpha, \quad e_{\mathbf{k}s}^\alpha e_{\mathbf{k}s'}^\alpha = \delta_{ss'}, \quad s = 1, 2, 3$$

В результате гамильтониан принимает вид

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \left[ \frac{p_{\mathbf{k}s} p_{-\mathbf{k}s}}{2M} + \frac{M}{2} (\omega_{\mathbf{k}s})^2 u_{\mathbf{k}s} u_{-\mathbf{k}s} \right]$$

перейдем к новым переменным

$$b_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{\mathbf{k}s}}{Q_{\mathbf{k}s}} + i \frac{p_{-\mathbf{k}s}}{P_{\mathbf{k}s}} \right), \quad b_{\mathbf{k}s}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{-\mathbf{k}s}}{Q_{\mathbf{k}s}} - i \frac{p_{\mathbf{k}s}}{P_{\mathbf{k}s}} \right)$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \left[ \frac{1}{2M} P_{\mathbf{k}s}^2 (b_{\mathbf{k}s}^* - b_{-\mathbf{k}s}) (b_{\mathbf{k}s} - b_{-\mathbf{k}s}^*) + \frac{M}{2} (\omega_{\mathbf{k}s})^2 Q_{\mathbf{k}s}^2 (b_{\mathbf{k}s} + b_{-\mathbf{k}s}^*) (b_{\mathbf{k}s}^* + b_{-\mathbf{k}s}) \right] =$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \frac{1}{M} P_{\mathbf{k}s}^2 (b_{\mathbf{k}s}^* b_{\mathbf{k}s} + b_{-\mathbf{k}s} b_{-\mathbf{k}s}^*)$$

$$[u_i^\alpha, p_j^\beta] = i\hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

$$[u_{\mathbf{k}}^\alpha, p_{\mathbf{k}'}^\beta] = i\hbar \delta^{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

.....

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}s} (b_{\mathbf{k}s}^* b_{\mathbf{k}s} + b_{-\mathbf{k}s} b_{-\mathbf{k}s}^*)$$

в итоге кучи рассуждений:

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar \omega_{\mathbf{k}s} \left( b_{\mathbf{k}s}^* b_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right)$$

Вычислим энергию состояния  $\psi = b_{\mathbf{k}s} |n\rangle$

$$(H' - E_n) \psi = \sum_{\mathbf{k}'s'} \hbar \omega_{\mathbf{k}'s'} b_{\mathbf{k}'s'}^* b_{\mathbf{k}'s'} b_{\mathbf{k}s} |n\rangle - b_{\mathbf{k}s} \sum_{\mathbf{k}'s'} \omega_{\mathbf{k}'s'} b_{\mathbf{k}'s'}^* b_{\mathbf{k}'s'} |n\rangle$$

$$|n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}} (b_{\mathbf{k}s}^*)^n |0\rangle, \quad \langle n | n \rangle = 1$$

**теория решетки** (это написано нормально в твердом теле, тут лишь выводы. кстати, переписать туда нужно будет.)

**плотность состояний** тоже в твердом теле это

**квантование электронов** (л 6 мфти. и это целая лекция, а у меня - subsubsection... тут правда много инфы.)

(ну вот на это вообще никаких нет сил)

## 1.4 Квантовые жидкости

**Равновесная статистическая механика квантовых жидкостей (???)**

(пока ничего не могу сказать, и это вообще не термач!)

сверхтекучесть

### 1.5 низкотемпературные явления

сверхпроводимость

теория Гинзбурга-Ландау

## 2 Введение в кинетику

(выше уже была такая большая выжимка основ, тут - подробная теория случайностей и всего с ними)

научимся добавлять элементы случайности, чтобы наши модели были в разы похоже на реальность.

вспоминаем МКТ и то, что уже знаем про это.

### 2.1 Подробная теория флуктуаций

(выше уже была такая выжимка основ, тут - подробная теория флуктуаций)

### 2.2 Броуновское движение

### 2.3 Соотношение Эйнштейна

### 2.4 Фоккер-Планк

просто я пока что не вижу в этом отдельный файл, я слишком мало знаю, а это лишь приложение флуктуаций.

## 3 Введение в физику твердого тела

Приведем основы физики конденсированных сред ввиду важности этого раздела, а также большой связи с термодинамикой.

(порешаю простейшие задачи в [1], остальное - в статфизе)

### постулаты

Есть теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы (удивительно).

согласно ей, в состоянии равновесия на каждую степень свободы приходится  $kT/2$ .

также еще потенциальная энергия должна учитываться, (потом подумаю про это)

### 3.1 Случай нулевой температуры

система находится в состоянии с наименьшей энергией и любые переходы невозможны.

### 3.2 ферми жидкость

### 3.3 сверхпроводимость

(понятно, чисто как введение)

## 4 О системах с многими элементами

### 4.1 Абстрактный подход (???)

(а хз тут, мб когда-то займусь, мб нет.)

просто абстрактные системы, просто много элементов, как мы можем применять наши знания?

можно ли ввести энтропию? по идее это чисто термодинамика, так что запросто, такой же подход.

а чем кстати плазма в плане свойств термодинамических от газа отличается? что конкретно делает ее иной и на сколько. (ну то есть скорость, но что, распределение максвелла с другим коэфф-м будет, или что вообще? короче, другие системы с многими элементами, в чем количественное отличие от наших?)

#### мотивация

интересно и абстрактно

### 4.2 О некоторых моделях (???)

#### полет птиц

какие можем ввести величины?

#### Толпа людей

(?? как её описывать??)

на что нужно обращать внимание при описании этих систем.

мб как энтропию, так функцию распределения информации ввести.

## 5 О нестандартных применениях термодинамики

(ну тут уж для совсем полноты укажу это.)

### 5.1 О теории информации

там тоже некоторые конструкции могут применяться что там с энтропией??

### 5.2 Аналогии термодинамики и процессов в жизни (??)

(то, что придет в голову - сюда пищу, потом мб отдельно исследую)

**аналог переходов 1 рода и государства** странная идея.

переходы первого рода - это как государство, там пришли воины - и перевернули страну.  
второго рода - качественное изменение культуры. (потом мб разовью эту идею)

### 5.3 Техническая термодинамика и механизмы

здесь приборы от лаб. по сути мало пользы от этого раздела, но он точно должен быть а потом куча знаний о том, как брать и строить двигатели, интересно ведь очень.

(мб потом сделаю большим разделом, мне просто как теоретика это вообще минимально актуально)



## Эксперименты с помощью законов термодинамики

Остановимся на приборах для проверки того, что мы получили теоретически.

## техническая термодинамика

(однажды я дойду и начитаюсь ее, это отдельная книга)

## Термодинамические машины

то есть вот на самом деле что можно построить и что это нам будет давать?

двигатели, все такое.

как что строить???

## Part VI

# Appendix

## A Введение и обзор термодинамики

### 1 Другая мотивация

Обсудим мотивацию заниматься термодинамикой, потому что она очень актуальная, многие уже с этим этапом не справляются.

#### Множество приложений

Укажем приложения  
(потом раскрою)

#### Польза в плане развития как профессионала

(потом раскрою)

#### Польза в плане саморазвития

(потом раскрою)

#### Результаты

Обсудим, что полезного и важного человечество получило, поняв этот предмет.

#### Мотивация к разделам

(потом раскрою в параграфах)

#### Термодинамика как часть статистической физики один из главных разделов физики

Этот раздел отвечает на многие вопросы, а также связан со многими другими разделами физики.

По сути мы изучаем такой частный случай упрощенного статфиза, именно с этой точки зрения возникает такая мотивация.

#### Термодинамика проста и наглядна

Так что можно взять и за примерно пару дней ее и доделать.  
Просто берешь и решаешь задачи.

#### Подготовка к строгим теориям, описывающим системы из многих частиц

Мир наш состоит из малого и большого, из общих закономерностей и мелочей.

Мы научимся создавать абстрактные конструкции для описания любых систем с многим числом частиц (??)

(и много отсылок к другим записям о природе будет)

тогда хочется понять, каким образом эти малые изменения приводят к чему-то большому? во-вторых как описывать хаос и случайность? как добавлять с систему хаос, чтобы модели были более реалистичными?

поэтому короче говоря и нужна термодинамика. потому что основы ее используются для таких-то интересных задач (см их решенные в этой статье)

также термодинамика важная, потому что если открыть многие разделы физики: динамику газа, статистическую физику, физику систем с многими частицами,... (что еще?), они начинаются именно вкратце с теории термодинамики и именно эта запись и используется для начала на самом деле прикладных тем.

поэтому здесь и отражены сферы науки, где используется термодинамика.

## 2 Мышление профессионалов в термодинамике

### Что есть термодинамика (?)

Термодинамика устанавливает точные соотношения между различными макроскопическими параметрами системы, т.е. различными экспериментально измеряемыми характеристиками. Для вычисления таких характеристик используется уравнение состояния, получаемое на основе статистического подхода или данных эксперимента. Далее вводятся различные потенциалы, на основе которых можно описывать любые процессы.

#### 2.1 Применения термодинамики в обычной жизни

(укажу потом их)

#### 2.2 наиболее используемые темы термодинамики

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

title

#### 2.3 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.

#### 2.4 Дополнительные разделы науки для изучения термодинамики

Обсудим разделы, знание которых особенно полезно для занятий термодинамикой.

#### 2.5 Особенности изучения термодинамики

**Фундаментальные вопросы, что откуда берется, следует отложить на самый конце**

потому что в них копаться можно на самом деле слишком много и так давно уже все выучат её, а ты не факт, что найдешь ответы.

так что никаких вопросов о сути, сперва тренируем методы решения задач!

именно такой подход самый важный.

**Только после проработанных основ имеет смысл читать современные статьи или слушать доклады**

Потому что там используются термодинамические идеи, которые так вот быстро вообще не берутся.

Даже не одна неделя уйдет на основы термодинамики.

Так что смысла современные

## Наличие многих параграфов с задачами

(выкину это потом в Н, тут это лишнее)

Полезно мышление олимпиадника: создавать многие параграфы с решениями интересных задач, в этом сила структуры, что она держит наготове задачи

Поэтому в записи акцентирован подход, что вот задача, давайте ее решим И именно такие самые крутые книги, например, книга Левитова и Шитова про функцию Грина, например, Барбашовой по теоретической механике. Именно этот стиль очень важен для этого предмета. Также мы подходим ко всему как к выученному и пройденному, тренируемся просто и все.

## 3 Обзор термодинамики

что вообще в нем происходит?

### 3.1 Термодинамика в двух словах

#### Обзор основных уравнений

итог всего из этой главы потом сюда запишу

(пока не готов сполна прописать полную картину происходящего)

#### о квантовой термодинамике

(что и почему происходит?)

появление термодинамики в нашей картине мира

вкратце про термодинамический мир

(с опытом напишу)

### 3.2 разные термодинамические подходы

один подход

второй подход

один большой раздел

такой-то набор следствий

### 3.3 наиболее прикладные темы Предмета

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

title

### 3.4 итоговые формулы и закономерности

### 3.5 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.

### 3.6 Удивительные факты

### 3.7 Результаты Предмет

### 3.8 Применения Предмет в других разделах физики

### 3.9 Обзор дальнейших разработок термодинамики

коротко обо всех профессиональных разделах физики, которые ее используют

### Углубление в статфиз

потому что по сути куда важнее статфиз, а она - лишь часть его

### 3.10 Связь термодинамики с другими разделами физики

Связи полно, в каждом разделе физики она использоваться может, будучи частью статфизики. с кинетикой тоже связь большая, потом пропишу.

(пока в параграфах, потом явно пропишу)

### 3.11 короткий исторический обзор

## 4 Описание записи

### 4.1 описание глав и разделов

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

описание записи в целом

Также здесь разобраны многие прикладные задачи, например.... (пока нет). (допишу потом, что еще?)

Можно заметить, что разделы этой записи написаны по-разному, очень отличаются друг от друга, хотя и занимают очень много одними и теми же вопросами.

(тут пояснение, как конкретно?)

статфиз, эмпирическая термодинамика, теории газов, механические приложения, теории случайных процессов - у всего разные стили.

Я стараюсь в этой записи в каждой главе раскрыть стиль каждого предмета в своей уникальности и прикладных аспектах.

описание глав

первая глава дает абстрактное и популярное описание многих выводов, к которым позже мы придем. Также есть некоторые абстрактные выводы о природе вещей. Математические выкладки почти отсутствуют. Она глава будет полна неточных и абстрактных понятий, потому что мы хотим сосредоточиться на ощущении происходящего, понять, что термодинамика прикладная и интуитивно понятная. Строгость и точность в последующих главах, если читатель хочет строгости, можно сразу же идти в следующий раздел. но если он хочет интуитивно научиться

представлять, что происходит и чувствовать смысл всего, то эта глава специально для этого, специально всякая техническая реализация идей отсутствует тут. можно даже покритиковать эту главу за то, что она не строгая, во многом может быть не совпадающая с определениями, которые далее используются, зато она настолько крутая, прикладная, абстрактная и интуитивная, что ее точно следует ставить на первое место! а дальше уже техника и реализация того, что мы задумали делать в этой главе. Также будет много примеров.

и сперва мы учимся создавать миры, потом применяем наши знания для описания простейших физических явлений.

Вторая глава дает нам все необходимые инструменты для термодинамического описания систем, а также коротко освещает их приложения и отдельные модели термодинамики.

и в ней уже описываются на самом деле полезные явления.

не всякие простые и абстрактные или общие.

по сути ей я чаще всего и пользуюсь.

первую часть как-то сам по себе понимаю и не думаю про нее, плюс там все правда супер просто, если понять один раз.

а дальше просто каждая часть на каждую систему, которая решается в термодинамике.

потом их опишу, это не столь важно.

**первая часть**

**вторая часть**

**Раздел с приложениями**

какие вообще приложения я разбирал?

пока никаких

## 4.2 обозначения

## 4.3 Константы

Приведем список термодинамических констант, чтобы чуть что полностью в них ориентироваться.

(потом)

# 5 Литература по термодинамике

## 5.1 Основная литература

### Минимальная

Кингсеп Локшин Ольхов Основы физики. Т. 1. Механика. Электричество и магнетизм. Колебания и волны. Волновая оптика

здесь брал основы структуры

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика т.1

в основестатфиза, а термач как бы его следствие, так что напрямую ключевая книга для этой записи.

### Задачники

Овчинкин Сборник задач часть 1.

Номер 1 задачник на тренировку

Корявов В. П. Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика

Большая помощь к сборнику Овчинкина, очень много всего там указано и разобрано, десятки часов еще на нем проведу.

[3] Кондратьев Райгородский Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории [2007]

очень хорошие задачи, уже многое вписано, но там больше про статфиз и кинетику.

Жукарев Матвеев Петерсои Задачи повышенной сложности в курсе общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., испр. / Под общей ред. А. Н. Матвеева. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 192 с.

Шикарные задачи, обязательно прорешаю, только кайф их решать.

В.С. Булыгин, М.Г. Кремлев, Э.В. Прут Избранные задачи студенческих олимпиад МФТИ по курсу общей физики / В.С. Булыгин, М.Г. Кремлев, Э.В. Прут - Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2015. - 312 с.

Крутой сборник задач, тоже прорешаю потом его, очень интересные и простые задачи, шикарное проведение времени на них. Доступ через lib.mipt, дальше по <http://books.mipt.ru/book/301280>

[1],...(тут и пояснения про них (!!!), что в каждой хорошо, что не очень?)

## Основная методическая

[4] Кириченко Термодинамика, статистическая и молекулярная физика

Хорошая небольшая книга, где все основное для минимального уровня.

[5] Лабораторный практикум МФТИ по термодинамике

Много хороших теоретических частей, к которым скорее всего периодически я буду возвращаться еще долго, потому что пока не актуально у себя это прописывать.

[6]

## 5.2 Дополнительная литература

### О деталях теории

Базаров И.П. Заблуждения и ошибки в термодинамике

Полистал, интересная доработка теории, выглядит совершенно неактуально, но когда-то, когда захочу доделать теорию, посижу на этой книге больше, интересные вопросы задаются там.

### По газовым эффектам и явлениям

[7] -...

вроде топ книга

### дополнительная по общефизной термодинамике

[8]

### По технической и начальной промышленной термодинамике

[9] Техническая термодинамика

мб добавлю пару прикладных глав, но скорее всего нет.

## По промышленной термодинамике (?)

### Математические книги, отдаленно связанные с термодинамикой

[10]

чет там мб про неё было.

### Литература о других разделах физики, во многом использующих термодинамику

[11] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика т.2

потом дойду, связки проработаю

### отдельные задачки

[12]

## 6 Термодинамические головоломки

сбалансирую и наберу потом по интересности

### 6.1 Бытовые головоломки

#### Как распространяется тепло

(ответу четко на этот вопрос)

### 6.2 Вопросы о фундаментальных законах термодинамики

Можно

#### Какая связь времени, энтропии, информации?

(я хз)

связь времени, энтропии, информации очень фундаментальная, ее важно понять, она многое скажет о мире.

например, возможно, энтропия как раз напрямую определяет, будет у человека мотивация работать или нет?

возможно что-то сделать или нет? про свободу действий и выбора, вообще существует ли будущее?

если что-то казалось бы сделано и исчезло, на самом деле оно перешло в информацию, и потом какой-то выход нужен будет этого.

### 6.3 Что может быть, а чего не может быть

#### Можно ли создать вечный двигатель?

#### Какие многочастичные системы не описываются термодинамикой и почему?

можно сказать, что квантовые системы, но почему?

что в них такого?

тут разберемся.



## 6.4 Головоломки для освоения типичных понятий

Допустим, видим человека, который в принципе хотел бы понять суть, опишем, какие в какой последовательности будем задавать, чтобы в типичном случае ему было бы интереснее въезжать. В частности это могут быть младшие студенты или редко школьники.

Головоломки для освоения школьного уровня

Головоломки для освоения уровня теормина

Головоломки для освоения других особенностей

## В Некоторые математические методы

### 1 конструкции теории вероятностей

обзор применений в термодинамике

например, нужны в газовых процессах типа диффузии и броуновского движения.

также в задачах об идеальных квантовых газах, которые термодинамика касается, потому что они в принципе и есть тот самый больцмановский газ, только при низких температурах.

#### 1.1 распределение Пуассона

конструкция распределения Пуассона

(пропишу четко в теорвере, и сюда суть выпишу)

примеры применения распределения Пуассона в случайном блуждании

Величины  $\bar{n}$  и  $\overline{n^2}$  можно найти следующим способом.

В соответствии с рис. 5.7.1 мы имеем дело с биномиальным распределением вероятности попадания метки в левый или правый ящик.

Вероятность набрать в правом ящике  $n$  меток равна

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Имея в виду свойства этого распределения, находим  $\bar{n} = Np$ ,  $\overline{n^2} - (\bar{n})^2 = Np(1-p)$ . Соответственно оказывается

$$\bar{x} = (2p-1)Nh$$

$$\overline{x^2} = (N^2 - 4N^2p + 4N^2p^2 + 4Np(1-p))h^2$$

#### 1.2 якобиан и соотношения из производных

соотношение максвелла производных

вроде нужно кстати...

## С моделирование

## References

- [1] Бурмистров С.Н., Тернов А.И., Белоусов Ю.М.: *Задачи по теоретической физике*. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2012.
- [2] Ландау, Л Д and Лифшиц, Е М: *Теоретическая физика том 5. Статистическая физика. Часть 1*. книга, 2004.
- [3] Кандратьев А. С., Райгородский П. А.: *Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории*. 2009.
- [4] Кириченко: *Термодинамика и молекулярная физика*.
- [5] Гладун А.Д., Александров Д.А., Игошин Ф.Ф.: *Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие. В трёх томах. Т 1. Термодинамика и молекулярная физика*. 2003.
- [6] Максимов Л. А., Михеенко А.В., Полищук И.Я: *Лекции по статистической физике*. 2009.
- [7] В.М.Меньшиков, В.М.Тешуков: *Газовая динамика: задачи и упражнения*.
- [8] Сивухин, Д.В.: *Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика*. Москва, 1975.
- [9] Хрусталеv Б.М., Несенчук А.П., Романюк В.Н. Акельев В.Д. Седнин В.А.: *Техническая термодинамика*. 2004.
- [10] Тао, Т.: *Структура и случайность*. М.: МЦНМО, 2013.
- [11] Ландау, Л Д and Лифшиц, Е М: *Теоретическая физика том 9. Статистическая физика. Часть 2*. книга, 2004.
- [12] олимпиады, Оргкомитет Республиканской: *Беларуская республиканская физическая олимпиада 2016 год (3 этап)*.
- [13] В.С., Булыгин: *Лекции в МФТИ и методические пособия*. Москва, 2012.