

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики микромира

**Направление подготовки:** 03.03.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

## **Гравитационное линзирование бинарными системами**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Голубев Юрий Игоревич

---

**Научный руководитель:**

Пироженко Ирина Георгиевна,

---

Москва 2021

## Аннотация

В настоящей работе исследуются эффекты волновой оптики в гравитационном линзировании для некоторых простых моделей бинарных гравитационных линз. В приближении геометрической оптики результаты линзирования могут быть предсказаны на основе теории особенностей лагранжевых отображений. Для изучения эффектов волновой оптики вычисляется фактор усиления гравитационной линзы, который определяется сильно осциллирующим двукратным интегралом по вещественным переменным с подынтегральной функцией, содержащей комплексную флуктуирующую фазу. Согласно теории Пикара-Лефшица, такой интеграл эквивалентен сумме интегралов по специальным многообразиям в комплексном пространстве, так называемым наперсткам Лефшица, каждый из которых имеет фиксированный комплексный фазовый множитель. В работе фактор усиления для бинарных гравитационных линз был получен с использованием численного интегрирования по наперсткам Лефшица. Были построены графики интенсивности при разных значениях параметров моделей рассматриваемых гравитационных линз.

## Abstract

In the present work, we investigate the effects of wave optics in gravitational lensing for some simple models binary gravitational lenses. In the geometrical optics approximation, lensing results can be predicted based on the theory of Lagrangian maps. To study the effects of wave optics, the amplification factor of the gravitational lens is calculated, which is determined by an oscillating double integral over real variables with an integrand, containing a complex fluctuating phase. According to the Picard-Lefschitz theory, such an integral is equivalent to the sum of integrals over special manifolds in a complex space, the so-called Lefschitz thimbles, each of which has a fixed complex phase factor. In this work, the amplification factor for binary gravitational lenses was evaluated using numerical integration over Lefschetz thimbles. For considered models of gravitational lenses intensity plots were obtained with different values of parameters.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Физические и математические основы</b>	<b>6</b>
1.1 Волновое уравнение в искривленном пространстве-времени . . . . .	6
1.2 Элементы особенностей дифференцируемых отображений . . . . .	7
1.3 Континуальный интеграл . . . . .	9
1.4 Вычисление осциллирующих интегралов . . . . .	12
1.4.1 Прикладной метод Пикара-Лефшица . . . . .	12
1.4.2 Алгоритм и программная реализация . . . . .	14
<b>2 Методы описания гравитационного линзирования</b>	<b>16</b>
2.1 Простой вывод уравнения линзы . . . . .	16
2.2 Фундаментальный вывод уравнения линзы . . . . .	19
2.3 Волновая модель одиночной линзы . . . . .	22
<b>3 Линзирование бинарными системами и другие модели</b>	<b>24</b>
3.1 Простейшие модели . . . . .	24
3.1.1 Одномерная плазменная линза . . . . .	24
3.1.2 Двумерная одиночная линза со сдвиговым потенциалом . . . . .	25
3.2 Типичные модели двумерных систем . . . . .	27
3.2.1 Система “generic peak” . . . . .	27
3.2.2 Система “degenerate peak” . . . . .	28
3.2.3 Система типа “elliptic umbilic” . . . . .	29
3.3 Некоторые бинарные модели . . . . .	30
3.3.1 Бинарная система из двух масс . . . . .	30
3.3.2 Бинарная система типа “double elliptic umbilic” . . . . .	32
<b>4 Заключение</b>	<b>34</b>
<b>Список литературы</b>	<b>35</b>

## Введение

Метод гравитационного линзирования позволяет получить информацию о гравитирующих объектах по картине искажения лучей света в их гравитационном поле. С помощью гравитационного линзирования можно измерять гравитационный потенциал вне зависимости от того, какое вещество его создает. В частности, в результате анализа искажения образов удаленных галактик вследствие гравитационного линзирования был сделан вывод о существовании темной материи.

В 1936 г. А. Эйнштейн сделал оценку линзирующего действия звезды при отклонении света в ее гравитационном поле и пришел к выводу, что "нет никакой надежды наблюдать это явление. напрямую"[6]. Тем не менее, первая гравитационная линза была открыта 1979 году Уолшем, Карр-свеллом и Вейманом [13]. С тех пор теория гравитационного линзирования стала быстро развиваться.

В своем расчете Эйнштейн рассматривал звезду как точечную массу. В настоящее время существуют разные модели гравитационных линз. Рассматривается гравитационное линзирование не только отдельными звездами, но и галактиками и скоплениями галактик. При этом модель линзы выбирается в соответствии с наблюдательными данными [15].

Для конкретной модели линзы результаты линзирования могут быть предсказаны на основе теории лагранжевых особенностей, развитой в работах В.И. Арнольда [2]. Можно предсказать число и вид изображений линзируемого объекта.

С другой стороны, анализируя данные астрономических наблюдений, можно делать выводы о распределении линзирующей материи и ее массе. При интерпретации результатов гравитационного линзирования можно пользоваться геометрической оптикой, что соответствует пределу бесконечной частоты. Однако, приближение геометрической оптики не работает вблизи сингулярности отображения линз (каустики), где это приближение дает бесконечную яркость для точечного источника. Эту проблему можно обойти, применяя волновую оптику.

При расчете интенсивности излучения в задачах гравитационного линзирования, а также в других задачах волновой оптики и квантовой механики, приходится иметь дело с интегралами от быстро осциллирующих функций. Согласно теории Пикара-Лефшица интеграл по вещественным переменным с подынтегральной функцией, содержащей комплексную флуктуирующую фазу, эквивалентен сумме интегралов по специальным многообразиям в комплексном пространстве ("наперстки Лефшица"), каждый из которых имеет фиксированный комплексный фазовый множитель [1].

Интерес к теории Пикара-Лефшеца возрос после статьи Е. Виттена [14] о новом подходе к вычислению интеграла по путям в квантовой механике. Обсуждаются, например, приложения этой теории к вычислению лоренцевых континуальных интегралов в задачах квантовой теории поля [5] и квантовой космологии [7].

В данной работе метод Пикара-Лефшеца используется в приложении к задаче гравитационного линзирования. Для того чтобы найти фактор усиления гравитационной линзы, вычисляется сильно осциллирующий двукратный интеграл типа интеграла Френеля-Киргхофа [4]. Рассматриваются несколько моделей гравитационных линз. Для каждой модели численно находятся наперстки Лефшеца, после чего вычисляется фактор усиления и строятся распределения интенсивности, возникшие в результате гравитационного линзирования.

Бакалаврская работа во многом опирается на статьи Дж. Фельбрюгге и Н. Турока с соавторами [10], [7], идея которых публиковалась достаточно давно в [3]. Также большое влияние на работу оказала статья Т. Накамуры и др. [12]. Предмет изучался также по [20], [19], были рассмотрены некоторые экспериментальные статьи, такие как [11], [8]. Была сделана попытка дополнить недавнее исследование этих авторов, посвященное линзированию в бинарных системах [9], а также развить, разработанные ими вычислительные методы [см. <https://p-lpi.github.io/glwo.html>]. Их программный код, представленный на сайте [см. <https://p-lpi.github.io/>], лег в основу кода, численно моделирующего

дифракционных картин линзирования в представленной бакалаврской работе. Физическая теория, используемая в работе, обсуждается, например, в [18], [17], математическая - в книге Арнольда В. И. и др. [1].

Перед бакалаврской работой были поставлены цели:

1. Изучить явление гравитационного линзирования. Познакомиться с последними исследованиями эффектов волновой оптики в гравитационном линзировании;
2. Изучить простейшие модели гравитационных линз, такие как одиночная и одиночная со сдвиговым потенциалом точечные линзы;
3. Познакомиться с теорией особенностей дифференцируемых отображений и ее применением в задачах гравитационного линзирования;
4. Используя теорию Пикара-Лефшица, научиться приближенно вычислять многократные интегралы от сильно осциллирующих функций; Научиться вычислять дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа, используя интегрирование по “наперсткам Лефшица”, и строить графики интенсивности в зависимости от конфигурации системы;
5. Описать одну новую бинарную линзирующую систему и исследовать ее свойства.

# 1 Физические и математические основы

Общая теория относительности предсказывает отклонение лучей света в поле гравитирующих объектов, а следовательно, и существование гравитационных линз. С одной стороны, теория гравитационного линзирования аналогична теории распространения света в веществе, показатель преломления которого может зависеть от координат и от частоты. С другой стороны, для описания среды, показатель преломления которой меняется в пространстве, можно ввести метрический тензор и использовать риманову геометрию.

В этой главе соберем необходимые физические и математические основы, которые будут применяться далее в вопросах линзирования.

## 1.1 Волновое уравнение в искривленном пространстве-времени

Первая конструкция, которую мы рассмотрим, в виду ее фундаментальности и простоты - это конструкция волнового уравнения. Именно она поможет нам строить волновую теорию в следующей главе.

### Волновое уравнение

Задачи оптики и гравитационного линзирования формулируются для электромагнитного поля. Мы для простоты будем рассматривать безмассовое скалярное поле, на примере которого можно продемонстрировать основные идеи и методы. Действие безмассового скалярного поля в пространстве с метрикой  $g_{\mu\nu}$  имеет вид

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\beta\nu} \partial_\beta \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \quad (1.1)$$

Варируя по полю  $\phi$ , найдем уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{-g} = 0. \quad (1.2)$$

Определив оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \nabla_\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right), \quad (1.3)$$

перепишем уравнение (1.2) в явно ковариантном виде,

$$\Delta_{LB} \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (1.4)$$

В случае нулевого потенциала получаем волновое уравнение:

$$\Delta_{LB} \phi(x) = 0. \quad (1.5)$$

### Метрика Шварцшильда

Типичный пример искривленной метрики - это сферически симметричная метрика Шварцшильда, которая описывает искривленное пространство вне объекта массы  $M$ , например, черной дыры. Она имеет вид

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.6)$$

в сферических координатах  $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ ,  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  - это так называемый радиус Шварцшильда, или гравитационный радиус,  $M$  - масса, создающая гравитационное поле,  $G$  - гравитационная постоянная,  $c$  - скорость света. Здесь и далее используется сигнатура метрики  $(-+++)$ .

Введем гравитационный потенциал  $U(\mathbf{r})$ , тогда  $-g_{00} \equiv 1 - 2U(\mathbf{r})$ . На больших расстояниях от тела потенциал  $U$  равен своему ньютоновскому значению. Для точечной массы  $U(\mathbf{r}) = -GM/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|$ .

Рассмотрим малые возмущения метрики Минковского линзирующим объектом, то есть  $U(\mathbf{r}) \ll 1$ . Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1 + 2U)dt^2 + (1 - 2U)d\mathbf{r}^2. \quad (1.7)$$

Будем решать волновое уравнение (1.8) для метрики (1.7) с точностью до первого порядка по  $U(\mathbf{r})$ .

### Волновое уравнение в терминах фактора усиления амплитуды

Рассмотрим монохроматическую волну частоты  $\omega$ . Волновое уравнение для амплитуды волны  $\phi(\vec{r}, t) = \tilde{\phi}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , имеет вид:

$$(\nabla^2 + \omega^2)\tilde{\phi} = 4\omega^2 U\tilde{\phi} \quad (1.8)$$

Для задач гравитационного линзирования, удобно записать его в терминах фактора усиления волны  $F(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r})/\tilde{\phi}_0(r)$ , где  $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$  есть волна, распространяющаяся без линзирующего объекта. Для фктора усиления волновое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F.$$

Здесь  $\nabla_\theta^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1}\partial/\partial\theta + \theta^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$ . - это угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Действительно, в уравнении  $(\nabla^2 + \omega^2)\tilde{\phi} = 4\omega^2 U\tilde{\phi}$  запишем лапласиан явно, а также домножим для получения фактора усиления, волновое уравнение получим в виде:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \right] (F\tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 U F\tilde{\phi}_0$$

Сгруппируем, введем оператор  $\nabla_\theta^2$  и упростим, считая углы малыми, получим:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 \right] (F\tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 U F\tilde{\phi}_0$$

Осталось лишь посчитать производные, помня явный вид  $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} &= i\omega r^{-1}e^{i\omega r} - r^{-2}e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(i\omega - r^{-1}) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} &= -\omega^2 r^{-1}e^{i\omega r} - 2i\omega r^{-2}e^{i\omega r} + 2r^{-2}e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) \\ \frac{\partial}{\partial r} (F\tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \left( F(i\omega - r^{-2}) + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (F\tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} + F \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} = \\ &= \tilde{\phi}_0 \left( F(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) + 2 \frac{\partial F}{\partial r} (i\omega - r^{-1}) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

После подстановки этих производных в уравнение выше, многие слагаемые сокращаются и получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F \quad (1.9)$$

Именно это уравнение далее и будет решаться в линзировании.

## 1.2 Элементы особенностей дифференцируемых отображений

Типичный анализ гравитационного линзирования приходит к тому, что появляется некоторый осциллирующий интеграл, зависящий от нескольких параметров, график которого представляет некоторую каустику. Теория каустик и их классификация крайне важны для понимания происходящего, однако останавливаться на них возможности нет, поэтому при случае далее просто нужное отображение будем называть, не вдаваясь в классификацию. Для анализа каустик имеются некоторые методы, на которых остановимся в этой главе.

## Отображение Лагранжа и интенсивность света после линзирования

Простейшее аналитическое исследование свойств потенциала может быть проведено с помощью так называемого отображения Лагранжа. Отображение Лагранжа  $\xi : X \rightarrow M$  переводит координатного пространства  $x \in X = \mathbb{R}^N$  в точки пространства параметра  $\beta \in M$  согласно уравнению на критические точки

$$\nabla_x \phi(x; \beta)|_{\beta=\xi(x)} = 0.$$

То есть по сути за счет приравнивания к нулю градиента фазы, мы и находим нужную зависимость параметров от координат. Так как в нашем случае  $\nabla_x \phi(x; \beta) = 2(x - \beta) + \nabla \varphi(x)$ , то

$$\beta = \xi(x) = x + \frac{1}{2} \nabla \varphi(x)$$

Отображение Лагранжа  $\xi$  определяет оптические лучи, давая чисто геометрическое описание линзирования. Получается, что каждая точка  $x$  отображается в точку  $\beta$  в пространстве наблюдаемых параметров.

В общем случае, точка  $\beta \in M$  может быть получена из нескольких точек  $x \in X$ , такие области в  $\beta$  называются  $n$ -точечными областями. В многоточечных областях интенсивность больше, чем в малоточечных за счет вкладов каждого пути, ведь на нем вычисляется гауссов интеграл и в итоге получается нормированная интенсивность:

$$I(\beta; \infty) = \sum_{x \in \xi^{-1}(\beta)} \frac{2}{|\lambda_1(x)| \dots |\lambda_N(x)|}$$

где  $\xi^{-1}$  это прообраз изображения при отображении Лагранжа и  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  это собственные значения деформационного тензора:

$$\mathcal{M}_{ij}(x) = \frac{\partial^2 \phi(x; \beta)}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_j},$$

вычисленного в соответствующих критических точках  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Также для обратной величины этого тензора в этой работе используется обозначение  $\gamma$ .

Ниже мы изучим эти многоточечные области в деталях, при конечных  $\nu$ , где происходят интерференционные картины. На границах между областями с разным числом изображений как минимум одно из собственных значений  $\lambda_i$  должно обнулиться. Таким образом, мы видим бесконечный пик на графике, изображающим нормированную интенсивность, из таких пиков и формируется каустика.

По сути отображение Лагранжа  $\xi$  формирует каустику на координатах  $x_c \in X$ , в которых деформационный тензор сингулярен, так как в них определитель обнуляется. В то же время пространство параметров системы  $X$  не наблюдается. В пространстве наблюдаемых параметров  $M$ , каустика на  $x_c$  появляется в точке  $\beta_c = \xi(x_c)$ .

Для одномерной линзы каустики появляются в изолированных точках, однако в случае более высокой размерности определитель тензора деформации обращается в нуль на многообразии  $X_c = \{x \in X \mid \mathcal{M}(x) = 0\}$ , которое отображается в каустическое множество  $M_c = \xi(X_c)$  в пространстве параметров. Правда, в общем случае  $M_c$ , как правило, не является многообразием, поскольку оно включает каустики более высокого порядка, например, “cusp” и “ласточкин хвост”, в которых многообразие недифференцируемо и, следовательно,  $M_c$  не является локально гомеоморфным евклидову пространству. Именно в таких точках линзирующий интеграл демонстрирует наиболее интересное поведение.

### Пример: определение особенностей для “elliptic umbilic $D_4^-$ ”

На широко известном примере отображения “elliptic umbilic  $D_4^-$ ” безотносительно линзирования, продемонстрируем методы анализа каустик, изложенных выше. Аналогичный метод был применен



в третьей главе в каждом из примеров для получения соответствующих результатов. Рассмотрим интеграл вида

$$\Psi(\beta; \nu) = \frac{\nu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1^3 - 3x_1x_2^2 - \beta_3(x_1^2 + x_2^2) - \beta_2x_2 - \beta_1x_1)\nu} dx_1 dx_2$$

Аналитическое продолжение экспоненты  $i\phi(x; \beta)\nu$  имеет четыре седловые точки  $\bar{x}_i$ , заданные корнями двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2\beta_3x_1 - \beta_1 &= 0 \\ -6x_1x_2 - 2\beta_3x_2 - \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

В зависимости от  $\beta$  две или четыре седловые точки являются реальными. Комплекснозначные седловые точки всегда находятся в сопряженных парах, так как  $\phi(x; \beta)$  является вещественным значением для реального  $x$ . Решая эти уравнения для  $\beta_1$  и  $\beta_2$  мы получаем лагранжево отображение как функцию  $\beta_3$ ,

$$\xi_{\beta_3}(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1\beta_3, -2x_2(3x_1 + \beta_3), \beta_3).$$

В геометрическом пределе мы формируем поверхность fold и три линии cusp. Поверхность fold в базовое пространство  $X = \mathbb{R}^2$  задается

$$A_2^X(\beta_3) = \left\{ \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \theta, \frac{\beta_3}{3} \sin \theta \right) \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

который представляет собой цилиндр с радиусом  $\frac{\beta_3}{3}$ , удовлетворяющий уравнению  $|\mathcal{M}| = 0$ , в котором тензор деформации имеет вид

$$\mathcal{M} = \left[ \frac{\partial^2 \phi(x; \beta)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2\beta_3 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 - 2\beta_3 \end{pmatrix}$$

Три линии cusp являются прямыми линиями и лежат на поверхности fold,

$$A_3^X(\beta_3) = \left\{ \left( \frac{\beta_3}{3}, 0 \right), \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \frac{2\pi}{3}, \frac{\beta_3}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \right), \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \frac{4\pi}{3}, \frac{\beta_3}{3} \sin \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

в пространстве  $X$ .

В пространстве  $M$  после отображения  $\xi_{\beta_3}$  эллиптическая точка пуповины расположена в начале координат. Поверхность fold задается

$$A_2 = \left\{ \left( \frac{\beta_3^2}{3} \left( \mp 2 \cos \theta + \cos(2\theta) \right), -\frac{2\beta_3^2}{3} (\pm 1 + \cos(\theta)) \sin(\theta), \pm \beta_3 \right) \mid \theta \in [0, 2\pi), \beta_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

где две ветви  $\pm$ , дают две отдельные части, соответствующие двум собственным значениям  $\mathcal{M}$ . Линии особенности cusp задаются

$$A_3 = \left\{ (t^2, 0, t), \left( -t^2/2, \sqrt{3}t^2/2, t \right), \left( -t^2/2, -\sqrt{3}t^2/2, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

### 1.3 Континуальный интеграл

Фундаментальную роль в понимании процесса линзирования играет континуальный интеграл. Обсудим его конструкцию и преобразования вкратце, так как в следующей главе эти же идеи потребуются на первых же страницах.

#### Построение континуального для волновой функции

Есть некоторая типичная конструкция перехода к континуальному интегралу, скорее всего знакомая читателю, на которой здесь остановимся.

Рассмотрим одномерную квантовую систему, описываемую волновой функцией, зависящей от обобщенной координаты  $q'$ . В начальный момент времени  $t'$  обозначим:

$$|\Psi_{t=t'}\rangle = |q'\rangle.$$

Хорошо известно из квантовой механики, что состояние в момент времени  $t$  получается в результате разбиения всего интервала  $t - t'$  на  $N \rightarrow \infty$  отрезков, и действием оператора эволюции  $\hat{U}(t, t') = \hat{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t \hat{H} dt \right\}$  на начальное состояние

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t') |\Psi(t')\rangle$$

В соответствии с таким разбиением интервала  $dt = (t - t')/N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , бесконечно малый сдвиг по времени  $t' \rightarrow t_1 = t' + dt = t' + (t - t')/N$  дает

$$|\Psi(t' + dt)\rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t_1) dt \right\} |q'\rangle + \mathcal{O}(dt^2).$$

Ключевая идея состоит в подстановке единичных операторов в координатном и импульсном представлениях, таким образом, делаем шаг вперед:

$$|\Psi(t_1)\rangle = \int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| p_1 \rangle \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \langle p_1| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t_1) dt \right\} |q'\rangle + \mathcal{O}(dt^2)$$

Для квадратичных по импульсу гамильтонианов вида

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}, t)$$

очевидно,

$$\langle p | \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) | q \rangle = \mathcal{H}(q, p, t) \langle p | q \rangle$$

где  $\mathcal{H}(q, p, t)$  — гамильтониан классической системы. Поэтому, опуская члены второго порядка малости по инкременту времени, с учетом известного соотношения,

$$\langle p | q \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} p q}$$

получаем

$$|\Psi(t_1)\rangle = \int |q_1\rangle \frac{dq_1 dp_1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_1(q_1 - q_0) - \mathcal{H}(q_1, p_1, t_1) dt]}$$

где  $q_0 = q'$ . Повторяя эту процедуру  $N$  раз, приходим к выражению

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int |q_N\rangle \prod_{k=1}^N \frac{dq_k dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} [p_k(q_k - q_{k-1}) - \mathcal{H}(q_k, p_k, t_k) dt]}$$

Введем скорость на каждом из интервалов:

$$\dot{q}(t_k) = \frac{q_k - q_{k-1}}{dt}$$

Тогда множество точек  $\{q_k\}$  образуют ломаную траекторию, точно также вводится и траектория в импульсном пространстве  $\{p_k\} \rightarrow p(t)$ .

Тогда произведение экспоненциальных факторов сводится к

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t [p(t) \dot{q}(t) - \mathcal{H}(q(t), p(t), t)] dt \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(t', t) \right\}$$

где  $S(t', t)$  — классическое действие на траектории в фазовом пространстве  $\{q(t), p(t)\}$  с граничными условиями в координатном пространстве  $q(t') = q'$  и  $q(t) = q_N$ .

В итоге выражение для состояния имеет вид:

$$|\Psi(t'')\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int |q_N\rangle \prod_{k=1}^N \frac{dq_k dp_k}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} S(t', t'')},$$

его называют интегралом по траекториям и вводят обозначение

$$|\Psi(t'')\rangle = \int dq_N |q_N\rangle \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S[q, p; t', t'']}$$

где мера интегрирования получается при предельном переходе к континууму:

$$\mathcal{D}q \mathcal{D}p = \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dq_k dp_k}{2\pi\hbar}$$

В итоге матричный элемент  $\langle q'' | \Psi(t'') \rangle$ , за счет того, что интегрирование по  $q_N$  «снимется» вследствие  $\langle q'' | q_N \rangle = \delta(q'' - q_N)$ , запишется в виде

$$\langle q'' | \Psi(t'') \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S(t', t'')}.$$

### Переход к двумерному интегралу

Остановимся на одном ключевом преобразовании, без которого использование континуального интеграла в линзировании было бы невозможно, а именно, преобразовании, которое сможет свести континуальный интеграл к интегралу по поверхности. Ключевым в этом переходе является присутствие потенциала только в плоскости линзы, что в рамках нашей модели мы и рассматриваем. Для получения нужного перехода, сделаем шаг назад, рассмотрим выражение для континуального интеграла до перехода к континуальной мере, то есть выражение вида:

$$F(\vec{r}_0) = \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2\theta_j}{A_j} \right] \exp \left\{ i\omega \left[ \epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j r_{j+1}}{2} \left| \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{\epsilon} \right|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\},$$

где обозначено  $A_j = 2\pi i\epsilon / (\omega r_j r_{j+1})$ , чтобы было  $F = 1$ , если  $\hat{\psi} = 0$ . Такой вид, конечно, отличен от рассмотренного выше, однако несложно заметить, что суть его такая же. Обозначения здесь специально изменены для того, чтобы позже удобно было ими пользоваться.

Для задач линзирования интересен случай, когда ключевой в интеграле является только одна плоскость, поэтому для этого выведем его переход к лишь двойному, а именно, к выражению вида

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2\theta_l \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}.$$

Сделать это несложно, достаточно заметить, что первые  $l-1$  интегралы от  $j=1$  до  $l-1$  это гауссовы интегралы и дают единицу, так что  $j=1$  под  $\prod$  и  $\sum$  могут быть заменены на  $j=l$ . Далее достаточно просто рассмотреть равенства, которые доказываются по индукции:

$$\sum_{j=l}^{N-1} r_j r_{j+1} |\theta_j - \theta_{j+1}|^2 = \epsilon \frac{r_l r_0}{r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 + \sum_{j=l+1}^{N-1} r_j^2 \frac{r_{l,j+1}}{r_{lj}} |\theta_j - u_{lj}|^2$$

где  $r_0 = r_N$ ,  $r_{lj} = r_j - r_l$  и  $u_{lj} = [r_l \theta_l + (j-l)r_{j+1}\theta_{j+1}] / (jr_{l,j+1})$ .

В итоге лишние интегралы факторизуются

$$F(\vec{r}_0) = \int \frac{d^2\theta_l}{A_l} \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\} \times \left[ \prod_{j=l+1}^{N-1} \int \frac{d^2\theta_j}{A_j} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{2\epsilon} \sum_{j=l+1}^{N-1} r_j^2 \frac{r_{l,j+1}}{r_{lj}} |\theta_j - u_{lj}|^2 \right],$$

и вторая часть после “ $\times$ ”, представляющая из себя гауссовы интегралы, легко считается. Обозначив ее как  $B$ , имеем:

$$B = \prod_{j=l+1}^{N-1} \frac{1}{A_j} \frac{2\pi i\epsilon}{\omega r_j^2} \frac{r_{lj}}{r_{l,j+1}} = \prod_{j=l+1}^{N-1} \frac{r_{j+1}}{r_j} \frac{r_{lj}}{r_{l,j+1}} = \frac{r_0}{r_{l+1}} \frac{\epsilon}{r_{l0}}.$$

В итоге получаем очень полезный ответ, который нам позже пригодится

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2\theta_l \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}.$$

## 1.4 Вычисление осциллирующих интегралов

Как будет продемонстрировано в дальнейшем, модельные задачи линзирования сводятся к расчету различных осциллирующих интегралов. Для преодоления этого последнего этапа перед получением результатов, обсудим актуальный метод вычисления интегралов.

Упомянем, что кроме этого метода ранее и сейчас используются также и другие методы, например, основанные на Фурье преобразовании. В данной работе использовался метод, основанный на глубоком понимании теории комплексных особенностей дифференцируемых отображений, метод Пикара-Лефшица.

### 1.4.1 Прикладной метод Пикара-Лефшица

Ключевой во многих концепциях современной физики и этой работе является метод Пикара-Лефшица, позволяющий вычислить и аналитически проанализировать осциллирующие интегралы. Рассмотрим теорию в её самом тривиальном случае, хотя в равной степени она может применяться и в более высоких измерениях и даже, в принципе, в бесконечномерном, то есть в интеграле по траекториям.

#### Суть прикладного метода Пикара-Лефшица

Теория Пикара-Лефшица имеет дело с осциллирующими интегралами вида

$$I = \int_D dx e^{iS[x]/\hbar}.$$

Здесь  $\hbar$  является просто вещественным параметром, а действие  $S[x]$  - вещественной функцией. Интеграл берется по вещественной области  $D$ , обычно определяемой особенностями подынтегрального выражения. Ставится вопрос о поведении интеграла при малых значениях параметра  $\hbar$ , например, такое становится актуально при переходе к классическим моделям из квантовых: мы устремляем  $\hbar$  к нулю.

Идея состоит в том, чтобы рассмотреть  $S[x]$  как голоморфную функцию  $x \in \mathbb{C}$ , комплексной плоскости. Теорема Коши позволяет нам деформировать контур интегрирования из области  $D$  на вещественной оси  $x$  в область  $\mathcal{C}$  в комплексной  $x$ -плоскости, сохраняя при этом его конечные точки фиксированными. Мы стремимся деформировать  $\mathcal{C}$  в контур “наискорейшего спуска”, проходящий через один или более критические точки  $S[x]$ , т. е. точки, где  $\partial_x S = 0$ . Из уравнений Коши-Римана следует, что действительная часть экспоненты,  $\text{Re}[iS[x]]$ , которая и вносит решающий вклад в подэкспоненциальное выражение, имеет седловую точку в вещественной двумерной  $(\text{Re}[x], \text{Im}[x])$ -плоскости. Нужный нам контур спуска через седловую точку определяется как путь, по которому  $\text{Re}[iS[x]]$  уменьшается как можно быстрее. Ввиду его важности, он приобретает специальное название: наперсток Лефшица, и обозначается как  $\mathcal{J}_\sigma$ .

#### Нисходящий поток и получение контура

Запишем показатель степени  $\mathcal{I} = iS/\hbar$  и его аргумент  $x$  в терминах их действительной и мнимой частей,  $\mathcal{I} = h + iH$  и  $x = u^1 + iu^2$ . Нисходящий поток затем определяется

$$\frac{du^i}{d\lambda} = -g^{ij} \frac{\partial h}{\partial u^j}$$

с параметром  $\lambda$  вдоль потока и  $g_{ij}$  римановой метрикой, введенной в комплексной плоскости. Действительная часть показателя  $h$  называется Морсовской функцией и убывает на такой поток вдали от критических точек, потому что  $\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial h}{\partial u^i} \frac{du^i}{d\lambda} = - \sum_i \left( \frac{\partial h}{\partial u^i} \right)^2 < 0$ , с наиболее быстрой скоростью уменьшения в направлении наискорейшего спуска, которая максимизирует величину градиента. Определение последнего требует, чтобы мы ввели метрику. Для простых примеров, которые мы здесь обсуждаем, достаточно тривиальной метрики  $ds^2 = |dx|^2$ . Определяя комплексные координаты как

$$(u, \bar{u}) = ((\text{Re}[x] + i \text{Im}[x]), (\text{Re}[x] - i \text{Im}[x])),$$

метрика становится вида  $g_{uu} = g_{\bar{u}} = 0, g_{u\bar{u}} = g_{\bar{u}u} = 1/2$ .

Тогда  $h = (\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}})/2$  и можно записать

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{d\bar{u}}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial u}.$$

Мнимая часть экспоненты  $H = \text{Im}[iS/\hbar]$  сохраняется вдоль этих потоков, так как

$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{1}{2i} \frac{d(\mathcal{I} - \bar{\mathcal{I}})}{d\lambda} = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial u} \frac{du}{d\lambda} - \frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial \bar{u}} \frac{d\bar{u}}{d\lambda} \right) = 0.$$

Таким образом, подынтегральное выражение  $e^{iS[x]/\hbar}$ , которое было сильно колеблющимся в исходном интеграле, полностью прекращает колебания при смещениях по этому наперстку, зато монотонно уменьшается, так что интеграл сходится абсолютно и “как можно быстрее”.

Для нисходящего потока, возникающего в седловой точке,  $\lambda$  пробегает значения от  $-\infty$  в седловой точке до положительных значений по мере уменьшения  $h$ . Аналогично, восходящие потоки  $\mathcal{K}_\sigma$  определяются через

$$\frac{du^i}{d\lambda} = +g^{ij} \frac{\partial h}{\partial u^j},$$

при  $H$  также постоянной вдоль этих потоков. Каждая критическая точка имеет восходящий поток.

Есть также некоторый случай, который не представляет собой проблему, однако о нем следует упомянуть. Может так быть, что контур наискорейшего спуска из одной седловой точки  $p_\sigma$  попадет на вторую седловую точку  $p'_\sigma$ , при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так что он совпадает с крутой подъем контура от  $p'_\sigma$ . Такая ситуация в целом маловероятна, но она может возникнуть в результате симметрии. Это может быть, если на контуре, соединяющим две точки функция Морса отлична, а мнимая часть  $H$  постоянна. Такой случай не представляет проблему и метод Пикара-Лефшица учитывает его.

## Контур и интеграл по ним

Итак, наша цель состоит в том, чтобы деформировать исходный интеграл в такой, который вычисляется по сумме наперстков Лефшица, которые можно пронумеровать с помощью  $\sigma$ , новая область примет вид

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \mathcal{J}_{\sigma},$$

где целые числа  $n_{\sigma}$  могут принимать значения 0 или  $\pm 1$  при смене ориентации контура по каждому наперстку. Из этих уравнений следует, что  $n_{\sigma} = \text{Int}(\mathcal{C}, \mathcal{K}_{\sigma}) = \text{Int}(D, \mathcal{K}_{\sigma})$ , где  $\mathcal{K}$  - контур наискорейшего подъема, а  $\text{Int}$  - номер пересечения.

Так как пересечение - число топологическое, при деформации контура  $\mathcal{C}$  обратно на вещественную область  $D$ , оно постоянно.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы данный наперсток  $\mathcal{J}_{\sigma}$  был нужным, является то, что самый крутой подъем из критической точки  $p_{\sigma}$  пересекает исходную, вещественную область интеграции  $D$ . В единичной комплексной размерности это работает так, что исходный интеграл вдоль вещественной оси  $x$  деформируется в ряд контуров.

При соответствующем выборе ориентации соседние наперстки заканчиваются и начинаются на особенностях функции Морса  $h$ , так что нет никаких препятствий для деформации объединенного контура обратно на вещественную ось  $x$ . Общий контур, представляющий из себя сумму по наперсткам, пробегает все сингулярности  $h$  в направлении, определяемом самым большим потоком. В итоге наши преобразования контура записываются в виде:

$$I = \int_D dx e^{iS[x]/\hbar} = \int_C dx e^{iS[x]/\hbar} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} dx e^{iS[x]/\hbar},$$

также для удобства анализа выделить функцию Морса и записать

$$I = \sum_{\sigma} n_{\sigma} e^{iH(p_{\sigma})} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} e^h dx \approx \sum_{\sigma} n_{\sigma} e^{iS(p_{\sigma})/\hbar} [A_{\sigma} + \mathcal{O}(\hbar)]$$

где  $A_{\sigma}$  есть лидирующий порядок гауссового интеграла в критической точке  $p_{\sigma}$ . Последующие члены могут быть получены с помощью теории возмущений по  $\hbar$ .

Дополнительное описание поведения и свойства интеграла можно найти в [7], нам для применения этого метода достаточно понимать, что если определить длину вдоль кривой как  $l = \int |dx|$ , то условие на сходимость интеграла имеет вид:  $h(x(l)) < -\ln(l) + A$ , для некоторой константы  $A$ , при  $l \rightarrow \infty$ , что является довольно слабым требованием, поэтому этот метод имеет большое распространение.

#### 1.4.2 Алгоритм и программная реализация

Программирование описанных выше методов представляет из себя задачу не многим проще, чем глубокое осознание их самих. Приведем пару ключевых указаний, которые позволят реализовать идеи выше численно.

##### Алгоритм для 1d интеграла

Ключевой алгоритм, по которому работает код представлен ниже.

**Требуется:** Разбивка изначальной области интегрирования на отрезки  $[a, b]$   $X = \mathbb{R}$  сеткой  $p_i = a + i\Delta x$  с шагом  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**while** Вариация мнимой части  $H$  в точках  $p_i$  более чем  $T_1$  **do**

Перенести точки:  $p_i \mapsto p_i - \nabla h(p_i) \Delta t$

**if**  $h$ -функция в точках  $p_i$  менее  $T_2$ , удалить эти точки

**end if**

**if** Длина отрезка  $(p_i, p_{i+1})$  превышает  $T_3$  **then**

Разделить отрезок на двое:  $\left(p_i, \frac{p_i+p_{i+1}}{2}\right), \left(\frac{p_i+p_{i+1}}{2}, p_{i+1}\right)$ .

**end if**

**end while**

Здесь требуются параметры  $a, b, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ , и  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

##### Алгоритм для 2d интеграла

Алгоритм вычисления двумерных интегралов крайне схож с одномерным, чего не сказать о его программной реализации. Также сложность его исполнения заметно возрастает, как и сложность визуализации итоговых наперстков. Приведем вкратце этот алгоритм, чтобы убедиться, что идейно всё аналогично.

**Требуется:** Подмножество исходной области интегрирования  $X$  представить квадратной сеткой, состоящей из клеток  $V_i$ , с точками  $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots$

**while** Вариация мнимой части  $H$  в точках  $p_{i,j}$  превосходит пороговое значение  $T_1$  **do**

Перенести точки по алгоритму:  $p_{i,j} \mapsto p_{i,j} - \nabla h(p_{i,j}) \Delta t$

```

if  $h$ -функция в точке  $p_i$  менее чем  $T_2$  then
    Удалить соответствующую клетку
end if
if Размер клетки  $V_i$  превосходит  $T_3$  then
    Разделить клетку на подклетки
end if
end while
Параметры тут абсолютно такие же:  $a, b, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ , и  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

```

## Обзор программной реализации

Программирование играет ключевую роль в моделировании графиков интенсивности в зависимости от параметров системы, так что важно вкратце обсудить этот раздел, чтобы незнакомый с программированием на профессиональном уровне читатель имел некоторые ориентиры и понимал пару важных моментов. Особенно это актуально для двумерных интегралов в виду необычности графиков и усложнения задачи в разы в сравнении с одномерным случаем.

Программы удобно строить, используя принципы объектно-ориентированного программирования, создавая класс отрезков или клеток, а из них делать массив, позже для него применять алгоритмы выше и получать нужные наперстки. Для класса следует прописать методы переноса, интегрирования, записи в бинарный файл, а также уменьшения наперстка в случае, если частота большая. Считывать данные и визуализировать удобно с помощью Wolfram Mathematica, с функциями которой и построены все графики в данной работе.

В одномерном случае для интегрирования удобно использовать обычную формулу трапеций, в то время как для двумерной она слишком сложна, поэтому эффективнее использовать интегрирование Ромберга. Также для уточнения хорошо используется экстраполяция Ричардсона. Делая циклы, важно проследить, чтобы при данном малом шаге сдвига наперстков, количества циклов хватило для прихода к финальному наперстку, по которому ведется интегрирования. Также рекомендуется использовать многопоточность, фиксацию в названии файлов всех параметров, а также вывода времени вычислений, что следует делать и в любых вычислительных проектах. И наконец, очень удобно поместить все параметры в отдельный файл, а на потенциалы сделать файл с их каталогом, откуда их удобнее всего будет брать.

## 2 Методы описания гравитационного линзирования

В данной главе вкратце приведены ключевые выкладки теории линзирования, которая используется для моделирования в последней части, а также разобраны минимальные примеры для иллюстрации. Поскольку волновая оптика является более фундаментальной, чем геометрическая оптика, начнем построение теории гравитационных линз на основе именно ее и без привязки ко второй.

### Основные формулы типичного волнового линзирования

Ввиду достаточной трудоемкости различных преобразований, многогранности волнового описания, большого количества моделей и связей с другими теории начнем с акцентирования итогового формализма, выводу которого посвящена эта глава. Из нижеперечисленных идей будет следовать, что итоговая формула амплитуды фактора усиления интенсивности света при линзировании по отношению к свету, прошедшему при отсутствии линзирующего объекта, в простейшем и общем случае имеет вид:

$$\Psi[\beta] = \frac{\Omega}{2\pi i} \int e^{i\Omega(\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\beta|^2 + \varphi(\mathbf{x}))} d^2\mathbf{x}$$

Здесь  $\Omega = 4GM\omega$  - параметр, играющий роль частоты;  $\mathbf{x}$  - приведенные безразмерные одномерные или двумерные угловые координаты;  $\varphi(\mathbf{x})$ , - фаза, зависящая от приведенных координат, воплощающая в себе особенность каждой модели;  $\beta$  - набор параметров, соответствующих геометрии системы. Подэкспоненциальный множитель часто называют функцией временной задержки и является одним из ключевых объектов исследования.

Соответственно, фактор усиления интенсивности определяется как:

$$I(\beta) = |\psi(\beta)|^2,$$

и является главным параметром, который ищется в работах о линзировании, в том числе, в данной работе о бинарных системах.

Изложенный ниже метод получения и вычисления моделей сводится к тому, что берется некоторая фаза, например, для одномерного случая в работе исследована фаза вида

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{1+x^2},$$

являющийся типичными простейшим примером плазменной линзы, для двумерного случая можно брать различные фазы, например

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{1+x_1^4+x_2^2},$$

которые далее могут быть использованы как потенциалы для бинарных систем, например, для двух массы, фаза запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log |\mathbf{x} - \mathbf{r}| - f_2 \log |\mathbf{x} + \mathbf{r}|.$$

### 2.1 Простой вывод уравнения линзы

Приведем очень короткий вывод уравнения линзы и укажем самые ключевые его особенности.

#### Получение формулы линзы в двух словах

Есть достаточно простой способ получить основные формулы линзирования, который обсудим в этом разделе. Другому, более фундаментальному выводу, использующему свойства континуального интеграла и переходу к геометрической оптике в волновом уравнении посвящен следующий раздел.



Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 3. В нашей модели есть наблюдатель (observer), источник света (source), находящийся в другой части вселенной, а также линза (lens), представляющая собой тонкий сферический слой, который как раз и обеспечивает увеличение или уменьшение интенсивности.

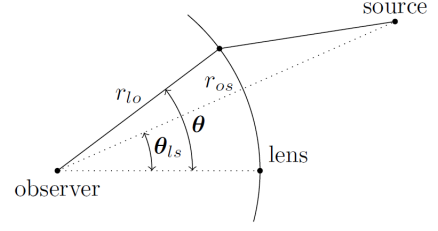


Рис. 1: модель гравитационного линзирования точечной массой

Рассмотрим движение когерентного монохроматического света с частотой  $\omega$  с точки зрения квантовой механики, с помощью интеграла по траекториям при постоянной энергии  $E = \hbar\omega$ .

Амплитуда, имеет знакомый вид из первой главы интеграла по траекториям

$$\Psi[\beta] = \int e^{iS/\hbar},$$

где действие следует записать согласно принципу Мопертью,

$$S = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}.$$

Учтем в действии вид простейшей метрики

$$ds^2 = -(1 + 2U(\mathbf{r}))dt^2 + (1 - 2U(\mathbf{r}))d\mathbf{r}^2,$$

в котором  $U(r)$  - гравитационный потенциал. Сделать это можно, выразив импульс при учете движения фотона, которое в гравитационном поле имеет вид:

$$\mathbf{p}^2/(1 - 2U) + m^2 = E^2/(1 + 2U)$$

при  $m \rightarrow 0$ . Поэтому в первом порядке по  $U$  действие становится:

$$S \approx E \int |d\mathbf{r}|(1 - 2U(\mathbf{r})).$$

Разобьем действие на два слагаемых, первый  $S_1 \approx E \int |d\mathbf{r}|$  - это по сути увеличение евклидовой длины пути света, прошедшего линзу в сравнении с прямой длины от источника к наблюдателю. Если рассмотреть точку  $A$  на поверхности линзы, то в приближении малых углов  $|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i| \int d\mathbf{r}$ , где  $\boldsymbol{\theta}_i$  - координаты  $i$ -го линзирующего объекта, можно записать с помощью несложных геометрических выкладок:

$$r_{sAo} - r_{so} = r_{sA} - (r_{so} - r_{lo}) = \sqrt{(r_{so} - r_{lo})^2 + r_{lo}r_{os}|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|^2} - (r_{so} - r_{lo}) = \frac{1}{2} \frac{r_{lo}r_{os}}{(r_{so} - r_{lo})} |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|^2.$$

В итоге первый вклад запишется в виде:

$$S_1 \approx E \int |d\mathbf{r}| \approx \frac{r_{lo}r_{os}}{(r_{os} - r_{lo})} |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|^2.$$

Второй вклад в действие можно записать, перейдя к конкретной метрике: возьмем гравитирующий потенциал  $U = -GM_i/|r - r_i|$  для массы  $M_i$  в координате  $r_i$  для малых  $|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|$ , только логарифм, поэтому действие станет в виде:

$$S_2 \approx -E \int |d\mathbf{r}| 2U(\mathbf{r}) \approx 2GM_i \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|,$$

с точностью до константы.

Удобно было бы сделать переобозначения, учитывающие геометрию, чтобы остаться с параметрами, которые играют ключевую роль, поэтому выразим это всё в известных углах Эйнштейна  $\theta_E =$

$\sqrt{4GM(r_{os} - r_{lo}) / (r_{lo}r_{os})}$ , где  $M$  - общая масса. То есть перейдем к безразмерным угловым координатам  $x, \beta$  следующим образом:  $\theta \equiv \theta_E x$  и  $\theta_{ls} \equiv \theta_E \beta$ . Задача нормировки амплитуды для обеспечения унитарности тривиальна и решается введением фактора  $\frac{\Omega}{2\pi i}$ . По итогу амплитуда запишется в виде

$$\Psi[\beta] = \frac{\Omega}{2\pi i} \int_x e^{i\Omega(\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\beta|^2 + \alpha \ln|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|)},$$

где  $\Omega \equiv 4GM\omega$ , здесь и далее будет использовано обозначение интеграла  $\int_x \equiv \int d^2x$  для укорочения записи. Фазовое слагаемое  $\varphi(\mathbf{x})$  зависит от параметра  $\alpha$ , учитывающего геометрию и массу системы, в произвольном случае его можно находить определенные поправки к потенциалу одинокой массы. Для бинарных систем можно записывать фазовое слагаемое просто как взвешенную сумму нескольких потенциалов, например, по аналогии с случаем, рассмотренным выше, оно может иметь вид  $\varphi(\mathbf{x}) = -\sum_i f_i \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ .

### Некоторые свойства амплитуды

Для лучшего понимания полученных выражений а также дальнейших вычислений обсудим некоторые их свойства. Если гравитирующие массы перемещаются по небу с помощью параметра  $t$ , то  $x_i \rightarrow x_i + \chi t$ , соответственно выражение для амплитуды также будет меняться:  $\Psi[\beta] \rightarrow \Psi[\beta - \chi t]$ .

Обозначим как  $A$  площадь сферы с центром в источнике света, на которой линза. Полная интенсивность, дошедшая до линзы  $\int_\beta |\Psi[\beta]|^2 = A$ , не зависит от  $\varphi(\mathbf{x})$ . Она унитарная, что соответствует сохранению полного потока энергии.

Можно сделать пару аналитических преобразований для поиска интенсивности. Умножим  $\Psi[\beta]$  на его комплексно сопряженное выражение, с  $x \rightarrow x'$ , и сделаем замены  $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x})$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ , получим

$$I = \frac{\Omega^2}{4\pi^2} \int_{\mathbf{u}, \Delta} e^{-i\Omega(\varphi(\mathbf{u}+\Delta) - \varphi(\mathbf{u}-\Delta) + 2\Delta \cdot (\mathbf{u}-\beta))}.$$

Разложение в ряд тейлора экспоненты по  $\Delta$  и изменение масштаба  $\Delta \rightarrow \Delta/\Omega$  дает линейный, независимый от  $\Omega$  член, который преобладает при больших  $\Omega$ . Для удобства, обозначим как ранее, Переобозначим  $\mathbf{u}$  как  $\mathbf{x}$ , теперь получим:

$$I(\beta) \approx \int_x \delta(\nabla\varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - \beta) = \sum_s \frac{1}{|M(x_s(\beta))|}.$$

где  $M(\mathbf{x}) = \det(\delta_{ij} + \partial_i \partial_j \varphi(\mathbf{x}))$ ,  $i, j = 1, 2$ , а сумма пробегает решения  $\mathbf{x}_s(\beta)$  уравнения

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - \beta = 0,$$

то есть уравнения на стационарные точки амплитуды  $I$ . При приближении больших  $\Omega$ , интенсивность сохраняет нормированность на единицу, как можно видеть, проинтегрировав левую часть равенства по всем  $\beta$ .

В первом порядке по  $\varphi$  уравнение имеет решения  $\mathbf{x} \approx \beta$ . Далее  $D(\beta) \approx 1 + \nabla^2\varphi(\beta)$  и уравнение на стационарные точки становится подобием уравнения Пуассона  $-\nabla^2\varphi(\beta) \approx I(\beta) - 1$ . Получается, что в высокочастотном случае в слабом линзирующем режиме можно получить фазу линзирования из интенсивности.

Для гравитационных линз существует дальнейшее упрощение, а именно, если  $I(\beta) - 1$  можно аппроксимировать суммой дельта-функций, которые выбираются чтобы совпасть с их мультипольными моментами, решение для  $\varphi$ , которое представляет из себя сумму логарифмов, будет хорошо аппроксимировано точным нелинейным решением. Далее при больших  $\Omega$  таким же методом итерационного алгоритма можно найти  $\varphi$  по амплитуде.

Более того, есть методы, по которым также может быть найден  $\Omega$ , о них можно подробнее почитать в [9]. Факт, который позволяет это сделать, состоит в том, что амплитуду можно рассматривать как

унитарное преобразование фазы  $e^{i\Omega\varphi(x)}$  вида

$$(\Omega/2\pi i) \int_{\mathbf{x}} e^{i\frac{1}{2}\Omega(\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta})^2}.$$

В таком случае обратное преобразование  $i \int_{\boldsymbol{\beta}} e^{-i\frac{1}{2}\Omega(\mathbf{z}-\boldsymbol{\beta})^2}$ . Применяя его к  $\Psi[\boldsymbol{\beta}]$ , получаем  $e^{i\Omega\varphi(\mathbf{z})}$ , с полностью равномерной интенсивностью для любых  $\varphi(\mathbf{z})$ . Здесь видно, что амплитуда линзы способна восстановить  $\Omega$ .

## 2.2 Фундаментальный вывод уравнения линзы

Более фундаментальный вывод уравнения линзы состоит в рассмотрении волнового уравнения и решения его методом континуального интеграла, хорошо изученных в прошлой части. Произведем его и далее будем рассматривать линзирование в рамках этого формализма. В данном разделе будем пользоваться системой единиц  $c = 1$ .

### Описание модели

Рассмотрим точечный источник, излучающий монохроматические волны частоты  $\omega$ , часть которых распространяются через гравитационную линзу и достигают наблюдателя на далеком расстоянии. Данная модель изображена на рис. (2).

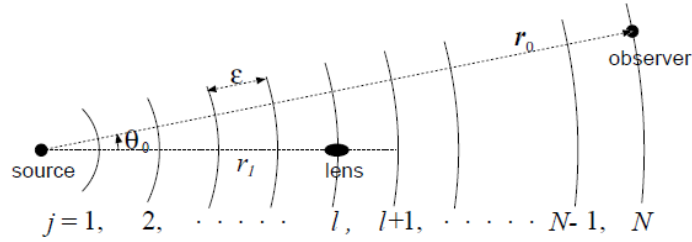


Рис. 2: Модель геометрии гравитационного линзирования

Для данной модели пространство разбирается на участки длиной  $\epsilon$ , в остальном геометрия нас из прошлой части уже хорошо знакома.

Метрика пространства-времени имеет хорошо известный вид:

$$ds^2 = -(1 + 2U)dt^2 + (1 - 2U)d\vec{r}^2.$$

### Вывод формулы линзы через континуальный интеграл

Запишем волновое уравнение в терминах фактора усиления амплитуды (1.9):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta}^2 F = 4\omega^2 U F$$

где  $\nabla_{\theta}^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1}\partial/\partial\theta + \theta^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$ .

Предполагая, что

$$\omega/|\partial \ln F/\partial r| \sim (\text{масштаб изменения } F)/(\text{длина волны}) \gg 1,$$

пренебрежем членом  $\partial^2 F/\partial r^2$  в сравнении со вторым. Третий член отбросим ввиду сферической симметричности задачи.

Тогда мы получаем уравнение

$$2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} = 4\omega^2 U F,$$

которое имеет вид уравнения Шредингера, разве что “ время” это  $r$ , “масса частицы” -  $\omega$ , и “зависящий от времени потенциал” это  $2\omega U(r, \theta)$ .

Уравнение Шредингера известно тем, что решение формально можно записать, используя лагранжиан, соответствующий данной модели:

$$L(r, \theta, \dot{\theta}) = \omega \left( \frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}|^2 - 2U(r, \theta) \right),$$

где  $\dot{\theta} = d\theta/dr$ , через формализм интеграла по траекториям:

$$F(\vec{r}_0) = \int \mathcal{D}\theta(r) \exp \left\{ i \int_0^{r_0} dr L[r, \theta(r), \dot{\theta}(r)] \right\}$$

Это выражение используется следующим образом:

- i) Следует подобрать конкретный вид функции  $\theta(r)$ , представляющей собой путь от источника к наблюдателю на  $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0)$ ;
- ii) Вычислить интеграл в курсивных скобках по этому выбранному пути, таим образом, добыв “фазу” как функцию от  $\theta(r)$ ;
- iii) Суммировать все эти фазы для всевозможных  $\theta(r)$ .

Для осуществления этого, подобно тому, как делалось в типичном континуальном интеграле, разделим расстояние  $r_0$  между источником и наблюдателем на малые отрезки  $\epsilon = r_0/N$  за счет бесконечно большого числа  $N$  и выберем путь  $\theta(r)$  за счет введения координат  $\theta_j = \theta(r_j)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) на  $j$ -й сфере радиуса  $r_j = j\epsilon$ . Пусть линза будет находиться на  $l$ -й сфере (плоскость линзы), то есть  $r_l = l\epsilon$  есть расстояние между источником и плоскостью линзы.

Введем “приближение тонкой линзы”, формально за счет вида записи потенциала как  $U(r, \theta) = \frac{1}{2} \delta(r - r_l) \hat{\psi}(\theta)$ . То есть через новый параметр

$$\hat{\psi}(\theta) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \theta).$$

Такое приближение не означает, что линза бесконечно тонкая, но означает, что пути, дающие вклады в фазовый интеграл хорошо аппроксимируются за счет постоянного вектора  $\theta(r) \simeq \theta_l$  в узкой области  $U(\vec{r}) \neq 0$  в сравнении с большими  $r_0$  и  $r_l$ .

Теперь у нас уходит интегрирование по потенциалу, а также континуальный интеграл возвращается в свою дискретную аппроксимацию:

$$F(\vec{r}_0) = \left[ \prod_{j=1}^{N-1} \int \frac{d^2 \theta_j}{A_j} \right] \exp \left\{ i\omega \left[ \epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \frac{r_j r_{j+1}}{2} \left| \frac{\theta_j - \theta_{j+1}}{\epsilon} \right|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\}$$

здесь множители нормировки  $A_j = 2\pi i\epsilon / (\omega r_j r_{j+1})$ , то есть они обеспечивают  $F = 1$  при  $\hat{\psi} = 0$ . Из первой части нам известно, что такой интеграл можно сделать двумерным, так что сразу перейдем к приятному виду:

$$F(\vec{r}_0) = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \int d^2 \theta_l \exp \left\{ i\omega \left[ \frac{r_l r_0}{2r_{l0}} |\theta_l - \theta_0|^2 - \hat{\psi}(\theta_l) \right] \right\} \quad (2.1)$$

где  $r_{l0}$  расстояния между линзой и наблюдателем.

Таким образом, за счет приближения тонкой линзы мы можем ограничить произвол функций  $\theta(r)$  теми, пути которых идут прямо от источника в “точку отклонения”  $\theta_l$  и снова пойти прямо от  $\theta_l$  к наблюдателю. Первый член квадратных скобок это разница длин пути между прямым путем и от источника к наблюдателю и отклоненным путем и отклоненным, проходящим через плоскость линзы в  $\theta_l$ . Второй член это задержка времени, получающаяся за счет гравитационного поля вокруг линзы.

## Итоговые уравнения

Перепишем фактор усиления амплитуды 2.1 в более удобном виде за счет введения характерного углового масштаба, знакомого нам угла Эйнштейна  $\theta_E = \left( \frac{4GM r_{l0}}{r_l r_0} \right)^{1/2} \sim 3\mu \operatorname{arcsec} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left( \frac{r_l r_0 / r_{l0}}{\text{Gpc}} \right)^{-1/2}$  и, определив безразмерные величины

$$x = \theta_l / \theta_E, \quad \beta = \theta_0 / \theta_E, \quad w = \frac{r_l r_0}{r_{l0}} \theta_E^2 \omega$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{r_{l0}}{r_l r_0} \theta_E^{-2} \hat{\psi}(\theta_E \mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}, \beta) = \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \beta|^2 - \psi(\mathbf{x}),$$

получим вид, который будет использоваться во всех моделях в этой работе ниже:

$$F(w, \beta) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \beta)].$$

Из нее легко вычислить сам фактор усиления, как  $|F|^2$ . Таким образом, видна зависимость от частоты  $w$  и позиции источника  $\beta$ . Отдельным достоинством этого метода, является то, что скалярный волновой анализ применим для волн любой поляризации, если вращением её направления можно пренебречь.

Если линзирующий объект сферически симметричный, то  $\psi(\mathbf{x})$  зависит только от  $x = |\mathbf{x}|$  и величина  $F(\vec{r}_0)$  может быть выражена через функцию Бесселя  $J_0$  как

$$F(w, \beta) = -i w e^{i w \beta^2 / 2} \int_0^\infty dx x J_0(w x \beta) \exp \left\{ i w \left[ \frac{1}{2} x^2 - \psi(x) \right] \right\}.$$

## Геометрическое описание точечного источника

Зачастую удобнее работать просто с геометрическим подходом, забыл в волном, именно это и использовалось учеными до развитого более общего подхода. В принципе, можно было бы об этом сказать и в первой главе, потому что для перехода к этому пределу у нас всё готово было еще тогда. Передел геометрической оптики по сути является переходом от

$$F(w, \beta) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \beta)]$$

к более простому, в то же время отличному выражению вида

$$F = \sum_j |\gamma(\mathbf{x}_j)|^{1/2} \exp[iwT(\mathbf{x}_j) - i\pi n_j],$$

где  $\gamma(\mathbf{x}) = 1 / \det [\partial_a \partial_b T(\mathbf{x})] = 1 / \det [\delta_{ab} - \partial_a \partial_b \psi(\mathbf{x})]$ , который мы и рассмотрим сейчас подробнее, дав все минимальные обоснования.

Представим функцию временной задержки двумерной поверхностью  $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \beta|^2 - \psi(\mathbf{x})$  над  $x$ -плоскостью для фиксированного  $\beta$ . В случае коротких длин волн  $w \rightarrow \infty$ , подынтегральное выражение в факторе усиления  $F(w, \beta) = \frac{w}{2\pi i} \int d^2 \mathbf{x} \exp[iwT(\mathbf{x}, \beta)]$  сильно осциллирующая функция, поэтому величина  $F$  получается в основном за счет вкладов стационарных точек поверхности  $T(\mathbf{x})$ . Запишем

$$\partial T(\mathbf{x}) = 0,$$

что есть уравнение для стационарных точек или уравнение на обнуление отображения лагранжа, или, в координатах,

$$\beta = \mathbf{x} - \partial \psi(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \theta_0 = \theta_l - \frac{r_{l0}}{r_0} \alpha(\theta_l)$$

где  $\partial = \partial / \partial \mathbf{x}$  и  $\alpha(\theta_l) = r_l^{-1} \partial \hat{\psi} / \partial \theta_l$ .

Эти стационарные точки соответствуют изображения геометрической оптики, и условие  $\partial T(\mathbf{x}) = 0$  выражает принцип геометрический Ферма. То есть по сути мы получили уравнение линзы, которое определяет координаты изображения  $\mathbf{x}$  (или  $\theta_l$ ) для данных координат источника  $\beta$  (или  $\theta_0$ ) с углом отклонения  $\alpha$  от нулевых геодезических.

Для более “сильной” линзы, потенциал  $\psi(\mathbf{x})$  таков, что число изображений более, чем одно.

Разложим  $T(\mathbf{x})$  в окрестности  $j$ -го изображения  $\mathbf{x}_j(\beta)$  как

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \sum_{ab} (x-x_j)_a (x-x_j)_b (x-x_j)_a \partial_b T(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{6} \sum_{abc} (x-x_j)_a (x-x_j)_b (x-x_j)_c (x-x_j)_a \partial_b \partial_c T(\mathbf{x}_j) + \dots$$

где индексы  $abc \dots$  пробегают значения 1 и 2. Предел геометрической оптики, означает большие частоты  $w$ , то есть можно записать условие

$$w |\partial^2 T|^3 \gg |\partial^3 T|^2, \quad w |\partial^2 T|^2 \gg |\partial^4 T|, \quad \dots,$$

можно пренебречь третьим и более высокими членами разложения.

Учитывая все изображения  $j$  с координатами  $\mathbf{x}_j$ , можно записать гауссов интеграл в приближении геометрической оптики как

$$F = \sum_j |\gamma(\mathbf{x}_j)|^{1/2} \exp[iwT(\mathbf{x}_j) - i\pi n_j]$$

где

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1/\det[\partial_a \partial_b T(\mathbf{x})] = 1/\det[\delta_{ab} - \partial_a \partial_b \psi(\mathbf{x})]$$

и  $n_j = 0, 1/2, 1$  - когда  $x_j$  это минимум, седловая точка и максимум  $T(x)$ , соответственно.

Уравнение для  $F$  выражает, что наблюдаемая волна это суперпозиция волн от каждого изображения, с соотношением амплитуд  $|\gamma(\mathbf{x}_j)|^{1/2}$  и фазовым сдвигом  $wT(\mathbf{x}_j) - \pi n_j$ .

Усиление интенсивности волны принимает вид:

$$|F|^2 = \sum_j |\gamma_j| + 2 \sum_{j < k} |\gamma_j \gamma_k|^{1/2} \cos(wT_{jk} - \pi n_{jk}) \quad (2.2)$$

где  $\gamma_j = \gamma(\mathbf{x}_j)$ ,  $T_{jk} = T(\mathbf{x}_k) - T(\mathbf{x}_j)$  это средняя временная задержка между  $k$ -м и  $j$ -м изображениями, и  $n_{jk} = n_k - n_j$ .

Обратите внимание, что в геометрической оптике коэффициент увеличения размера изображения для бесконечно малого источника задается как якобиан линзирующего отображения  $\beta \mapsto \mathbf{x}$ .

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1/\det[\partial \otimes \beta] = 1/\det[\delta_{ab} - \partial_a \partial_b \psi(\mathbf{x})]$$

Исходя из сохранения поверхностной яркости в геометрической оптике, это увеличение изображения равно усилению интенсивности источника. Поэтому первый член в уравнении (2.2) содержит результат геометрической оптики, в котором величина  $|\gamma_j|$  это фактор усиления от  $j$ -го изображения. Второй член выражает “интерференцию” между изображениями, которое создает различные интерференционные картины. Уравнение (2.2) по сути есть квазиклассическая аппроксимация квантовой механики.

## 2.3 Волновая модель одиночной линзы

Прежде чем изучать сложные модели, проиллюстрируем нашу теорию на самом тривиальном случае - случае одиночной массы. И хотя этот чисто иллюстративный, ведь, как будет показано далее, даже небольшое возмущение способно в корне изменить полученный график интенсивности, уже изложенные ниже методы могут предсказывать такие известные явления, как кольцо или крест Эйнштейна, на которых в этой работе останавливаться нет возможности.

Начнем анализ этой модели с вида фактора усиления для сферически симметричного случая

$$F(w, \beta) = -iwe^{iw\beta^2/2} \int_0^\infty dx x J_0(wx\beta) \exp\left\{iw\left[\frac{1}{2}x^2 - \psi(x)\right]\right\} \quad (2.3)$$

Подставим это в выражение  $\hat{\psi}(\theta) = 2 \int_0^{r_0} dr U(r, \theta)$ , через потенциал

$$U(r, \theta) = -GM / (r^2 - 2r_l r \cos \theta + r_l^2)^{1/2},$$

где  $M$  обозначает ее массу.

и, используя приближение  $\theta \ll 1$ , получаем линзирующий потенциал в виде  $\hat{\psi}(\theta_l) = 4GM \ln \theta_l + \text{const}$ , где постоянный член не важен, так как он вклад дает во все фазы  $F$ .

Масштабируя углы по углу Эйнштейна  $\theta_E$ , подобно тому, как это было в прошлом разделе, получаем выражения

$$\psi(x) = \ln x, \quad w = 4GM\omega \sim 10^5 (M/M_\odot) (\nu/\text{GHz}).$$

Заметим, что  $w \sim (\text{гравитационный радиус от массивной линзы}) / (\text{длина волны})$  - это большая величина в типичных задачах астрофизики. Подставляя эти величины в (2.3), несложно разглядеть решение в виде известной гипергеометрической функции  ${}_1F_1$ , то есть в итоге для фактора усиления имеем

$$|F|^2 = \frac{\pi w}{1 - e^{-\pi w}} \left| {}_1F_1 \left( \frac{1}{2} i w, 1; \frac{1}{2} i w \beta^2 \right) \right|^2. \quad (2.4)$$

В пределе больших длин волн  $w \rightarrow 0$ , фактор усиления равен единице, и усиление не происходит, то есть по сути волна игнорирует линзу. В противоположном пределе, когда  $w \gg 1$ , фактор усиления точно оценивается квазиклассическим приближением, которое работает, пока  $\beta \gg 1/w$ , и  $|F|^2 \simeq \pi w J_0^2(w\beta)$  справедливо, пока  $\beta \ll w^{-1/2}$ .

Функция временной задержки  $T(x) = \frac{1}{2}|x - \beta|^2 - \ln x$  имеет две стационарные точки, точку минимума  $\mathbf{x}_1$  и стационарную точку  $\mathbf{x}_2$ :

$$\mathbf{x}_{1,2} = \frac{\beta}{2\beta} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4} \right), \quad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\beta^2 + 2}{2\beta\sqrt{\beta^2 + 4}}$$

Эти точки соответствуют двум классическим лучам, один из которых идет через  $\mathbf{x}_1$ , на той же сторона, что и источник, вне кольца Эйнштейна  $x = 1$ . Этот луч дает решающий вклад в интенсивность в режиме слабого линзирования. Другой луч идет через  $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1/x_1^2$ , на обратной стороне от линзы и внутри круга Эйнштейна. Функция временной задержки, соответственно, принимает вид

$$T_{12} = \frac{1}{2}\beta\sqrt{\beta^2 + 4} + \ln \frac{\sqrt{\beta^2 + 4} + \beta}{\sqrt{\beta^2 + 4} - \beta}, \quad n_{12} = \frac{1}{2}$$

И в итоге квазиклассическое приближение решения волнового уравнения для точечной линзы запишется как:

$$|F|^2 = \frac{\beta^2 + 2 + 2 \sin(wT_{12})}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4}} \quad (2.5)$$

В случае  $\beta \ll 1$ , получаем выражение

$$|F|^2 \simeq [1 + \sin(2w\beta)]/\beta.$$

Член с синусом выражает интерференцию от двух изображений, за счет него появляются круговые дифракционные кольца.

Критическая кривая радиуса  $x = 1$  формирует знаменитое кольцо Эйнштейна в плоскости линзы, а каустика в этой модели это всего лишь точка  $\beta = 0$  в плоскости источника, в которой  $|F|^2$  в геометрическом подходе, согласно (2.5), расходится. Понятно, что в настоящем волновом описании максимальное значение  $|F|^2$  далеко не бесконечность, а  $\pi w / (1 - e^{-\pi w})$ , ведь выражение для него нам известно (2.4). В зависимости от частоты, максимальное усиление  $\simeq \pi w$  по порядку пропорционально отношению гравитационного радиуса к длине волны, заметно больше, чем единица.

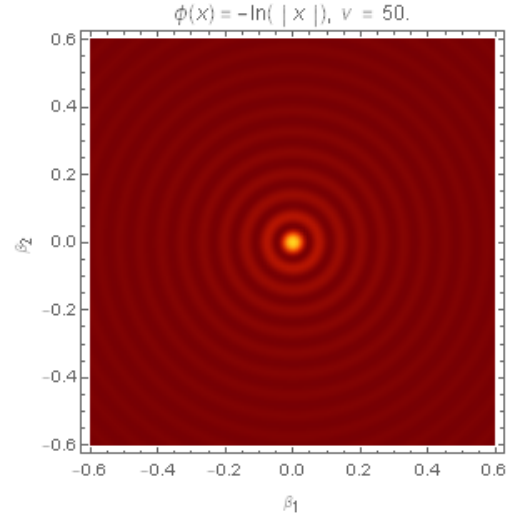


Рис. 3: График интенсивности для линзирования точечной массой при  $\nu = 50$ .

### 3 Линзирование бинарными системами и другие модели

В рамках формализма, изложенного в предыдущей главе рассмотрим простейшие модели, не задаваясь физическими интерпретациями ввиду их громоздкости.

#### 3.1 Простейшие модели

##### 3.1.1 Одномерная плазменная линза

Одномерная плазменная линза - простейший и крайне показательный пример одномерного гравитационного линзирования, на котором можно понять идейные закономерности, проявляющиеся также и в более сложных примерах.

##### Модель плазменной линзы

В модели плазменной линзы вычисляется функция  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящая от параметров  $\beta$  и  $\nu$ , имеющую вид интеграла:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left((x-\beta)^2 + \frac{\alpha}{1+x^2}\right)\nu} dx$$

В данной модели дробь в фазе есть рациональное приближение гауссовой экспоненты. что также с некоторой точностью может описывать сгусток плазмы.

##### Анализ функции плазменной линзы

Модель плазменной линзы хороша тем, что на ней удобно изучать метод Пикара-Лефшица, играющий ключевую роль в численном вычислении осциллирующих интегралов.

Плазменная линза сполна была исследована в [9], поэтому здесь только в целях полноты представления о методах и об этой модели воспроизведем ключевые ее свойства.

Несложно программными методами найти седловые точки, построить контура постоянной фазы и области убывания функции, которые приведены ниже на рис. 4. Итоговые графики приведем в качестве иллюстрации только для  $\alpha = 0.5$ , потому что этого достаточно, чтобы понять метод и особенности, в то же время не сместить акцент с бинарных систем, можно увидеть на рисунке ниже.

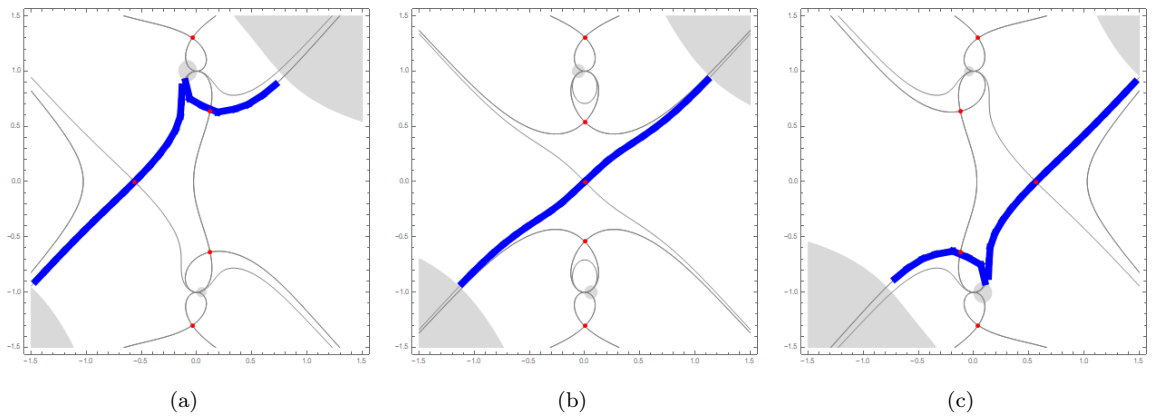


Рис. 4: Контур убывания, наперсток Лефшица в комплексной плоскости для плазменной линзы для  $\alpha = 0.5$ . Представлены случаи (a)  $\mu = -0.4$ , (b)  $\mu = 0$ , (c)  $\mu = 0.4$ .

Здесь серые линии - контура постоянной фазы, серые области - области, в которых функция крайне мала. Синие контура - те самые наперстки Лефшица для одномерного случая, именно по ним происходит интегрирование. Разве что алгоритм интегрирования, описанный в теории уменьшает их, учитывая



то, что при больших осцилляциях, убывание подэкспоненциальной функции во многих областях слишком быстрое, чтобы их учитывать. Также на (a) и (c) можно наблюдать известное так называемое явление Стокса - изменение вида наперстка Лефшица при прохождении седловой точки.

### Интенсивность функций 1D плазменной линзы

Приведем характерные графики интенсивности. Для низких частот на рис. 5 представлены три характерных режима, а для высоких частот - имеются схожие, но более выраженные режимы, изображенные на 6.

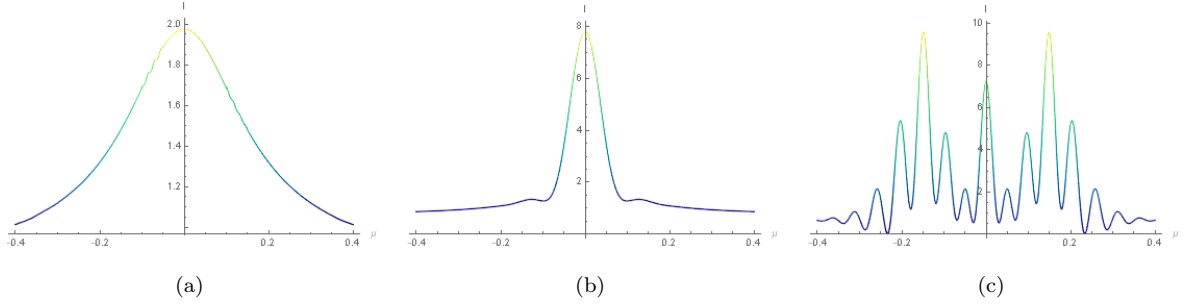


Рис. 5: Интенсивность плазменной линзы при  $\nu = 50$ . (a) для  $\alpha = 0.5$ , (b) для  $\alpha = 1$ , (c) для  $\alpha = 2$ .

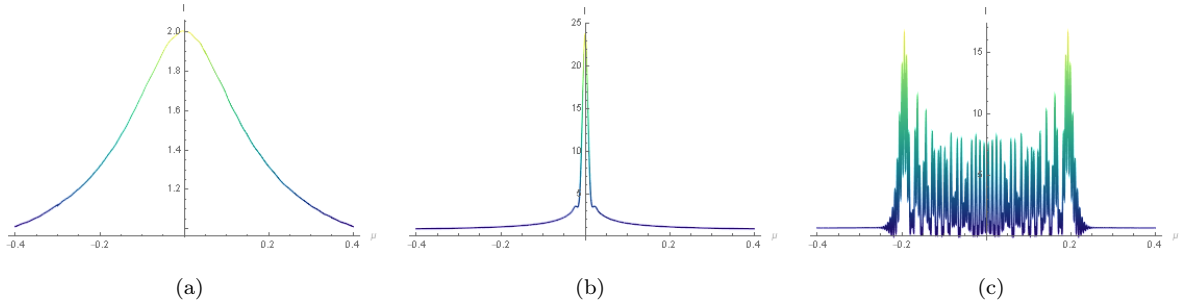


Рис. 6: Интенсивность плазменной линзы при  $\nu = 500$ . (a) для  $\alpha = 0.5$ , (b) для  $\alpha = 1$ , (c) для  $\alpha = 2$ .

Для  $\alpha < 1$  имеется пик разной степени вытянутости. При увеличении  $\alpha$  пик становится уже и уже, а после прохождения  $\alpha = 1$  происходит изменение вида графика интенсивности: появляется каустика, изображенная на рис. 6(c).

- При  $\alpha < 1$  имеется только область с одним изображением. Нормализованный профиль интенсивности не колеблется и, кроме того, не зависит от частоты  $\nu$ .

- Для  $\alpha = 1$  линза образует каустическую cusp. Она соответствует пику при  $\beta_c = 0$ .

При увеличении частоты  $\nu$ , пик усиливается и становится более и более узким. В эйкональном пределе  $\nu \rightarrow \infty$  нормализованная интенсивность расходится как  $\nu^{1/2}$  в каустике  $\beta_c$ . При  $\alpha > 1$  линза создает область тройного изображения, ограниченную каустиками fold, находящихся на  $(-\beta_c, \beta_c)$ , где  $\beta_c \approx 0.206751$ . Колебания в области одного изображения являются результатом взаимодействия между вещественной и мнимой седловыми точками. При увеличении  $\nu$ , колебания становятся всё сильнее и сильнее, а в краевых точках интенсивность начинает возрастать больше и больше. Такое поведение, согласно последним работам, может быть важно для объяснения природы FRB-ов.

### 3.1.2 Двумерная одиночная линза со сдвиговым потенциалом

Перейдем к более полезной на практике модели, к двумерной одиночной линзе со сдвиговым потенциалом. Реальные астрофизические объекты представляют собой часто несколько тел, а, возможно,

даже некоторое распределение материи, поэтому отличие метрики от метрики точечной массы очень вероятно. Эта модель является типичным примером, показывающим, что даже небольшие изменения в фазе могут давать принципиально новый вид графиков интенсивности. Простейшая такая модель, рассмотренная в [9] и [12], обсуждается в этом разделе.

### Описание модели сдвигового потенциала

В формализме гравитационного линзирования в амплитуде интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящей от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющей вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , в случае сдвигового потенциала амплитуда интенсивности имеет вид:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((\mathbf{x}-\beta)^2 - \ln |\mathbf{x}| - \frac{\gamma}{2}(x_1^2 - x_2^2))} d\mathbf{x}.$$

Другими словами, рассматривается случай искажения метрики, такой, что фаза в амплитуде имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\ln |\mathbf{x}| - \frac{\gamma}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Этот случай можно рассматривать как упрощенная модель некоторой бинарной системы, где вторая масса, находящаяся на расстоянии  $\gamma^{-1/2}$  от линзы, учитывается как поправка к первоначальной фазе. В геометрическом приближении одиночная линза со сдвиговым потенциалом создает Лагранжево отображение

$$\xi(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \mathbf{x} + \gamma(-x_1, x_2),$$

которое отображает точки от плоскости линзы на экран. Критическая кривая в данном случае имеет вид

$$\mathcal{M} = \left\{ r(\cos \theta, \sin \theta) \mid r = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sqrt{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2 2\theta} - \gamma \cos 2\theta} \text{ где } \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

и представляет из себя в зависимости от  $\gamma$  эллипс разной степени вытянутости. Отображение Лагранжа  $\xi(\mathcal{M})$  для такой линзы создает кривую, состоящую из четырех изогнутых гладких линий между четырьмя пиковыми точками, то есть формирует искривленный ромб.

### Интенсивность линзы со сдвиговым потенциалом

Используя метод Пикара-Лефшица, несложно получить графики интенсивности, приведенные на рис. 7. Как мы и привыкли, при увеличении частоты график интенсивности приобретает вид каустики, разделяя пространство графика на две области разного количества изображений. Напомним, что в отсутствии данной добавки, имелись просто интерференционные круги, по виду почти совпадающие с кругам вне каустики.

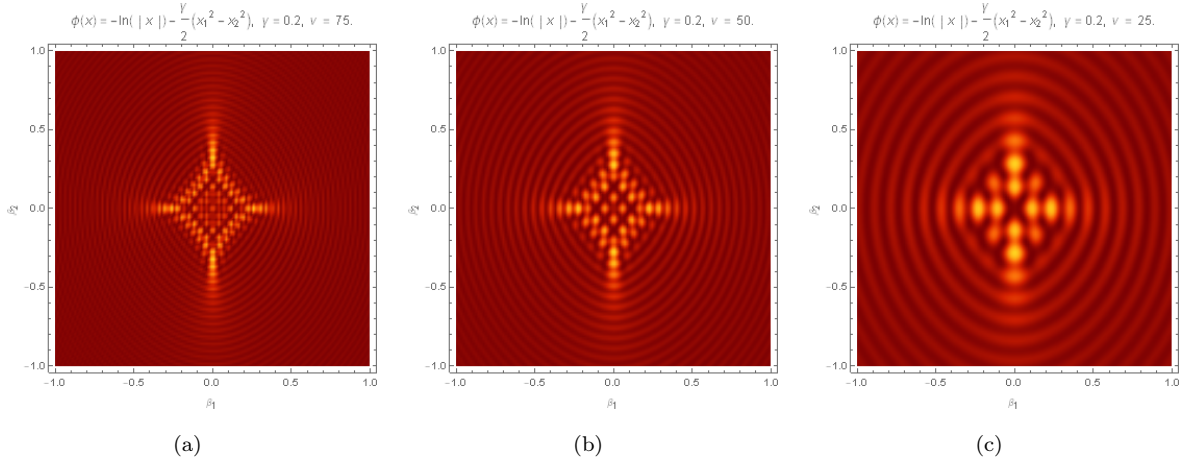


Рис. 7: Графики интенсивности для одиночной линзы со сдвиговым гравитирующим потенциалом, при (a)  $\gamma = 0.2, \nu = 75$ , (b)  $\gamma = 0.2, \nu = 50$ , (c)  $\gamma = 0.2, \nu = 25$ .

## 3.2 Типичные модели двумерных систем

Владея методами описания линзирования и рассмотрев простейшие примеры, займемся уже исследованными двумерными гравитационными линзами, ведь именно они могут составлять различные бинарные системы. Как и одномерные, двумерные сводятся к осциллирующим интегралам, имеющим фазовое слагаемое, за счет которого график интенсивности имеет определенный каустический вид, исследованию которых посвящены многие работы. Можно представлять, что каждый потенциал есть некоторая спадающая функция, и есть обобщение модели плазменной лизы на случай разных распределений масс. Изучим интерференционные картины некоторых известных двумерных линз вблизи каустик, демонстрируя результаты описанного метода Пикара-Лефшица и его алгоритма уже для двумерного случая.

### 3.2.1 Система “generic peak”

Простейшее обобщение одномерной плазменной линзы - система “generic peak”, с которой мы и начнем.

#### Описание модели “generic peak”

В формализме гравитационного линзирования в амплитуда фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящей от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющей вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , в случае сдвигового потенциала амплитуда интенсивности имеет вид:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left((\mathbf{x}-\beta)^2 + \frac{\alpha}{1+x_1^2+2x_2^2}\right)} d\mathbf{x}.$$

Другими словами, рассматривается случай искажения метрики, такой, что фаза в амплитуде имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{1+x_1^2+2x_2^2}.$$

Эта модель - прямое обобщение плазменной линзы на двумерный случай, разве что множитель 2 вставлен для придания некоторой вытянутости, которую можно видеть на графиках.

Каустики появляются в начале координат  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$  для параметра  $\alpha = \frac{1}{2}$ , представляя собой особенность типа cusp, соответствующая собственным значениям  $\lambda_1$ . При  $\alpha = 1$  создается новая точка  $A_3$ , обозначая появление собственных значений  $\lambda_2$ .

Для  $1 < \alpha < \frac{64}{49}$  точка  $A_3$  образует линию типа cusp ( $A_2$ ) с двумя выступами ( $A_3$ ) вверху и внизу. При  $\alpha = \frac{64}{49}$  две линии fold сливаются в ( $D_4^+$ ) при  $(\beta_1, \beta_2) = (0, \pm 1/\sqrt{14})$ . Для  $\alpha > \frac{64}{49}$  две линии fold продолжают двигаться наружу, где линия, соответствующая  $\lambda_1$ , имеет четыре особенности cusp, в то время как линия сгиба, соответствующая  $\lambda_2$ , не содержит ни одного.

За пределами линий fold имеется область с одним изображением. Внутри - при увеличении  $\alpha$  есть сперва область тройного изображения, а позже появляется и другая, из пяти изображений.

### Графики интенсивности для “generic peak”

Пара типичных графиков интенсивности приведена на рис. 8.

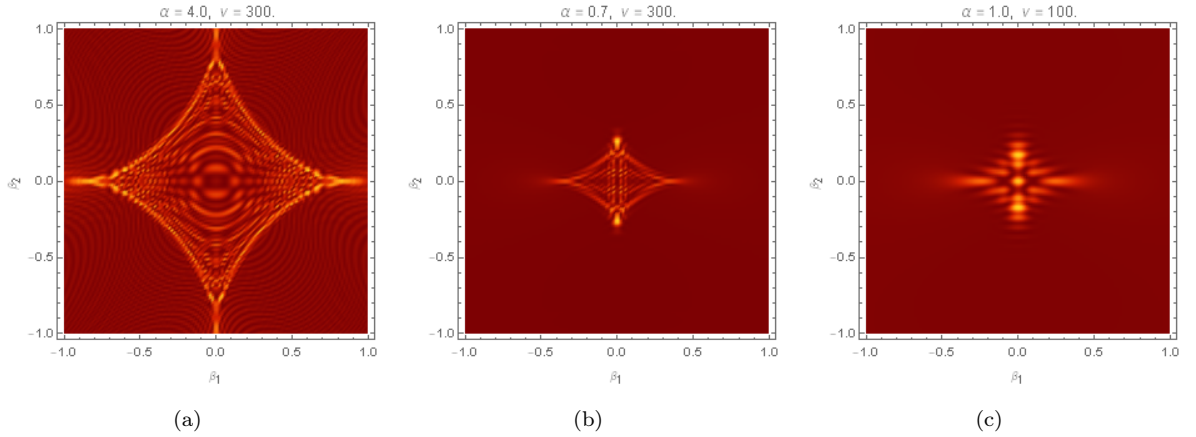


Рис. 8: “Generic peak” для разных  $\alpha = 1$  и частот: (a)  $\gamma = 4, \nu = 300$ , (b)  $\gamma = 0.7, \nu = 300$ , (c)  $\gamma = 2.0, \nu = 200$ .

### 3.2.2 Система “degenerate peak”

Как и прошлая система “generic peak”, данная система имеет фазовое слагаемое типа слагаемого плазменной линзы, однако графики интенсивности имеют более нестандартный характер, что может означать, что этот потенциал имеет больше отношения к реальным случаям, чем предыдущий.

#### Описание модели “degenerate peak”

Запишем амплитуду фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящую от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющую вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , в случае сдвигового потенциала:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left((\mathbf{x}-\beta)^2 + \frac{\alpha}{1+x_1^2+x_2^2}\right)} d\mathbf{x},$$

то есть рассмотрим случай искажения метрики, такой, что фаза в амплитуде имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

Для  $\alpha = 1$  можно видеть две отделенных друг от друга компоненты, которые соединяются при  $\alpha = 1.5$  и образуют нетривиальные графики при  $\alpha = 2$  и  $\alpha = 2.5$  и большем, двое из которых изображены на 9.

В  $\alpha = 2$  мы снова найти каустику ( $D_4^+$ ) в двух точках, в которых cusp-ы, соответствующие первому и второму собственному значению  $\lambda_1, \lambda_2$  совпадают. Таким образом, мы видим, что не только структура на пике, но и уменьшение изменения фазы  $\varphi$  важно при изучении каустик линзованных изображений. Каустическая структура, как правило, чувствительна к гессиану фазы  $\varphi$ , т. е. производным второго порядка.

## Графики интенсивности для “degenerate peak”

Приведем лишь пару характерных графиков интенсивности в качестве иллюстрации модели. Более подробно о ней можно почитать в [9] или в [16].

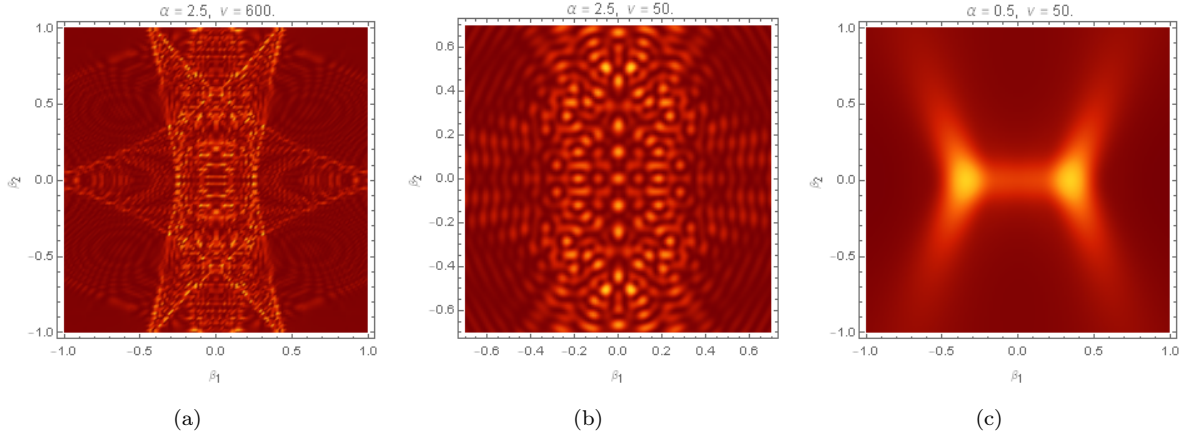


Рис. 9: “degenerate peak” (a)  $\alpha = 2.5, \nu = 600$ , (b)  $\alpha = 0.5, \nu = 50$ , (c)  $\alpha = 2.5, \nu = 50$ .

При увеличении  $\alpha$  между двумя изображенными значениями, происходит сближение пиков интенсивности, изображенных на первом рисунке, а далее после их пересечения формирования новой каустики, итоговый вид которой изображен на втором рисунке.

### 3.2.3 Система типа “elliptic umbilic”

Система “elliptic umbilic” отлична от двух предыдущих тем, что фазовый потенциал уже менее напоминает плазменную линзу, а графики интенсивности имеют более необычный вид.

#### Описание модели “elliptic umbilic”

В модели “elliptic umbilic” амплитуда фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящая от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющая вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , записывается как

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu \left( (\mathbf{x}-\beta)^2 + \frac{\alpha(x_1^3 - 3x_1x_2^2)}{1+x_1^2+x_2^2} \right)} d\mathbf{x},$$

то есть ее особенность в наличие фазового множителя вида.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(x_1^3 - 3x_1x_2^2)}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

Свойства ее следующие. Для небольших  $\alpha < 1,4$ , линза состоит из трех толстых линий, так называемых блинов Зельдовича, с треугольной симметрией. Три острия едкой точки указывают на начало пространства параметров. При  $\alpha = 1.4$  мы наблюдаем, что три блина соединены тремя линиями сгиба, образующими треугольную структуру. При  $\alpha > 1.4$ , треугольник отделяется от трех блинов Зельдовича. Три оставшиеся линии fold удаляются от начала координат, и треугольник сжимается до точки. Точка, в которой треугольник сжимается до точки, является каустикой elliptic umbilic. Область, заключенная в большой треугольник, представляет собой 5-точечную область, а та, которая внутри маленького треугольника, представляет собой область с 7 изображениями.

## Графики интенсивности для “elliptic umbilic”

Приведем в иллюстративных целях пару графиков интенсивности для некоторых значений  $\alpha$ . В целях компактности в данной работе приведены лишь пара частных случаев интерференционных картин.

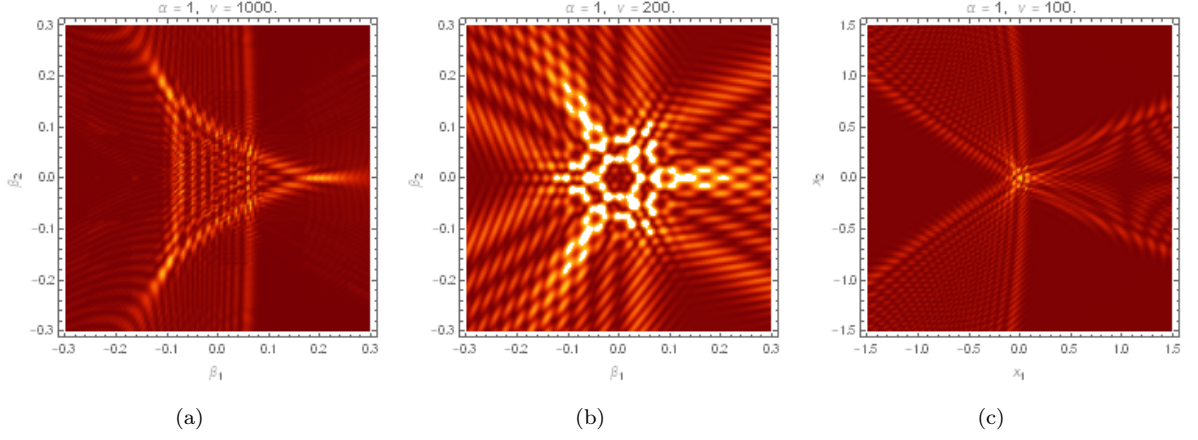


Рис. 10: “Elliptic umbilic” при  $\alpha = 1$  для разных частот. (a)  $\nu = 1000$ , (b)  $\nu = 200$ , (c)  $\nu = 100$ .

Обратите внимание, что здесь специально сделан разный масштаб, чтобы посмотреть внимательно на центр “рождения треугольника”. Видим, что при изменении частот действительно, качественно меняется вид графика, а также формируется каустика.

Для  $\alpha = 1.5$  имеются достаточно похожие графики, приведенные ниже. В отличие от предыдущего случая три блина Зельдовича в случае геометрической оптики уже пересекаются.

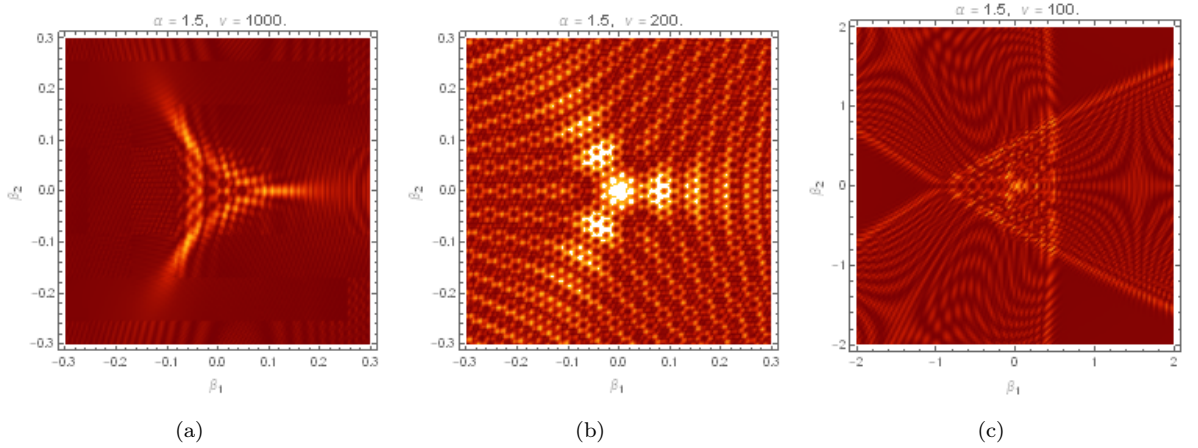


Рис. 11: “Elliptic umbilic” при  $\alpha = 1.5$  для разных частот. (a)  $\nu = 1000$ , (b)  $\nu = 200$ , (c)  $\nu = 100$ .

## 3.3 Некоторые бинарные модели

В этой главе используем модели выше для создания к бинарных систем. Делается это совершенно за счет добавления обоих линзирующих объектов, расположенных в разных приведенных координатах. Результаты вычисляются в точности теми же методами, которые использовались выше.

### 3.3.1 Бинарная система из двух масс

Простейший случай бинарной системы - это случай двух масс, расположенных на расстоянии друг от друга. Удивительно, что хотя одна масса давала несложные графики интенсивности, для двух масс



получаются достаточно интересные картины, на которых здесь остановимся.

### Модель бинарной линзы из двух масс

Амплитуда фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящая от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющая вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu((\mathbf{x}-\beta)^2 + \varphi(\mathbf{x}))} d\mathbf{x},$$

в случае системы двух масс имеет фазовое слагаемое вида

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log |\mathbf{x} - \mathbf{r}| - f_2 \log |\mathbf{x} + \mathbf{r}|,$$

при параметрах  $f_1 + f_2 = 1$ , соответствующим приведенным массам. Здесь  $\mathbf{r} = (a_1, a_2)$  - расстояние от центра плоскости до линзирующих масс.

Рассмотрим случай нахождения одной в координатах  $(a, 0)$ , и другой в  $(-a, 0)$ , а также их массовом соотношении  $f_1 = 2f_2$ . Потенциал примет упрощенный вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - f_2 \log \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2},$$

В таком случае каждого  $\beta$ , имеется пять корней  $x$ , все они вещественные для  $\beta$  внутри  $\mathcal{C}$ .

Так как  $\beta$  подходит к  $\mathcal{C}$  изнутри, мы имеем особенность типа fold, где две точки экстремума перекрываются, или особенность типа cusp, когда пересекаются три точки.

На таких особенностях интенсивность от лучевой оптики расходится.

Если  $\beta$  находится вне каустической кривой  $\mathcal{C}$ , интенсивность падает очень быстро с  $I \propto (\Delta\beta)^{-1}$ .

Самые левые и самые правые точки каустики самые яркие.

### Интенсивность простейшей модели бинарной линзы

Применяя описанные выше методы, приведем интенсивность в такой простейшей модели. Видим, что в отличие от одиночной линзы, в геометрическом подходе присутствуют немалые области, в которых число изображений больше обычного. Волновая картина, то есть картина при низких частотах, позволяет видеть, что если отдалить центры друг от друга, то мы получим результирующую картину, как будто нет волнового дополнительного влияния обоих масс на свет, за счет их близкого расположения.

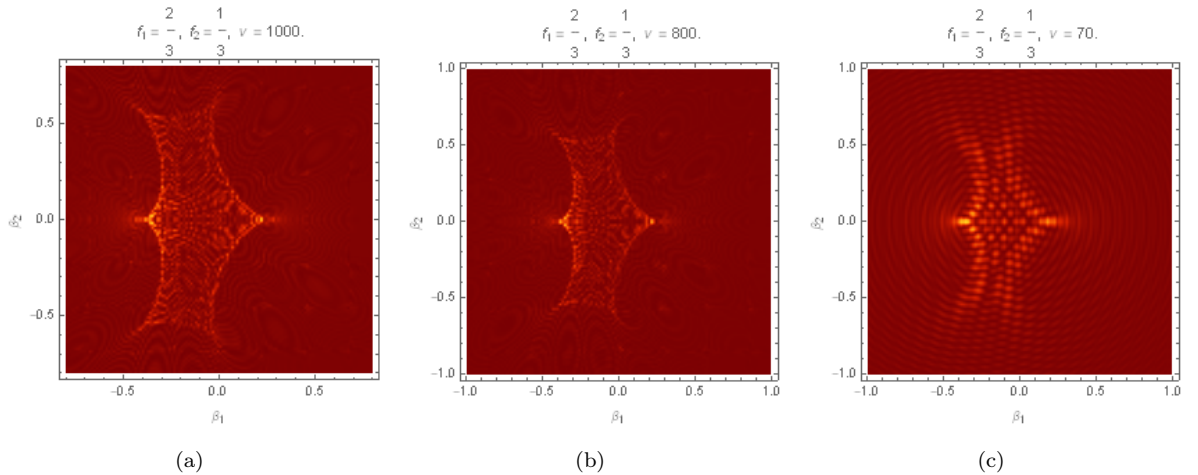


Рис. 12: Интенсивность системы из двух масс с соотношением  $f_1 = \frac{2}{3}, f_2 = \frac{1}{3}$  для разных частот. (a)  $\nu = 1000$ , (b)  $\nu = 800$ , (c)  $\nu = 70$ .

Видим, что при больших частотах формируется каустика, а при малых - интерференционная картина, соответствующая волновому описанию линзирования.

### 3.3.2 Бинарная система типа “double elliptic umbilic”

Возможна ситуация, когда оба линзирующих объектов - плазма, распределенная по типу "elliptic umbilic" находятся на близком расстоянии друг от друга.

В этом случае следует решать задачу линзировании бинарной системой типа elliptic umbilic, чем мы и займемся в этом разделе.

#### Модель “double elliptic umbilic”

Запишем амплитуду фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящую от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющая вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu((\mathbf{x}-\beta)^2 + \varphi(\mathbf{x}))} d\mathbf{x}$$

при метрике, созданной астрофизической плазмой, состоящей из двух частей, каждая из которых сама по себе искажает пространство-время по типу "elliptic umbilic".

Пусть центры одной находятся в приведенных координатах на плоскости линзы,  $\mathbf{r}_1 = (a_1, a_2)$ , а второй - в противоположных:  $\mathbf{r}_2 = (-a_1, -a_2)$ . Тогда фаза в осциллирующем интеграле примет вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = f_1 \frac{\alpha((x_1 - a_1)^3 - 3(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)^2)}{1 + (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} + f_2 \frac{\alpha((x_1 + a_1)^3 - 3(x_1 + a_1)(x_2 + a_2)^2)}{1 + (x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2}$$

где коэффициенты  $f_1 + f_2 = 1$ .

Для примера разместим центры на координатной оси от центра:  $\mathbf{r}_1 = (a, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (-a, 0)$ . Фаза в осциллирующем интеграле примет более простой вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = f_1 \frac{\alpha((x_1 + a)^3 - 3(x_1 + a)x_2^2)}{1 + (x_1 + a)^2 + x_2^2} + f_2 \frac{\alpha((x_1 - a)^3 - 3(x_1 - a)x_2^2)}{1 + (x_1 - a)^2 + x_2^2},$$

#### Интенсивность модели “double elliptic umbilic”

Рассмотрим случай с геометрией  $f_1 = 0.4$ ,  $f_2 = 0.6$ , и  $a = 0.5$ . Параметр обоих “elliptic umbilic” положим  $\alpha = 1$ .

Применяя описанные выше методы, нетрудно получить графики интенсивности, которые для  $\alpha = 1$  представлены на рис. 13.

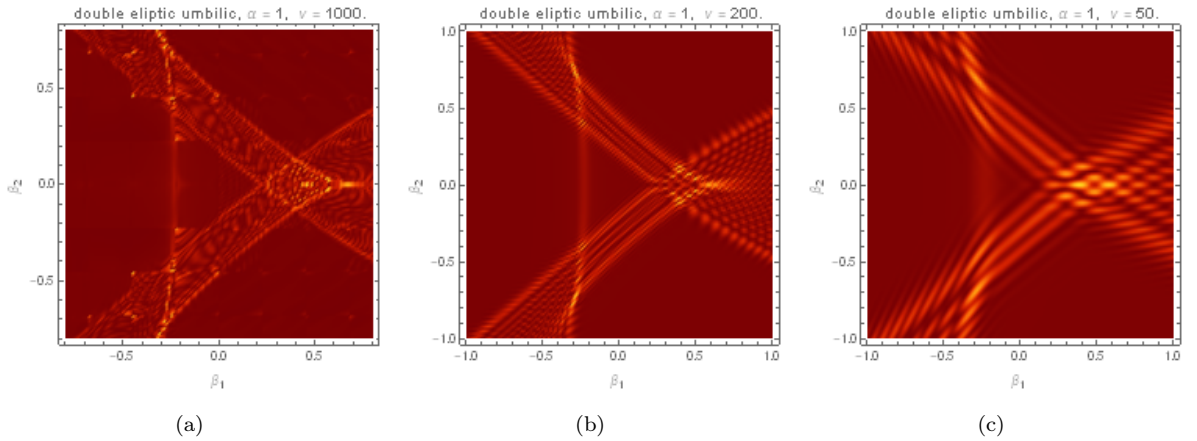


Рис. 13: Бинарная система “double elliptic umbilic” при  $\alpha = 1$  для разных частот. (a)  $\gamma = 4, \nu = 1000$ , (b)  $\gamma = 0.7, \nu = 200$ , (c)  $\gamma = 2.0, \nu = 50$ .



В соответствии с теорией волнового линзирования, видим, что при увеличении частоты, наблюдается каустика, а при уменьшении - волновая дифракционная рябь, которую как раз позволяют наши вычислительные методы изобразить. Как и для случая двух масс, каустический график далеко не такой, какой был в случае линзирования каждой фазой поотдельности.

Несколько другая ситуация становится, если увеличить параметр до  $\alpha = 2$ , ее представим на рис. 14. Здесь при уменьшении частоты каустический изогнутый треугольник дополняется еще одним. В приделе низких частот появляется знакомая волновая рябь.

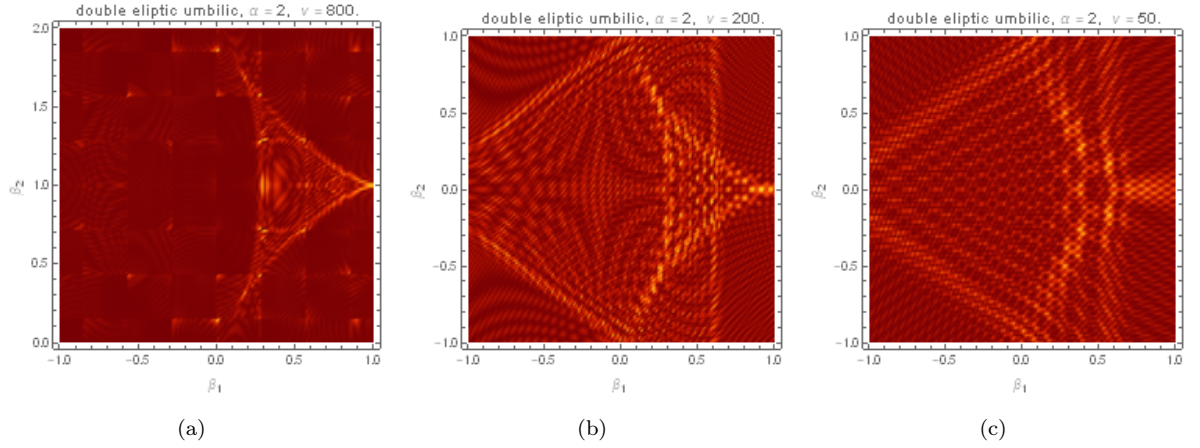


Рис. 14: Бинарная система “double elliptic umbilic” при  $\alpha = 2$  для разных частот. (a)  $\nu = 800$ , (b)  $\nu = 200$ , (c)  $\nu = 50$ .

## 4 Заключение

Гравитационное линзирование - актуальный метод, применяющийся в интерпретации астрономических результатов для поиска экзопланет, определения параметров галактик и квазаров, изучения черных дыр или темной материи, являющийся темой многих современных статей. Особенно актуальна тема стала при изучении быстрых радиовсплесков, или FRB-ов, природа которых всё еще не объяснена. В отличие от геометрического подхода, который сильно был развит в конце прошлого века, волновой подход, который используется в этой работе, всё еще не приобрел массовое применение ввиду сложности вычислений и необходимости в отдельной математической подготовке. В данной работе приводится простой алгоритм моделирования одиночных и двойных линзирующих систем в рамках волнового подхода. Используемый в данной работе метод Пикара-Лефшица находит применение в космологии, оптике, квантовой механике, физическом моделировании, за счет его широких границ применимости.

В работе продемонстрировано, как с помощью метода Пикара-Лефшица определить, а затем вычислять простейшие одномерные и двумерные осциллирующие интегралы, изображать результаты в виде графиков интенсивности. Были исследованы одиночные системы “generic peak”, “degenerate peak”, “elliptic umbilic”, а также бинарная система из двух масс, и бинарная система из двух объектов типа “elliptic umbilic”.

Обобщение полученных результатов на трехмерный случай, статистический анализ графиков нормализованных интенсивностей, вызванных реалистичными ансамблями плазменных линз, являются актуальными темами дальнейших исследований.

## Список литературы

- [1] V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Gusein-Zade. *Singularities of Differentiable Maps: Volume II Monodromy and Asymptotic Integrals*, volume 83. Springer Science and Business Media, 2012.
- [2] Vladimir I Arnold. Singularities of systems of rays. *Russian Mathematical Surveys*, 38(2):87–176, apr 1983.
- [3] Michael V Berry and Colin Upstill. Iv catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. In *Progress in optics*, volume 18, pages 257–346. Elsevier, 1980.
- [4] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [5] Unsal Mithat Dunne, Gerald V. What is QFT? Resurgent trans-series, Lefschetz thimbles, and new exact saddles. *PoS, LATTICE2015:010*, 2016.
- [6] Albert Einstein. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, 84:506–507, 1936.
- [7] Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehnert, and Neil Turok. Lorentzian Quantum Cosmology. *Phys. Rev. D*, 95(10):103508, 2017.
- [8] Antonio Herrera-Martín, M. D. Albrow, A. Udalski, A. Gould, Y.-H. Ryu, J. C. Yee, S.-J. Chung, C. Han, K.-H. Hwang, Y. K. Jung, C.-U. Lee, I.-G. Shin, Y. Shvartzvald, W. Zang, S.-M. Cha, D.-J. Kim, H.-W. Kim, S.-L. Kim, D.-J. Lee, Y. Lee, B.-G. Park, R. W. Pogge, M. K. Szymański, P. Mróz, J. Skowron, R. Poleski, I. Soszyński, S. Kozłowski, P. Pietrukowicz, K. Ulaczyk, K. Rybicki, P. Iwanek, M. Wrona, and and. OGLE-2018-BLG-06771b: A super-earth near the galactic bulge. *The Astronomical Journal*, 159(6):256, may 2020.
- [9] Neil Turok Job Feldbrugge. Gravitational lensing of binary systems in wave optics.
- [10] Ue-Li Pen Job Feldbrugge and Neil Turok. Oscillatory path integrals for radio astronomy.
- [11] Youn Kil Jung, Kyu-Ha Hwang, Yoon-Hyun Ryu, Andrew Gould, Cheongho Han, Jennifer C Yee, Michael D Albrow, Sun-Ju Chung, In-Gu Shin, Yossi Shvartzvald, et al. Two microlensing binaries composed of planetary-mass companions and very-low-mass primaries. *The Astronomical Journal*, 156(5):208, 2018.
- [12] Shuji Deguchi Takahiro T. Nakamura. Wave optics in gravitational lensing.
- [13] Dennis Walsh, Robert F Carswell, and Ray J Weymann. 0957+ 561 a, b: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, 279(5712):381–384, 1979.
- [14] Edward Witten. A new look at the path integral of quantum mechanics, 2010.
- [15] AF Zakharov. *Gravitational lenses and microlenses*. 1997.
- [16] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, and С. М. Гусейнзаде. *Особенности дифференцируемых отображений*. МЦНМО, 2009.
- [17] Э Зи. Квантовая теория поля в двух словах. *Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика*, 2009.
- [18] Лифшиц Е. М. Ландау Л. Д. *Теория поля*.

[19] Вайнберг С. *Космология*. Либроком.

[20] Захаров А. Ф. *Гравитационные линзы и микролинзы*.