

# Special Functions

Yury Holubeu \*  
October 23, 2024

This note is not aimed for distribution.

Special functions and their applications are discussed. The link below show contents of solved problems. I used the following literature.

Goals: 1) 1 неделю тренироваться, дописывать запись.

## Contents

<b>1</b>	<b>Preface</b>	<b>3</b>
<b>I</b>	<b>Special Functions in a Nutshell</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Суть основных функций</b>	<b>4</b>
2.1	Типичные спецфункции для диффузов	4
2.1.1	О функциях Бесселя	4
2.1.2	О гамма-функции (!?!!?)	9
2.1.3	О бета-функции	12
2.1.4	О гипергеометрической функции (!?!!?)	12
2.1.5	О функции Эйри	16
2.1.6	О сферических функциях	19
2.1.7	On Polylogarithms (??)	22
2.2	Типичные обобщенные функции	24
2.2.1	Общие свойства обобщенных функций	24
2.2.2	$\delta$ -функция Дирака	25
2.2.3	Функция Хевисайда $\theta(x)$ , $\text{sign } x$ , $p\frac{1}{x}$	29
2.3	Некоторые многочлены	31
2.3.1	Многочлены Эрмита, Лежандра, Лагерра, Чебышева, (???)	31
2.4	Чуть менее полезные спецфункции	41
2.4.1	Об эллиптических функциях Якоби (!?)	41
<b>II</b>	<b>Special Functions Theory</b>	<b>46</b>
2.5	Функции Бесселя	46
2.6	Гамма-функция (!?!!?)	51
2.6.1	Свойства	51
2.6.2	Свойства по ПТФ	55
2.6.3	Применения Гамма функции в КТП	57
2.6.4	Бета-функция	57
2.7	Гипергеометрическая функция (!?!!?)	57
2.8	Спецфункции по Ландау	62
2.8.1	a. Полиномы Эрмита	62
2.8.2	b. Функция Эйри	64
2.8.3	c. Полиномы Лежандра	67
2.8.4	d. Вырожденная гипергеометрическая функция	69
2.8.5	e. Гипергеометрическая функция	72
2.8.6	f. Вычисление интегралов с вырожденными гипергеометрическими функциями	74
2.9	Эллиптические функции Якоби (!?)	77
2.9.1	Обозначения и определение (!?!!?)	77
2.10	Эллиптические функции (!?)	78
2.11	Другие типичные	82
2.11.1	Функция Эйри	82

---

\*yuri.holubev@gmail.com

<b>3</b>	<b>Сферические функции</b>	<b>85</b>
3.0.1	Теория . . . . .	85
3.0.2	Свойства сферических функций для квантовой механики (?) . . . . .	89
3.0.3	Scalar spherical harmon . . . . .	89
3.0.4	Generalized spherical-harmonic tensor . . . . .	89
3.0.5	tensor spherical harmonics . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Некоторые многочлены</b>	<b>89</b>
4.0.1	Полиномы Эрмита . . . . .	89
4.0.2	Многочлены Лежандра (!!?) . . . . .	94
4.0.3	Присоединенные полиномы Лежандра . . . . .	101
4.0.4	Многочлены Лагерра (!!?) . . . . .	101
4.0.5	Многочлены Чебышева . . . . .	102
<b>III</b>	<b>Обобщенные функции</b>	<b>103</b>
4.1	Свойства обобщенных функций . . . . .	103
4.2	Дельта функция дирака . . . . .	104
4.2.1	Основы дельта-функции . . . . .	104
4.2.2	Применения . . . . .	109
4.2.3	Дополнения . . . . .	112
4.2.4	Функция Хевисайда $\theta(x), \text{sign } x$ . . . . .	112
4.2.5	Функция $\wp \frac{1}{x}$ . . . . .	113
<b>IV</b>	<b>Problems</b>	<b>115</b>
<b>5</b>	<b>Problems about typical special functions</b>	<b>115</b>
5.0.1	Задачи на Гамм-функции . . . . .	115
5.0.2	Задачи на функции Бесселя . . . . .	116
5.0.3	Задачи на функции Айри . . . . .	117
5.0.4	Задачи на гипергеометрическую функцию . . . . .	117
5.1	Задачи на многочлены . . . . .	118
5.1.1	Задачи на многочлены Лежандра . . . . .	118
5.1.2	Задачи на полиномы Эрмита . . . . .	119
<b>V</b>	<b>Other Special Functions</b>	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>Другие спецфункции</b>	<b>122</b>
6.0.1	Hurwitz zeta function $\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ . . . . .	122
6.0.2	The polylogarithm $\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} = z\Phi(z, s, 1)$ . . . . .	122
6.0.3	The Riemann zeta function $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Phi(1, s, 1)$ . . . . .	122
6.0.4	The Dirichlet eta function $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \Phi(-1, s, 1)$ . . . . .	122
6.0.5	The Dirichlet beta function $\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 2^{-s}\Phi(-1, s, \frac{1}{2})$ . . . . .	122
6.0.6	The Legendre chi function $\chi_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s}\Phi(z^2, s, \frac{1}{2})$ . . . . .	123
6.0.7	The inverse tangent integral $\text{Ti}_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s}\Phi(-z^2, s, \frac{1}{2})$ . . . . .	123
6.0.8	Lerch transcendent $\Phi(z, s, \alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\alpha)^s}$ . . . . .	123
6.0.9	К-функция . . . . .	123
6.0.10	Эллиптическая функция Вейеритрасса $\wp(u)$ . . . . .	124
6.1	Шаровые функции . . . . .	124

<b>VI</b>	<b>Appendix</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Обзор применений спецфункций в теоретической физике</b>	<b>125</b>
A.0.1	Спецфункции в теории поля, гравитации, космологии . . . . .	125
A.0.2	Спецфункции в квантмехе и КТП . . . . .	125
<b>B</b>	<b>Введение и обсуждение спецфункций</b>	<b>125</b>
B.1	Особенности записи . . . . .	125
B.2	Литература . . . . .	125
<b>C</b>	<b>Bibliography</b>	<b>127</b>

# 1 Preface

## Основная мотивация изучать спецфункции

**Часто решение диффура или уравнения в частных производных дается спецфункциями, так что знаешь их - быстро решишь, не знаешь - не решишь и всё**

До них догадываться - отдельное исследование, на которое ни у кого нет времени, кроме тех, кто этим заниматься всерьез решил. Так что нужно знать основные, иначе много будет тормозов.

(раскрою эту мысль потом лучше и подробнее)

## Part I

# Special Functions in a Nutshell

## 2 Суть основных функций

### 2.1 Типичные спецфункции для диффузов

#### 2.1.1 О функциях Бесселя

Суть

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

ур. Бесселя  $\nu$ -го порядка

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)};$$

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-iz}}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right).$$

(?? где какая форма ур-я применяется?)

$$j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad l = 0, 1, \dots$$

выражается через элементарные, например,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x.$$

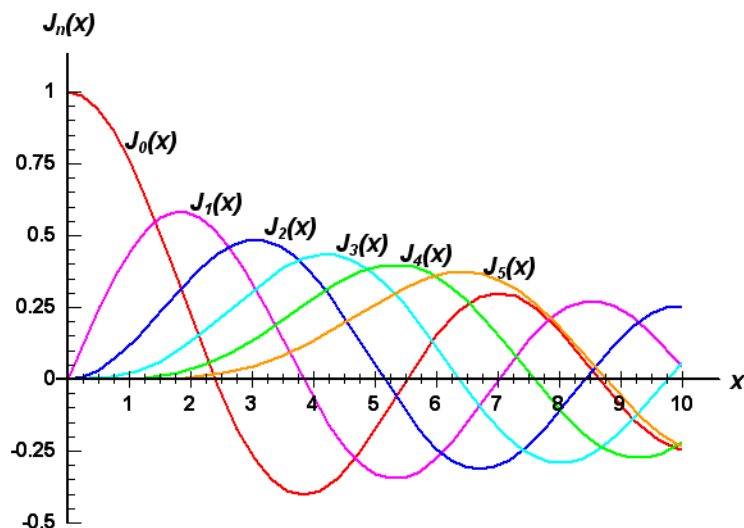
Функция Эйри  $\text{Ai}(x)$  является регулярным решением уравнения

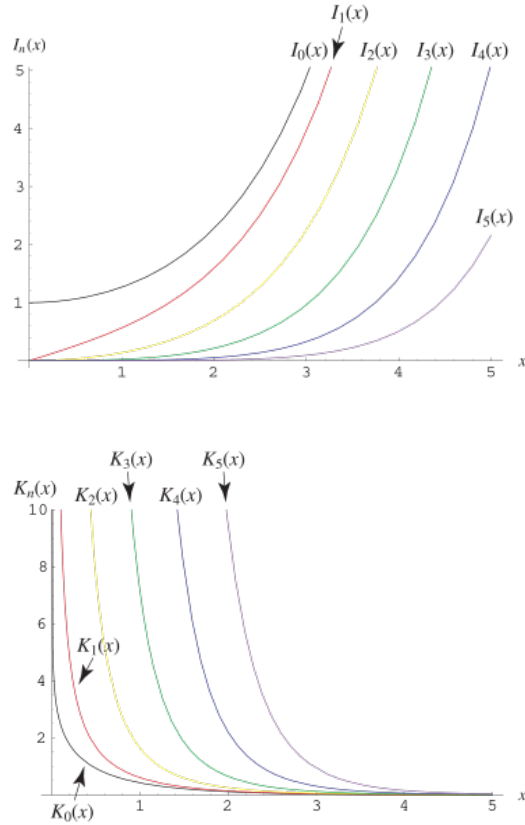
$$y'' - xy = 0$$

и выражается через функции Бесселя порядков  $\pm \frac{1}{3}$ :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)]; \quad \text{Ai}(-x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)],$$

$$I_\nu(\zeta) = i^{-\nu} J_\nu(i\zeta); \quad \zeta = \frac{2}{3} x^{3/2}.$$





Функции Бесселя - коэффициенты разложения  $\exp(ikr)$  в ряд Фурье по  $\exp(in\varphi)$ :

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi) \quad z = kr$$

Добавляя  $\pi$  к  $\varphi$ , находим  $\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi)$ , а  $\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi)$ , поэтому

$$J_{-n} = (-1)^n J_n.$$

Подставляя (???)  $t = e^{i\varphi}$ , находим ряд Лорана по  $t$

$$\exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \quad \frac{1}{2} (t - 1/t) \exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21)(???) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)].$$

Дифференцируем  $\exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n$  по  $t$ , что дает

$$\frac{z}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \exp \left[ \frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}.$$

Подставляя здесь в место экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z).$$

Получаем рекуррентные соотношения  $\frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$ ,  $J'_n + \frac{n}{z} J_n = J_{n-1}$ ,  $\frac{d}{dz} \frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}$ ,  $J'_n - \frac{n}{z} J_n = -J_{n+1}$ . В частности  $dJ_0/dz = -J_1$ . Это же:

$$z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z).$$

Дифференцируем по  $z$  и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на  $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

Рассмотрим случай малых  $z, z \ll 1$ . В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0,$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta)$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!},$$

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\hat{L} J_n(qx) = -q^2 J_n(qx),$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}.$$

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1} \delta(k - q),$$

$k > 0, q > 0$ .

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \rightarrow \int dx \frac{2}{\pi \sqrt{kq}} \cos(kx) \cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz) \cos(qz) = \pi \delta(k - q),$$

$q$  и  $k$  считаются положительными, и учитывая, что интеграл по  $x$  идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции  $f(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\check{f}(q) &= \int_0^\infty dx x J_n(qx) f(x), \\ f(x) &= \int_0^\infty dq q J_n(qx) \check{f}(q).\end{aligned}$$

Выбор  $n$  в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$J_n(qx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(kx) + J_n(qx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(kx) - J_n(kx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(qx) - J_n(kx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(qx) = (q^2 - k^2) J_n(qx) J_n(kx).$$

Интегрируя это соотношение с весом  $x$  на интервале  $0 < x < z$ , находим

$$J_n(qz) k z J'_n(kz) - J_n(kz) q z J'_n(qz) = (q^2 - k^2) \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx)$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$\int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) = \frac{J_n(kz) q z J_{n+1}(qz) - J_n(qz) k z J_{n+1}(kz)}{q^2 - k^2}.$$

Устремляя здесь  $k$  к  $q$  и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$\int_0^z dx x [J_n(kx)]^2 = \frac{z^2}{2} (J_{n+1}^2 + J_n^2) - \frac{nz}{k} J_{n+1} J_n,$$

где аргументы функций Бесселя равны  $kz$ , и мы использовали рекуррентные соотношения (3.24, 3.25)

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале  $0 < x < 1$  на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при  $x = 1$ . Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел  $q = \gamma_k$ , для которых  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Набор  $\gamma_k$  зависит от индекса функции Бесселя  $n$ . Величины  $\gamma_k$  неограниченно растут с увеличением номера  $k$ .

В силу общих свойств задач на собственные значения, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находим свойство ортогональности

$$\int_0^1 dx x J_n(\gamma_k x) J_n(\gamma_j x) = 0$$

если  $\gamma_k \neq \gamma_j$ . Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = 1/x$ , поэтому в силу (2.67) находим  $\rho = x$ . Подставляя в соотношении (3.38)  $z = 1$ , получаем

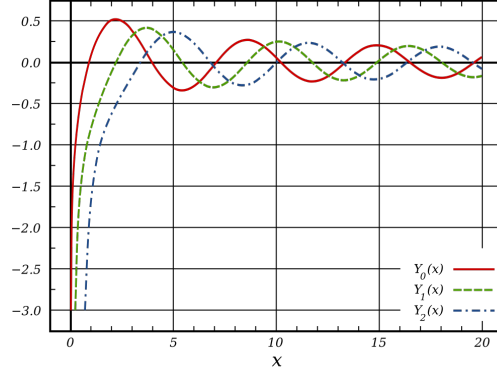
$$\int_0^1 dx x [J_n(\gamma_k x)]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k).$$

Соотношения (3.39, 3.40) позволяют сформулировать правила разложения функции  $f(x)$ , заданной на интервале  $0 < x < 1$ , по набору функций  $J_n(\gamma_k x)$ :

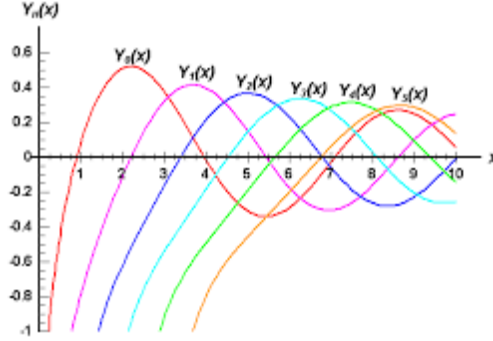
$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_k f_k J_n(\gamma_k x), \\ f_k &= \frac{2}{J_{n+1}^2(\gamma_k)} \int dx x f(x) J_n(\gamma_k x).\end{aligned}$$



Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.



neuman function:



$$Y_{\alpha}(x) = \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

In the case of integer order  $n$ , the function is defined by taking the limit as a non-integer  $\alpha$  tends to  $n$ :

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_{\alpha}(x)$$

Plot of the Bess second kind  $Y_n$  complex plane If  $n$  is a nonnegative integer, we have the series [16]

$$Y_n(z) = -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)) \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}$$

where  $\psi(z)$  is the digamma function, the logarithmic derivative of the gamma function. [17]  
There is also a corresponding integral formula (for  $\text{Re}(x) > 0$ ): [18]

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}) e^{-x \sinh t} dt.$$

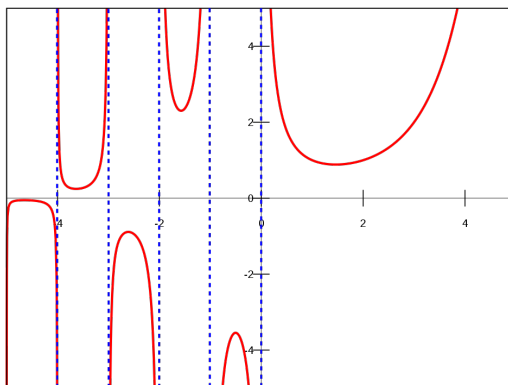
In the case where  $n = 0$ ,

$$Y_0(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x \cos \theta) (e + \ln(2x \sin^2 \theta)) d\theta.$$

## 2.1.2 О гамма-функции (!!!!)

Суть

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$



$$\Gamma(z) := \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx \quad (\text{опр. Эйлера}) \quad x = e^{-t}$$

(? from int b p)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

After  $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$  and  $x = y^2$ :

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при  $\operatorname{Re}(z) > -1$ , хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения - вблизи 1). В случае вещественного аргумента  $z > 0$  подынтегральная функция имеет единственную особую точку - устранимый разрыв при  $y = 0$ , и если доопределить её в этой точке значением 0, она станет непрерывной на всём отрезке  $[0; 1]$ . Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование.

Аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int_L t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (\text{инт. Римана - Ханкеля})$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad \text{Гаусс}$$

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad \text{Эйлер}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad \text{Вейерштрасс}$$

$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) \approx 0,57722$  - постоянная Эйлера - Маскерони.

Иногда используется т.н.  $\Pi(z) := \Gamma(z+1)$ . Именно этой функцией (а не  $\Gamma$ -функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (\text{натур } n)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad \text{формула дополнения Эйлера}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz), \quad \text{формула умножения Гаусса}$$

В частности, при  $n = 2$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. Она является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ . Гамма-функция имеет полюс первого порядка в  $z = -n$  для любого натурального  $n$  и нуля;

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и  $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$ ,  $\psi(x)$ , часто называют «пси-функцией» или дигамма-функцией.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

## О применениях (!?!?!?!?)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

## Логарифм гамма-функции

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{-xz}}{x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

(Жак Бине, 1839)

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[ z - 1 - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (\text{Мальмстен})$$

Лерх показал, что все интегралы вида

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\pi x} \cos \varphi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x} \cos \varphi + 1} \operatorname{arctg} \frac{u}{x} dx, \quad 0 < u \leq 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln \Gamma(z) = -\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \left\{ 1 - \ln \left(z - \frac{1}{2}\right) \right\} + \frac{1}{2} \ln 2\pi - 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} [x / (z - \frac{1}{2})]}{e^{2\pi x} + 1} dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln \Gamma(z) = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln \sin \pi z - \frac{2z-1}{2} \ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z} dx, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

## О решении задач на гамма-функцию (!!!!!!!)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Вычисление интегралов через гамма-функцию

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-ax^\beta) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \quad \{\alpha, \beta\} = \text{const}$$

В частности:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x^2/a^2) dx = a^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x/a) dx = a^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

Доказательство После вынесения параметра:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-ax^\beta) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty (a^{1/\beta}x)^\alpha \exp[-(a^{1/\beta}x)^\beta] d(a^{1/\beta}x)$$

Внесения дифференциала:

$$a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \kappa^\alpha \exp(-\kappa^\beta) d\kappa = \frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \kappa^{\alpha+1-\beta} \exp(-\kappa^\beta) d\kappa^\beta$$

И замены переменной:

$$\frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \varkappa^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-\varkappa) d\varkappa = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

### Свойства по ПТФ

Правая часть соотношения (3.3) определена и для  $z$  с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  на эту область переменной  $z$ . Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости  $z$ . Следовательно, особенности функции  $\Gamma(z)$  определяются разностью  $1 - \exp(2\pi iz)$ , которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных)  $z$ . При положительных целых  $z$  в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае,  $\Gamma(z)$  не имеет особенностей при целых положительных  $z$ , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных  $z$  контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет простые полюса.

Найдем вычеты функции  $\Gamma(z)$  в полюсах  $z = 0, -1, -2, \dots$ . При  $z = -n$  ( $n$  — целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\text{res } \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Можно найти асимптотическое выражение гамма-функции  $\Gamma(z)$  при больших положительных значениях  $z$ , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. (???)

Для этого в интеграле (3.1) произведем замену  $t \rightarrow tz$ , которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция  $\ln t - t$  достигает максимума в точке  $t = 1$ . Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z).$$

она справедлива и для комплексных  $z$  при условии большого положительного значения действительной части  $z$  (???).

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (\text{Стирлинг})$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  $s$  с весом  $e^{-s}$ , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных  $s = x + y$  сводит правую часть к произведению интегралов по  $x$  по  $y$ , которые дают произведение  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ . Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

### 2.1.3 О бета-функции

Суть

### 2.1.4 О гипергеометрической функции (!?!?!?)

Суть

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) &:= 1 + \frac{a_1 \dots a_p}{b_1 \dots b_q} z + \frac{a_1(a_1+1) a_2(a_2+1) \dots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1) b_2(b_2+1) \dots b_q(b_q+1)} \frac{z^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)^{(n)} \dots (a_p)^{(n)}}{(b_1)^{(n)} \dots (b_q)^{(n)}} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Частные важные случаи это  ${}_2F_1$  и  ${}_1F_1$

Суть функции  ${}_2F_1$

Функцию  ${}_2F_1$  альтернативно можно определить как регулярное в нуле решение:

$$z(1-z)f''(z) + (c - (a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:  
(место убедиться в эквивалентности определений)

Можно убедиться, что второе линейно-независимое решение этого уравнения тоже можно выразить через гипергеометрическую функцию. Общее решение имеет следующий вид (при  $c \neq 1$ )

$$f(z) = C_1 {}_2F_1(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(b - c + 1, a - c + 1; 2 - c; z)$$

К уравнению такого вида можно свести очень большой класс дифференциальных уравнений. В действительности, имеется классификация линейных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными коэффициентами по их особенностям в комплексной плоскости (особенностями уравнения, записанного в канонической форме  $f^{(n)}(z) + p_1(z)f^{(n-1)}(z) + \dots + p_n(z)f(z) = 0$ , называются особенности функций  $p_k(z)$  — точки, где она обращается в бесконечность) — в частности, у гипергеометрической функции их ровно три:  $z = \{0, 1, \infty\}$ ; и более или менее любое уравнение с тремя особенностями можно свести к гипергеометрическому виду.

Функцию  ${}_2F_1$  не определена при целых отрицательных  $c$  (знаменатель зануляется). Радиус сходимости ряда равен единице, и в действительности у гипергеометрической функции в точке  $z = 1$  имеется особенность. Единственное исключение из этого правила — это когда либо  $a$ , либо  $b$  — отрицательное целое число: в таком случае, ряд обрывается и превращается в полином конечной степени, имеющий, естественно, бесконечный радиус сходимости. Последнее замечание будет важно при поиске связанных состояний.

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z) \end{aligned}$$

**Суть функции  ${}_1F_1(a; b; z)$**

$${}_1F_1(a; b; z) := 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \frac{z^n}{n!}$$

Альтернативное определение — через решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

тоже выражается через гипергеометрическую функцию <sup>6</sup>:  $f^{(2)}(z) = z^{1-b} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z)$ . Как и с обычной гипергеометрической функцией, несложно видеть, что при целых отрицательных  $b = -n$  функция не определена, а при целых отрицательных  $a = -n$  она является конечным полиномом степени  $n$ .

В общем случае, отношение соседних коэффициентов разложения в ряд ведёт себя как  $1/n$ , поэтому радиус сходимости этого ряда — бесконечность (в отличие  ${}_2F_1$ , где радиус сходимости был единичным).

Асимптотическое поведение на бесконечности следующее:

$${}_1F_1(a; b; z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} e^z, \quad z \gg 1$$

Опять-таки, мы ранее говорили, что всякое уравнение с тремя особенностями сводится к гипергеометрическому виду так и всякое уравнение с коэффициентами, которые представляют собой линейные функции  $z$  приводится к Вырожденному гипергеометрическому виду.

## Другие функции через гипергеометрическую

(википедия)

$$(1+x)^n = F(-n, b; b; -x)$$

$$x^n = F(-n, b; b; 1-x)$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = F(1, 1; 2; -x)$$

$$\frac{x}{1} \arcsin(x) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1, n; 1; \frac{x}{n}\right)$$

$$\cos x = \lim_{a, b \rightarrow \infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4ab}\right)$$

$$\cosh x = \lim_{a, b \rightarrow \infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right)$$

Полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

(не нужно это будет - поставлю в даль.)

## Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ ПТФ

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0$$

$\alpha$  и  $\gamma$  — произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде  $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$ , то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  характеризуется тем, что она аналитична и имеет единичное значение в точке  $z = 0$ :  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ .

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = 0$ . Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. При больших  $n$  отношение коэффициентов при степенях  $z^n$  и  $z^{n-1}$  в разложении (3.82) стремится к  $1/n$ . Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ .

(!!! важный абзац про разрыв ряда, ибо из такого и считаем связанные состояния в квантмехе!!!)

При неотрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная

гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Второе независимое решение можно найти, заметив, что если  $u$  удовлетворяет уравнению (3.81), то  $z^{\gamma-1}u$  также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами  $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

$c_1$  и  $c_2$  - произвольные константы. При  $\gamma = 1$  оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная  $z$  входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции  $P$  и  $Q$  в соответствии с выражениями (3.96):  $P = \gamma t - \alpha$ ,  $Q = t(t - 1)$ , и далее находим  $Z = t^{\alpha-1}(t - 1)^{\gamma-\alpha-1}$ . Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t - 1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к  $z^{\gamma-1}u$ , мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t - 1)^{-\alpha}.$$

$tz \rightarrow t$ ,

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}.$$

Контур  $C$  в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из  $-\infty$  и возвращался в  $-\infty$  (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при  $t = 0$  и  $t = z$ ), тогда произведение  $ZQ \exp(t)$  на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при  $z = 0$ , если контур интегрирования "охватывает" обе особенности. Выберем контур  $C$ , который приходит "снизу" из  $-\infty$  огибает особенности "справа" и возвращается в  $-\infty$  "сверху", смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Мы считаем, что разрезы функций  $t^{\alpha-\gamma}$  и  $(t - z)^{-\alpha}$  идут в  $-\infty$ , а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При  $z = 0$  контур интегрирования превращается в  $C^*$ , изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}.$$

При целых отрицательных значениях  $\gamma$  ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль.

Этому соответствует наличие полюса у  $\Gamma(\gamma)$  в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях  $\gamma$ . Поэтому  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ , как функция  $\gamma$ , имеет простые полюса при  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ . Производя в равенстве (3.87) замену  $t \rightarrow t + z$ , мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$



Дифференцирование по  $z$  соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\Phi(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \\ \frac{z}{\gamma}\Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) &= \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \\ \alpha\Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) &= (\alpha - \gamma)\Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma\Phi(\alpha, \gamma, z).\end{aligned}$$

При больших положительных  $z$  основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки  $t = z$ . Делая замену переменных  $t = z + \zeta$  и пренебрегая зависимостью от  $\zeta$  в  $t^{\alpha-\gamma}$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^\zeta \zeta^{-\alpha},$$

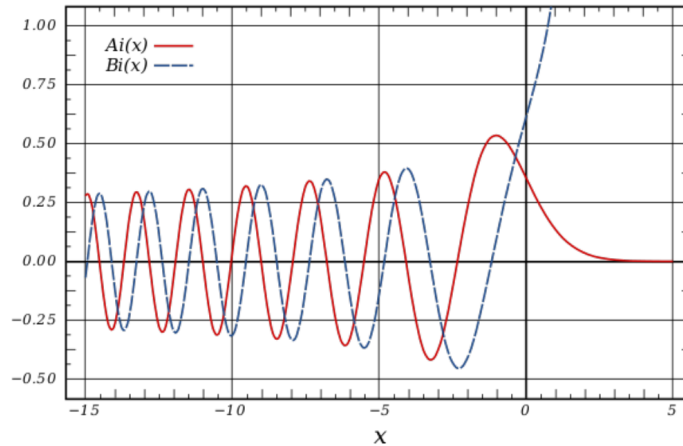
где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для  $z$  с большой положительной действительной частью.

## 2.1.5 О функции Эйри

Суть



(?? хватит такого мелкого раздела на неё???)

### Определение

Типично уравнение Эйри определяет поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной  $x$ . Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа. Запишем решение в виде контурного интеграл

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt)$$

$C$  - некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Мы будем считать, что подынтегральное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и производим интегрирование по частям по  $t$ , считая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид  $Z \propto \exp(-t^3/3)$ . Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3).$$

Контур  $C$  в представлении (3.13) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур  $C$  должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение  $\exp(xt - t^3/3)$  в бесконечности определяется фактором  $-t^3$ , имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю:  $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$ ,  $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$ ,  $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$  смотри рисунок 3.4, секторы I, II, III,

Контур  $C$  должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независимых решения, что соответствует второму порядку уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы  $\exp(xt - t^3/3)$  стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение  $t = iu$ , мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \cos(xu + u^3/3),$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях  $|x|$ . При больших отрицательных  $x$  в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы  $u = \sqrt{|x|}$ , окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших  $|x|$ . Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

При больших положительных  $x$  стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку  $t = -x^{1/2}$  (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находи м

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Второе решение:

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du [\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3)] \quad \text{Функция Эйри 2го рода}$$

Выражение для  $\text{Bi}$  получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен.

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad x \gg 1$$

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad x \ll -1$$

Сравнение функции  $\text{Bi}(x)$  и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

Асимптотическое поведение функций Эйри  $\text{Ai}(x)$  и  $\text{Bi}(x)$  можно установить и методом WKBJ, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом  $U = x$ . Таким образом  $p = \sqrt{x}$  и  $S = (2/3)x^{3/2}$ . Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных  $x$  мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp(\pm 2x^{3/2}/3).$$

Знак  $+$  относится к функции  $\text{Bi}(x)$ , смотри (3.18), а знак минус относится к функции  $\text{Ai}(x)$ , смотри (3.16). При больших отрицательных  $x$  мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp(\pm 2i|x|^{3/2}/3).$$

Поскольку  $\text{Ai}(x)$  и  $\text{Bi}(x)$  являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных  $x$  имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos(2|x|^{3/2}/3 + \varphi),$$

$\varphi$  - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

## Другое про Айри

### О подходе через теорию Пикара-Лефшица (????)

(пока этот вопрос остается, не шарю, но интересно будет дописать)

## 2.1.6 О сферических функциях

Об определении и основных свойствах (????)

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; & Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}; \\ Y_{1,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}; & Y_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}; \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

Функции Лежандра первого рода (присоединенными «полиномами» Лежандра) - регулярные в точках  $\pm 1$  решения

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y &= 0, \\ l &= 0, 1, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \end{aligned}$$

При  $m = 0$  они становятся полиномами Лежандра.

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l. \quad \text{Формула Родрига}$$

Присоединенные «полиномы» Лежандра входят в структуру сферических функций:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

являющихся регулярными на единичной сфере решениями уравнений

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] \Psi(\theta, \varphi) &= 0; \\ \left[ i \frac{\partial}{\partial \varphi} + m \right] \Psi(\theta, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

и образующими на ней полную ортонормированную систему - базис:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta &= \delta_{l'l} \delta_{m'm} \\ \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi) \end{aligned}$$

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

представляющему собой разложение его левой части по базису сферических функций. Приведем явный вид некоторых сферических функций:

$$\begin{aligned} Y_{00}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{10}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \end{aligned}$$

## Теория по Мэтьюзу и Уоллеру

Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. Формулу (1.69)]

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

Легко убедиться, что если  $y$ -решение дифференциального уравнения Лежандра, то

$$(1-x^2)^{m/2} (d/dx)^m y$$

- решение присоединенного уравнения (?? нет, не легко, я не понял пока, как???). Для положительного целого числа  $m$  определим т.н. присоединенную функцию Лежандра

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x).$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad m = m'$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения  $m$ . Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным  $m$  представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд вида

$$f_\Delta(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x).$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию  $f(\Omega)$ , где  $\Omega$  обозначает совокупность углов  $\theta$  и  $\phi$ , можно разложить в ряд

$$f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi).$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств  $P_n^{|m|}$ . Обычно определяют сферические гармоники  $Y_{lm}$  и  $Y_{l'm'}^*$

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \times \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } m \geq 0, \\ 1, & \text{если } m < 0 \end{cases}$$

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

$$= \frac{1}{2^l l!} \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \exp(im\phi) (-\sin \theta)^m \times \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega).$$

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\Omega), \quad B_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega).$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой теоремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega) = \int d\Omega' f(\Omega') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega).$$

150 Так как (7.38) верно для произвольной  $f(\Omega)$ , то

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega').$$

Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  характеризуется свойствами  $\delta(\Omega - \Omega') = 0$  при  $\Omega \neq \Omega'$ ,  $\int d\Omega \delta(\Omega) = 1^\circ$ . Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$ , конечно, зависит только от угла  $\gamma$  между направлениями  $\Omega$  и  $\Omega'$ . Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Так как функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  зависит только от  $\gamma$ , разложим ее в ряд по полиномам Лежандра

$$\delta(\Omega - \Omega') = \sum_l B_l P_l(\cos \gamma)$$

Коэффициенты  $B_l$  даются формулой [см. формулу (7.21)]

$$B_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \gamma) \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma) = \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma),$$

так как  $2\pi d(\cos \gamma)$  как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции  $\delta(\Omega - \Omega')$ , из (7.42) получаем

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma).$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтения гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника  $Y_{lm}(\Omega)$  становится линейной комбинацией сферических гармоник  $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$  от новых угловых координат  $\bar{\Omega}$ .

Подчеркнем, что все эти гармоники имеют одинаковый индекс  $l$ , т. е.

$$Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^l C_{mm'}^l Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

причем коэффициенты  $C_{mm'}^l$  зависят от величины поворота  $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ , а также от  $l, m$  и  $m'$ .

Так как из (7.32)  $Y_{l0} = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \theta)$ , то член  $P_l(\cos \gamma)$  в (7.44) можно записать как  $P_l(\cos \gamma) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{l0}(\bar{\Omega})$ ,  $\bar{\Omega}$  — угловые координаты того же направления, что и

$\Omega$ , но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль  $\Omega'$ . Тогда из (7.45) имеем (с переставленными  $\Omega$  и  $\Omega'$ )

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m'=-l}^l A_{0m'}^l(\Omega') Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения  $l$  равны, т.  $\theta$ .

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega).$$

С помощью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединённые полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos m(\phi - \phi')$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.

(?!?!?!?! так они нормированы на дельта функцию или на полином лежандра???)

## О сферических функций для квантовой механики (?)

(ЛЛЗ укажу многое, тут много формул!!!)

Рекуррентное соотношение

$$\cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

## О сферических функций для УМФ (?)

(просто указание, что такие-то уравнения сводятся к ним и такие-то там особенности.)

## О Scalar spherical harmon

## О Generalized spherical-harmonic tensor

## О tensor spherical harmonics

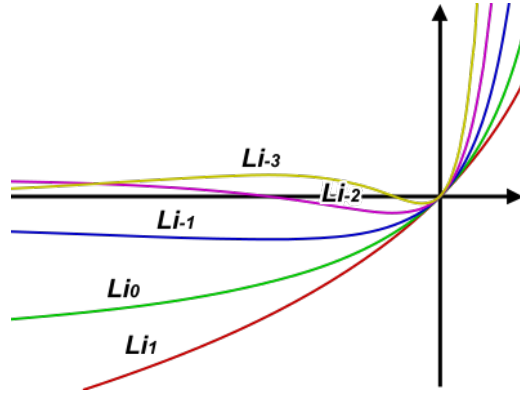
## 2.1.7 On Polylogarithms (??)

(see wiki)

## Main properties of polylogarithms

$$\text{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \dots$$

$$\text{Li}_{s+1}(z) = \int_0^z \frac{\text{Li}_s(t)}{t} dt$$



$$\text{Li}_s(e^\mu) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint_H \frac{(-t)^{s-1}}{e^{t-\mu} - 1} dt$$

where  $H$  is the Hankel contour,  $s \neq 1, 2, 3, \dots$ , and the  $t = \mu$  pole of the integrand does not lie on the non-negative real axis. The contour can be modified so that it encloses the poles of the integrand at  $t - \mu = 2k\pi i$ , and the integral can be evaluated as the sum of the residues (Wood 1992, § 12, 13; Gradshteyn & Ryzhik 1980, § 9.553):

$$\text{Li}_s(e^\mu) = \Gamma(1-s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi i - \mu)^{s-1}$$

This will hold for  $\text{Re}(s) < 0$  and all  $\mu$  except where  $e^\mu = 1$ . For  $0 < \text{Im}(\mu) \leq 2\pi$  the sum can be split as:

$$\text{Li}_s(e^\mu) = \Gamma(1-s) \left[ (-2\pi i)^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{\mu}{2\pi i}\right)^{s-1} + (2\pi i)^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + 1 - \frac{\mu}{2\pi i}\right)^{s-1} \right]$$

where the two series can now be identified with the Hurwitz zeta function:

$$\text{Li}_s(e^\mu) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left[ i^{1-s} \zeta\left(1-s, \frac{\mu}{2\pi i}\right) + i^{s-1} \zeta\left(1-s, 1 - \frac{\mu}{2\pi i}\right) \right] \quad (0 < \text{Im}(\mu) \leq 2\pi)$$

3. By use of the identity

$$1 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

the Bose-Einstein integral representation of the polylogarithm (see above) may be cast in the form:

$$\text{Li}_s(z) = \frac{1}{2}z + \frac{z}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \coth \frac{t - \ln z}{2} dt \quad (\text{Re}(s) > 0)$$

Replacing the hyperbolic cotangent with a bilateral series,

$$\coth \frac{t - \ln z}{2} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k\pi i + t - \ln z}$$

then reversing the order of integral and sum, and finally identifying the summands with an integral representation of the upper incomplete gamma function, one obtains:

$$\text{Li}_s(z) = \frac{1}{2}z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-s, 2k\pi i - \ln z)}{(2k\pi i - \ln z)^{1-s}}$$



## 2.2 Типичные обобщенные функции

(похожее в функане, но тут нет фокуса внимания на общие свойства)

### 2.2.1 Общие свойства обобщенных функций

(по идее в матане тоже это будет.)

Умножение обобщенных функций может быть определено либо как предел произведения  $\varepsilon$ -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если  $f$  и  $g$  - две обобщенные функции, то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае  $f$ ) должна быть достаточно «хорошей», чтобы имеющаяся сингулярность функции  $g$  не превысила функционал, так и вычисляя производную какого-либо  $\varepsilon$ -представления Трехмерная функция  $\delta(\mathbf{r})$  определяется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему  $\mathbf{k}$ -пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вид

$$\int d^3\mathbf{r} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку  $\mathbf{r} = 0$ .

Если функция  $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$  и при этом регулярна в нуле, свойство (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r}) f(r) d^3\mathbf{r} = \int f(r) r^2 dr \int \delta(\mathbf{r}) d\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную» функцию  $\delta(r)$ :

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta'(r)}{r}$$

$\delta$ -функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, поскольку элемент объема содержит  $r^2$ . Множитель  $1/2\pi$  учитывает что интегрирование делить как  $1/z$ , но с особым выбором пути интегрирования (контура) для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул... (10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2.

Заметим, что для  $\delta$ -функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контур интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции  $1/z$ , представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций  $p_r^1$  не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\begin{aligned} p_{\frac{1}{x}} \cdot p_{\frac{1}{x}} &= \left( p_{\frac{1}{x}}, p_{\frac{1}{x}} \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{M}{\varepsilon} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Вместе с тем определена производная от функции  $p$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} p_{\frac{1}{x}}, \varphi(x) \right) &= - \left( p_{\frac{1}{x}}, \varphi'(x) \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(x) + \varphi'(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Если воспользоваться  $\varepsilon$  -представлением. получаем

$$\left( \frac{d}{dx} p \frac{1}{x} \right)_{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = -\frac{x^2 - \varepsilon^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}$$

3. Покажем, что

$$p \frac{1}{x} \cdot \delta(x) = -\frac{1}{2} \delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся  $\varepsilon$  -представлениями обеих функций:

$$\left( p \frac{1}{x} \right)_{\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \delta_{\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon}{\pi (x^2 + \varepsilon^2)}, \quad \delta'_{\varepsilon}(x) = -\frac{2\varepsilon x}{\pi (x^2 + \varepsilon^2)}$$

результат (10.44).

4. Можно так же показать, что не определено произведение двух  $\delta$ -функций, имеющих одинаковый аргумент.

5. Так же как и во втором примере, используя  $\varepsilon$  -представления можно показать, что

$$\left( p \frac{1}{x} + \pi \delta(x) \right) \left( p \frac{1}{x} - \pi \delta(x) \right) = -\frac{d}{dx} p \frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохоцкого:

$$\frac{1}{x - i0} \cdot \frac{1}{x - i0} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{x - i0} = -i\pi \delta'(x) - \frac{d}{dx} p \frac{1}{x}$$

1. Показать, что в смысле обобщенных функций

$$\int_0^{\infty} \sin k_1 x \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k + k_1} - \frac{1}{k - k_1} \right)$$

2. Показать, что при  $a \neq b$  произведение

$$\delta(x - a) \delta(x - b) = 0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax + by) \delta(cx + dy) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \delta(x) \delta(y)$$

### 2.2.2 $\delta$ -функция Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{iKx} \, dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos Kx \, dx \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}.$$

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{K \cos Kx}{x} - \frac{\sin Kx}{x^2} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

## Представления дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

$f(x_i) = 0, x_i$  — простые (некратные) корни.  
 $x\delta(x) = 0$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} e^{\pm i k x} dk$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \Big|_{x \neq 0} = 0$$

## Дельта функция в представлении

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{\pm i k x} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \cos kx dk \quad \text{Дирихле}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx &= f(x) \frac{e^{iNx}}{iN} \Big|_a^b - \frac{1}{iN} \int_a^b f'(x) e^{iNx} dx = \\ &= \frac{1}{iN} (f(b) e^{iNb} - f(a) e^{iNa}) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \Big|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\int_a^b \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} \varphi(x) dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \varphi(0).$$

## Дельта функция в представлении гауссовой экспоненты:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \text{Ho} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x=0} = \infty.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = \varphi(0)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon} = \infty$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2} dy$$

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha y \cos \alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение  $I'(\alpha) = 1$ , получаем:  $I(\alpha) = \alpha + \text{const}$  с «ачальным» условием  $I(0) = 0$ , поэтому  $I(\alpha) = \alpha$ . Заметим теперь, что заменой  $x/\varepsilon = y$  мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при  $\alpha = 1$ . Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству  $\delta$ -функции (10.1).

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \quad \text{Пикар}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле  $\varepsilon = N^{-1}$ . Легко убеждаемся:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра  $N$ .

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \quad \text{Стильтьес}$$

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$(f(x) \delta(x), \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = f(0) \varphi(0) = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx} (\delta(x)) dx = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n} (\delta(x)) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{ikx} dx = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \varphi(0)$$

### математические преобразования

Например,

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(k+k_1)x + \cos(k-k_1)x) dx =$$

$$= \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k_1)x} + e^{i(k-k_1)x} \right) dx = 2\pi (\delta(k+k_1) + \delta(k-k_1))$$

Для  $\delta(\sin x)$  по свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента  $\delta$ -функции:  $x_n = \pi n$ , соответственно  $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$ . Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} = \delta(x)$$

Если точка  $x = 0 \notin [a, b]$ , по теореме Римана-Лебега

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) dx = 0$$

Обходя точку  $x = 0$  в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) dx = \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_{\pm}} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} dx = \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{dx}{x} = \varphi(0)$$

Что соответствует основному свойству  $\delta$ -функции.

$$\delta[(x-x_1)(x-x_2)] = \frac{1}{|x_1-x_2|} (\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2))$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

$$I = \int_0^\infty \sin k_1 x \sin kx \, dx$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \pm i0} = 0$$

5. Показать, что

$$x^n \delta^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

6. Показать, что при  $k \geq n$  справедлива формула:

$$x^n \delta^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{d^k}{dx^k} (f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} x \delta^{(k)}(x) + k \delta^{(k-1)}(x) &= 0 \quad \text{при} \quad n = 1 \\ x^n \delta^{(n)}(x) &= (-1)^n n! \delta(x) \quad \text{при} \quad n = k \end{aligned}$$

## О применениях дельта функции в задачи теорвера

(абзац про задачу про билетик. потом порешаю еще, тут отдельно нужно подумать.)

## интересные вопросы про дельта-функцию

там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах.  
особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

### 2.2.3 Функция Хевисайда $\theta(x)$ , $\text{sign } x$ , $p_x^{\frac{1}{2}}$

#### Функция Хевисайда

Функция Хевисайда или функция включения  $\theta(x)$  определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Производная  $\theta$ -функции есть  $\delta$ -функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через  $\delta$ -функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел  $\varepsilon$ -последовательности:

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию  $\operatorname{sign} x = |x|/x$  можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

Производная функции  $\operatorname{sign} x$ . (???)

В смысле обобщенных функций

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-i)N\theta(x)e^{iNx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

### Функция $\mathbf{p}\frac{1}{x}$

Обобщенная функция  $\mathbf{p}\frac{1}{x}$  определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

С произвольной функцией  $f(x)$  такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \mathbf{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию  $\mathbf{p}\frac{1}{x}$ , аппроксимируемую функциями:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\frac{1}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{|k|} e^{-|k|\varepsilon} e^{ikx} dk \\ \mathbf{p}\frac{1}{x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Nx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \sin kx dk \end{aligned}$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_x^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \int_{-x}^x \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \\ &= \left( \mathbf{p}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости  $z$  по контуру  $C_+$  или  $C_-$ , обходящему точку  $x = 0$  по полуокружности радиуса  $\varepsilon \rightarrow 0$

соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета  $i\pi\varphi(0)$ :

$$\left(p\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_+} \frac{\varphi(z)}{z} dz \mp i\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_{\pm}} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x \mp i\varepsilon} = \left(\frac{1}{x \mp i0}, \varphi(x)\right) = \left(p\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) \pm i\pi(\delta(x), \varphi(x))$$

$$\frac{1}{x \pm i0} = p\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе для  $\varepsilon$ -последовательностях:

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i\pi \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

$p\frac{1}{x}$  есть производная от  $\ln|x|$ , ибо

$$\left(\frac{d \ln|x|}{dx}, \varphi(x)\right) = (\ln|x|, \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} (\ln|x|) \varphi'(x) dx$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln|x| \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x| \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(p\frac{1}{x}, \varphi(x)\right)$$

$$\delta_{\pm}(x) := \pm \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x \pm i0}$$

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon k \pm i k x} dk$$

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta(x) \\ \delta_+(x) - \delta_-(x) = \frac{i}{\pi} p\frac{1}{x}$$

## 2.3 Некоторые многочлены

### 2.3.1 Многочлены Эрмита, Лежандра, Лагерра, Чебышева, (???)

#### О Полиномы Эрмита

Суть

производящая ф-я

их ортог-сть

интегр представление

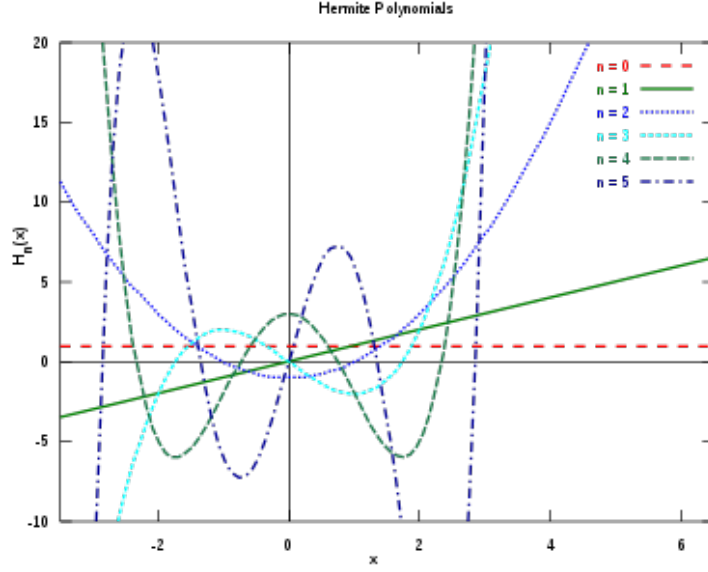


## Теория

$$\exp(-t^2 + 2tx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

$n$  - т.н. индекс полинома Эрмита.

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$



Легко понять, что  $H_n(x)$  является полиномом  $n$ -ой степени, поскольку наибольшая степень  $x$  при  $t^n$  в разложении производящей функции  $\exp(-t^2 + 2tx)$  в ряд Тейлора получается при разложении  $\exp(2tx)$ . Производящая функция  $\exp(-t^2 + 2tx)$  инвариантна относительно преобразования  $t, x \rightarrow -t, -x$ . При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент  $H_n$ , а  $t^n$  заменяется на  $(-1)^n t^n$ . Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ . Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями  $x$ , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями  $x$ .

Полагая в выражении (3.65)  $x = 0$  и раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!,$$

$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\dots$ . Далее, при малых  $x$  справедливо соотношение  $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$ . Снова раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!!.$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по  $x$  и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

Далее, беря производную по  $t$  от соотношения (3.65) и приравнивая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух.

Функция  $H_n(x)$  имеет ровно  $n$  нулей при действительном  $x$ . Другими словами, все корни уравнения  $H_n(x) = 0$  действительны. Проведем доказательство по индукции. Если  $H_n(x)$  имеет  $n$  нулей, то в соответствии с (3.69) функция  $H_{n+1}(x)$  имеет  $n$  экстремумов. Между ними лежит  $n - 1$  нулей функции  $H_{n+1}(x)$ . Еще два нуля  $H_{n+1}(x)$  лежат вне крайних экстремумов  $H_{n+1}(x)$ , поскольку на больших  $x$  в полиноме доминирует член с наивысшей степенью  $x$ , то есть на больших  $x$  функция  $H_{n+1}(x)$  монотонно стремится к  $\infty$  или  $-\infty$ .

Выражая в соотношении (3.69)  $H_{n-1}$  в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}.$$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2).$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при  $n = 0$ , и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку  $(d/dx - 2x)[\exp(x^2) A] = \exp(x^2) dA/dx$  для произвольной функции  $A(x)$ . Соотношение (3.72) еще раз показывает, что  $H_n$  является полиномом степени  $n$ .

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}\right) \exp(-t^2 + 2tx) = 0.$$

Применяя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравнивая результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита  $n$ -го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0.$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6). Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены  $x \rightarrow -x$  и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанном выше о четности полиномов Эрмита. Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69)  $H_{n-1}$ , выраженное в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по  $x$ . Выражая затем из (3.69)  $dH_{n+1}/dx$ , находим уравнение (3.73).

Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням  $x$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.73) и приравнивая коэффициенты при степенях  $x$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения  $u$  в ряд по  $x$ . При четных  $n$  ряд по  $x$  обрывается на  $k = n/2$ , и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным  $H_n$  с четным индексом. При нечетных  $n$  мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных)  $x$  поскольку  $a_{k+1} \approx a_k/k$  при больших  $k$ . Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных  $n$ . Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням  $x$  пропорционально  $H_n(x)$  для нечетных  $n$  и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных  $n$ .

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp(-\xi^2 + 2\xi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2 + 2\xi(x + it)]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по  $\xi$ , находим

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n \exp(-t^2)$$

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде  $\exp[n \ln(x + it) - t^2]$ . Для больших  $n$  можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ . Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}(2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos(\sqrt{2}nx - \pi n/2),$$

справедливое при  $n \gg x^2, 1$ .

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  имеют противоположные действительные части, что и обеспечивает условие  $n \gg x^2, 1$ . В обратном предельном случае  $x^2 \gg n$  обе перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению  $H_n \propto x^n$ , то есть на больших  $x \gg \sqrt{n}$  главный вклад в  $H_n$  определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале  $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$ , где работает приближение (3.75), осцилляции дают  $\sim n$  нулей функции  $H_n$ , в соответствии с общими свойствами  $H_n$ .

Уравнение (3.73) для  $H_n$  может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = -2x, U = 0$ . Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0$$

где в соответствии с (2.67)  $\rho = \exp(-x^2)$ , а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдём теперь константы  $A_n$ , фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Таким образом, любую функцию  $f(x)$ , заданную на действительных  $x$  и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Условие полноты:

$$\sum_n \frac{\exp(-x^2/2 - y^2/2)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x - y).$$

## О применениях

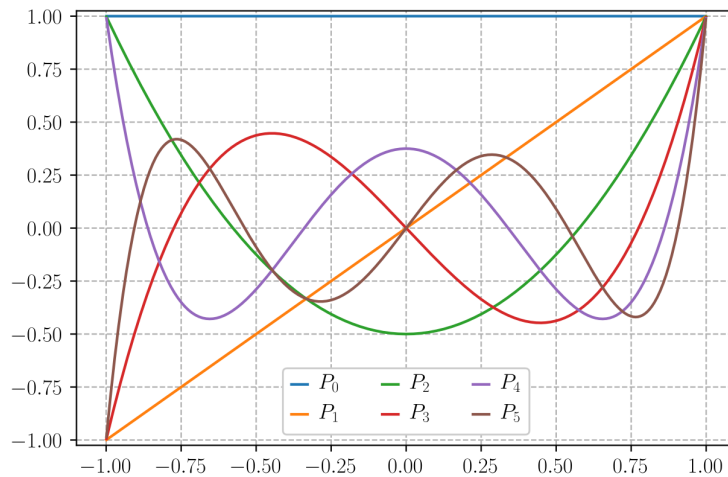
(отработаю, напишу формулы!)

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку  $(-1, 1)$ . Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

## О Многочленах Лежандра (!!?)

(тут к теормину по математике 2 заготовки!)

## Суть



## Теория

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда  $1/R$  равен нулю,  $\nabla^2(1/R) = 0$ . Здесь  $R$  — расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку  $(0, 0, 1)$  и перейдем к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . В этом случае  $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ . Условие же  $\nabla^2 R^{-1} = 0$  записывается в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Здесь отсутствуют производные по  $\varphi$ , поскольку  $R$  от этой переменной не зависит. Переходя к переменной  $\mu = \cos \theta$ , которая меняется от  $-1$  до  $+1$ , мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0$$

Полиномы Лежандра  $P_n(\mu)$  вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины  $R^{-1}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n.$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по  $r$  (точки ветвления)  $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$  лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при  $r < 1$ . Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням  $r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}.$$

Этот ряд сходится при  $r > 1$ . Как следует из (3.44) или (3.45), функция  $P_n(\mu)$  является полиномом  $n$ -го порядка, симметричным по  $\mu$  при четных  $n$  и антисимметричным по  $\mu$  при нечетных  $n$ . Отметим также равенство  $P_n(1) = 1$ . Оно непосредственно следует из того, что при  $\mu = 1R = 1 - r$ , а  $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$ . Аналогично получается равенство  $P_n(-1) = (-1)^n$ .

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением  $R^{-1}$  в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1).$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале  $-1 < \mu < 1$ . В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо  $R^{-1}$  в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1) P_n = 0,$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням  $r$ . В терминах угла  $\theta$ ,  $\mu = \cos \theta$ , уравнение (3.47) переписываются в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n + \cot \theta \frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1) P_n = 0,$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu (2r \partial_r + 1) + (r^2 \partial_r + r),$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_1$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Это соотношение позволяет явно находить  $P_{n+1}(\mu)$ , если известны выражения для  $P_{n-1}(\mu)$  и  $P_n(\mu)$ . Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0,$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1-\mu/r)\partial_\mu$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_2$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu} (\mu P_n) - \frac{d}{d\mu} P_{n-1}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n.$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , то в силу (3.51) оно справедливо и для  $P_{n+1}$ . Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

Соотношение (3.54) означает, что член  $n(n+1)P_n$  в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$(\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n [\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)]$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при  $\mu = 1$  обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1-2z\mu+z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по  $z$  при  $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$ , которые лежат на единичной окружности, если  $\mu$  - действительное число и  $|\mu| < 1$ . Эти точки ветвления расположены в точках  $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$ ,  $\mu = \cos \theta$ .

Таким образом, разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$  можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости  $z$ , которая определяется условиями  $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$ ,  $\theta$  предполагается лежащим в интервале  $0 < \theta < \pi$ , а  $\vartheta$  - аргумент  $z$ . Это построение предст авлено на ри сунке 3.10, где разрез показан черной дугой. Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем" через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ . Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции  $z^{-n-1}(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ , которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе  $z = e^{i\vartheta}$ , тогда  $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos \theta - \cos \vartheta)$ . Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу  $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$ . В результате получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n + 1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}},$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших  $n$ . В этом случае в силу быстрой осцилляции  $\sin[(n + 1/2)\vartheta]$  главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя  $\vartheta = \theta + x$ , раскладывая по  $x$  подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n + 1/2)(\theta + x)]}{\sqrt{2 \sin \theta x}}$$

Вычисляя здесь интеграл по  $x$ , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n + 1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n + 1)\pi \sin \theta}}$$

Выражение (3.59) можно получить также методом WKБ (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших  $n$ . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной  $t = \ln \tan(\theta)$ . Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n + 1)}{\cosh^2 t} P_n = 0.$$

Таким образом

$$p = i(n + 1/2) / \cosh t = i(n + 1/2) \sin \theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n + 1/2)\theta,$$

где мы подставили  $\sqrt{n(n + 1)} \approx n + 1/2$ . При больших  $n$  выполняется неравенство  $dp/dt \ll p^2$ , что оправдывает применение метода W KB. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке  $\mu = 1$ , когда оно разлагается в ряд Тейлора по  $x = \mu - 1$ . Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной  $x$ :

$$(2x + x^2) P'' + 2(1 + x)P' - n(n + 1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора  $P$  по  $x$ ,  $P = \sum_k p_k x^k$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом  $n$  цепочка соотношений обрывается на  $k = n$ , и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с  $P_n(\mu)$ . Если же  $n$  не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени  $x$ . В пределе больших  $k$  мы имеем  $p_{k+1} = -(1/2)p_k$ . Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при  $x = -2$ , то есть  $\mu = -1$ . Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке  $\mu = 1$ , так и в точке  $\mu = -1$ . Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu}$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале  $-1 < \mu < 1$  и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = 0$$

если  $n \neq l$ .

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Птурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = \cot \theta$  и  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (2.67)  $\rho = \sin \theta$ . Интервал же интегрирования по углу  $\theta$  распространяется от 0 до  $\pi$ . Условие (2.61) переписывается в виде  $\int d\mu f_n f_m = 0$ ,  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, в терминах переменной  $\mu$  полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале - ние (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}.$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале  $(-1, +1)$ , удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) P_k(x) P_k(y) = \delta(x-y).$$

## О применениях многочленов Лежандра (!!!!!)

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.



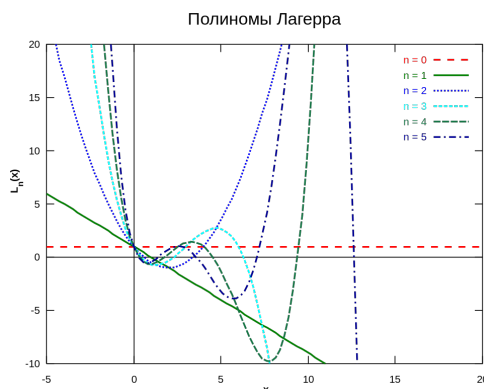
## О Многочлены Лагерра (!!?)

### Суть

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad (\text{уравнения Лагерра})$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k. \quad (\text{формула Родрига})$$

Они ортогональны со скалярным произведением  $\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ .



$n$	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$

Рекуррентная формула:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} [(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)], \quad \forall k \geq 1, \quad \begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1-x. \end{aligned}$$

Обобщённые полиномы Лагерра

Обобщённые полиномы Лагерра  $L_n^a(x)$  являются решениями уравнения:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0,$$

так что  $L_n(x) = L_n^0(x)$ .

### О применениях

Многочлены Лагерра применяются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном. Имеются и другие применения многочленов Лагерра.

(укажу, как конкретно)

## О Многочлены Чебышева

### Суть

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x\end{aligned}$$

### О применениях

(в вычматах как-то используются, но мне не до них пока что)

## 2.4 Чуть менее полезные спецфункции

### 2.4.1 Об эллиптических функциях Якоби (!?)

#### Суть

$$\begin{aligned}u &:= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} \\ \operatorname{sn} u &:= \sin \varphi \\ \operatorname{cn} u &:= \cos \varphi \\ \operatorname{dn} u &:= \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}\end{aligned}$$

эллиптические функции являются функциями двух аргументов: амплитуды  $\varphi$  и параметра  $m$ .

Оставшиеся девять эллиптических функций легко построить из трёх вышеприведённых. (??? мб допишу потом). Заметьте, что когда  $\varphi = \pi/2$ , то  $u$  равен четверти периода  $K$ . (???)

$$\begin{aligned}F(\theta, k) &:= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, && \text{Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Лежандра} \\ E(\theta, k) &:= \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta && \text{Эл. инт. 2 р. в норм. ф. Лежандра} \\ \Pi(\theta, n, k) &:= \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} && \text{Эл. инт. 3 р. в норм. ф. Лежандра}\end{aligned}$$

Полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода:

$$\begin{aligned}K(k) &:= F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ E(k) &:= E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ \Pi(n, k) &:= \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right)\end{aligned}$$

Неполные и полные интегралы 2 и 3 рода часто одинаково обозначаются ( $E$  и  $\Pi$ ).

Заменяя  $x = \sin \varphi$ , получаем:

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби

$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби

Предполагается, что  $0 < k < 1$ .

Свойства:

1. Поскольку  $0 < 1 - k^2 \sin^2 \theta < 1$  при  $0 < k < 1$ , то

$$F(\theta, k) > E(\theta, k), \quad K(k) > E(k)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(aF + bE)}{d\theta} &= \frac{a + b(1 - k^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{(a + b) - bk^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= k^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{dF}{d\theta} \right)^3, \\ \frac{d^2 E}{d\theta^2} &= -k^2 \sin \theta \cos \theta \frac{dF}{d\theta} \end{aligned}$$

#### Другие интегралы через эллиптические

3. Положив  $a = -b = 1/k^2$ , получим из формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_1(\theta, k) \equiv \frac{F(\theta, k) - E(\theta, k)}{k^2} = \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

4. Положив  $a = 1 - 1/k^2, b = 1/k^2$ , получим из формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_2(\theta, k) \equiv \frac{1}{k^2} E(\theta, k) - \frac{1 - k^2}{k^2} F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

5. Производные эллиптических интегралов по параметру:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int_0^\theta \frac{k \sin^2 \theta d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{k'^2} \left( \frac{E - k'^2 F}{k} - \frac{k \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right),$$

$k'^2 = 1 - k^2$ . Эта формула проверяется дифференцированием правой и левой ее части по  $\theta$  с учетом формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$ . Согласно (2.295) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial k} = - \int_0^\theta \frac{k \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{E - F}{k}.$$

6. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену  $\sin^2 \theta = u$ . Тогда  $2 \sin \theta \cos \theta d\theta = du$  и

$$G_4(u, \mu, \nu) = \int_0^u \frac{\sqrt{1-x} dx}{2\sqrt{x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным известным интегралом

$$\int_d^u \frac{\sqrt{c-x} dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)}(x-d)} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left[ (a-d)\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right) - (a-c)F(\beta, r) \right],$$

$$a > b > c \geq u > d \text{ и } \beta = \arcsin \sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}, r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}.$$

(!! так вот оказывается, где вылазят эл интегралы!!! чет совсем в матане и спецфункциях плохая к ним подготовка.)

Положив  $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$ , получим

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ \nu \Pi\left(\beta, \frac{1}{1-\nu}, r\right) - (\nu-1)F(\beta, r) \right],$$

$$\text{и } \beta = \arcsin \sqrt{\frac{(\nu-1)\sin^2 \theta}{\nu-\sin^2 \theta}}, r = \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}}.$$

При  $\theta = \pi/2$  имеем  $\beta = \pi/2$ . Тогда

$$G_4\left(\frac{\pi}{2}, \mu, \nu\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ \nu \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{1-\nu}, r\right) - (\nu-1)K(r) \right].$$

7. Рассмотрим выражение  $\sigma = \cos^2 \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}$ . Домножив и поделив его на  $\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}$ , имеем

$$\sigma = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} - \frac{k^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Используя (2.294), преобразуем второе слагаемое

$$\begin{aligned} -\frac{k^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} &= \cos \theta \sin \theta \frac{d^2 E}{d\theta^2} = \frac{d(\cos \theta \sin \theta \frac{dE}{d\theta})}{d\theta} - (2 \cos^2 \theta - 1) \frac{dE}{d\theta} = \\ &= \frac{d(\cos \theta \sin \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta})}{d\theta} - 2\sigma + \frac{dE}{d\theta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$3\sigma = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{d(\cos \theta \sin \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta})}{d\theta} + \frac{dE}{d\theta}.$$

Отсюда с учетом  $G_2$  (???) находим

$$\begin{aligned} G_3(\theta, k) &\equiv \int_0^\theta \cos^2 \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \cos \theta \sin \theta \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} + \frac{1+k^2}{3k^2} E(\theta, k) - \frac{1-k^2}{3k^2} F(\theta, k). \end{aligned}$$

8. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_5(\theta, \mu, \nu) \equiv \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену  $\sin^2 \theta = u$ . Тогда  $2 \sin \theta \cos \theta d\theta = du$  и

$$G_5(u, \mu, \nu) = \int_0^u \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\beta, r),$$

$a > b > c \geq u > d$ , а  $\beta$  и  $r$  находятся из (2.299). Положив  $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$ , получим

$$G_5(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} F(\beta, r)$$

$\beta$  и  $r$  находятся из (2.301).

9. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_6(\theta, \mu, \nu) \equiv \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Заметим, что  $G_6(\theta, \mu, \nu) = G_5(\theta, \mu, \nu) - G_4(\theta, \mu, \nu)$ , поэтому

$$G_6(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ F(\beta, r) - \Pi \left( \beta, \frac{1}{1-\nu}, r \right) \right],$$

$\beta$  и  $r$  находятся из (2.301).

## Физические применения эллиптических интегралов

(важный абзац про применения, где они нужны??)

### Эллиптический интеграл 1 рода в двух словах

Эллиптический интеграл 1 рода есть

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

- так называемый полный эллиптической интеграл первого рода. При  $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$  (малые колебания) разложение функции  $K(k)$  дает

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right)$$

(?? что еще нужно про него знать?)

Встречается он в задаче про период колебания математического маятника.  
и еще где?

### эллиптический интеграл 2 рода

тут хз.

## Типичные математические преобразования для прихода к эллиптическим интегралам

что-то там нужно заменять как синус, пока что не отработал.

## О применениях эллиптических интегралов

(в пер действие-угол встречаются, но я еще не оттренировал это, просто видел, что есть, потом прописывать буду.)

При построении переменных действие-угол решение может выражаться в специальных функциях, называемых эллиптическими интегралами.

Но кст рил, в маятниках, задаче Кеплера и особенно в пер действие-угол, больше особо не замечал применений.

## примеры применения

КдФ (??? не усвоил это???)

Механика (?? тоже пока не вижу это??)

## Определение в терминах тета-функций

Эллиптический модуль  $k$  равен  $k = \left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta}\right)^2$ . Полагая  $u = \pi\vartheta^2 z$ , получим

$$\operatorname{sn}(u; k) = -\frac{\vartheta_{11}(z; \tau)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(z; \tau)}$$

(мб удалю, не нужно это было пока никогда)

## Part II

# Special Functions Theory

## 2.5 Функции Бесселя

### Суть

Функциями Бесселя  $\nu$ -го порядка называются регулярные решения цилиндрического дифференциального уравнения:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Дадим некоторые явные выражения для функций Бесселя: 1) разложение в ряд:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)};$$

2) вырожденная гипергеометрическая функция:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-iz}}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right).$$

Сферическая функция Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad l = 0, 1, \dots$$

выражается через элементарные, например,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x.$$

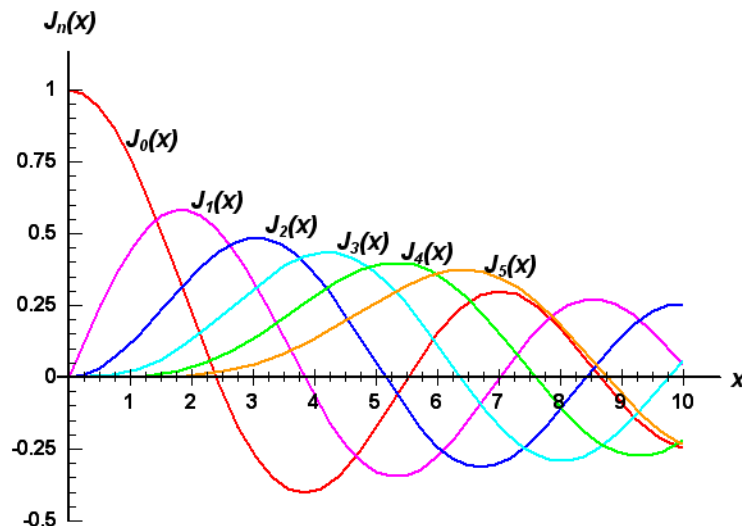
Функция Эйри  $\text{Ai}(x)$  является регулярным решением уравнения

$$y'' - xy = 0$$

и выражается через функции Бесселя порядков  $\pm \frac{1}{3}$ :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)]; \quad \text{Ai}(-x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [J_{-1/3}(\zeta) + J_{1/3}(\zeta)],$$

где  $I_\nu(\zeta) = i^{-\nu} J_\nu(i\zeta); \quad \zeta = \frac{2}{3}x^{3/2}.$



## Теория

Решение волнового уравнения можно разложить по плоским волнам, зависимость поля от координат в плоской волне определяется фактором  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. В двумерном случае  $\mathbf{r} = (x, y)$ . Часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат  $r, \varphi$ , где  $r$  — расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а  $\varphi$  — полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла  $\varphi$  скалярное произведение  $\mathbf{k}\mathbf{r} = rk \sin \varphi$ . Функции Бесселя являются коэффициентами разложения  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi)$$

где  $z = kr$ . Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 3.8. Добавляя  $\pi$  к  $\varphi$ , находим

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi)$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi)$$

мы заключаем, что  $J_{-n} = (-1)^n J_n$ . Подставляя в выражение (3.20)  $t = e^{i\varphi}$ , находим ряд Лорана по  $t$

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n \\ \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n \end{aligned}$$

Здесь  $t$  может быть произвольным комплексным числом. Дифференцируем соотношение (3.21) по  $z$ , что дает

$$\frac{1}{2}\left(t - 1/t\right) \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)].$$

Дифференцируем соотношение (3.21) по  $t$ , что дает

$$\frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}.$$

Подставляя здесь в место экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z).$$



Комбинируя (3.22) и (3.23), находим следующие рекуррентные соотношения  $\frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$ ,  $J'_n + \frac{n}{z} J_n = J_{n-1}$ ,  $\frac{d}{dz} \frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}$ ,  $J'_n - \frac{n}{z} J_n = -J_{n+1}$ . В частности  $dJ_0/dz = -J_1$ . Рекуррентное соотношение (3.24) можно переписать в следующем виде

$$z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z).$$

Дифференцируя это соотношение по  $z$  и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на  $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Рассмотрим случай малых  $z$ ,  $z \ll 1$ . В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0,$$

которое имеет степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ . Обратим внимание на причину, по которой уравнение (3.27) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании  $z \rightarrow Az$ , где  $A$  — произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (3.27) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (3.27), которые при преобразовании  $z \rightarrow Az$  переходят в себя с точностью до множителя, именно этим свойством обладают степенные решения. Поскольку уравнение Бесселя (3.26) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (3.27), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$  определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (3.26) при малых  $z$ . Обратим внимание на то, что при  $n > 0$  решение  $g_2$  сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при

$z \rightarrow 0$ . Поэтому, если функция  $g$  регулярна в нуле, то ее поведение определяется  $g_1$ , то есть  $g \propto z^n$  при малых  $z$ . Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (3.26). Такими решениями являются функции Бесселя  $J_n(z)$ , первый член разложения которой по  $z$  определяется (3.29).

Заметим, что при  $n = 0$  оба решения уравнения (3.27),  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ , совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (3.27), в котором надо положить  $n = 0$ . Это уравнение является уравнением первого порядка для  $dg/dz$ , решением которого, очевидно, является  $dg/dz = C_1/z$ , где  $C_1$  — произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение  $g = C_2 + C_1 \ln z$ , где  $C_2$  — вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при  $n = 0$  имеется два решения уравнения (3.27), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Решение уравнения (3.27) при  $n = 0$ , которое является регулярным в нуле, пропорционально  $J_0(z)$ .

Выписывая обратное преобразование Фурье к (3.20), находим следующее представление функций Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta)$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равенства в (3.28) мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того,

что мнимая часть  $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$  антисимметрична по  $\theta$ , и что косинус является четной функцией. Отметим, что представление (3.28) автоматически приводит к соотношению  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .

Таким образом, функция  $J_n(qx)$  является собственной функцией дифференциального оператора (3.33), который относится к типу операторов Штурма-Лиувилля (2.6), с собственным значением  $-q^2$ . условие ортогональности (2.68) с весом  $\rho = x$  для разных  $q$ . В данном случае речь идет о непрерывном спектре ( $q$  может принимать непрерывный ряд значений), поэтому функции должны быть нормированы на  $\delta$ -функцию. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1} \delta(k - q),$$

где  $k > 0, q > 0$ . Приведем доказательство соотношения (3.34). Вклад значения аргумента, поэтому в интеграле (3.34) мы можем использовать асимптотическое выражение (3.31). В результате находим

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \rightarrow \int dx \frac{2}{\pi \sqrt{kq}} \cos(kx) \cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz) \cos(qz) = \pi \delta(k - q),$$

где  $q$  и  $k$  считаются положительными, и учитывая, что интеграл по  $x$  идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Ряд (3.30) абсолютно сходится при всех действительных  $z$ , поскольку отношение коэффициентов при степенях  $(z/2)^{n+2m+2}$  и  $(z/2)^{n+2m}$  равно  $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$ , то есть стремится к нулю с ростом  $m$ . Таким образом, ряд (3.30) определяет функцию Бесселя при всех действительных  $z$ . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением  $J_n(z)$  с действительных  $z$ . Поскольку ряд (3.30) является абсолютно сходящимся, то функция  $J_n(z)$  не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного  $z$ . В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя  $J_n(z)$ .

Соотношение (3.28) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях  $z$ . В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 3.7.2. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по  $\theta$  в выражении (3.28), что дает  $z \cos \theta_0 = n$ . Таким образом, в силу большого значения  $z$  стационарная фаза близка к  $\pi/2$  (что предполагает неравенство  $z \gg n$ ). Используя выражение для приближения стационарной фазы (3.102), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом,  $J_n(z)$  осциллирует с амплитудой, которая стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ .

Раскладывая правую часть соотношения (3.28) по  $z$ , мы заключаем что при  $n > 0$  первый член разложения  $J_n(z)$  по  $z$  равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!},$$

в соответствии с анализом, проведенным при малых  $z$ . Следующие члены разложения функции Бесселя по  $z$  можно найти из того же выражения (3.28). В результате мы

получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

Отметим, что это ряд по целым степеням  $z$ , который содержит только четные или только нечетные степени  $z$ , в зависимости от четности  $n$ .

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$\begin{aligned} & J_n(qx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(kx) + J_n(qx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(kx) \\ & - J_n(kx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(qx) - J_n(kx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(qx) \\ & = (q^2 - k^2) J_n(qx) J_n(kx). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение с весом  $x$  на интервале  $0 < x < z$ , находим

$$\begin{aligned} & J_n(qz) k z J'_n(kz) - J_n(kz) q z J'_n(qz) \\ & = (q^2 - k^2) \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) \end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$\begin{aligned} & \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) \\ & = \frac{J_n(kz) q z J_{n+1}(qz) - J_n(qz) k z J_{n+1}(kz)}{q^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Устремляя здесь  $k$  к  $q$  и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$\int_0^z dx x [J_n(kx)]^2 = \frac{z^2}{2} (J_{n+1}^2 + J_n^2) - \frac{nz}{k} J_{n+1} J_n,$$

где аргументы функций Бесселя равны  $kz$ , и мы использовали рекуррентные соотношения (3.24, 3.25)

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале  $0 < x < 1$  на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при  $x = 1$ . Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел  $q = \gamma_k$ , для которых  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Набор  $\gamma_k$  зависит от индекса функции Бесселя  $n$ . Величины  $\gamma_k$  неограниченно растут с увеличением номера  $k$ .

## Задача

3.3.9. Найти значения  $\gamma_k$  для больших значений этого параметра.

В силу общих свойств задач на собственные значения, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находим свойство ортогональности

$$\int_0^1 dx x J_n(\gamma_k x) J_n(\gamma_j x) = 0$$

если  $\gamma_k \neq \gamma_j$ . Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = 1/x$ , поэтому в силу (2.67) находим  $\rho = x$ . Подставляя в соотношении (3.38)  $z = 1$ , получаем

$$\int_0^1 dx x [J_n(\gamma_k x)]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k).$$

### Задача

3.3.10. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.39).

Соотношения (3.39, 3.40) позволяют сформулировать правила разложения функции  $f(x)$ , заданной на интервале  $0 < x < 1$ , по набору функций  $J_n(\gamma_k x)$ :

$$f(x) = \sum_k f_k J_n(\gamma_k x),$$
$$f_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\gamma_k)} \int_0^1 dx x f(x) J_n(\gamma_k x).$$

Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.

### Задача

3.3.11. Разложить функцию  $J_1(x) - xJ_1(1)$  на интервале  $(0, 1)$  в ряд (3.41) по  $J_1(\gamma_k x)$ .

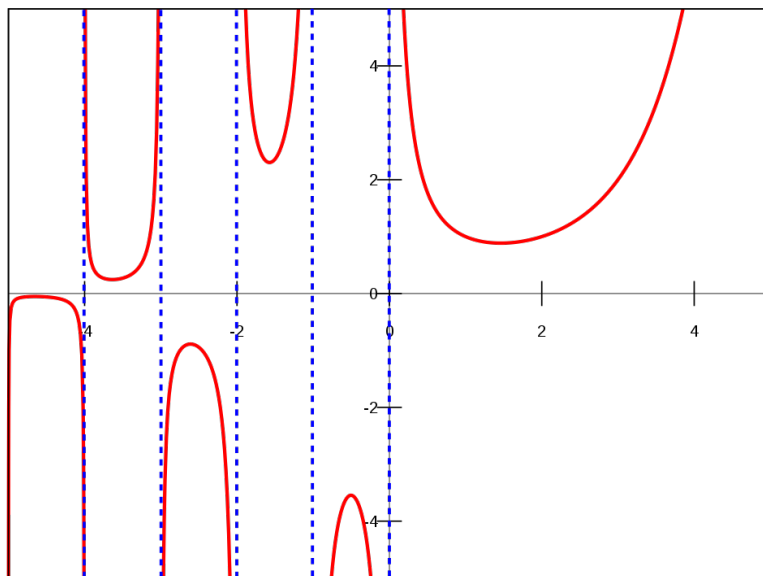
## 2.6 Гамма-функция (!!!!!)

(вроде такого раздела должно хватить, не хватает - поменяю структуру.)

### 2.6.1 Свойства

#### Суть

График имеет вид:



Важно понимать, что гамма функции полюса в целых отрицательных числах и нуле.

#### Интегральное определение

Если вещественная часть комплексного числа  $z$  положительна, то гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Это определение было получено Лежандром из оригинального определения Эйлера (1730 г.)

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx$$

через замену переменной  $x = e^{-t}$ , и на сегодняшний день именно определение Лежандра известно как классическое определение Гамма-функции. Интегрируя по частям классическое определение, легко видеть, что  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ . Для приближённого вычисления значений гамма-функции удобнее третья формула, также полученная из определения Эйлера путём применения равенства  $\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z$  и замены переменной  $x = y^2$ :

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при  $\operatorname{Re}(z) > -1$ , хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения - вблизи 1). В случае вещественного аргумента  $z > 0$  подынтегральная функция имеет единственную особую точку - устранимый разрыв при  $y = 0$ , и если доопределить её в этой точке значением 0, она станет непрерывной на всём отрезке  $[0; 1]$ . Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование. Существует непосредственное аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел, называемое интегралом Римана - Ханкеля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int_L t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Определение по Гауссу

Оно верно для всех комплексных  $z$ , за исключением 0 и отрицательных целых чисел

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Определение по Эйлеру

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Определение по Вейерштрассу

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

где  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) \approx 0,57722$  - постоянная Эйлера - Маскерони[1].

Примечание: иногда используется альтернативная, так называемая пи-функция, которая является обобщением факториала и связана с гамма-функцией соотношением  $\Pi(z) = \Gamma(z + 1)$ . Именно этой функцией (а не Г-функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

Если  $z = n$  - натуральное число, то

$$\Gamma(n + 1) = n !.$$

Основное свойство гамма-функции - это её рекуррентное уравнение

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$$

которое при фиксированном начальном условии единственным образом определяет логарифмически выпуклое решение.

Для гамма-функции справедлива формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Также справедлива и формула умножения Гаусса:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz),$$

Частный случай этой формулы при  $n = 2$  был получен Лежандром:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости.  $\Gamma(z)$  является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$  [1] Гамма-функция имеет полюс первого порядка в  $z = -n$  для любого натурального  $n$  и нуля; вычет в этой точке задаётся так:

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Полезное свойство, которое может быть получено из предельного определения:

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и  $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$ , где  $\psi(x)$ , часто называют «пси-функцией» или дигамма-функцией. Гамма-функция и бета-функция связаны следующим соотношением:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

## О применениях

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

## Логарифм Гамма-функции

По целому ряду причин наряду с гамма-функцией часто рассматривают и логарифм гамма-функции — первообразную дигамма-функции. Для него справедливы следующие интегральные представления:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right] \frac{e^{-xz}}{x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

данные Жаком Бине в 1839-м году (эти формулы ещё часто называют первой и второй формулой Бине соответственно для логарифма гамма-функции) [3]. Несколько отличные интегральные формулы для логарифма гамма-функции также появлялись в работах Мальмстена, Лерха и некоторых других. Так, Мальмстен получил формулу, схожую с первой формулой Бине  $e^{[3]}$

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[ z - 1 - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

а Лерх показывает, что все интегралы вида

$$\int_0^\infty \frac{e^{2\pi x} \cos \varphi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x} \cos \varphi + 1} \operatorname{arctg} \frac{u}{x} dx, \quad 0 < u \leq 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln \Gamma(z) = -\left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \left\{1 - \ln\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2} \ln 2\pi - 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} [x / (z - \frac{1}{2})]}{e^{2\pi x} + 1} dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

(см. упр. 40 В<sup>[4]</sup>) Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln \Gamma(z) = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \ln \sin \pi z - \frac{2z-1}{2} \ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z} dx, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

## О решении задач на Гамма-функцию (!?!?!?!?)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Вычисление интегралов

Важным применением Гамма сункции служит сведение к ней интегралов следующего вида, где  $\alpha, \beta$  - постоянные параметры

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-ax^\beta) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Доказательство После вынесения параметра:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-ax^\beta) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty (a^{1/\beta} x)^\alpha \exp[-(a^{1/\beta} x)^\beta] d(a^{1/\beta} x)$$

Внесения дифференциала:

$$a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \kappa^\alpha \exp(-\kappa^\beta) d\kappa = \frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \kappa^{\alpha+1-\beta} \exp(-\kappa^\beta) d\kappa^\beta$$

И замены переменной:

$$\frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \varkappa^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-\varkappa) d\varkappa = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

В частности, для широко встречающихся в приложениях физики интегралов Гауссова типа:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x^2/a^2) dx = a^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

И Эйлеровых интегралов:

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x/a) dx = a^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

## 2.6.2 Свойства по ПТФ

Правая часть соотношения (3.3) определена и для  $z$  с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  на эту область переменной  $z$ . Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости  $z$ . Следовательно, особенности функции  $\Gamma(z)$  определяются разностью  $1 - \exp(2\pi iz)$ , которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных)  $z$ . При положительных целых  $z$  в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае,  $\Gamma(z)$  не имеет особенностей при целых положительных  $z$ , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных  $z$  контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет простые полюса.

### Задача

3.1.2. Найти контурное представление  $\Gamma(z)$  в терминах  $(-t)^{z-1}e^{-t}$ .

### Задача

3.1.3. Показать, что

$$\begin{aligned}\int_0^\infty du u^{z-1} \cos u &= \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \\ \int_0^\infty du u^{z-1} \sin u &= \sin(\pi z/2) \Gamma(z)\end{aligned}$$

Установить область применимости этих выражений.

Найдем вычеты функции  $\Gamma(z)$  в полюсах  $z = 0, -1, -2, \dots$ . При  $z = -n$  ( $n$  — целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}.$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3.2. В точках  $x = -n$  функция  $\Gamma$  стремится к бесконечности. Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции  $\Gamma(z)$  при больших положительных значениях  $z$ , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. Для этого в интеграле (3.1) произведем замену  $t \rightarrow tz$ , которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция  $\ln t - t$  достигает максимума в точке  $t = 1$ . Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z).$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших  $n$ ) выражение для факториала  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ , которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что



асимптотика (3.7) справедлива и для комплексных  $z$  при условии большого положительного значения действительной части  $z$ .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

где действительные части  $\alpha$  и  $\beta$  предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (3.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  $s$  с весом  $e^{-s}$ , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных  $s = x + y$  сводит правую часть к произведению интегралов по  $x$  по  $y$ , которые дают произведение  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ . Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

### Задача

3.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi$$

### Задача

3.1.5. Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Введем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для этого запишем левую часть (3.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену  $s = t\zeta$  и взяв интеграл по  $t$  мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по  $\zeta$  следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно деформировать, загибая его 'усы' в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке  $\zeta = -1$ , что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные  $z$ . В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из соотношения (3.9),  $\Gamma^{-1}(z)$  не имеет полюсов в плоскости  $z$ , то есть  $\Gamma(z)$  нигде не обращается в ноль.

## Задача

3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t,$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3.

## Задача

3.1.7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

## Задача

3.1.8. Найти  $|\Gamma(1/2 + ix)|$ , где  $x$  действительное число.

## 2.6.3 Применения Гамма функции в КТП

(тут много всего может быть, очень сильно применяется.)

## 2.6.4 Бета-функция

### Суть

## 2.7 Гипергеометрическая функция (!?!?!?)

### Суть

В общем виде гипергеометрическая функция может зависеть от цифр  $p, q$  и многих параметров и имеет вид:

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) &= 1 + \frac{a_1 \dots a_p}{b_1 \dots b_q} z + \frac{a_1(a_1+1) a_2(a_2+1) \dots a_p(a_p+1)}{b_1(b_1+1) b_2(b_2+1) \dots b_q(b_q+1)} \frac{z^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)^{(n)} \dots (a_p)^{(n)}}{(b_1)^{(n)} \dots (b_q)^{(n)}} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Частные важные случаи это  ${}_2F_1$  и  ${}_1F_1$

Поговорим про  ${}_2F_1$ . Альтернативно её можно определить как регулярное в нуле решение следующего дифференциального уравнения:

$$z(1-z)f''(z) + (c - (a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

(место убедиться в эквивалентности определений)

Можно убедиться, что второе линейно-независимое решение этого уравнения тоже можно выразить через гипергеометрическую функцию. Общее решение имеет следующий вид (при  $c \neq 1$ )

$$f(z) = C_{12}F_1(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(b-c+1, a-c+1; 2-c; z)$$

К уравнению такого вида можно свести очень большой класс дифференциальных уравнений. В действительности, имеется классификация линейных дифференциальных

уравнений с дробно-рациональными коэффициентами по их особенностям в комплексной плоскости (особенностями уравнения, записанного в канонической форме  $f^{(n)}(z) + p_1(z)f^{(n-1)}(z) + \dots + p_n(z)f(z) = 0$ , называются особенности функций  $p_k(z)$  – точки, где она обращается в бесконечность) – в частности, у гипергеометрической функции их ровно три:  $z = \{0, 1, \infty\}$ ; и более или менее любое уравнение с тремя особенностями можно свести к гипергеометрическому виду.

Продолжая обсуждение свойств этой функции, отметим, что она не определена при целых отрицательных  $c$  (знаменатель зануляется). Радиус сходимости ряда равен единице, и в действительности у гипергеометрической функции в точке  $z = 1$  имеется особенность. Единственное исключение из этого правила – это когда либо  $a$ , либо  $b$  – отрицательное целое число: в таком случае, ряд обрывается и превращается в полином конечной степени, имеющий, естественно, бесконечный радиус сходимости. Последнее замечание будет важно при поиске связанных состояний.

### свойства гипергеометрической функции

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z)$$

### Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1(a; b; z)$

На прошлом семинаре обсуждался общий класс гипергеометрических функций  ${}_pF_q$ ; однако для приложений наиболее часто встречаются именно функции  ${}_2F_1$  (обсуждённая на прошлом семинаре) и  ${}_1F_1$ . Она, естественно, тоже определяется через гипергеометрический ряд <sup>5</sup>:

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \frac{z^n}{n!}$$

Кроме того, альтернативное её определение – через решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

тоже выражается через гипергеометрическую функцию <sup>6</sup>:  $f^{(2)}(z) = z^{1-b} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z)$ . Как и с обычной гипергеометрической функцией, несложно видеть, что при целых отрицательных  $b = -n$  функция не определена, а при целых отрицательных  $a = -n$  она является конечным полиномом степени  $n$ .

В общем случае, отношение соседних коэффициентов разложения в ряд ведёт себя как  $1/n$ , поэтому радиус сходимости этого ряда – бесконечность (в отличие  ${}_2F_1$ , где радиус сходимости был единичным).

Асимптотическое поведение на бесконечности следующее:

$${}_1F_1(a; b; z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} e^z, \quad z \gg 1$$

Опять-таки, мы ранее говорили, что всякое уравнение с тремя особенностями сводится к гипергеометрическому виду так и всякое уравнение с коэффициентами, которые представляют собой линейные функции  $z$  приводится к Вырожденному гипергеометрическому виду.

## Гипергеометрическое уравнение

хз какое

запись других функций через гипергеометрическую

(википедия)

$$(1+x)^n = F(-n, b; b; -x)$$

$$x^n = F(-n, b; b; 1-x)$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = F(1, 1; 2; -x)$$

$$\frac{1}{x} \arcsin(x) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(1, n; 1; \frac{x}{n}\right)$$

$$\cos x = \lim_{a, b \rightarrow \infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4ab}\right)$$

$$\cosh x = \lim_{a, b \rightarrow \infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right)$$

Полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

## Теория ПТФ

Вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде  $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$ , то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  характеризуется

тем, что она аналитична в точке  $z = 0$  и имеет единичное значение в нуле:  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ .

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = 0$ . Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. При больших  $n$  отношение коэффициентов при степенях  $z^n$  и  $z^{n-1}$  в разложении (3.82) стремится к  $1/n$ . Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ .

При неотрицательных целых  $\alpha$  ряд (3.82) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Второе независимое решение можно найти, заметив, что если  $u$  удовлетворяет уравнению (3.81), то  $z^{\gamma-1}u$  также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами  $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - произвольные константы. При  $\gamma = 1$  оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная  $z$  входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции  $P$  и  $Q$  в соответствии с выражениями (3.96):  $P = \gamma t - \alpha$ ,  $Q = t(t - 1)$ , и далее находим  $Z = t^{\alpha-1}(t - 1)^{\gamma-\alpha-1}$ . Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t - 1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к  $z^{\gamma-1}u$ , мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t - 1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования  $tz \rightarrow t$ , мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}.$$

Контур  $C$  в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из  $-\infty$  и возвращался в  $-\infty$  (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при  $t = 0$  и  $t = z$ ), тогда произведение  $ZQ \exp(t)$  на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при  $z = 0$ , если контур интегрирования "охватывает" обе особенности. Выберем контур  $C$ , который приходит "снизу" из  $-\infty$  огибает особенности "справа" и возвращается в  $-\infty$  "сверху", смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Мы считаем, что разрезy функций  $t^{\alpha-\gamma}$  и  $(t - z)^{-\alpha}$  идут в  $-\infty$ , а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При  $z = 0$  контур интегрирования превращается в  $C^*$ , изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}.$$

При целых отрицательных значениях  $\gamma$  ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у  $\Gamma(\gamma)$  в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении

(3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях  $\gamma$ . Поэтому  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ , как функция  $\gamma$ , имеет простые полюса при  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ . Производя в равенстве (3.87) замену  $t \rightarrow t + z$ , мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

Дифференцирование по  $z$  соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \\ \frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) &= \\ &\Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \\ \alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) &= \\ (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z). \end{aligned}$$

При больших положительных  $z$  основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки  $t = z$ . Делая замену переменных  $t = z + \zeta$  и пренебрегая зависимостью от  $\zeta$  в  $t^{\alpha-\gamma}$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha},$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \gamma, z) &\approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \\ \Phi(\alpha, \gamma, z) &\approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \end{aligned}$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для  $z$  с большой положительной действительной частью.

### Задача

3.6.1. Доказать, что  $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ .

### Задача

3.6.2. Доказать соотношения (3.89, 3.90, 3.91).

### Задача

3.6.3. Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Выполняется ли при малых  $\gamma$  соотношение  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ ?

### Задача

3.6.4. Найти значение  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых положительных  $\alpha$  и  $\gamma, \alpha \geq \gamma$ . Проверить выполнение условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ . Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке  $t = z$ .

## Задача

3.6.5. Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (3.81) при  $\gamma = 1$ . Указание: в соответствии с (3.85) при произвольном  $\gamma$  второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)]$$

здесь надо перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 1$ .

## 2.8 Спецфункции по Ландау

### 2.8.1 а. Полиномы Эрмита

Уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

относится к типу уравнений, которые могут быть решены с помощью метода Лапласа.

Этот метод применим вообще к линейным уравнениям вида

$$\sum_{m=0}^n (a_m + b_m x) \frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

коэффициенты которого не выше первой степени по  $x$ , и заключается в следующем. Составляем полиномы

$$P(t) = \sum_{m=0}^n a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^n b_m t^m$$

и с их помощью функцию

$$Z(t) = \frac{1}{Q} \exp \int \frac{P}{Q} dt$$

определенную с точностью до постоянного множителя. Тогда решение рассматриваемого уравнения может быть выражено в виде комплексного интеграла

$$y = \int_C Z(t) e^{xt} dt$$

где путь интегрирования  $C$  выбран так, чтобы интеграл имел значение конечное и отличное от нуля, причем функция

$$V = e^{xt} Q Z$$

должна возвращаться к своему начальному значению, после того как  $t$  опишет всю линию  $C$  (контур  $C$  может быть как замкнутым, так и незамкнутым). В случае уравнения (а.1) имеем

$$P = t^2 + 2n; \quad Q = -2t, \quad Z = -\frac{1}{2t^{n+1}} e^{-t^2/4}, \quad V = \frac{1}{t^n} e^{xt-t^2/4},$$

так что его решение имеет вид

$$y = \int \exp \left( xt - \frac{t^2}{4} \right) \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Для физических применений достаточно ограничиться рассмотрением значений  $n > -1/2$ . Для таких  $n$  можно выбрать в качестве пути интегрирования контуры  $C_1$  или  $C_2$  (рис. 52), удовлетворяющие необходимым условиям, поскольку на их концах ( $t = +\infty$  или  $t = -\infty$ ) функция  $V$  обращается в нуль.

Выясним, при каких значениях параметра  $n$  уравнение (а.1) имеет решения, конечные при всех конечных значениях  $x$  и стремящиеся при  $x \rightarrow \pm\infty$  к бесконечности не быстрее конечной степени  $x$ . Рассмотрим сначала нецелые значения  $n$ . Интегралы (а.2) по  $C_1$  и  $C_2$  дают здесь два независимых решения уравнения (а.1). Преобразуем интеграл по  $C_1$ , введя переменную  $u$  согласно  $t = 2(x - u)$ . Находим, опуская постоянный множитель,

$$y = e^{x^2} \int_{C'_1} \frac{e^{-u^2}}{(u - x)^{n+1}} du,$$

где интегрирование производится по контуру  $C'_1$  в плоскости комплексного переменного  $u$ , изображенному на рис. 53.

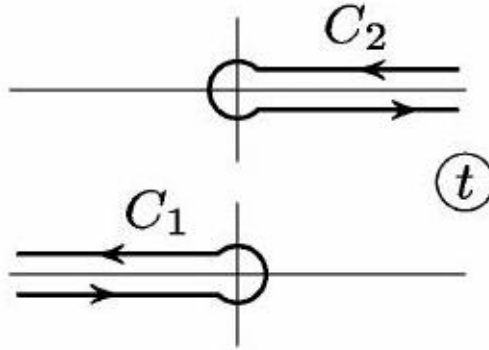


Рис. 52

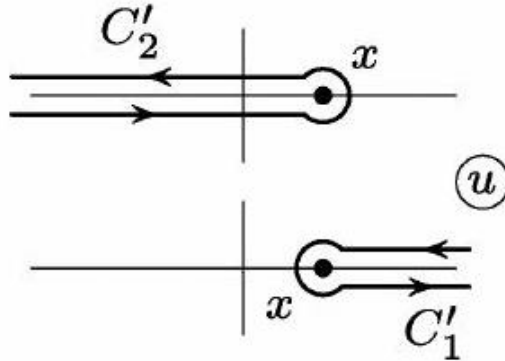


Рис. 53

При  $x \rightarrow +\infty$  весь путь интегрирования  $C'_1$  сдвигается на бесконечность, и интеграл в формуле (а.3) стремится к нулю, как  $e^{-x^2}$ . Но при  $x \rightarrow -\infty$  путь интегрирования простирается вдоль всей вещественной оси, и интеграл в (а.3) не стремится к нулю экспоненциально, так что функция  $y(x)$  обращается в бесконечность в основном, как  $e^{x^2}$ . Аналогично легко убедиться в том, что интеграл (а.2) по контуру  $C_2$  расходится экспоненциально при  $x \rightarrow \infty$ .

При целых же положительных значениях  $n$  (включая значение нуля) интегралы вдоль прямолинейных участков пути интегрирования взаимно уничтожаются, и оба интеграла (а.3) по  $C'_1$  и  $C'_2$  сводятся к интегралу по замкнутому пути вокруг точки  $u = x$ . (1 Эти



пути непригодны при целых отрицательных  $n$ , поскольку при таких  $n$  интеграл (а.2) вдоль них обратился бы тождественно в нуль.) Таким образом, мы получим решение

$$y(x) = e^{x^2} \oint \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}} du,$$

удовлетворяющее поставленным условиям. Согласно известной формуле Коши для производных от аналитической функции

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$$

это есть, с точностью до постоянного множителя, полином Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

В раскрытом виде полином  $H_n$ , расположенный по убывающим степеням  $x$ , имеет вид

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} - \dots$$

Он содержит степени  $x$  только той же четности, что и число  $n$ . Выпишем несколько первых полиномов Эрмита

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, & H_1 &= 2x, & H_2 &= 4x^2 - 2, & H_3 &= 8x^3 - 12x, \\ & & H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Для вычисления нормировочного интеграла заменяем  $e^{-x^2} H_n$  выражением из (а.4) и, интегрируя  $n$  раз по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n}{dx^n} dx.$$

Но  $d^n H_n / dx^n$  есть постоянная, равная  $2^n n!$ ; в результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

## 2.8.2 б. Функция Эйри

Уравнение

$$y'' - xy = 0$$

тоже относится к типу Лапласа. Следуя общему методу, составляем функции

$$P = t^2, \quad Q = -1, \quad Z = -\exp(-t^3/3), \quad V = \exp(xt - t^3/3),$$

так что решение может быть представлено в виде

$$y(x) = \text{const} \cdot \int_C \exp(xt - t^3/3) dt,$$

причем путь интегрирования  $C$  должен быть выбран так, чтобы на обоих его концах функция  $V$  обращалась в нуль. Для этого

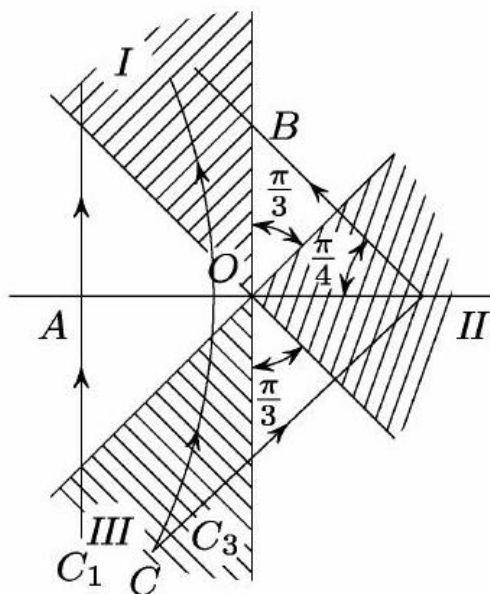


Рис. 54 эти концы должны уходить на бесконечность в тех областях плоскости комплексного переменного  $t$ , в которых  $\operatorname{Re}(t^3) > 0$  (на рис. 54 эти области заштрихованы).

Решение, конечное при всех  $x$ , получим, выбрав путь  $C$  так, как это изображено на рисунке. Он может быть смещен произвольным образом, при условии только, чтобы его концы уходили на бесконечность в тех же двух заштрихованных секторах (I и III на рис. 54). Заметим, что, выбрав путь, проходящий, например, в секторах III и II, мы получили бы решение, обращающееся при  $x \rightarrow \infty$  в бесконечность.

Смещая путь  $C$  так, чтобы он совпал с мнимой осью, получаем функцию (b.2) в виде (делаем подстановку  $t = iu$ )

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(ux + \frac{u^3}{3}\right) du.$$

Постоянную в (b.2) мы положили равной  $-i/2\sqrt{\pi}$  и обозначили определенную таким образом функцию через  $\Phi(x)$ ; ее называют функцией Эйри.

Асимптотическое выражение для  $\Phi(x)$  при больших значениях  $x$  можно получить, вычисляя интеграл (b.2) методом перевала. При  $x > 0$  показатель степени в подынтегральном выражении имеет экстремум при  $t = \pm\sqrt{x}$ , а направление его «наиболее крутого спада» параллельно мнимой оси. Соответственно этому, для получения асимптотического выражения для больших положительных значений  $x$  разлагаем показатель по степеням

Мы следуем определению, предложенному В. А. Фоком (см. Г. Д. Яковлева, Таблицы функций Эйри. -М.: Наука, 1969;  $\Phi(x)$  - одна из двух введенных Фоком функций, обозначаемая им как  $V(x)$ ). В литературе используется также определение функции Эйри, отличающееся от (b.3) постоянным множителем:  $\operatorname{Ai}x = \Phi(x)/\sqrt{\pi}$ , так что  $\int \operatorname{Ai}x dx = 1$ .  $t + \sqrt{x}$  и интегрируем вдоль прямой  $C_1$  (см. рис. 54), параллельной мнимой оси (расстояние  $OA = \sqrt{x}$ ). Делая подстановку  $t = -\sqrt{x} + iu$ , получаем

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \sqrt{x}u^2\right) du$$

откуда

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

Таким образом, при больших положительных  $x$  функция  $\Phi(x)$  затухает экспоненциально.

Для получения асимптотического выражения при больших отрицательных значениях  $x$  замечаем, что при  $x < 0$  показатель степени имеет экстремумы при

$$t = i\sqrt{|x|} \quad \text{и} \quad t = -i\sqrt{|x|},$$

а направление наиболее крутого спада в этих точках - соответственно вдоль прямых под углами  $\mp\pi/4$  к вещественной оси. Выбирая в качестве пути интегрирования ломаную линию  $C_3$  (расстояние  $OB = \sqrt{|x|}$ ), получим после простых преобразований

$$\Phi(x) = \frac{1}{|x|^{1/4}} \sin \left( \frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом, в области больших отрицательных  $x$  функция  $\Phi(x)$  имеет осциллирующий характер. Укажем, что первый (наибольший) максимум функции  $\Phi(x)$  есть  $\Phi(-1,02) = 0,95$ .

Функция Эйри может быть выражена с помощью бесселевых функций порядка  $1/3$ . Уравнение (b.1), как легко убедиться, имеет решение

$$\sqrt{x}Z_{1/3} \left( \frac{2}{3}x^{3/2} \right)$$

где  $Z_{1/3}(x)$  - любое решение уравнения Бесселя порядка  $1/3$ . Решение, совпадающее с (b.3), есть

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\sqrt{\pi x}}{3} \left[ I_{-1/3} \left( \frac{2}{3}x^{3/2} \right) - I_{1/3} \left( \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \right] \equiv \sqrt{\frac{x}{3\pi}} K_{1/3} \left( \frac{2}{3}x^{3/2} \right) \\ &\quad \text{при } x > 0, \quad (\text{b.6}) \\ \Phi(x) &= \frac{\sqrt{\pi|x|}}{3} \left[ J_{-1/3} \left( \frac{2}{3}|x|^{3/2} \right) + J_{1/3} \left( \frac{2}{3}|x|^{3/2} \right) \right] \quad \text{при } x < 0, \end{aligned}$$

где

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)].$$

С помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x), \\ 2K_\nu(x) &= -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

легко найти для производной функции Эйри выражение

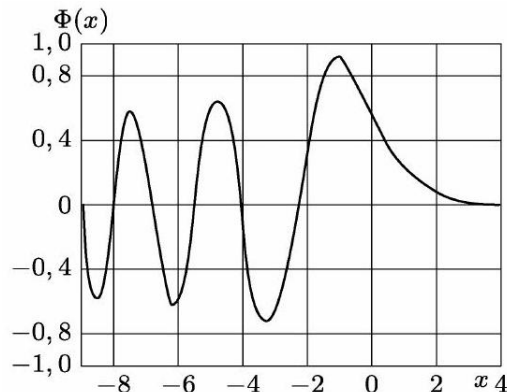


Рис. 55

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3} \left( \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \\ &\text{при } x > 0. \\ \text{При } x = 0 \\ \Phi(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3} \Gamma(2/3)} = 0,629, \\ \Phi'(0) &= \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}} = -0,459.\end{aligned}$$

На рис. 55 дан график функции Эйри.

### 2.8.3 с. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра  $P_l(\cos \theta)$  определяются формулой

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_l}{d\theta} \right) + l(l+1)P_l = 0.$$

Присоединенные полиномы Лежандра определяются формулой

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m} = \frac{1}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m}}{(d \cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l$$

или эквивалентной ей

$$P_l^m(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)! 2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{d^{l-m}}{(d \cos \theta)^{l-m}} (\cos^2 \theta - 1)^l,$$

причем  $m = 0, 1, \dots, l$ . Присоединенные полиномы удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_l^m = 0.$$

Нормировочный интеграл полиномов Лежандра  $\int_{-1}^1 [P_l(\mu)]^2 d\mu$  ( $\mu = \cos \theta$ ) вычисляется подстановкой в него выражений (с.1) и  $l$ -кратным интегрированием по частям, после чего он оказывается равным

$$\frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (\mu^2 - 1)^l \frac{d^{2l}}{d\mu^{2l}} (\mu^2 - 1)^l d\mu = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^l d\mu.$$

Подстановкой  $u = (1 - \mu)/2$  этот интеграл приводит к  $B$ -интегралу Эйлера и дает

$$\int_{-1}^1 [P_l(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2l+1}.$$

---

<sup>0</sup>В математической литературе есть много хороших изложений теории шаровых функций. Здесь мы приводим для справок лишь некоторые основные соотношения, совершенно не занимаясь систематическим изложением теории этих функций.

Аналогичным образом легко убедиться в том, что функции  $P_l(\mu)$  с различными  $l$  взаимно ортогональны:

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) P_{l'}(\mu) d\mu = 0, \quad l \neq l'.$$

Вычисление нормировочного интеграла для присоединенных полиномов легко произвести аналогичным образом, написав  $[P_l^m(\mu)]^2$  в виде произведения выражений (с.3) и (с.4) и интегрируя  $l - m$  раз по частям; в результате получается

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(\mu)]^2 d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Легко также убедиться в том, что функции  $P_l^m$  с различными  $l$  (и одинаковыми  $m$ ) взаимно ортогональны:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu) d\mu = 0, \quad l \neq l'.$$

Вычисление интегралов от произведений трех полиномов Лежандра рассматривалось в 107.

Для полиномов Лежандра имеет место следующая теорема сложения. Пусть  $\gamma$  – угол между двумя направлениями, определяемыми сферическими углами  $\theta, \varphi$  и  $\theta', \varphi'$ :  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi')$ . Тогда

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + \sum_{m=1}^l 2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos [m(\varphi - \varphi')].$$

Эта теорема может быть также записана в терминах шаровых функций (определенных согласно (28.7)) в виде

$$P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}).$$

Здесь  $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  – два единичных вектора, а  $Y_{lm}(\mathbf{n})$  означает сферическую функцию от полярного угла и азимута направления  $\mathbf{n}$  относительно фиксированной системы координат.

Умножим равенство (с.10) на  $P_{l'}(\cos \theta)$  и проинтегрируем его по  $do = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Интегрирование по  $d\varphi$  обращает в нуль все члены в правой части равенства, содержащие множители  $\cos [m(\varphi - \varphi')]$ ; с учетом (с.6), (с.7) получим

$$\int P_l(\cos \gamma) P_{l'}(\cos \theta) do = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos \theta').$$

Этот результат можно записать в симметричном виде

$$\int P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) P_{l'}(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3) do_1 = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3)$$

где  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  – три единичных вектора, а интегрирование производится по направлениям одного из них –  $\mathbf{n}_1$ . Наконец, приведем выражения нескольких первых нормированных сферических функций  $Y_{lm}$ :

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_{1,\pm 1} &= \pm i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi} \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), & Y_{2,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi} \\
Y_{2,\pm 2} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, & Y_{30} &= -i\sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) \\
Y_{3,\pm 1} &= \pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\varphi}, \\
Y_{3,\pm 2} &= -i\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \cos \theta \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, & Y_{3,\pm 3} &= \pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta \cdot e^{\pm 3i\varphi}.
\end{aligned}$$

#### 2.8.4 d. Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

сходящимся при всех конечных  $z$ ; параметр  $\alpha$  произволен, а параметр  $\gamma$  предполагается не равным нулю или целому отрицательному числу. Если  $\alpha$  есть целое отрицательное число (или нуль), то  $F(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному степени  $|\alpha|$ .

Функция  $F(\alpha, \gamma, z)$  удовлетворяет уравнению

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Подстановкой  $u = z^{1-\gamma}u_1$  это уравнение преобразуется в уравнение того же вида

$$zu_1'' + (2 - \gamma - z)u_1' - (\alpha - \gamma + 1)u_1 = 0.$$

Отсюда видно, что при нецелом  $\gamma$  уравнение (d.2) имеет также частный интеграл  $z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ , линейно независимый

Уравнение (d.2) с целым отрицательным значением  $\gamma$  не нуждается в особом рассмотрении, так как может быть сведено (преобразованием к уравнению (d.3)) к случаю целых положительных  $\gamma$ . от (d.1), так что общее решение уравнения (d.2) имеет вид

$$u = c_1 F(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Второй член, в противоположность первому, имеет при  $z = 0$  особую точку.

Уравнение (d.2) относится к типу Лапласа, и его решения могут быть представлены в виде контурных интегралов. Следуя общему методу, составляем функции

$$P(t) = \gamma t - \alpha, \quad Q(t) = t(t-1), \quad Z(t) = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1},$$

так что

$$u = \int e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1} dt$$

Путь интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы после его прохождения функция  $V(t) = e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}$  возвращалась к исходному значению.

Применяя тот же метод к уравнению (d.3), можно получить для  $u$  контурный интеграл другого вида

$$u = z^{1-\gamma} \int e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt$$

В этом интеграле удобно сделать подстановку  $tz \rightarrow t$ , приводящую его к виду

$$u(z) = \int e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt$$

причем соответствующая функция  $V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1} (t-z)^{1-\alpha}$ .

Подынтегральное выражение в (d.6) имеет, вообще говоря, две особые точки - при  $t = z$  и при  $t = 0$ . Выберем контур интегрирования  $C$ , приходящий из

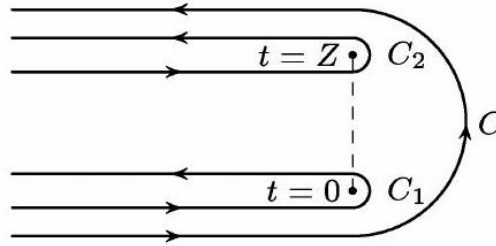


Рис. 56 бесконечности ( $\text{Re } t \rightarrow -\infty$ ), обходящий обе особые точки в положительном направлении и уходящий снова на бесконечность (рис. 56). Этот контур удовлетворяет требуемым условиям, так как на его концах функция  $V(t)$  обращается в нуль. Интеграл (d.6), взятый по контуру  $C$ , не имеет особой точки при  $z = 0$ ; поэтому он должен совпадать, с точностью до постоянного множителя, с не имеющей особенностей функцией  $F(\alpha, \gamma, z)$ . При  $z = 0$  обе особые точки подынтегрального выражения совпадают; согласно известной формуле теории  $\Gamma$ -функций

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-\gamma} dt = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}$$

Поскольку  $F(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , то очевидно, что

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt.$$

В (d.5) подынтегральное выражение имеет особые точки  $t = 0$  и  $t = 1$ . Если  $\text{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ , а  $\gamma$  - не целое положительное число, то в качестве пути интегрирования можно выбрать контур  $C'$ , выходящий из точки  $t = 1$ , обходящий в положительном направлении точку  $t = 0$  и возвращающийся в  $t = 1$  (рис. 57);

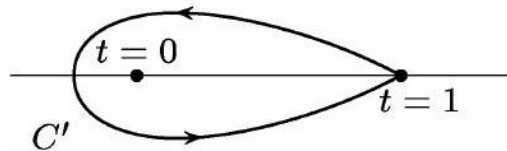


Рис. 57

при  $\text{Re}(\gamma - \alpha) > 0$  в результате обхода вдоль такого контура функция  $V(t)$  возвращается к исходному значению нуль (если  $\gamma$  - целое положительное число, то в качестве  $C'$  можно выбрать любой контур, обходящий обе точки  $t = 0$  и  $t = 1$ ). Определенный таким образом интеграл тоже не имеет особенности при  $z = 0$  и связан с  $F(\alpha, \gamma, z)$  соотношением

$$F(\alpha, \gamma, z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \oint_{C'} e^{tz} (-t)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt$$

По поводу интегралов (d.8), (d.9) надо сделать следующее замечание. При нецелых  $\alpha$  и  $\gamma$  подынтегральные выражения этих интегралов являются неоднозначными функциями. Их значения в каждой точке предполагаются выбранными условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

Отметим полезное соотношение

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

которое получается непосредственно, если сделать в интеграле (d.8) подстановку  $t \rightarrow t + z$ .

Мы уже упоминали, что если  $\alpha = -n$ , где  $n$  - целое положительное число, то функция  $F(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. Для этих полиномов можно получить короткую формулу. Делая в интеграле (d.9) подстановку  $t \rightarrow 1 - (t/z)$  и применяя к получившемуся интегралу формулу Коши, найдем следующую формулу:

$$F(-n, \gamma, z) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} z^{1-\gamma} e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{\gamma+n-1}).$$

Если к тому же  $\gamma = m$ , где  $m$  - целое положительное число, то имеет место также и формула

$$F(-n, m, z) = \frac{(-1)^{m-1}}{m(m+1) \dots (m+n-1)} e^z \frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}} (e^{-z} z^n).$$

Эта формула получается применением формулы Коши к интегралу, получающемуся из (d.8) подстановкой  $t \rightarrow z - t$ .

Полиномы  $F(-n, m, z)$  ( $0 \leq m \leq n$ ) совпадают, с точностью до постоянного множителя, с обобщенными полиномами Лагерра:

$$\begin{aligned} L_n^m(z) &= (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(-(n-m), m+1, z) = \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} e^z \frac{d^n}{dz^n} e^{-z} z^{n-m} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} e^z z^{-m} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} e^{-z} z^n. \end{aligned}$$

Полиномы  $L_n^m$  при  $m = 0$  обозначают, как  $L_n(z)$ , и называют просто полиномами Лагерра; согласно (d.13) имеем

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^n).$$

Интегральное представление (d.8) удобно для получения асимптотического разложения вырожденной гипергеометрической функции при больших  $z$ . Деформируем контур так, что он превращается в два контура  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. 56), обходящих соответственно точки  $t = 0$  и  $t = z$ ; нижнюю ветвь пути  $C_2$  и верхнюю ветвь  $C_1$  надо представлять себе смыкающимися на бесконечности. Имея в виду получить разложение по обратным степеням  $z$ , выносим в подынтегральном выражении  $(-z)^{-\alpha}$  за скобку. В интеграле по контуру  $C_2$  делаем подстановку  $t \rightarrow t + z$ ; тем самым мы преобразуем контур  $C_2$  в контур  $C_1$ . В результате представляем формулу (d.8) в виде

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z)$$



где

$$G(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i} \int_{C_1} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{-\alpha} t^{\beta-1} e^t dt$$

При возведении в степень в формуле (d.14)  $-z$  и  $z$  должны браться с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента. Наконец, разлагая в подынтегральном выражении  $(1 + t/z)^{-\alpha}$  по степеням  $t/z$  и применяя формулу (d.7), получим в результате для  $G(\alpha, \beta, z)$  асимптотический ряд

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!z^2} + \dots$$

Формулами (d.14) и (d.16) определяется асимптотическое разложение функции  $F(\alpha, \gamma, z)$ .

При целом положительном  $\gamma$  второй член в общем решении (d.4) уравнения (d.2) либо совпадает с первым (если  $\gamma = 1$ ), либо теряет вовсе смысл (если  $\gamma > 1$ ). В качестве системы двух линейно независимых решений можно в этом случае выбрать два слагаемых в формуле (d.14), т. е. интегралы (d.8), взятые по контурам  $C_1$  и  $C_2$  (эти контуры, как и контур  $C$ , удовлетворяют требуемым условиям, так что интегралы вдоль них - тоже решения уравнения (d.2)). Асимптотический вид этих решений определяется уже полученными формулами; остается найти их разложение по восходящим степеням  $z$ . Для этого исходим из равенства (d.14) и аналогичного равенства для функции  $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ . Из этих двух равенств выражаем  $G(\alpha, \alpha - \gamma + 1, -z)$  через  $F(\alpha, \gamma, z)$  и  $F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ , после чего полагаем  $\gamma = p + \varepsilon$  ( $p$ -целое положительное число) и переходим к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , раскрывая неопределенности по правилу Лопиталя. В результате довольно длинного вычисления получается следующее разложение:

$$\begin{aligned} G(\alpha, \alpha - p + 1, -z) = & \frac{\sin \pi \alpha \cdot \Gamma(p - \alpha)}{\pi \Gamma(p)} z^\alpha \left\{ \ln z \cdot F(\alpha, p, z) + \right. \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p) \Gamma(\alpha + s) [\psi(\alpha + s) - \psi(p + s) - \psi(s + 1)]}{\Gamma(\alpha) \Gamma(s + p) \Gamma(s + 1)} z^s + \\ & \left. + \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^{s+1} \frac{\Gamma(s) \Gamma(\alpha - s) \Gamma(p)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(p - s)} z^{-s} \right\} \end{aligned}$$

где  $\psi$  обозначает логарифмическую производную от  $\Gamma$ -функции:  $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ .

## 2.8.5 е. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическая функция определяется внутри круга  $|z| < 1$  рядом

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

а при  $|z| > 1$  получается аналитическим продолжением этого ряда (см. (e.6)). Гипергеометрическая функция является одним из частных интегралов дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0.$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  произвольны, а  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ . Функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , очевидно, симметрична по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ .

Второе независимое решение уравнения (e.2) есть

$$z^{1-\gamma}F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z);$$

оно имеет особую точку при  $z = 0$ .

Мы приведем здесь для справочных целей ряд соотношений, которым удовлетворяет гипергеометрическая функция.

Функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  может быть представлена при всех  $z$ , если  $\text{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ , в виде интеграла

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \oint_{C'} (-t)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tz)^{-\beta} dt, \end{aligned}$$

взятого по контуру  $C'$ , изображенному на рис. 57. В том, что этот интеграл действительно удовлетворяет уравнению (е.2), легко убедиться непосредственной подстановкой; постоянный множитель подобран так, чтобы при  $z = 0$  получилась единица.

Подстановка

$$u = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} u_1$$

Вырожденная гипергеометрическая функция получается из  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  предельным переходом  $F(\alpha, \gamma, z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right)$  при  $\beta \rightarrow \infty$ .

В литературе используется также обозначение  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$  для гипергеометрической и  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  для вырожденной гипергеометрической функций. Индексы слева и справа от буквы  $F$  указывают число параметров, фигурирующих соответственно в числителях и знаменателях членов ряда. в уравнение (е.2) приводит к уравнению того же вида с параметрами  $\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma$  соответственно вместо  $\alpha, \beta, \gamma$ . Отсюда следует равенство

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z)$$

(обе части равенства удовлетворяют одному и тому же уравнению и их значения при  $z = 0$  совпадают).

Подстановка  $t \rightarrow t/(1-z+zt)$  в интеграле (е.3) приводит к следующему соотношению между гипергеометрическими функциями от переменных  $z$  и  $z/(z-1)$ :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right)$$

Значение многозначного выражения  $(1-z)^{-\alpha}$  в этой формуле (и аналогичных выражений во всех следующих ниже формулах) определяется условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

Далее, приведем без вывода важную формулу, связывающую гипергеометрические функции от переменных  $z$  и  $1/z$ :

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{z}\right). \quad (\text{е. 6}) \end{aligned}$$

Эта формула выражает  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  в виде ряда, сходящегося при  $|z| > 1$ , т. е. представляет собой аналитическое продолжение исходного ряда (е.1).

Формула

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, 1 - z)$$

связывает гипергеометрические функции от  $z$  и  $1 - z$  (мы также приводим ее без вывода). Комбинируя (е.7) с (е.6), получим соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{1 - z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (1 - z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{1 - z}\right),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, \frac{z - 1}{z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} z^{\beta - \gamma} F\left(1 - \beta, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta, \frac{z - 1}{z}\right).$$

Каждый из членов сумм в правых частях равенств (е.6)-(е.9) представляет сам по себе решение гипергеометрического уравнения.

Если  $\alpha$  (или  $\beta$ ) есть целое отрицательное число (или нуль),  $\alpha = -n$ , то гипергеометрическая функция сводится к полиному  $n$ -й степени и может быть представлена в виде

$$F(-n, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma}(1 - z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)} \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma+n-1}(1 - z)^{\beta-\gamma}].$$

Эти полиномы совпадают, с точностью до постоянного множителя, с полиномами Якоби, определяемыми как

$$P_n^{(a,b)}(z) = \frac{(a + 1)(a + 2) \dots (a + n)}{n!} F\left(-n, a + b + n + 1, a + 1, \frac{1 - z}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - z)^{-a} (1 + z)^{-b} \frac{d^n}{dz^n} [(1 - z)^{a+n} (1 + z)^{b+n}].$$

При  $a = b = 0$  полиномы Якоби совпадают с полиномами Лежандра. При  $n = 0$   $P_0^{(a,b)} = 1$ .

## 2.8.6 f. Вычисление интегралов с вырожденными гипергеометрическими функциями

Рассмотрим интеграл вида

$$J_{\alpha\gamma}^\nu = \int_0^\infty e^{-\lambda z} z^\nu F(\alpha, \gamma, kz) dz.$$

Предполагается, что он сходится. Для этого должно быть  $\operatorname{Re} \nu > -1$  и  $\operatorname{Re} \lambda > |\operatorname{Re} k|$ ; если  $\alpha$  есть целое отрицательное число, то вместо второго условия достаточно потребовать, чтобы было  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Воспользовавшись для  $F(\alpha, \gamma, kz)$  интегральным представлением (d.9) и произведя интегрирование по  $dz$  под знаком контурного интегрирования, получим

$$J_{\alpha\gamma}^{\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \lambda^{-\nu-1} \Gamma(\nu+1) \times \\ \times \oint_{C'} (-t)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-(k/\lambda)t)^{-\nu-1} dt.$$

Учитывая (е.3), находим окончательно

$$J_{\alpha\gamma}^{\nu} = \Gamma(\nu+1) \lambda^{-\nu-1} F(\alpha, \nu+1, \gamma, k/\lambda).$$

В случаях, когда функция  $F(\alpha, \nu+1, \gamma, k/\lambda)$  сводится к полиномам, получаем соответственно и для интеграла  $J_{\alpha\gamma}^{\nu}$  выражения через элементарные функции:

$$J_{\alpha\gamma}^{\gamma+n-1} = (-1)^n \Gamma(\gamma) \frac{d^n}{d\lambda^n} [\lambda^{\alpha-\gamma} (\lambda-k)^{-\alpha}], \\ J_{-n\gamma}^{\nu} = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+1)(\lambda-k)^{\gamma+n-\nu-1}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\lambda^{-\nu-1} (\lambda-k)^{\nu-\gamma+1}], \\ J_{\alpha m}^n = \frac{(-1)^{m-n}}{k^{m-1}(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(m-1-\alpha)} \times \\ \times \left\{ -(m-1)! \frac{d^n}{d\lambda^n} [\lambda^{\alpha-1} (\lambda-k)^{m-\alpha-1}] + \right. \\ \left. + n!(m-n-1)\dots(m-1) \lambda^{\alpha-n-1} (\lambda-k)^{-1+m-n-\alpha} \times \right. \\ \left. \times \frac{d^{m-n-2}}{d\lambda^{m-n-2}} [\lambda^{m-\alpha-1} (\lambda-k)^{\alpha-1}] \right\}$$

( $m, n$  - целые числа,  $0 \leq n \leq m-2$ ).

Далее, вычислим интеграл

$$J_{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-kz} z^{\nu-1} [F(-n, \gamma, kz)]^2 dz$$

( $n$  - целое положительное,  $\operatorname{Re} \nu > 0$ ). Для вычисления исходим из более общего интеграла, содержащего в подынтегральном выражении  $e^{-\lambda z}$  вместо  $e^{-kz}$ . Одну из функций  $F(-n, \gamma, kz)$  пишем в виде интеграла (d.9), после чего интегрирование по  $dz$  с помощью формулы (f.3) дает

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\nu-1} [F(-n, \gamma, kz)]^2 dz = -\frac{1}{2\pi i} (-1)^n \frac{\Gamma(1+n)\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\nu)}{\Gamma^2(\gamma+n)} \times \\ \times \oint_{C'} (\lambda - kt - k)^{\gamma+n-\nu} (-t)^{-n-1} (1-t)^{\gamma+n-1} \times \\ \times \frac{d^n}{d\lambda^n} [(\lambda - kt)^{-\nu} (\lambda - kt - k)^{\nu-\gamma}] dt.$$

Производную  $n$ -го порядка по  $\lambda$  можно, очевидно, заменить, выразив через производную того же порядка по  $t$ ; сделав это, полагаем  $\lambda = k$ , возвращаясь, таким образом, к интегралу  $J_{\nu}$ :

$$J_{\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu)\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma^2(\gamma+n)k^{\nu}} \times \\ \times \oint_{C'} (-t)^{\gamma-\nu-1} (1-t)^{\gamma+n-1} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{-\nu} (-t)^{\nu-\gamma}] dt.$$

Производя  $n$ -кратное интегрирование по частям, переносим операцию  $(d/dt)^n$  на выражение  $(-t)^{\gamma-\nu-1} (1-t)^{\gamma+n-1}$  и раскрываем производную по формуле Лейбница. В

результате получаем сумму интегралов, каждый из которых сводится к известному интегралу Эйлера. Окончательно получается следующее выражение для искомого интеграла:

$$J_\nu = \frac{\Gamma(\nu)n!}{k^\nu \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} \times \left\{ 1 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s) \dots (\gamma-\nu+s)}{[(s+1)!]^2 \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+s)} \right\}.$$

Легко видеть, что между интегралами  $J_\nu$  имеет место следующее соотношение ( $p$  - целое число):

$$J_{\gamma+p} = \frac{(\gamma-p-1)(\gamma-p) \dots (\gamma+p-1)}{k^{2p+1}} J_{\gamma-1-p}.$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$J = \int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(\alpha, \gamma, kz) F(\alpha', \gamma, k'z) dz.$$

Представляем функцию  $F(\alpha', \gamma, k'z)$  в виде интеграла (d.9) и после интегрирования по  $dz$  с помощью формулы (f.3) (с  $n=0$ ) находим

$$J = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha') \Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha')} \oint_{C'} (-t)^{\alpha'-1} (1-t)^{\gamma-\alpha'-1} (\lambda - k't)^{\alpha-\gamma} (\lambda - k't - k)^{-\alpha} dt.$$

Подстановкой  $t \rightarrow \lambda t / (k't + \lambda - k')$  этот интеграл приводится к виду (e.3), давая в результате

$$J = \Gamma(\gamma) \lambda^{\alpha+\alpha'-\gamma} (\lambda - k)^{-\alpha} (\lambda - k')^{-\alpha'} F\left(\alpha, \alpha', \gamma, \frac{kk'}{(\lambda - k)(\lambda - k')}\right).$$

Если  $\alpha$  (или  $\alpha'$ ) есть целое отрицательное число  $\alpha = -n$ , то с помощью соотношения (e.7) это выражение может быть переписано в виде

$$J = \frac{\Gamma^2(\gamma) \Gamma(\gamma + n - \alpha')}{\Gamma(\gamma + n) \Gamma(\gamma - \alpha')} \lambda^{-n+\alpha'-\gamma} (\lambda - k)^n (\lambda - k')^{-\alpha'} F\left(-n, \alpha', -n + \alpha' + 1 - \gamma, \frac{\lambda(\lambda - k - k')}{(\lambda - k)(\lambda - k')}\right).$$

Наконец, рассмотрим интегралы вида

$$J_\nu^{sp}(\alpha, \alpha') = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k+k'}{2}z\right) z^{\gamma-1+s} F(\alpha, \gamma, kz) F(\alpha', \gamma-p, k'z) dz.$$

Значения параметров предполагаются такими, что интеграл сходится абсолютно;  $s, p$  - целые положительные числа. Простейший из этих интегралов  $J_\gamma^{00}(\alpha, \alpha')$  равен, согласно (f.10),

$$J_\gamma^{00}(\alpha, \alpha') = 2^\gamma \Gamma(\gamma) (k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma} (k'-k)^{-\alpha} \times \\ \times (k-k')^{-\alpha'} F\left(\alpha, \alpha', \gamma, -\frac{4kk'}{(k'-k)^2}\right),$$

а если  $\alpha$  (или  $\alpha'$ ) - целое отрицательное число ( $\alpha = -n$ ), то, согласно (f.11), можно также написать

$$J_{\gamma}^{00}(-n, \alpha') = 2^{\gamma} \frac{\Gamma(\gamma)(\gamma - \alpha')(\gamma - \alpha' + 1) \dots (\gamma - \alpha' + n - 1)}{\gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)} \times \\ \times (-1)^n (k + k')^{-n + \alpha' - \gamma} (k - k')^{n - \alpha'} \times \\ \times F \left[ -n, \alpha', \alpha' + 1 - n - \gamma, \left( \frac{k + k'}{k - k'} \right)^2 \right].$$

Общая формула для  $J_{\gamma}^{sp}(\alpha, \alpha')$  может быть выведена, но она настолько сложна, что ею неудобно пользоваться. Удобнее пользоваться рекуррентными формулами, позволяющими свести интегралы  $J_{\gamma}^{sp}(\alpha, \alpha')$  к интегралу с  $s = p = 0^1$ ) Формула

$$J_{\gamma}^{sp}(\alpha, \alpha') = \frac{\gamma - 1}{k} \{ J_{\gamma-1}^{s,p-1}(\alpha, \alpha') - J_{\gamma-1}^{s,p-1}(\alpha - 1, \alpha') \}$$

дает возможность свести  $J_{\gamma}^{sp}(\alpha, \alpha')$  к интегралу с  $p = 0$ . После этого формула

$$J_{\gamma}^{s+1,0}(\alpha, \alpha') = \frac{4}{k^2 - k'^2} \left\{ \left[ \frac{\gamma}{2} (k - k') - k\alpha + k'\alpha' - k's \right] J_{\gamma}^{s,0}(\alpha, \alpha') + \right. \\ \left. + s(\gamma - 1 + s - 2\alpha') J_{\gamma}^{s-1,0}(\alpha, \alpha') + 2\alpha's J_{\gamma}^{s-1,0}(\alpha, \alpha' + 1) \right\}$$

позволяет произвести окончательное приведение к интегралу с  $s = p = 0$ .

## 2.9 Эллиптические функции Якоби (!?)

(целая книга про них написана, так что и я поизучаю, очень много задач на них!!!)  
(так быстро не доделать)

Р. F. Byrd. M. D. Friedman очень круто про них написали!!

### Суть

#### 2.9.1 Обозначения и определение (!?!?!?)

(уже на этом этапе могут быть проблемы)

#### Обозначение

Определение как обратные к эллиптическим интегралам эллиптическому интегралу первого рода.

Пусть

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}$$

По определению:

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi$$

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}$$

эллиптические функции являются функциями двух аргументов: амплитуды  $\varphi$  и параметра  $m$ . Оставшиеся девять эллиптических функций легко построить из трёх вышеприведённых. Это будет сделано ниже. Заметьте, что когда  $\varphi = \pi/2$ , то  $u$  равен четверти периода  $K$ .

## Определение в терминах тета-функций

Эллиптический модуль  $k$  равен  $k = \left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta}\right)^2$ . Полагая  $u = \pi\vartheta^2 z$ , получим

$$\operatorname{sn}(u; k) = -\frac{\vartheta_{11}(z; \tau)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(z; \tau)}$$

## примеры применения

КдФ (??? не усвоил это???)

Механика (?? тоже пока не вижу это??)

## 2.10 Эллиптические функции (!?)

(вообще в спецфункциях именно про них раздел!!! пока не дохожу просто, так что пока тут)

(в матане заготовлю интегралы эти!)

## Суть

### Определение (?????)

(проверю, норм ли оно????? никогда не думал, что они в неявном виде определяются!!)

Эллиптической функцией называют такую мероморфную функцию  $f$ , определённую на области  $\mathbb{C}$ , для которой существуют два ненулевых комплексных числа  $a$  и  $b$ , таких что

$$f(z + a) = f(z + b) = f(z), \quad \forall z \in C,$$

а также частное  $\frac{a}{b}$  не является действительным числом. Из этого следует, что для любых целых  $m$  и  $n$

$$f(z + ma + nb) = f(z), \quad \forall z \in C.$$

Любое комплексное число  $\omega$ , такое что

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall z \in C,$$

называют периодом функции  $f$ . Если периоды  $a$  и  $b$  таковы, что любое  $\omega$  может быть записано как

$$\omega = ma + nb$$

то  $a$  и  $b$  называют фундаментальными периодами. Каждая эллиптическая функция обладает парой фундаментальных периодов. Параллелограмм  $\Pi$  с вершинами в  $0, a, b, a + b$  называется фундаментальным параллелограммом.

### СВойства

- Не существует отличных от констант целых эллиптических функций (первая теорема Лиувилля).

- Любая эллиптическая функция с периодами  $a$  и  $b$  может быть представлена в виде

$$f(z) = h(\wp(z)) + g(\wp(z))\wp'(z),$$

рациональна. - Эллиптические функции неэлементарны, это было доказано Якоби в 1830-х годах.

## Эллиптические интегралы по Барбашовой

Дадим определения этих функций.

Эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода в нормальной форме Лежандра или неполными эллиптическими интегралами 1, 2 и 3 рода это функции  $F(\theta, k)$ ,  $E(\theta, k)$  и  $\Pi(\theta, n, k)$  независимой переменной  $\theta$  и параметров  $n, k$

$$\begin{aligned} F(\theta, k) &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(\theta, k) &= \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ \Pi(\theta, n, k) &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

Полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода это функции параметров  $k, n$

$$\begin{aligned} K(k) &= F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ E(k) &= E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \\ \Pi(n, k) &= \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) \end{aligned}$$

Для неполных и полных интегралов 2 и 3 рода принято использовать одинаковые обозначения, а именно  $E$  и  $\Pi$ .

Эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода в нормальной форме Якоби получаются заменой  $x = \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} F(x, k) &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}, \\ E(x, k) &= \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \\ \Pi(x, n, k) &= \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}. \end{aligned}$$

### Некоторые свойства $F(\theta, k)$ , $E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$

(барбашова и др.)

Приведем некоторые свойства эллиптических интегралов  $F(\theta, k)$ ,  $E(\theta, k)$  и  $\Pi(\theta, n, k)$  (см. (2.162)).

Предполагается, что  $0 < k < 1$ .

1. Поскольку  $0 < 1 - k^2 \sin^2 \theta < 1$  при  $0 < k < 1$ , то  $F(\theta, k) > E(\theta, k)$ ,  $K(k) > E(k)$  (?? и что с того???)

2. Выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} \frac{d(aF + bE)}{d\theta} &= \frac{a + b(1 - k^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{(a + b) - bk^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= k^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{dF}{d\theta} \right)^3, \quad \frac{d^2 E}{d\theta^2} = -k^2 \sin \theta \cos \theta \frac{dF}{d\theta} \end{aligned}$$

(??? это вообще нужно???)



## Применения эллиптических интегралов для вычисления других

3. Положив  $a = -b = 1/k^2$ , получим из формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_1(\theta, k) \equiv \frac{F(\theta, k) - E(\theta, k)}{k^2} = \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

4. Положив  $a = 1 - 1/k^2, b = 1/k^2$ , получим из формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_2(\theta, k) \equiv \frac{1}{k^2} E(\theta, k) - \frac{1 - k^2}{k^2} F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

5. Производные эллиптических интегралов по параметру:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int_0^\theta \frac{k \sin^2 \theta d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{k'^2} \left( \frac{E - k'^2 F}{k} - \frac{k \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \right),$$

где  $k'^2 = 1 - k^2$ . Эта формула проверяется дифференцированием правой и левой ее части по  $\theta$  с учетом формулы для  $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$ . Согласно (2.295) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial k} = - \int_0^\theta \frac{k \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{E - F}{k}.$$

6. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \int_0^\theta \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену  $\sin^2 \theta = u$ . Тогда  $2 \sin \theta \cos \theta d\theta = du$  и

$$G_4(u, \mu, \nu) = \int_0^u \frac{\sqrt{1-x} dx}{2\sqrt{x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным известным интегралом

$$\int_d^u \frac{\sqrt{c-x} dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)}(x-d)} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left[ (a-d) \Pi \left( \beta, \frac{d-c}{a-c}, r \right) - (a-c) F(\beta, r) \right],$$

где  $a > b > c \geq u > d$  и  $\beta = \arcsin \sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}$ ,  $r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$ .

(!! так вот оказывается, где вылазят эл интегралы!!! чет совсем в матане и спецфункциях плохая к ним подготовка.)

Положив  $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$ , получим

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ \nu \Pi \left( \beta, \frac{1}{1-\nu}, r \right) - (\nu-1) F(\beta, r) \right],$$

и  $\beta = \arcsin \sqrt{\frac{(\nu-1) \sin^2 \theta}{\nu - \sin^2 \theta}}$ ,  $r = \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}}$ .

При  $\theta = \pi/2$  имеем  $\beta = \pi/2$ . Тогда

$$G_4 \left( \frac{\pi}{2}, \mu, \nu \right) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ \nu \Pi \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{1-\nu}, r \right) - (\nu-1) K(r) \right].$$

7. Рассмотрим выражение  $\sigma = \cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$ . Домножив и поделив его на  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$ , имеем

$$\sigma = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \frac{k^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Используя (2.294), преобразуем второе слагаемое

$$\begin{aligned} -\frac{k^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} &= \cos \theta \sin \theta \frac{d^2 E}{d\theta^2} = \frac{d \left( \cos \theta \sin \theta \frac{dE}{d\theta} \right)}{d\theta} - \\ &- (2 \cos^2 \theta - 1) \frac{dE}{d\theta} = \frac{d \left( \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \right)}{d\theta} - 2\sigma + \frac{dE}{d\theta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$3\sigma = \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{d \left( \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \right)}{d\theta} + \frac{dE}{d\theta}.$$

Отсюда с учетом  $G_2$  (???) находим

$$\begin{aligned} G_3(\theta, k) &\equiv \int_0^\theta \cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \cos \theta \sin \theta \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + \frac{1 + k^2}{3k^2} E(\theta, k) - \frac{1 - k^2}{3k^2} F(\theta, k). \end{aligned}$$

8. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_5(\theta, \mu, \nu) \equiv \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену  $\sin^2 \theta = u$ . Тогда  $2 \sin \theta \cos \theta d\theta = du$  и

$$G_5(u, \mu, \nu) = \int_0^u \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\beta, r),$$

где  $a > b > c \geq u > d$ , а  $\beta$  и  $r$  находятся из (2.299). Положив  $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$ , получим

$$G_5(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} F(\beta, r)$$

где  $\beta$  и  $r$  находятся из (2.301).

9. Пусть  $\nu > \mu > 1$ . Рассмотрим функцию

$$G_6(\theta, \mu, \nu) \equiv \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2 \theta} \sqrt{\nu - \sin^2 \theta}}.$$

Заметим, что  $G_6(\theta, \mu, \nu) = G_5(\theta, \mu, \nu) - G_4(\theta, \mu, \nu)$ , поэтому

$$G_6(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}} \left[ F(\beta, r) - \Pi \left( \beta, \frac{1}{1-\nu}, r \right) \right],$$

где  $\beta$  и  $r$  находятся из (2.301).

## Эллиптический интеграл 1 рода в двух словах

Эллиптический интеграл 1 рода есть

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

- так называемый полный эллиптический интеграл первого рода. При  $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$  (малые колебания) разложение функции  $K(k)$  дает

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \dots \right)$$

(?? что еще нужно про него знать?)

Встречается он в задаче про период колебания математического маятника.  
и еще где?

## эллиптический интеграл 2 рода

тут хз.

## Типичные математические преобразования для прихода к эллиптическим интегралам

что-то там нужно заменять как синус, пока что не отработал.

## О применениях эллиптических интегралов

(в пер действие-угол встречаются, но я еще не оттренировал это, просто видел, что есть, потом прописывать буду.)

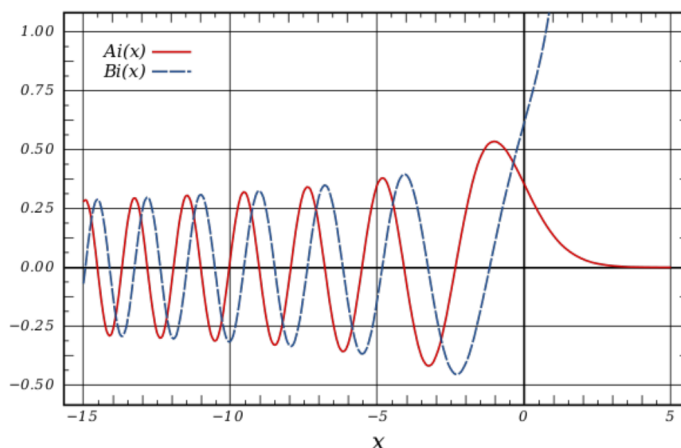
При построении переменных действие-угол решение может выражаться в специальных функциях, называемых эллиптическими интегралами.

Но кст рил, в маятниках, задаче Кеплера и особенно в пер действие-угол, больше особо не замечал применений.

## 2.11 Другие типичные

### 2.11.1 Функция Эйри

Суть



(?? хватит такого мелкого раздела на неё???)

## Определение

В данном разделе мы анализируем решения уравнения Эйри (Airy) которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным применением уравнения Эйри является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (3.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной  $x$ . Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1, где обсуждается общее уравнение (3.93). Приведем здесь логику раздела 3.7.1 для частного случая уравнения (3.11). Запишем решение этого уравнения в виде контурного интеграла

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt)$$

Где  $C$  - некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Мы будем считать, что подынтегральное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и производим интегрирование по частям по  $t$ , считая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид  $Z \propto \exp(-t^3/3)$ . Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3).$$

Контур  $C$  в представлении (3.13) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур  $C$  должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение  $\exp(xt - t^3/3)$  в бесконечности определяется фактором  $-t^3$ , имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю:  $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$ ,  $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$ ,  $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$  смотри рисунок 3.4, секторы I, II, III, Контур  $C$  должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независимых решения, что соответствует второму порядку у уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы  $\exp(xt - t^3/3)$  стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль

мнимой оси. Введя обозначение  $t = iu$ , мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \cos(xu + u^3/3),$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях  $|x|$ . При больших отрицательных  $x$  в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы  $u = \sqrt{|x|}$ , окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших  $|x|$ . Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

При больших положительных  $x$  стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку  $t = -x^{1/2}$  (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находим

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

График зависимости функции Эйри от  $x$  приведен на рисунке 3.5. На этом же графике красным цветом приведены асимптотики (3.15, 3.16).

В качестве второго решения уравнения Эйри (3.11) выбирают обычно функцию

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du [\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3)]$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для  $\text{Bi}$  получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен. Сравнение функций Эйри  $\text{Ai}$  и  $\text{Bi}$  проведено на рисунке 3.6.

## Задача

3.2.1. Найти значения  $\text{Ai}(0)$ ,  $\text{Ai}'(0)$ ,  $\text{Bi}(0)$ ,  $\text{Bi}'(0)$ .

Асимптотическое поведение функции  $\text{Bi}$  при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Асимптотическое поведение функции  $\text{Bi}$  при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Сравнение функции  $\text{Bi}(x)$  и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

## Задача

3.2.2. Получить асимптотическое поведение  $\oint \text{Bi}(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$

Асимптотическое поведение функций Эйри  $\text{Ai}(x)$  и  $\text{Bi}(x)$  можно установить и методом WKБ, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом  $U = x$ . Таким образом  $p = \sqrt{x}$  и  $S = (2/3)x^{3/2}$ . Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных  $x$  мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp(\pm 2x^{3/2}/3).$$

Знак  $+$  относится к функции  $\text{Bi}(x)$ , смотри (3.18), а знак минус относится к функции  $\text{Ai}(x)$ , смотри (3.16). При больших отрицательных  $x$  мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp(\pm 2i|x|^{3/2}/3).$$

Поскольку  $\text{Ai}(x)$  и  $\text{Bi}(x)$  являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных  $x$  имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos(2|x|^{3/2}/3 + \varphi),$$

где  $\varphi$  - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

## Задача

3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения  $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$  при больших значениях  $|x|$ .

асимптот поведение

вот это хоть затронуто было

явление Стокса для нее

О подходе через теорию Пикара-Лефшица (????)

(пока этот вопрос остается, не шарю.)

## 3 Сферические функции

(тут много теории будет и у нее много приложений!)

(почитаю тут статьи потом!)

### 3.0.1 Теория

Суть сферических функций

Функциями Лежандра первого рода (присоединенными «полиномами» Лежандра) называются регулярные в точках  $\pm 1$  решения дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0,$$
$$l = 0, 1, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l.$$

При  $m = 0$  они становятся полиномами Лежандра. Приведем здесь формулу Родрига для этих функций:

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l.$$

Присоединенные «полиномы» Лежандра входят в структуру сферических функций:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

являющихся регулярными на единичной сфере решениями уравнений

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] \Psi(\theta, \varphi) = 0;$$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \varphi} + m \right] \Psi(\theta, \varphi) = 0$$

и образующими на ней полную ортонормированную систему - базис:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi)$$

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению  $\cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) =$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

представляющему собой разложение его левой части по базису сферических функций. Приведем явный вид некоторых сферических функций:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}.$$

### Теория по Мэтьюзу и Уоллеру

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; \quad Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi};$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm 2i\varphi}; \quad Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm 2i\varphi};$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. Формулу (1.69)]

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

Легко убедиться, что если  $y$ -решение дифференциального уравнения Лежандра, то  $(1-x^2)^{m/2} (d/dx)^m y$  - решение присоединенного уравнения. Для положительного целого числа  $m$  определим

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x).$$

Величину  $P_n^m$  называют присоединенной функцией Лежандра.

Интеграл ортогональности и нормировки присоединенных функций Лежандра имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения  $m$ . Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным  $m$  представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд вида

$$f_\Delta(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x).$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию  $f(\Omega)$ , где  $\Omega$  обозначает совокупность углов  $\theta$  и  $\phi$ , можно разложить в ряд

$$f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{mn} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi).$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств  $P_n^{|m|}$ . Обычно определяют сферические гармоники

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \times \begin{cases} (-1)^m, & \text{если } m \geq 0, \\ 1, & \text{если } m < 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Предлагаем читателю проверить, что (7.32) можно записать также в виде

$$Y_{lm}(\Omega) = \frac{1}{2^l l!} \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} \exp(im\phi) (-\sin \theta)^m \times \frac{d^{l+m}}{d(\cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l.$$

Это равенство верно как для положительных, так и для отрицательных  $m$ . Из (7.32) либо из (7.33) следует, что

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega).$$

В (7.32) нормировочная константа выбрана так, что

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Разложение (7.31) теперь можно записать в виде

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}(\Omega),$$



причем  $B_{lm}$  легко находится из (7.35):

$$B_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) f(\Omega).$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой теоремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega) = \int d\Omega' f(\Omega') \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega).$$

150 Так как (7.38) верно для произвольной  $f(\Omega)$ , то

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega').$$

Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  характеризуется свойствами  $\delta(\Omega - \Omega') = 0$  при  $\Omega \neq \Omega'$ ,  $\int d\Omega \delta(\Omega) = 1^\circ$ . Функция  $\delta(\Omega - \Omega')$ , конечно, зависит только от угла  $\gamma$  между направлениями  $\Omega$  и  $\Omega'$ . Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

Так как функция  $\delta(\Omega - \Omega')$  зависит только от  $\gamma$ , разложим ее в ряд по полиномам Лежандра

$$\delta(\Omega - \Omega') = \sum_l B_l P_l(\cos \gamma)$$

Коэффициенты  $B_l$  даются формулой [см. формулу (7.21)]

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \gamma) \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma) = \\ &= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega \delta(\Omega - \Omega') P_l(\cos \gamma), \end{aligned}$$

так как  $2\pi d(\cos \gamma)$  как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции  $\delta(\Omega - \Omega')$ , из (7.42) получаем

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma).$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтения гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника  $Y_{lm}(\Omega)$  становится линейной комбинацией сферических гармоник  $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$  от новых угловых координат  $\bar{\Omega}$ . Подчеркнем, что в с е . э т и г а р м о н и к и и м е ю т о д и н а к о в ы й д е к с  $l$ , т. е.

$$Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^l C_{mm'}^l Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

причем коэффициенты  $C_{mm'}^l$  зависят от величины поворота  $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ , а также от  $l, m$  и  $m'$ .

Так как из (7.32)  $Y_{l0} = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \theta)$ , то член  $P_l(\cos \gamma)$  в (7.44) можно записать как  $P_l(\cos \gamma) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{l0}(\bar{\Omega})$ , где  $\bar{\Omega}$  — угловые координаты того же направления, что и  $\Omega$ , но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль  $\Omega'$ . Тогда из (7.45) имеем (с переставленными  $\Omega$  и  $\Omega'$ )

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m'=-l}^l A_{0m'}^l(\Omega') Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения  $l$  равны, т. е.

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega).$$

С помощью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos m(\phi - \phi')$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.

(????!?!? так они нормированы на дельта функцию или на полином лежандра???)

### 3.0.2 Свойства сферических функций для квантовой механики (?)

(отдельно, наверное, указать это нужно.)

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \\ &= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

### 3.0.3 Scalar spherical harmon

### 3.0.4 Generalized spherical-harmonic tensor

### 3.0.5 tensor spherical harmonics

## 4 Некоторые многочлены

### 4.0.1 Полиномы Эрмита

Суть

производящая ф-я

их ортог-сть

интегр представление

## Теория

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку  $(-1, 1)$ . Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора. Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции:

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

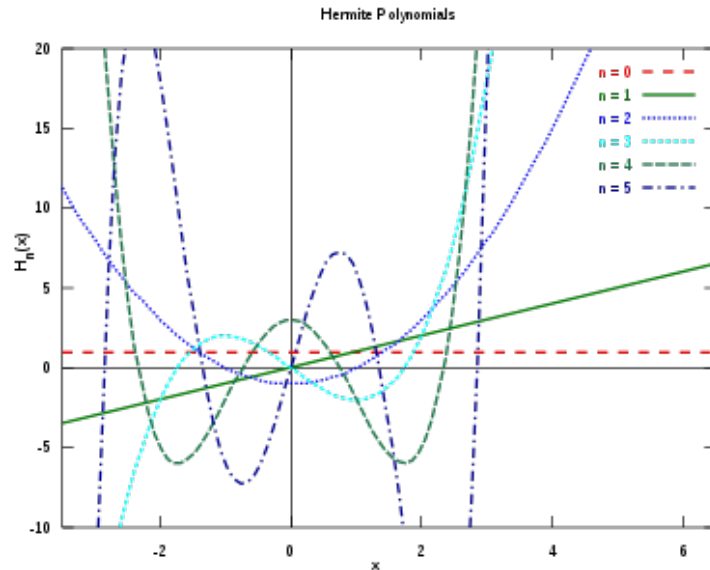
где  $n$  называется индексом полинома Эрмита. Легко понять, что  $H_n(x)$  является полиномом  $n$ -ой степени, поскольку наибольшая степень  $x$  при  $t^n$  в разложении производящей функции  $\exp(-t^2 + 2tx)$  в ряд Тейлора получается при разложении  $\exp(2tx)$ . Производящая функция  $\exp(-t^2 + 2tx)$  инвариантна относительно преобразования  $t, x \rightarrow -t, -x$ . При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент  $H_n$ , а  $t^n$  заменяется на  $(-1)^n t^n$ . Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ . Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями  $x$ , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями  $x$ .

Раскладывая  $\exp(-t^2 + 2tx)$  до второго порядка по  $t$ , находим выражения для первых трех полиномов Эрмита

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Следующие полиномы Эрмита могут быть найдены, если разложить  $\exp(-t^2 + 2tx)$  до следующих порядков по  $t$ .

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке ниже.



Полагая в выражении (3.65)  $x = 0$  и раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n - 1)!!,$$

где  $(2n - 1)!! \equiv (2n - 1)(2n - 3) \dots$ . Далее, при малых  $x$  справедливо соотношение  $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$ . Снова раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n + 1)!!.$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по  $x$  и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

Далее, беря производную по  $t$  от соотношения (3.65) и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$  в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух.

Соотношение (3.69) приводит нас к выводу, что функция  $H_n(x)$  имеет ровно  $n$  нулей при действительном  $x$ .

Другими словами, все корни уравнения  $H_n(x) = 0$  действительны. Проведем доказательство по индукции. Если  $H_n(x)$  имеет  $n$  нулей, то в соответствии с (3.69) функция  $H_{n+1}(x)$  имеет  $n$  экстремумов. Между ними лежит  $n - 1$  нулей функции  $H_{n+1}(x)$ . Еще два нуля  $H_{n+1}(x)$  лежат вне крайних экстремумов  $H_{n+1}(x)$ , поскольку на больших  $x$  в полиноме доминирует член с наивысшей степенью  $x$ , то есть на больших  $x$  функция  $H_{n+1}(x)$  монотонно стремится к  $\infty$  или  $-\infty$ .

Выражая в соотношении (3.69)  $H_{n-1}$  в соответствии с (3.70), находим

$$\left( \frac{d}{dx} - 2x \right) H_n = -H_{n+1}.$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2).$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при  $n = 0$ , и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку  $(d/dx - 2x)[\exp(x^2)A] = \exp(x^2)dA/dx$  для произвольной функции  $A(x)$ . Соотношение (3.72) еще раз показывает, что  $H_n$  является полиномом степени  $n$ .

## Задача

3.5.1. Доказать, что старший член разложения  $H_n(x)$  имеет вид  $2^n x^n$ .

## Задача

3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

Легко проверить, что

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp(-t^2 + 2tx) = 0.$$

При меняя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравняв результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита  $n$ -го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0.$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6). Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены  $x \rightarrow -x$  и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанным выше о четности полиномов Эрмита. Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69)  $H_{n-1}$ , выраженное в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по  $x$ . Выражая затем из (3.69)  $dH_{n+1}/dx$ , находим уравнение (3.73).

Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням  $x$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.73) и приравнявая коэффициенты при степенях  $x$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения  $u$  в ряд по  $x$ . При четных  $n$  ряд по  $x$  обрывается на  $k = n/2$ , и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным  $H_n$  с четным индексом. При нечетных  $n$  мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных)  $x$  поскольку  $a_{k+1} \approx a_k/k$  при больших  $k$ . Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных  $n$ . Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням  $x$  пропорционально  $H_n(x)$  для нечетных  $n$  и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных  $n$ .

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp(-\xi^2 + 2\xi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2 + 2\xi(x + it)]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по  $\xi$ , находим

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n \exp(-t^2)$$

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде  $\exp[n \ln(x + it) - t^2]$ . Для больших  $n$  можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ . Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}(2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos(\sqrt{2n}x - \pi n/2),$$

справедливое при  $n \gg x^2, 1$ .

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  имеют противоположные

действительные части, что и обеспечивает условие  $n \gg x^2, 1$ . В обратном предельном случае  $x^2 \gg n$  обе перевальные точки  $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$  лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению  $H_n \propto x^n$ , то есть на больших  $x \gg \sqrt{n}$  главный вклад в  $H_n$  определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале  $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$ , где работает приближение (3.75), осцилляции дают  $\sim n$  нулей функции  $H_n$ , в соответствии с общими свойствами  $H_n$ .

Уравнение (3.73) для  $H_n$  может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = -2x, U = 0$ . Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0$$

где в соответствие с (2.67)  $\rho = \exp(-x^2)$ , а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдем теперь константы  $A_n$ , фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

## Задача

Доказать соотношение (3.77).

Указание: составить комбинацию  $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$ , выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся равенство по  $x$  с весом  $\exp(-x^2)$ . На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

Таким образом, любую функцию  $f(x)$ , заданную на действительных  $x$  и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \\ a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Это разложение представляет собой модификацию разложения в ряд Тейлора.

Отметим, что условие полноты (2.70) имеет вид

$$\sum_n \frac{\exp(-x^2/2 - y^2/2)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x - y).$$

## Задача

3.5.4. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

## Задача

3.5.5. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy).$$

### Задача

3.5.6. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp [-(x-y)^2] H_n(x)$$

### Задача

3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp (-x^2) H_{2n-1}(xy)$$

### Задача

3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp (-x^2) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полином Лежандра.

### Задача

3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp (-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

### Задача

3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp (-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

### Задача

3.5.11. Доказать соотношение

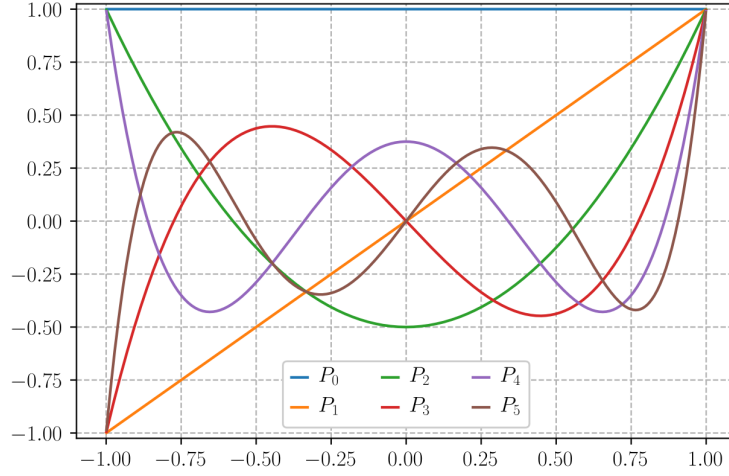
$$H_n(x) = \exp \left( -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \right) (2x)^n.$$

Указание: просуммировать по  $n$  правую часть этого соотношения с весом  $t^n/n!$  и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (3.65).

## 4.0.2 Многочлены Лежандра (!!!?)

(тут к теормину по математике 2 заготовки!)

## Суть



## Теория

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда  $1/R$  равен нулю,  $\nabla^2(1/R) = 0$ . Здесь  $R$  — расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку  $(0, 0, 1)$  и перейдем к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . В этом случае  $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ . Условие же  $\nabla^2 R^{-1} = 0$  записывается в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Здесь отсутствуют производные по  $\varphi$ , поскольку  $R$  от этой переменной не зависит. Переходя к переменной  $\mu = \cos \theta$ , которая меняется от  $-1$  до  $+1$ , мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0$$

Полиномы Лежандра  $P_n(\mu)$  вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины  $R^{-1}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n.$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по  $r$  (точки ветвления)  $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$  лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при  $r < 1$ . Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням  $r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}.$$

Этот ряд сходится при  $r > 1$ . Как следует из (3.44) или (3.45), функция  $P_n(\mu)$  является полиномом  $n$ -го порядка, симметричным по  $\mu$  при четных  $n$  и антисимметричным по  $\mu$  при нечетных  $n$ . Отметим также равенство  $P_n(1) = 1$ . Оно непосредственно следует из



того, что при  $\mu = 1R = 1 - r$ , а  $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$ . Аналогично получается равенство  $P_n(-1) = (-1)^n$

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением  $R^{-1}$  в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1).$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале  $-1 < \mu < 1$ . В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

### Задача

3.4.1. Найти значение  $P_{2n}(0)$ . Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо  $R^{-1}$  в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1)P_n = 0,$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням  $r$ . В терминах угла  $\theta$ ,  $\mu = \cos \theta$ , уравнение (3.47) переписываются в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n + \cot \theta \frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0,$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu(2r\partial_r + 1) + (r^2\partial_r + r),$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_1$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Это соотношение позволяет явно находить  $P_{n+1}(\mu)$ , если известны выражения для  $P_{n-1}(\mu)$  и  $P_n(\mu)$ . Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

### Задача

3.4.2. Найти выражение для  $P_3(\mu)$ , воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

### Задача

3.4.3. Доказать соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) \\ &= (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}. \end{aligned}$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (3.51). Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0,$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1 - \mu/r)\partial_\mu$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_2$  к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu} (\mu P_n) - \frac{d}{d\mu} P_{n-1}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n.$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , то в силу (3.51) оно справедливо и для  $P_{n+1}$ . Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

### Задача

3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для  $P_{n+1}$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ .

### Задача

3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для  $P_n$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$ .

### Задача

3.4.6. Найти значение  $P_{2n}(0)$ , исходя из (3.55).

Соотношение (3.54) означает, что член  $n(n+1)P_n$  в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$(\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n [\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)]$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при  $\mu = 1$  обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

### Задача

3.4.7. Докажите, что если соотношение (3.56) справедливо для  $n-1$ , то в силу соотношений (3.51, 3.54) оно справедливо и для  $n$ .

### Задача

3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

### Задача

3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (3.54, 3.56).

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по  $z$  при  $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$ , которые лежат на единичной окружности, если  $\mu$  - действительное число и  $|\mu| < 1$ . Эти точки ветвления расположены в точках  $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$  можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости  $z$ , которая определяется условиями  $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$ , где  $\theta$  предполагается лежащим в интервале  $0 < \theta < \pi$ , а  $\vartheta$  - аргумент  $z$ . Это построение представлено на рисунке 3.10, где разрез показан черной дугой. Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем" через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции  $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ . Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции  $z^{-n-1}(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ , которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе  $z = e^{i\vartheta}$ , тогда  $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos \theta - \cos \vartheta)$ . Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу  $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$ . В результате получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n + 1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}},$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших  $n$ . В этом случае в силу быстрой осцилляции  $\sin[(n + 1/2)\vartheta]$  главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя  $\vartheta = \theta + x$ , раскладывая по  $x$  подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n + 1/2)(\theta + x)]}{\sqrt{2 \sin \theta x}}$$

Вычисляя здесь интеграл по  $x$ , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n + 1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n + 1)\pi \sin \theta}}$$

### Задача

3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58). Выражение (3.59) можно получить также методом WKБ (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших  $n$ . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной  $t = \ln \tan(\theta)$ . Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P_n = 0.$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin \theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили  $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$ . При больших  $n$  выполняется неравенство  $dp/dt \ll p^2$ , что оправдывает применение метода WKБ. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке  $\mu = 1$ , когда оно разлагается в ряд Тейлора по  $x = \mu - 1$ . Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной  $x$ :

$$(2x + x^2) P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора  $P$  по  $x$ ,  $P = \sum_k p_k x^k$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом  $n$  цепочка соотношений обрывается на  $k = n$ , и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с  $P_n(\mu)$ . Если же  $n$  не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени  $x$ . В пределе больших  $k$  мы имеем  $p_{k+1} = -(1/2)p_k$ . Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при  $x = -2$ , то есть  $\mu = -1$ . Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке  $\mu = 1$ , так и в точке  $\mu = -1$ . Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu}$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале  $-1 < \mu < 1$  и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = 0$$

если  $n \neq l$ .

### Задача

3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: воспользоваться представлением (3.55).

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Птурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = \cot \theta$  и  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (2.67)  $\rho = \sin \theta$ . Интервал же интегрирования по углу  $\theta$  распространяется от 0 до  $\pi$ . Условие (2.61) переписывается в виде  $\int d\mu f_n f_m = 0$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, в терминах переменной  $\mu$  полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале - ние (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}.$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале  $(-1, +1)$ , удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) P_k(x) P_k(y) = \delta(x-y).$$

### Задача

3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: воспользоваться соотношением (3.44).

### Задача

3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3)

### Задача

3.4.14. Найти  $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ .

### Задача

3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  монома  $x^k$ .

### О применениях многочленов Лежандра (!!!!!)

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае

### Задача

допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

### 4.0.3 Присоединенные полиномы Лежандра

### 4.0.4 Многочлены Лагерра (!!!?)

#### Суть (??)

В математике многочлены Лагерра, названные в честь Эдмона Лагерра (1834–1886), являются каноническими решениями уравнения Лагерра:

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0,$$

являющегося линейным дифференциальным уравнением второго порядка. В физической кинетике эти же многочлены (иногда с точностью до нормировки) принято называть полиномами Сонина или Сонина - Лагерра[1]. Многочлены Лагерра также используются в квадратурной формуле Гаусса - Лагерра численного вычисления интегралов вида:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx.$$

Многочлены Лагерра, обычно обозначаемые как  $L_0, L_1, \dots$ , являются последовательностью полиномов, которая может быть найдена по формуле Родрига

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

Эти полиномы ортогональны друг другу со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

Последовательность полиномов Лагерра - это последовательность Шесрфера. Многочлены Лагерра применяются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном. Имеются и другие применения многочленов Лагерра.

В следующей таблице приведены несколько первых многочленов Лагерра:

$n$	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$

Рекуррентная формула

Полиномы Лагерра можно определить рекуррентной формулой:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} [(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)], \quad \forall k \geq 1,$$

предопределив первые два полинома как:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x. \end{aligned}$$

Обобщённые полиномы Лагерра

Обобщённые полиномы Лагерра  $L_n^a(x)$  являются решениями уравнения:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0,$$

так что  $L_n(x) = L_n^0(x)$ .

#### 4.0.5 Многочлены Чебышева

Суть

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x\end{aligned}$$

О применениях

О применениях в вычислительной математике (??)

(напишу потом, пока только там их встречал. почему именно они нужны, а не другие?)

## Part III

# Обобщенные функции

### 4.1 Свойства обобщенных функций

(по идее в матане тоже это будет.)

#### свойства обобщенных функций

Умножение обобщенных функций может быть определено либо как предел произведения  $\varepsilon$ -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если  $f$  и  $g$  - две обобщенные функции, то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае  $f$ ) должна быть достаточно «хорошей», чтобы имеющаяся сингулярность функции  $g$  не превысила функционал, так и вычисляя производную какого-либо  $\varepsilon$ -представления. Трехмерная функция  $\delta(\mathbf{r})$  определяется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему  $\mathbf{k}$ -пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вид

$$\int d^3\mathbf{r} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку  $\mathbf{r} = 0$ .

Если функция  $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$  и при этом регулярна в нуле, свойство (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r}) f(r) d^3\mathbf{r} = \int f(r) r^2 dr \int \delta(\mathbf{r}) d\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную» функцию  $\delta(r)$ :

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta'(r)}{r}$$

$\delta$ -функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, поскольку элемент объема содержит  $r^2$ . Множитель  $1/2\pi$  учитывает что интегрирование делить как  $1/z$ , но с особым выбором пути интегрирования (контура) для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул... (10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2.

Заметим, что для  $\delta$ -функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контур интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции  $1/z$ , представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций  $\wp_r^{\frac{1}{r}}$  не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\begin{aligned} \wp_r^{\frac{1}{x}} \cdot \wp_r^{\frac{1}{x}} &= \left( \wp_r^{\frac{1}{x}}, \wp_r^{\frac{1}{x}} \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{M}{\varepsilon} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$



2. Вместе с тем определена производная от функции  $\wp$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) &= - \left( \wp \frac{1}{x}, \varphi'(x) \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(x) + \varphi'(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Если воспользоваться  $\varepsilon$ -представлением, получаем

$$\left( \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x} \right)_{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = - \frac{x^2 - \varepsilon^2}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}$$

3. Покажем, что

$$\wp \frac{1}{x} \cdot \delta(x) = -\frac{1}{2} \delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся  $\varepsilon$ -представлениями обеих функций:

$$\left( \wp \frac{1}{x} \right)_{\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \delta_{\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad \delta'_{\varepsilon}(x) = -\frac{2\varepsilon x}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

результат (10.44).

4. Можно так же показать, что не определено произведение двух  $\delta$ -функций, имеющих одинаковый аргумент.

5. Так же как и во втором примере, используя  $\varepsilon$ -представления можно показать, что

$$\left( \wp \frac{1}{x} + \pi \delta(x) \right) \left( \wp \frac{1}{x} - \pi \delta(x) \right) = -\frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохоцкого:

$$\frac{1}{x - i0} \cdot \frac{1}{x - i0} = -\frac{d}{dx} \frac{1}{x - i0} = -i\pi \delta'(x) - \frac{d}{dx} \wp \frac{1}{x}$$

1. Показать, что в смысле обобщенных функций

$$\int_0^{\infty} \sin k_1 x \cos kx dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k + k_1} - \frac{1}{k - k_1} \right)$$

2. Показать, что при  $a \neq b$  произведение

$$\delta(x - a)\delta(x - b) = 0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax + by)\delta(cx + dy) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \delta(x)\delta(y)$$

## 4.2 Дельта функция дирака

### 4.2.1 Основы дельта-функции

**определение**

Оперирование с идеальными объектами в физике такими как дит к появлению в математическом аппарате, описывающем эти объек- ты, так называемых обобщенных

функций. Наиболее известные и часты выражения, умноженные на «хорошую» функцию. Поэтому свойства обобщенных функций определяются свойствами интегралов — они имеют интегральный смысл.

Таким образом, математическая теория обобщенных функций строится на сопоставлении им функционалов, т. е. интегральных выражений, содержащих произведения с хорошими «функциями». Например, для  $\delta(x)$ -функции определяется функционал с произвольной «хорошей» функцией:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

В функционале происходит «сглаживание» (усреднение) сингулярности  $\delta$ -функции. В физике это отвечает замене модели точечного объекта некоторым распределением в физически бесконечно малом объеме так что среднее значение распределенного объекта совпадает с величиной точечного.

Прежде всего подчеркнем, что  $\delta$ -функция — это операторная величина, которая приобретает «реальный» смысл только если она стоит под знаком интеграла. Иными словами,  $\delta$ -функция есть ядро линейного интегрального оператора. При этом само ядро не есть функция в обычном смысле.

Представления и определения  $\delta$ -функции мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас приведем, пожалуй, самое распространенное определение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{iKx} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos Kx dx \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}.$$

Сам по себе предел  $K \rightarrow \infty$  выражения (10.2), конечно, не существует, однако, если его правую часть умножить на «хорошую» (обычную) функцию, регулярную при  $x = 0$  и проинтегрировать по интервалу, включающему точку  $x = 0$ , а после интегрирования выполнить предельный переход, предел будет существовать:

$$\int_{-a}^b \delta(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y} dy = f(0)$$

Формула (10.3) определяет основное свойство  $\delta$ -функции и ее можно рассматривать как определение (10.1).

Наглядно  $\delta(x)$  можно представить себе как функцию, равную нулю при всех  $x \neq 0$ , но имеющую в точке  $x = 0$  столь сильную сингулярность, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Если формально продифференцировать определение (10.2), получим определение производной от  $\delta$ -функции:

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{K \cos Kx}{x} - \frac{\sin Kx}{x^2} \right)$$

которая имеет «реальный» смысл только в интегральном выражении. Если после выполнения интегрирования выполнить предельный переход так же, как и в формуле (10.3), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

Заметим, что интегрированием по частям, выражение (10.3) сводится к выражению (10.6), где производная  $\delta$ -функции определена в соответствии с (10.5)

## представления дельта-функции

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи появления  $\delta$ -функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. 1. Бесконечно медленное (адиабатическое) изменение физической величины (как правило - некоторого взаимодействия). В этом случае имеем интегральное выражение:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} e^{\pm i k x} dk$$

Действительно, выражение (10.7) обладает необходимыми свойствами:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \Big|_{x \neq 0} = 0$$

и соответственно при  $x = 0$  получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Вычислим теперь интеграл от дроби, стоящей под знаком предела:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon dx}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi(1 + y^2)} = \frac{2\pi i}{\pi} \operatorname{res} \frac{1}{1 + y^2} \Big|_{y=i} = 1$$

## Дельта функция в представлении Дирихле

2. Периодически меняющееся взаимодействие (представление Дирихле)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{\pm i k x} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \cos kx dk$$

Здесь роль малого  $\varepsilon$  играет  $1/N$ . В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Римана-Лебега: интеграл от произведения медленно меняющейся функции  $f(x)$  и периодической функции с малым периодом и средним за период равным нулю мал и в пределе равен нулю. Это имеет место, например для функций:  $\exp(iNx)$ ,  $\sin Nx$ ,  $\cos Nx$  при  $N \rightarrow \infty$ . Действительно, беря по частям интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx &= f(x) \frac{e^{iNx}}{iN} \Big|_a^b - \frac{1}{iN} \int_a^b f'(x) e^{iNx} dx = \\ &= \frac{1}{iN} (f(b) e^{iNb} - f(a) e^{iNa}) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \Big|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Проверим теперь выполнение основных свойств  $\delta$ -функции для выражения (10.8). Заметим, что в конечных пределах

$$\int_a^b \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x} \varphi(x) dx = 0$$

но интеграл в бесконечных пределах (по всей оси) отличен от нуля и равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1$$

Таким образом, согласно сформулированной выше теореме получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} \varphi(x) dx = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = \varphi(0).$$

Следовательно, функция (10.8) удовлетворяет основному свойству  $\delta$ -функции (10.1). Рассмотренные два представления наиболее часто встречаются в физических задачах.

### Дельта функция в представлении гауссовой экспоненты:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \text{Но} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \Big|_{x=0} = \infty.$$

Сама функция по знаменателю предела (10.10) выбрана нормированной на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = 1$$

Для любой хорошей функции, как и в представлении Дирихле можем записать:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} dx = \varphi(0)$$

### Дельта функция в представлении, похожем на Дирихле

(?? никак не называется?)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

Вновь легко проверяем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2} \Big|_{x=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Осталось убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от рассматриваемой функции равен 1. Для этого вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2} dy$$

Интеграл вычисляется дифференцированием по параметру  $\alpha$ :

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha y \cos \alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение  $I'(\alpha) = 1$ , получаем:  $I(\alpha) = \alpha + \text{const}$  с «начальным» условием  $I(0) = 0$ , поэтому  $I(\alpha) = \alpha$ . Заметим теперь, что заменой  $x/\varepsilon = y$  мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при  $\alpha = 1$ . Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству  $\delta$ -функции (10.1).

### Дельта функция в представлении Пикара

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле  $\varepsilon = N^{-1}$ . Легко убеждаемся:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} e^{-N|x|} \Big|_{x=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра  $N$ .

## Представление Стильтьеса

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx}$$

Проверяем выполнение необходимых требований:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \Big|_{x \neq 0} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \Big|_{x=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi} = \infty$$

Убедимся, что функция нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N \, dx}{2\pi \operatorname{ch} Nx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N e^{-Nx}}{\pi (1 + e^{-2Nx})} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Убедиться в том, что представление (10.14) удовлетворяет необходимому свойству (10.1) можно так же, как в случае с быстро убывающей гауссовой экспонентой (10.8).

В заключение параграфа отметим, что  $\delta$ -функция размерна, ее размерность обратна размерности аргумента:

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

### свойства

Подчеркнем еще раз, что свойства обобщенных функций не зависят от выбора представления, аппроксимирующего данную функцию: свойства обобщенных функций выполняются в пространстве основных, «хороших» функций. Например, в классе функций  $C^\infty$ , которые при  $|x| \rightarrow \infty$  стремятся к нулю вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени  $1/|x|$ . Таким образом, равенства в формулах понимаются как равенства соответствующих функционалов. В этом смысле обобщенную функцию можно рассматривать как ядро линейного интегрального оператора.

Например, основное свойство  $\delta$ -функции (10. 1) для какой-либо функции  $f(x)$  записанное в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

следует понимать как::

$$\begin{aligned} (f(x) \delta(x), \varphi(x)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = f(0) \varphi(0) = \\ &= f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Поскольку все свойства в классе основных функций переносятся на исследуемые функции, в физике принято в записи формул опускать функции  $\varphi(x)$ , и оставлять только «нужные» функции  $f(x)$ , как это представлено в формуле (10.1a). Перечислим основные свойства  $\delta$ -функции.

1. При «сдвиге» аргумента  $\delta$ -функции имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

2.  $\delta$ -функции четная:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

3.  $\delta$ -функции однородная:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Свойства (10.17) – (10.19) легко доказываются заменой переменной под интегралом в определении (10.1).

4.  $\delta$ -функция от функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

где  $f(x_i) = 0$ ,  $x_i$  – простые (некратные) корни.

Это свойство легко доказывается разложением функции  $f(x)$  в ряд Тейлора до первого порядка в окрестностях нулей:  $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \dots$  с учетом свойств (10.18) и (10.19)

5.  $x\delta(x) = 0$

6. Производная  $\delta$ -функции может быть записана только в интегральном соотношении:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx}(\delta(x)) dx = -f'(0)$$

Это свойство доказывается интегрированием по частям с учетом обращения в нуль на пределах интегрирования «хороших» функций. Свойство (10.21) обобщается на производную любого порядка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n}(\delta(x)) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. Интегральное представление (фурье-образ)  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

Это свойство можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для 1, поскольку из перечисленных выше свойств следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1$$

8. Функционал, определяющий действие  $\delta$ -функции, можно представить интегралом по замкнутому контуру в комплексной плоскости:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi(z) \frac{dz}{z} = \varphi(0)$$

## 4.2.2 Применения

### математические преобразования

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx dx$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(k+k_1)x + \cos(k-k_1)x) dx = \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k_1)x} + e^{i(k-k_1)x} \right) dx = 2\pi (\delta(k+k_1) + \delta(k-k_1)) \end{aligned}$$

2. Вычислить  $\delta(\sin x)$ . Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента  $\delta$ -функции:  $x_n = \pi n$ , соответственно  $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$ . Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \cos k_1 x \cos k x dx$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(k+k_1)x + \cos(k-k_1)x) dx = \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k+k_1)x} + e^{i(k-k_1)x} \right) dx = 2\pi (\delta(k+k_1) + \delta(k-k_1)) \end{aligned}$$

2. Вычислить  $\delta(\sin x)$ . Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента  $\delta$ -функции:  $x_n = \pi n$ , соответственно  $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$ . Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Коэффициенты Фурье равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} = \delta(x)$$

Если точка  $x = 0 \notin [a, b]$ , по теореме Римана-Лебега

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) dx = 0$$

Обходя точку  $x = 0$  в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} \varphi(x) dx &= \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_{\pm}} \frac{e^{\pm iNx}}{x \mp i0} dx = \\ &= \pm \frac{\varphi(0)}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{dx}{x} = \varphi(0) \end{aligned}$$

Что соответствует основному свойству  $\delta$ -функции.

Упражнения

1. Показать, что

$$\delta[(x - x_1)(x - x_2)] = \frac{1}{|x_1 - x_2|} (\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2))$$

2. Получить полезную формулу:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x - a) + \delta(x + a))$$

3. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \sin k_1 x \sin kx \, dx$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{e^{\pm iNx}}{x \pm i0} = 0$$

5. Показать, что

$$x^n \delta^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

6. Показать, что при  $k \geq n$  справедлива формула:

$$x^n \delta^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{d^k}{dx^k} (f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} x \delta^{(k)}(x) + k \delta^{(k-1)}(x) &= 0 \quad \text{при} \quad n = 1 \\ x^n \delta^{(n)}(x) &= (-1)^n n! \delta(x) \quad \text{при} \quad n = k \end{aligned}$$



### 4.2.3 Дополнения

о разных штукаx, которые мы также часто используем, схожих с ней.  
!! все, что не связано с дельта-функцией вынесу в запись про функан!!!

#### Применения дельта функции

**Задача о трамвайном билете с помощью дельта функции и метода перевала (?!!!!)**

(оч крутая задача, жаль, что вряд ли скоро ей займусь. другие решения не обсуждаю, где-то в другом месте их напишу, эту задачу подробно обсужу скорее всего в записи по математике.)

“Билетик” - это последовательность вида

$$n_1 n_2 \dots n_N m_1 m_2 \dots m_N$$

где для каждого  $i = 1, \dots, N$  параметры  $n_i$  и  $m_i$  - это целые числа от 0 до 9.

Будем называть билетик “счастливым”, если у него

$$\sum_{i=1}^N n_i = \sum_{i=1}^N m_i$$

Обозначим число счастливых билетиков как  $H(N)$ . Ваша задача посчитать  $H(N)$  в пределе  $N \gg 1$ .

Действовать можно следующим образом.

- Докажите, что для целых  $a$  и  $b$  выполняется

$$\delta_{a,b} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(a-b)},$$

где  $\delta_{a,b} = 1$ , если  $a = b$ , и  $\delta_{a,b} = 0$ , если  $a \neq b$ .

- Придумайте, как можно использовать свойство из прошлого пункта для того, чтобы представить  $H(N)$  в виде интеграла от некоторой функции.

- Примените к полученному интегралу метод перевала. Это даст Вам асимптотическую формулу для  $H(N)$ .

Назовем билетик с  $N = 3$  "трамвайным". Точное число счастливых трамвайных билетиков равно 55252. Наивно можно было бы ожидать, что раз  $N = 3$  - число порядка единицы, то приближенный ответ для  $H(3)$ , полученный при помощи метода перевала, будет очень неточным. Так ли это? Иными словами, какова относительная погрешность асимптотического ответа для числа счастливых трамвайных билетиков?

#### интересные вопросы про дельта-функцию

там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах.  
особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

### 4.2.4 Функция Хевисайда $\theta(x)$ , $\text{sign } x$

Функция Хевисайда или функция включения  $\theta(x)$  определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Производная  $\theta$ -функции есть  $\delta$ -функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через  $\delta$ -функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел  $\varepsilon$ -последовательности:

$$\theta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию  $\operatorname{sign} x = |x|/x$  можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Упражнения

1. Показать, что

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

2. Определить производную функции  $\operatorname{sign} x$ .

3. Доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (-i)N\theta(x)e^{iNx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

#### 4.2.5 Функция $\wp \frac{1}{x}$

Обобщенная функция  $\wp \frac{1}{x}$  определяется через функционал следующим образом:

$$\left( \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

С произвольной функцией  $f(x)$  такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию  $\wp \frac{1}{x}$ , аппроксимируемую функциями:

$$\begin{aligned} \wp \frac{1}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{|k|} e^{-|k|\varepsilon} e^{ikx} dk \\ \wp \frac{1}{x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Nx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \sin kx dk \end{aligned}$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-x} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_x^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow +0} \int_{-x}^x \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \\ &= \left( \wp \frac{1}{x}, \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости  $z$  по контуру  $C_+$  или  $C_-$ , обходящему точку  $x = 0$  по полуокружности радиуса  $\varepsilon \rightarrow 0$  соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета  $i\pi\varphi(0)$ :

$$\left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_{\pm}} \frac{\varphi(z)}{z} dz \mp i\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_{\pm}} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x \mp i\varepsilon} = \left(\frac{1}{x \mp i0}, \varphi(x)\right) = \left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) \pm i\pi(\delta(x), \varphi(x))$$

Полученная формула (10.34) позволяет ввести еще две новые обобщенные функции Сохоцкого:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \wp\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе для  $\varepsilon$ -последовательностях:

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} \mp i\pi \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

Пример Показать, что обобщенная функция  $\wp\frac{1}{x}$  есть производная от  $\ln|x|$ . Действительно, запишем функционал:

$$\left(\frac{d \ln|x|}{dx}, \varphi(x)\right) = (\ln|x|, \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} (\ln|x|) \varphi'(x) dx$$

Выделяя теперь  $\varepsilon$ -окрестность 0 и разбивая интеграл на три, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln|x| \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x| \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(\wp\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) \end{aligned}$$

Упражнение Показать, что фурье-образ функции  $1/x$  можно получить из представления (10.32), и он равен

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ikx} dx = -i\pi \operatorname{sign} k$$

С обобщенными функциями Сохоцкого можно связать еще две функции, имеющие большое применение в физике:

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x \pm i0}$$

Обобщенные функции (10.36) получаются в  $\varepsilon$ -последовательностях

$$\delta_{\pm}(x) = \pm \frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon k \pm i k x} dk$$

Функции  $\delta_+$  обладают полезными свойствами:

$$\begin{aligned} \delta_+(x) + \delta_-(x) &= \delta(x) \\ \delta_+(x) - \delta_-(x) &= \frac{i}{\pi} \wp\frac{1}{x} \end{aligned}$$

# Part IV

## Problems

### 5 Problems about typical special functions

(постепенно что-то порешаю.)

#### 5.0.1 Задачи на Гамм-функции

**Задача**

3.1.2. Найти контурное представление  $\Gamma(z)$  в терминах  $(-t)^{z-1}e^{-t}$ .

**Задача**

3.1.3. Показать, что

$$\begin{aligned}\int_0^\infty du u^{z-1} \cos u &= \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \\ \int_0^\infty du u^{z-1} \sin u &= \sin(\pi z/2) \Gamma(z)\end{aligned}$$

Установить область применимости этих выражений.

**Задача**

3.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi$$

**Задача**

3.1.5. Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Введем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Для этого запишем левую часть (3.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену  $s = t\zeta$  и взяв интеграл по  $t$  мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по  $\zeta$  следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно деформировать, загибая его 'усы' в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке  $\zeta = -1$ , что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные  $z$ . В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из соотношения (3.9),  $\Gamma^{-1}(z)$  не имеет полюсов в плоскости  $z$ , то есть  $\Gamma(z)$  нигде не обращается в ноль.

### Задача

3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t,$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 3.3.

### Задача

3.1.7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

### Задача

3.1.8. Найти  $|\Gamma(1/2 + ix)|$ , где  $x$  действительное число.

## 5.0.2 Задачи на функции Бесселя

### Задача

3.3.1. Доказать правила дифференцирования (3.22), исходя из соотношения (3.28).

### Задача

3.3.2. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z)$$

### Задача

3.3.3. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z)$$

### Задача

3.3.4. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

### Задача

3.3.5. Построить разложение в ряд (3.30), исходя из соотношения (3.28).

### Задача

3.3.6. Найти асимптотическое выражение Функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных  $z$ .

В силу уравнения (3.26) функция  $J_n(qx)$  удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}J_n(qx) = -q^2 J_n(qx),$$
$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}.$$

### Задача

3.3.7. Доказать соотношение (3.34), исходя из представления (3.20).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции  $f(x)$  имеют вид

$$\check{f}(q) = \int_0^\infty dx x J_n(qx) f(x),$$
$$f(x) = \int_0^\infty dq q J_n(qx) \check{f}(q).$$

Выбор  $n$  в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

### Задача

3.3.8. Разложить в интеграл (3.36) с  $n = 0$  функцию  $f(x) = \exp(-p^2 x^2)$ .

## 5.0.3 Задачи на функции Айри

### Задача

3.2.1. Найти значения  $\text{Ai}(0)$ ,  $\text{Ai}'(0)$ ,  $\text{Bi}(0)$ ,  $\text{Bi}'(0)$ .

### Задача

3.2.2. Получить асимптотическое поведение функции  $\text{Bi}(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$

### Задача

3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения  $d^2 Y/dx^2 - x^3 Y = 0$  при больших значениях  $|x|$ .

## 5.0.4 Задачи на гипергеометрическую функцию

### Задача

3.6.1. Доказать, что  $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ .

### Задача

3.6.2. Доказать соотношения (3.89, 3.90, 3.91).

### Задача

3.6.3. Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Выполняется ли при малых  $\gamma$  соотношение  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ ?

### Задача

3.6.4. Найти значение  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых положительных  $\alpha$  и  $\gamma, \alpha \geq \gamma$ . Проверить выполнение условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ . Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке  $t = z$ .

### Задача

3.6.5. Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (3.81) при  $\gamma = 1$ . Указание: в соответствии с (3.85) при произвольном  $\gamma$  второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)]$$

здесь надо перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 1$ .

## 5.1 Задачи на многочлены

(пока вообще не актуальные они)

### 5.1.1 Задачи на многочлены Лежандра

#### Задача

3.4.2. Найти выражение для  $P_3(\mu)$ , воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

#### Задача

3.4.3. Доказать соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x) P_k(y) \\ &= (n+1) \frac{P_n(x) P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x) P_n(y)}{y-x}. \end{aligned}$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (3.51).

#### Задача

3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для  $P_{n+1}$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ .

#### Задача

3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для  $P_n$ , если (3.55) справедливо для  $P_{n-1}$ .

### Задача

3.4.6. Найти значение  $P_{2n}(0)$ , исходя из (3.55).

### Задача

3.4.7. Докажите, что если соотношение (3.56) справедливо для  $n - 1$ , то в силу соотношений (3.51, 3.54) оно справедливо и для  $n$ .

### Задача

3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

### Задача

3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (3.54, 3.56).

### Задача

3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58).

### Задача

3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: воспользоваться представлением (3.55).

### Задача

3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: воспользоваться соотношением (3.44).

### Задача

3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3).

### Задача

3.4.14. Найти  $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ .

### Задача

3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  монома  $x^k$ .

## 5.1.2 Задачи на полиномы Эрмита

### Задача

3.5.1. Доказать, что старший член разложения  $H_n(x)$  имеет вид  $2^n x^n$ .

### Задача

3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).



### Задача

Доказать соотношение (3.77).

Указание: составить комбинацию  $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$ , выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся равенство по  $x$  с весом  $\exp(-x^2)$ . На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

### Задача

3.5.4. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

### Задача

3.5.5. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy).$$

### Задача

3.5.6. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x-y)^2] H_n(x)$$

### Задача

3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2) H_{2n-1}(xy)$$

### Задача

3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полином Лежандра.

### Задача

3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

### Задача

3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

### Задача

3.5.11. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp \left( -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \right) (2x)^n.$$

Указание: просуммировать по  $n$  правую часть этого соотношения с весом  $t^n/n!$  и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (3.65).

## Part V

# Other Special Functions

(тут всё из книг про табличные интегралы, чего только нет! соберу что-то, что интересно или чего касался.)

## 6 Другие спецфункции

### 6.0.1 Hurwitz zeta function $\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$

Main formulas

Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

Other theory

### 6.0.2 The polylogarithm $\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} = z\Phi(z, s, 1)$

Main formulas

Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

Other theory

### 6.0.3 The Riemann zeta function $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Phi(1, s, 1)$

Main formulas

Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

Other theory

### 6.0.4 The Dirichlet eta function $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \Phi(-1, s, 1)$

Main formulas

Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

Other theory

### 6.0.5 The Dirichlet beta function $\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 2^{-s}\Phi\left(-1, s, \frac{1}{2}\right)$

Main formulas

Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

## Other theory

### 6.0.6 The Legendre chi function $\chi_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s} \Phi\left(z^2, s, \frac{1}{2}\right)$

#### Main formulas

#### Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

## Other theory

### 6.0.7 The inverse tangent integral

$$\text{Ti}_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s} \Phi\left(-z^2, s, \frac{1}{2}\right)$$

#### Main formulas

#### Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

## Other theory

### 6.0.8 Lerch transcendent $\Phi(z, s, \alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\alpha)^s}$

#### Main formulas

#### Main theory

(см. вики, там хорошо написано)

## Other theory

### 6.0.9 К-функция

(пока не встречалась, но известная, хз, потом мб встретится.)

## Теория

К-функция, обычно обозначаемая  $K(z)$ , является обобщением гиперфакториала для комплексных чисел, подобно тому, как Гаммафункция является обобщением для факториала. Формально, К-функция определяется, как

$$K(z) = (2\pi)^{(-z-1)/2} \exp \left[ \binom{z}{2} + \int_0^{z-1} \ln(t!) dt \right].$$

Также определяется в замкнутой форме:

$$K(z) = \exp [\zeta'(-1, z) - \zeta'(-1)]$$

где  $\zeta'(z)$  обозначает производную дзета-фуунци Римана,  $\zeta(a, z)$ — это дзета-фуункция Гурвица и

$$\zeta'(a, z) \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{d\zeta(s, z)}{ds} \right]_{s=a}.$$

К-функция связана с Гамма-фуункцией и с G-функцией Барнса; для целых чисел  $n$  можно написать:

$$K(n) = \frac{(\Gamma(n))^{n-1}}{G(n)}.$$

Также

$$K(n+1) = 1^1 2^2 3^3 \dots n^n.$$

Для положительных аргументов принимает минимальное значение  $0,879786843\dots$  в точке  $x_{\min} = 0,53768886\dots$

### 6.0.10 Эллиптическая функция Вейеритрасса $\wp(u)$

(такое есть и все. из сборника Градштейна Рыжика)

8.160 Эллиптическая функция Вейеритрасса  $\wp(u)$  определяется равенством:

1.  $\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{n,n} \left\{ \frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2} \right\}$ , Сл 307(6) где знак  $\sum$  указывает на то, что суммирование распространяется на все комбинации целых значений  $m$  и  $n$ , за исключением комбинации  $m = n = 0$  а  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$  суть периоды функции  $\wp(u)$ . Очевидно,

$$2. \wp(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \wp(u) \text{ и } \operatorname{Im} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \neq 0,$$

3.  $\frac{d}{du} \odot(u) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^3}$ , где суммирование распространяется на все целые значения  $m$  и  $n$ . Ряды 8.160 1. и 8.1603. сходятся повсюду, за исключением полюсов, т. е. точек  $2m\omega_1 + 2n\omega_2$  ( $m$  и  $n$  — целые числа).

## 6.1 Шаровые функции

(такое есть и все. из сборника Градштейна Рыжика)

$$7.11 \text{ Шаровые функции } 7.111 \int_{\cos \varphi}^1 P_{\vartheta}(x) dx = \sin \varphi P_v^{-1}(\cos \varphi) \quad 7.112$$

$$1. \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0 \quad [n \neq k] = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad [n = k]. \quad \text{СМ III 185, VB II 120}$$

$$2. \int_{-1}^1 Q_n^m(x) P_k^m(x) dx = (-1)^m \frac{1 - (-1)^{n+k} (n+m)!}{(k-n)(k+n+1)(n-m)!}. \quad \text{ВТФ I 171(18)}$$

$$3. \int_{-1}^1 P_v(x) P_{\sigma}(x) dx = \frac{2\pi \sin \pi(\sigma-v) + 4 \sin(\pi v) \sin(\pi \sigma) [\psi(v+1) - \psi(\sigma+1)]}{\pi^2(\sigma-v)(\sigma+v+1)} = \frac{\pi^2 - 2(\sin \pi v)^2 \psi'(v+1)}{\pi^2(v+\frac{1}{2})} [\sigma = v].$$

ВТФ I 170(9)u

$$4 \int_{-1}^1 Q_v(x) Q_{\sigma}(x) dx = \frac{[\psi(v+1) - \psi(\sigma+1)][1 + \cos(\pi \sigma) \cos(\pi v)] - \frac{\pi}{2} \sin \pi(v-\sigma)}{(\sigma-v)(\sigma+v+1)} \quad [\sigma + v + 1 \neq 0; v, \sigma \neq -1, -2, -3, \dots]; \quad \text{ВТФ 170(11)}$$

$$= \frac{\frac{1}{i} \pi^2 - \psi'(v+1) [1 + (\cos \pi v)^2]}{2v+1} \quad [v = \sigma, v \neq -1, -2, -3, \dots].$$

ВТФ I 170 (12)

$$5. \int_{-1}^1 P_v(x) Q_{\sigma}(x) dx = \frac{1 - \cos \pi(\sigma-v) - 2\pi^{-1} \sin(\pi v) \cos(\pi \sigma) [\psi(v+1) - \psi(\sigma+1)]}{(v-\sigma)(v+\sigma+1)} \quad [\operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re} \sigma > 0, \sigma \neq v]; \quad \text{ВТФ I 170(13)} = -\frac{\sin(2\pi v) \psi'(v+1)}{\pi(2v+1)} [\operatorname{Re} v > 0, \sigma = v]. \quad \text{ВТФ I 171(14)}$$

# Part VI

## Appendix

### A Обзор применений спецфункций в теоретической физике

(постепенно допишу, пока в записях по физике все это)

#### A.0.1 Спецфункции в теории поля, гравитации, космологии

О применениях функций Бесселя очень коротко

О функциях Бесселя в космологии

(3/4 страницы тут про всякие штуки такие, напишу потом, пока в космологии это изучаю еще)

#### A.0.2 Спецфункции в квантмехе и КТП

Применения гамма функции в КТП

(тут много всего может быть, очень сильно применяется.)

О применениях гипергеометрической функции в квантовой механике

(очень важный раздел, потому что как раз через нее многие задачи решаются!)

### B Введение и обсуждение спецфункций

#### B.1 Особенности записи

(пока особо без особенностей, просто сборка функций)

О разных мелких особенностях

Я раздел с задачами вынес в отдельную запись, потому что не вижу смысла в одной записи это делать, все равно запись схожа очень со справочником, и все равно задачи по ним - по сути в очень многих разделах физики и математики.

#### B.2 Литература

Основная обучающая литература

Лебедев

Его лекции пока первые в планах в этой теме.

Ландау Лифшиц Квантовая механика

В некоторых местах обсуждается много свойств спецфункций, в том числе в контексте квантовой механики. очень многому можно научиться, многое добавлю в 1ю часть по ним!

Дж Мэтьюз и Р Уокер Математические методы физики

Очень хорошая книга со многими методами, отдельно посидеть стоит того.

## **Другие полезные методички и лекционные записи**

В.С. Гаврилов Н.А. Денисова А.В. Калинин Функции Бесселя в задачах математической физики

Хорошая небольшая методичка, гуглится, нужно будет - продумаю.

## **Физическая литература, решающая задачи с использованием спецфункций**

Dr. Walter Greiner Relativistic Quantum Mechanics

Очень крутая книга со многими примерами, много спецфункций нужно, многому научусь из неё!

Мигдал Крайнов приближенные методы квантовой теории

Чуть тоже есть интересных идей про спецфункции, подумаю про них тоже.

Ландау Квантовая механика

Много примеров, разные спецфункции используются, точно стоит того неделю подумать про нее с этой стороны. Подумаю потом, многое допишу!

Барбашов Когушев Попова Теоремеих

Есть краткий обзор функций Якоби, полезные страницы.

## **Другая профессиональная литература**

И. С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, рядов, произведений

Более 1100 страниц крайне сложных формул, некоторые добавил, но вообще, выйти на их уровень - отдельная большая тренировка, не до этого.

Paul F. Byrd, Morris D. Friedman Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists

Много свойств функций, в том числе эллиптических. Когда-то поизучаю, если дел важнее не будет.

## C Bibliography