

# Continuum Mechanics

Yury Holubeu \*

July 10, 2024

The note is not intended for distribution.

Continuum mechanics and its applications are discussed. Links below show contents of [problems](#), summary of [other topics](#). I used the following [literature](#).

Goals: 1) 2 months of studying are needed for a minimal level.

## Contents

<b>1</b>	<b>Preface and main motivation</b>	<b>7</b>
<b>I</b>	<b>—— Typical Continuum Mechanics in a Nutshell ——</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Гидродинамика в двух словах</b>	<b>8</b>
2.1	Об основах гидродинамики . . . . .	8
2.1.1	О Законах сохранения и потенциальные течения. . . . .	8
2.1.2	О Возбуждение турбулентности в неустойчивой и устойчивой системах. . . . .	8
2.1.3	О Перемешивание ламинарное и перемешивание турбулентное. . . . .	8
2.1.4	Одномерные среды, инварианты, опрокидывание, мелкая вода . . . . .	8
2.1.5	Волны на свободной поверхности, пузыри, капли . . . . .	8
2.1.6	Нелинейное резонансное взаимодействие волн. . . . .	9
2.1.7	Вихревые структуры в идеальной жидкости. . . . .	9
2.2	О вязкой жидкости . . . . .	10
2.2.1	О Внутреннее трение и вязкость. . . . .	10
2.2.2	О Вязкость и первая аномалия в физике. . . . .	10
2.2.3	Уравнения вязкой жидкости, диссипация энергии, подобие . . . . .	10
2.2.4	Суспензии, колебания в жидкостях . . . . .	11
2.2.5	Обтекания шаров, цилиндров, boundary layers, Prandtl equation . . . . .	11
2.2.6	Точные решения для вязкой жидкости . . . . .	14
2.3	О звуке . . . . .	14
2.3.1	Формализм описания звука . . . . .	14
2.3.2	Сферические, цилиндрические, боковые звуковые волны . . . . .	15
2.3.3	Излучение звука . . . . .	15
2.3.4	Звук в трубках, рассеяние, поглощение . . . . .	16
2.4	Другие важные темы . . . . .	16
2.4.1	Fluid Statics . . . . .	16
2.4.2	Solid Statics . . . . .	19
2.4.3	Ideal Fluid Flow . . . . .	27
2.4.4	Compressible Flow . . . . .	32
2.4.5	Viscosity . . . . .	35
2.4.6	Основные законы элементарной гидродинамики . . . . .	39
2.4.7	Идеальная жидкость . . . . .	40
2.4.8	О гидростатике (!!?) . . . . .	40
2.5	Турбулентность в двух словах . . . . .	40
2.5.1	Устойчивости движений, разрывы . . . . .	40
2.5.2	Квазипериодичность, аттракторы, удвоение периодов . . . . .	42
2.5.3	Турбулентная область, корреляции скоростей, струи, теорема Жуковского . . . . .	43
2.6	О других явлениях (???) . . . . .	47
2.6.1	Пограничные слои, обтекаемость, подъемная сила . . . . .	47
2.6.2	Теплопроводность в жидкости . . . . .	47
2.6.3	Диффузия . . . . .	47
2.6.4	Поверхностные явления . . . . .	47

---

\*yura.winter@gmail.com

2.6.5	Движение сквозь жидкость, плавание . . . . .	47
2.6.6	Ударные волны . . . . .	47
2.6.7	Одномерное движение сжимаемого газа . . . . .	49
2.6.8	Об определениях и основных уравнениях идеальной жидкости. . . . .	49
2.6.9	О Гидростатика и атмосфера Земли. . . . .	49
2.6.10	Пересечение поверхностей разрыва . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Теория упругости в двух словах (??)</b>	<b>49</b>
3.0.1	Основные законы элементарной теории упругости . . . . .	49
3.0.2	Об упругости особых тел по Ландау . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Основы гидродинамики</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>элементарные основы</b>	<b>53</b>
4.0.1	Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности . . . . .	53
4.0.2	Архимедова сила, уравнение Бернулли . . . . .	54
4.0.3	тензор напряжений? . . . . .	58
4.0.4	формула Пуазейля . . . . .	58
4.0.5	турбулентность . . . . .	60
4.0.6	число Рейнольдса . . . . .	62
4.0.7	связь с хаосом . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Турбулентность по Ландау</b>	<b>62</b>
<b>6</b>	<b>гидростатика</b>	<b>62</b>
6.1	Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. . . . .	62
6.2	Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности. . . . .	63
<b>7</b>	<b>Одномерное движение сжимаемого газа</b>	<b>63</b>
7.0.1	Истечение газа через сопло . . . . .	63
7.0.2	Вязкое движение сжимаемого газа по трубе . . . . .	65
7.0.3	Одномерное автомодельное движение . . . . .	65
7.0.4	Разрывы в начальных условиях . . . . .	65
7.0.5	Одномерные бегущие волны . . . . .	65
7.0.6	Образование разрывов в звуковой волне . . . . .	65
7.0.7	Характеристики . . . . .	65
7.0.8	Инварианты Римана . . . . .	65
7.0.9	Произвольное одномерное движение сжимаемого газа . . . . .	65
7.0.10	Задача о сильном взрыве . . . . .	65
7.0.11	Сходящаяся сферическая ударная волна . . . . .	65
7.0.12	Теория “мелкой воды” . . . . .	65
<b>III</b>	<b>Основы теории упругости</b>	<b>66</b>
<b>8</b>	<b>Основы (?)</b>	<b>66</b>
8.0.1	Тензор деформации . . . . .	66
8.0.2	Тензор напряжения . . . . .	69
8.0.3	Термодинамика деформирования . . . . .	73
8.0.4	Закон Гука . . . . .	73
8.0.5	Однородные деформации . . . . .	73
8.0.6	Деформации с изменением температуры . . . . .	73
8.0.7	Уравнения равновесия изотропных тел . . . . .	73
8.0.8	Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью . . . . .	74

8.0.9	Соприкосновение твердых тел . . . . .	74
8.0.10	Упругие свойства кристаллов . . . . .	74
8.1	Основные примеры деформаций . . . . .	74
8.1.1	Деформация прямоугольного параллелепипеда . . . . .	74
8.1.2	Всесторонне сжатие и растяжение . . . . .	74
8.1.3	Кручение . . . . .	74
8.1.4	Простейшие деформации . . . . .	76
8.2	Равновесие стержней и пластинок . . . . .	76
8.2.1	Энергия изогнутой пластинки . . . . .	76
8.2.2	Уравнение равновесия пластинки . . . . .	76
8.2.3	Продольные деформации пластинок . . . . .	76
8.2.4	Сильный изгиб пластинок . . . . .	76
8.2.5	Деформация оболочек . . . . .	76
8.2.6	Кручение стержней . . . . .	76
8.2.7	Изгиб стержней . . . . .	76
8.2.8	Энергия деформированного стержня . . . . .	76
8.2.9	Уравнение равновесия стержней . . . . .	76
8.2.10	Слабый изгиб стержней. . . . .	76
8.2.11	Устойчивость упругих систем . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Упругие волны</b> . . . . .	<b>76</b>
9.1	Упругие волны в изотропной среде . . . . .	76
9.2	Упругие волны в кристаллах . . . . .	76
9.3	Поверхностные волны . . . . .	76
9.4	Колебания стержней и пластинок . . . . .	76
9.5	Ангармонические колебания . . . . .	76
<b>IV</b>	<b>Problems</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>10</b>	<b>Типичные задачи механики сплошных сред</b> . . . . .	<b>77</b>
10.0.1	Задачи на понимание и оценки явлений (!!???) . . . . .	77
10.0.2	Типичные технические задачи для проверки знаний (???) . . . . .	78
10.0.3	Задачи общей физике (???) . . . . .	80
10.0.4	Задачи олимпиад общей физике (???) . . . . .	80
10.0.5	Задачи о странных явлениях (???) . . . . .	80
10.0.6	О некоторых прикладных задачах . . . . .	80
10.0.7	Задачи о поверхности воды . . . . .	80
10.0.8	Задачи на реакцию-диффузию . . . . .	84
<b>V</b>	<b>— Special Topics in Continuum Mechanics in a Nutshell —</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>11</b>	<b>Об отдельных применениях механики сплошных сред (??)</b> . . . . .	<b>87</b>
11.0.1	Гидродинамика в конденсированных средах . . . . .	87
11.1	О других моделях гидро- и аэродинамики . . . . .	87
11.1.1	Реакционно-диффузионная модель, ZFK, KPP–Fisher equations . . . . .	87
11.1.2	Особа аэродинамика: эфф. Магнуса, бумеранг . . . . .	89
11.1.3	Особенности струй жидкостей . . . . .	89
11.1.4	Горение . . . . .	90
11.1.5	Сверхтекучая гидродинамика, возбуждения, конденсаты, . . . . .	90
11.1.6	О гидродинамике в космологии . . . . .	90
11.1.7	О гравитационных волнах в средах . . . . .	90
11.1.8	О выработке энергии из аэро- и гидродинамики . . . . .	91

<b>VI</b>	<b>Другие темы</b>	<b>92</b>
<b>12</b>	<b>Другие известные модели</b>	<b>92</b>
12.1	Распространение и устойчивость УРД по Пухову . . . . .	92
12.1.1	Одномерные автомодельные решения УРД . . . . .	92
12.1.2	4УРД для 2D- и 3D-бистабильных сред . . . . .	96
12.1.3	Устойчивость одномерных автомодельных решений УРД . . . . .	97
12.1.4	Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. Фазовые волны . . . . .	99
12.2	Зарождение и эволюция УРД по Пухову . . . . .	101
12.2.1	Вариационный принцип. Градиентная форма УРД. Функционал Ляпунова . . . . .	101
12.2.2	Протяженные возмущения . . . . .	104
12.2.3	УРД для моностабильной среды. Критические возмущения и нелинейная стадия развития неустойчивости в моностабильной среде . . . . .	107
12.2.4	Локализация и структуры . . . . .	117
12.3	Диффузия . . . . .	118
12.3.1	Уравнения гидродинамики для жидкой смеси . . . . .	118
12.3.2	Коэффициенты диффузии и термодиффузии . . . . .	118
12.3.3	Диффузия взвешенных в жидкости частиц . . . . .	118
12.4	Поверхностные явления (???) . . . . .	118
12.4.1	Формула Лапласа . . . . .	118
12.4.2	Капиллярные волны . . . . .	118
12.4.3	Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости . . . . .	118
<b>13</b>	<b>Звук</b>	<b>118</b>
13.0.1	Звуковые волны . . . . .	118
13.0.2	Энергия и импульс звуковых волн . . . . .	122
13.0.3	Отражение и преломление звуковых волн . . . . .	122
13.0.4	Геометрическая акустика . . . . .	122
13.0.5	Распространение звука в движущейся среде . . . . .	122
13.0.6	Собственные колебания . . . . .	122
13.0.7	Сферические волны . . . . .	122
13.0.8	Цилиндрические волны . . . . .	122
13.0.9	Другое о звуке (???) . . . . .	122
<b>14</b>	<b>Ударные волны</b>	<b>123</b>
14.0.1	Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа . . . . .	123
14.0.2	Стационарный поток сжимаемого газа . . . . .	123
14.0.3	Поверхности разрыва . . . . .	123
14.0.4	Ударная адиабата . . . . .	123
14.0.5	Ударные волны слабой интенсивности . . . . .	123
14.0.6	Направление изменения величин в ударной волне . . . . .	123
14.0.7	Эволюционность ударных волн . . . . .	123
14.0.8	Ударные волны в политропном газе . . . . .	124
14.0.9	Гофрировочная неустойчивость ударных волн . . . . .	124
14.0.10	Распространение ударной волны по трубе . . . . .	125
14.0.11	Косая ударная волна . . . . .	125
14.0.12	Ширина ударных волн . . . . .	125
14.0.13	Ударные волны в релаксирующей среде . . . . .	126
14.0.14	Изотермический скачок . . . . .	126
14.0.15	Слабые разрывы . . . . .	126

<b>15 Пересечение поверхностей разрыва</b>	<b>126</b>
15.0.1 Волна разрежения	126
15.0.2 Типы пересечений поверхностей разрыва	126
15.0.3 Пересечение ударных волн с твердой поверхностью	126
15.0.4 Сверхзвуковое обтекание угла	126
15.0.5 Обтекание конического острия	126
<b>16 Другие темы</b>	<b>126</b>
16.1 Модели аэродинамики для приложений	126
16.1.1 Бумеранг	126
16.2 Плоское течение сжимаемого газа	126
16.3 Обтекание конечных тел	126
16.4 Гидродинамика горения	129
16.5 Релятивистская гидродинамика	132
16.6 Гидродинамика сверхтекучей жидкости	132
16.7 О теории упругости	132
16.8 Магнитная гидродинамика	133
16.9 гидродинамика плазмы	133
16.10 неньютоновская жидкость	133
16.11 Ударные волны	133
16.11.1 Основное по Ландау	133
16.11.2 Другое по Ландау	133
<b>VII Appendix</b>	<b>134</b>
<b>A Введение в механику сплошных сред</b>	<b>134</b>
A.1 Еще мотивация	134
A.2 Мышление профессионала механики сплошных сред	134
A.2.1 Способы догадаться до всех главных идей	134
A.2.2 Необходимые темы для Предмет	134
A.2.3 Дополнительные темы для Предмет	134
A.2.4 Способы изучения предмета	134
A.3 Литература	134
A.3.1 Основная	134
A.3.2 Дополнительная	135
A.4 Обзор механики сплошных сред	135
A.4.1 МСС в двух словах	135
A.4.2 наиболее прикладные темы Предмета	136
A.4.3 Итоговые формулы и закономерности	136
A.4.4 обзор теоретических подходов	136
A.4.5 Удивительные факты	137
A.4.6 Результаты Предмет	137
A.4.7 Применения Предмет в других разделах физики	137
A.4.8 Обзор дальнейших развитий Предмет	137
A.5 Описание записи	137
A.5.1 описание глав и разделов	137
A.5.2 обозначения и константы	137
A.6 Головоломки на разные случаи жизни	137
A.7 Короткий исторический обзор	137
<b>B Математика для механики сплошных сред</b>	<b>137</b>
B.0.1 О комплексном анализе	137

<b>C</b>	<b>References</b>	<b>138</b>
----------	-------------------	------------

# 1 Preface and main motivation



Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

**Одни из тем механики сплошных сред с очень большой вероятностью будут нужны в задачах и исследованиях**

Если какое-то явление происходит, которое сложно объяснить, то большая вероятность, что там где-то будет жидкость и без основ гидродинамики никак, поэтому и многие физики ничего не смогут решить, потому что мало кто доходит до гидродинамики.

(распишу с примерами, там в турнирах физиков это встречается, да и вообще задач много, где жидкость или деформации есть.)

Гидродинамика будет не нужна, если Вы не узкий специалист в одной области, не связанной с жидкостями. Однако таким быть все-таки часто скучно, хочется переключаться и познать вообще природу, а также даже в любой узкой области не сложно придумать задачу, где также используется гидродинамика.

**В приложениях часто нужно что-то оценить или учесть, используя гидродинамику**

(уже писал про это, потом напишу. тоже повод все-таки понять эти законы, очень многие реальные явления как-то связаны с деформациями и сплошными средами.)

**Идейные головоломки МСС для мотивации**

**m-th.1. Как остановить шторм?** (сформулирую задачу)

**Hint:** Оказывается, это можно сделать, почему это работает - не знаю, вообще, проверить это нужно бы... См. action labs youtube.

**Технические головоломки МСС для мотивации**

**m-te.1. Всего лишь пузырек** Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью  $\eta'$ ), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью  $\eta$

**Hint:** (типичные задачи - про пузыри, потому что стыдно не знать их. пока об этом всем - в каталоге)

---

## Part I

# —— Typical Continuum Mechanics in a Nutshell ——

## 2 Гидродинамика в двух словах

### 2.1 Об основах гидродинамики

(Часть 1. по ПТФ)

#### 2.1.1 О Законах сохранения и потенциальные течения.

Потоки энергии и импульса, законы Бернулли.

Теорема Кельвина – новый тип закона сохранения.

Конформно инвариантные потоки.

#### 2.1.2 О Возбуждение турбулентности в неустойчивой и устойчивой системах.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца.

Энергетический критерий.

Закон Ландау.

(см ПТФ)

Турбулентный каскад.

Турбулентные течения в трубах и реках.

#### 2.1.3 О Перемешивание ламинарное и перемешивание турбулентное.

Как быстро инъекция распространяется по организму потоком крови?

#### 2.1.4 Одномерные среды, инварианты, опрокидывание, мелкая вода

Характеристики.

Инварианты Римана.

Метод годографа.

Опрокидывание простых волн.

Разрывы в начальных условиях.

Теория “мелкой воды”

Уравнение Бюргерса.

[3].

#### 2.1.5 Волны на свободной поверхности, пузыри, капли

(тут не только об этом, мб несколько разделов создам, пока так)



**Лагранжиан потенциальных несжимаемых течений со свободной поверхностью в общем виде.**

**Пузыри и капли. (!?!?)**

(все нужные формулы про них!!!)

**Канонические переменные.**

Закон дисперсии поверхностных волн.

Асимптотическое разложение гамильтониана по степеням малого параметра нелинейности.

Конкуренция дисперсии и нелинейности в бегущей волне, уравнение Кортевега-де-Вриза, солитоны.

Конформные переменные в плоской задаче со свободной границей.

Задача о возбуждении волн ветром.

[3, 2, 7, 8, 12, 13, 6].

## **2.1.6 Нелинейное резонансное взаимодействие волн.**

см птф-[2, 6, 9, 10].

**Редукция гамильтонианов.**

**Задача волн.**

**Взрывная неустойчивость.**

**Нелинейное уравнение Шредингера для огибающей** (для слабонелинейной квазимонохроматической волны. )

**Волновые коллапсы.**

**Слабонадкритические неустойчивости, образование структур.**

**Волновая турбулентность.**

**Кинетическое уравнение.**

**Каскад энергии и волнового действия.**

## **2.1.7 Вихревые структуры в идеальной жидкости.**

см [6].

**Вихревые листы, неустойчивость тангенциального разрыва.**

**Двумерные течения с кусочно-постоянной завихренностью.**

**Тонкие вихревые нити в пространстве и точечные вихри в плоскости.**

**Гамильтониан и динамика точечных вихрей, применение ТФКП.**

**Закон дисперсии для малых возмущений прямой вихревой нити.** Неустойчивость Кроу двух антипараллельных вихревых нитей.

**Проблема образования конечно-временных особенностей из гладких начальных данных в решениях уравнения Эйлера.**

## 2.2 О вязкой жидкости

### 2.2.1 О Внутреннее трение и вязкость.

**Вязкий тензор напряжений.** Уравнение Навье-Стокса.

**Законы подобия, число Рейнольдса и проектирование промышленных установок.**

### 2.2.2 О Вязкость и первая аномалия в физике.

**О ЛЛ5-20. Течение при малых числах Рейнольдса**

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad } p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

Член  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  имеет порядок величины  $u^2/l$ , где  $u$  и  $l$  имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же  $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v} \approx \eta u/(\rho l^2)$ . Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при  $R \ll 1$  членом  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \text{grad } p = 0.$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0$$

**Пограничный слой и отрывные течения.**

**Сопротивление и подъемная сила.**

**Как кумулятивный снаряд пробивает броню танка.**

**Метаморфозы течений с ростом числа Рейнольдса.**

**Движение вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами.**

**Закон подобия.**

**Течения при малых числах Рейнольдса.**

### 2.2.3 Уравнения вязкой жидкости, диссипация энергии, подобие

**Уравнения движения вязкой жидкости**

**Диссипация энергии в несжимаемой жидкости**

**Течение по трубе**

## Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

### Закон подобия

### Течение при малых числах Рейнольдса

## 2.2.4 Суспензии, колебания в жидкостях

**Вязкость суспензий** Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твердых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью  $\eta$ , отличной от вязкости  $\eta_0$  основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объем всех частиц предполагается малым по сравнению с объемом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (А. Эйнштейн, 1906).

### Колебательное движение в вязкой жидкости

## 2.2.5 Обтекания шаров, цилиндров, boundary layers, Prandtl equation

### Обтекание шара, формула Стокса.

(пока ЛЛ5 пар 20, потом подумаю, в 3 раза компактнее напишу!)

(тут абзац про основную вообще идею решения задачи!!!)

(мб тут основные итоговые формулы)

представлено в виде ротора некоторого вектора  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \mathbf{A},$$

причем  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  обращается на бесконечности в нуль.

Будем искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot}[\nabla f \cdot \mathbf{u}] = \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \mathbf{u}$$

(в последнем равенстве учтено, что  $\mathbf{u} = \text{const}$ ). Для определения функции  $f$  воспользуемся уравнением (20.3). Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \mathbf{u} = (\operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta) \operatorname{rot} f \mathbf{u} = -\Delta \operatorname{rot} f \mathbf{u}.$$

Поэтому (20.3) принимает вид

$$\Delta^2 \operatorname{rot} f \mathbf{u} = \Delta^2 [\nabla f \cdot \mathbf{u}] = [\Delta^2 \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{u}] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2 \operatorname{grad} f = 0.$$

Первое интегрирование дает  $\Delta^2 f = \text{const}$ .

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c.$$

Постоянная  $c$  должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  исчезала на бесконечности. Интегрируя остающееся уравнение, находим

$$f = ar + \frac{b}{r}$$

(аддитивная постоянная в  $f$  опущена как несущественная - скорость определяется производными от  $f$ ). Подстановка в (20.4) дает после простого вычисления

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3}.$$

Постоянные  $a$  и  $b$  должны быть определены из граничного условия  $\mathbf{v} = 0$  при  $r = R$  (на поверхности шара):

$$\mathbf{u} \left( 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \mathbf{n}(\mathbf{un}) \left( -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном  $\mathbf{n}$ , то коэффициенты при  $\mathbf{u}$  и при  $\mathbf{n}(\mathbf{un})$  должны обращаться в нуль каждый в отдельности. Отсюда находим  $a = 3R/4, b = R^3/4$  и окончательно:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4} \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u}.$$

Компоненты скорости в сферических координатах (с полярной осью в направлении  $\mathbf{u}$ ):

$$v_r = u \cos \theta \left[ 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right],$$

$$v_\theta = -u \sin \theta \left[ 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right].$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара.

Давление: (?? тут слова важные)

$$p = \eta \mathbf{u} \operatorname{grad} \Delta f + p_0$$

( $p_0$  - давление жидкости на бесконечности). Подстановка  $f$  приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{un}}{r^2} R.$$

$$F = \int (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара. Подставив выражения (20.10) в формулы

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

(см. (15.20)), найдем, что на поверхности шара

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R} u \sin \theta,$$

а давление (20.12)

$$p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R} \cos \theta.$$

Поэтому интеграл получаем формулу Стокса:

$$F = \frac{3\eta u}{2R} \int df$$

**Обтекание цилиндра, уравнение Осеена.****Ламинарный след (boundary layer)**

**Описание ламинарного следа** Обозначим через  $\mathbf{U}$  постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление  $\mathbf{U}$  выберем в качестве оси  $x$  с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде  $\mathbf{U} + \mathbf{v}$ ; на бесконечности  $\mathbf{v}$  обращается в нуль.

На больших расстояниях позади тела скорость  $\mathbf{v}$  заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси  $x$  - т.н. в ламинарном следе. В него попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе существенно завихрено. Дело в том, что источником завихренности при обтекании твердого тела вязкой жидкостью является именно его поверхность.

**Движение внутри следа.** В уравнении Навье-Стокса стационарного движения

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}$$

вдали от тела используем приближение Осеена - заменяем член  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  на  $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v}$  (ср. (20.17)). Кроме того, в области внутри следа можно пренебречь в  $\Delta\mathbf{v}$  производной по продольной координате  $x$  по сравнению с поперечными производными. Таким образом, исходим из уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right).$$

Ищем его решение в виде  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , где  $\mathbf{v}_1$ -решение уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right).$$

**Движение вне следа.** вне следа течение жидкости можно считать потенциальным. Интересуясь лишь наименее быстро убывающими на больших расстояниях членами в потенциале  $\Phi$ , ищем решение уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде суммы двух членов:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\varphi}{r}f(\theta).$$

Первый член здесь сферически симметричен и связан с силой  $F_x$ , а второй - симметричен относительно плоскости  $xy$  и связан с силой  $F_y$ . Для функции  $f(\theta)$  получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

Решение этого уравнения, конечное при  $\theta \rightarrow \pi$ , есть

$$f = b \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

**Ламинарный пограничный слой, уравнения Прандтля.**

The Prandtl number (Pr) or Prandtl group is a dimensionless number, named after the German physicist Ludwig Prandtl, defined as the ratio of momentum diffusivity to thermal diffusivity.

[1] The Prandtl number is given as:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{momentum diffusivity}}{\text{thermal diffusivity}} = \frac{\mu/\rho}{k/(c_p\rho)} = \frac{c_p\mu}{k}$$

where: -  $\nu$  : momentum diffusivity (kinematic viscosity),  $\nu = \mu/\rho$ , (SI units:  $\text{m}^2/\text{s}$ ) -  $\alpha$  : thermal diffusivity,  $\alpha = k/(\rho c_p)$ , (SI units:  $\text{m}^2/\text{s}$ ) -  $\mu$  : dynamic viscosity, (SI units:  $\text{Pas} = \text{Ns}/\text{m}^2$ ) -  $k$  : thermal conductivity, (SI units:  $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) -  $c_p$  : specific heat, (SI units:  $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ) -  $\rho$  : density, (SI units:  $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

**Теплопроводность в жидкости.****Свободная конвекция.**

Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости.

[3].

**2.2.6 Точные решения для вязкой жидкости**

(наверняка тут многое есть, поэтому отдельный раздел)

**Точные решения уравнений движения вязкой жидкости****2.3 О звуке**

.

**2.3.1 Формализм описания звука**

Гамильтониан звуковых волн.

Квадратичное приближение и нормальные переменные.

Нелинейные эффекты, вычисление матричных элементов нелинейного взаимодействия волн.

**64.Звуковые волны****65.Энергия и импульс звуковых волн**

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна  $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$ . Подставим сюда  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$ , где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член  $\rho'v^2/2$  является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho' \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

$$d\varepsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

имеем

$$\left( \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w$$

вторая производная:

$$\left( \frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2} \right)_s = \left( \frac{\partial w}{\partial\rho} \right)_s = \left( \frac{\partial w}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho_0\varepsilon_0 + w\rho' + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \rho_0\frac{v^2}{2}.$$

## 66. Отражение и преломление звуковых волн

## 67. Геометрическая акустика

### 2.3.2 Сферические, цилиндрические, боковые звуковые волны

## 68. Распространение звука в движущейся среде

## 69. Собственные колебания

## 70. Сферические волны

## 71. Цилиндрические волны

## 72. Общее решение волнового уравнения

## 73. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения боковой волны.

(картинки добавлю, пока ЛЛ6 читать нужно!)

(!!! там очень подробное решение этой задачи!)

### 2.3.3 Излучение звука

## 74. Излучение звука

$$4\pi a = \dot{V}$$

Таким образом, на расстояниях  $r$ , удовлетворяющих условию  $l \ll r \ll \lambda$ , движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}$$

С другой стороны, на расстояниях  $r \gg \lambda$  (в волновой зоне)  $\varphi$  должно представлять расходящуюся сферическую волну, т. е. иметь вид

$$\varphi = -\frac{f(t-r/c)}{r}.$$

Поэтому мы приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с  $l$ ) вид

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t-r/c)}{4\pi r}$$

получающийся заменой в  $\dot{V}(t)$  аргумента  $t$  на  $t-r/c$ .

**75. Возбуждение звука турбулентностью****76. Принцип взаимности****2.3.4 Звук в трубк, рассеяние, поглощение****77. Распространение звука по трубке****78. Рассеяние звука****79. Поглощение звука****80. Акустическое течение****81. Вторая вязкость****2.4 Другие важные темы****2.4.1 Fluid Statics**

Continuum mechanics is the continuum limit of kinetic theory.

- In solids and dense liquids, the distances between atoms are a fraction of a nanometer, while for gases at atmospheric pressure the distance is about ten times this. In continuum mechanics, we deal with much larger distance scales, and neglect the discreteness of atoms entirely.

- In this limit, the details of the atoms and their interactions determine, e.g. transport coefficients. We'll just take these quantities as given, rather than trying to calculate them.

- A continuum description only works over sufficiently large distance scales. For example, if the atomic separation is  $\ell$  and we work on distance scales of at least  $L$ , then the density fluctuations on such scales as  $\Delta\rho/\rho \sim 1/\sqrt{N} \sim (L/\ell)^{3/2}$ . Therefore, if we want  $\rho$  to be defined up to a fractional precision  $\epsilon$ , we require  $L \gtrsim \ell/\epsilon^{2/3}$ .

- As another example, suppose the typical molecular velocity is  $v_{\text{mol}}$ . Then the typical fluctuation in the center of mass speed of  $N$  molecules is  $v_{\text{mol}}/\sqrt{N}$ . If we are considering a bulk flow of average velocity  $v$ , and we want  $v$  to be defined up to fractional precision  $\epsilon$ , then

$$L \gtrsim \ell \left( \frac{v_{\text{mol}}}{\epsilon v} \right)^{2/3}$$

which is somewhat more stringent.

- Another requirement to have  $v$  be well-defined, specifically for gases, is that

$$L \gg \lambda$$

where  $\lambda$  is the mean free path. For air,  $\lambda \lesssim 100$  nm.

- More generally, we demand that our continuous matter always be in local thermal equilibrium. For example, if the equation of state  $P = P(\rho, T)$  holds in global thermal equilibrium, then we will assume  $p(\mathbf{x}) = p(\rho(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}))$ .

- In general, we require  $L \gg \ell$  to apply continuum mechanics. Interfaces between different types of continuous matter have length scale  $\ell$ , so they will be treated as discontinuities.

- Below, we will refer to "material particles", meaning packets of material containing a fixed set of atoms. These packets are much smaller than the dimensions of our setup, so they may be treated as infinitesimal, but larger than  $L$ , so they may be treated as continuous matter.

We begin with basic fluid statics.

- The forces inside continuous matter are parametrized by the stress tensor  $\sigma_{ij}$ , which means that the force  $d\mathbf{F}$  on an infinitesimal surface element  $d\mathbf{S}$  is

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j$$



where summation notation is used. Below, we will predominantly use index-free notation, so that the above equation would be written as  $d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$ .

- In a static fluid, there are no shear stresses, so  $\sigma_{ij}$  is diagonal. Furthermore,  $\sigma_{ij}$  must be diagonal in all reference frames, which is only possible if it is proportional to the identity. Therefore, for static fluids we simply have isotropic pressure,

$$d\mathbf{F} = -pd\mathbf{S}.$$

In particular, the total pressure force on a material particle is

$$d\mathbf{F} = -\nabla p dV$$

- As an example, in hydrostatic equilibrium,  $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ . Supposing that the fluid has a barotropic equation of state, meaning that  $p = p(\rho)$ , then we may define the pressure potential

$$w(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

in which case  $\Phi^* = \Phi + w(p)$  is constant, where  $\Phi$  is the gravitational potential.

- For a barotropic fluid, we define the bulk modulus

$$K = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

which quantifies the incompressibility. If  $p$  also depended on temperature, we would have to use a partial derivative. The isothermal bulk modulus  $K_T$  corresponds to a derivative at constant  $T$ , and the isentropic bulk modulus is a derivative at constant  $S$ .

- In hydrostatic equilibrium,  $\nabla p = -\rho \nabla \Phi$ , which means that gravitational equipotentials and isobars must coincide. Taking the curl of both sides yields  $(\nabla \rho) \times (\nabla \Phi) = 0$ , which tells us that gravitational equipotentials and constant density surfaces also coincide.

Example. The homentropic atmosphere. In the lower part of the atmosphere, called the troposphere, the air is typically well-mixed by adiabatic convection, and thus obeys the polytropic equation of state  $p \propto \rho^\gamma$ . The pressure potential is

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R.$$

Therefore, we have the constant

$$\Phi^* = gz + c_p T$$

which implies the temperature varies linearly with height. This is a good model for  $z \lesssim 10$  km but breaks down for higher  $z$ , where we must account for additional effects such as solar heating. The "Standard Atmosphere" model takes  $T(z)$  to be piecewise linear, with different gradients in the mesosphere, stratosphere, and troposphere. The model then infers  $p(z)$  from hydrostatic equilibrium and the ideal gas law,

$$p(z) = p_0 \exp \left( -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T(z')} \right).$$

Example. Buoyant stability. Consider an object with density  $\rho_b$  in a uniform gravitational field  $\mathbf{g}$  and fluid of density  $\rho_f$ . The moments of gravity and buoyancy are

$$\mathbf{M}_G = \int_V \mathbf{x} \times \rho_b \mathbf{g} dV, \quad \mathbf{M}_B = \oint_S \mathbf{x} \times (-pd\mathbf{S}).$$

If the body were replaced by fluid, the fluid would be in equilibrium. This implies that  $\mathbf{M}_B$  is the opposite of what  $\mathbf{M}_G$  would be if there were fluid,

$$\mathbf{M}_B = - \int_V \mathbf{x} \times \rho_f \mathbf{g} dV.$$

We will assume that the body is always in buoyant equilibrium, meaning that the body displaces its own weight in fluid, and thus the buoyant and gravitational forces cancel. Now, for the purposes of torque balance, the gravitational and buoyant forces can be taken as acting at the center of mass (CM) and center of buoyancy (CB) respectively,

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_b dV, \quad \mathbf{x}_B = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{x} \rho_f dV.$$

The torques can only balance if the CM and CB lie on a vertical line. For a fully submerged object, the stable equilibrium is when the CM is below the CB. For objects partially submerged in water, such as sailboats or ducks, it is clear that the CM is usually above the CB, which is the centroid of the part of the object below the waterline. Despite this, the equilibrium remains stable.

To understand why, we consider a longitudinally symmetric ship for simplicity, and consider an infinitesimal rotation  $d\theta$  about the  $x$ -axis. Let  $A$  be the waterline area, i.e. the intersection of the ship with the waterline, at  $z = 0$ . In order to maintain buoyant equilibrium, the rotation axis must pass through the centroid of  $A$ , as this keeps the submerged volume of the ship the same to first order in  $d\theta$ . This point is called the center of roll, and we take it as the origin. Upon this rotation, the center of gravity shifts horizontally by

$$dy_G = -z_G d\theta.$$

However, the horizontal motion of the center of buoyancy has two components,

$$dy_B = - \left( z_B + \frac{I}{V} \right) d\theta, \quad I = \int_A y^2 dA$$

The first term results from directly rotating the initially submerged part of the ship; the second arises because the shape of the submerged part of the ship changes upon rotation. Therefore, the horizontal motion of the center of buoyancy is the same as if it were actually situated at an imaginary, higher point called the metacenter, with

$$z_M = z_B + \frac{I}{V}.$$

In order for buoyancy to give a restoring torque, we need  $|dy_B| > |dy_G|$ , which means the ship is stable if the CM is below the metacenter. (The metacenter's height depends on the axis of rotation. Since we want stability against rotations about any axis, the metacenter is defined using the axis for which  $I$  is the smallest. Since ships are long and narrow, this is typically the longitudinal axis.)

Note. For general angles, stability is quantified by the "righting arm", which is simply  $|y_G(\theta) - y_B(\theta)|$ . The above analysis applies only to small angles, where the righting arm is linear in  $\theta$ . When the righting arm goes to zero, the ship becomes unstable, and flips over.

For smaller pieces of fluid, surface tension is important.

- Surface tension arises from the energy cost of having an interface between two materials,

$$dU = \alpha dA.$$

If one divides a surface by a curve, then the differential force between the two parts of the surface is

$$d\mathbf{F} = \alpha d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{n}}$$

where  $\hat{\mathbf{n}}$  is the normal vector to the surface.

- The quantity  $\alpha$  depends on the energy of interaction between neighboring particles in both materials with themselves, and with each other. Since the interface has microscopic thickness, its macroscopic curvature does not affect  $\alpha$ . For simple materials, it does not depend on how much the surface has already been stretched, though soap films are a notable exception.

- In general, for liquid-gas interfaces we have  $\alpha > 0$ , because particles in the liquid attract each other (otherwise it would not remain a liquid), but the gas is too sparse to cause much interaction. For liquid-liquid interfaces  $\alpha$  can be positive or negative; if it is negative, the liquids rapidly mix. For liquid-solid interfaces  $\alpha$  can again be positive or negative, and this determines the propensity of the liquid to wet the surface.

- Above, we stated the force acts "between the two parts of the surface", but this is vague. For liquid-gas and liquid-solid interfaces, the force acts between the two parts of the liquid at the surface, since the gases are sparse and the solids are not free to move. (improve)

- For a liquid in a gravitational field  $g$  with density  $\rho$ , surface tension dominates below the capillary length

$$L = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$$

by dimensional analysis. For room temperature water, this is a few millimeters. More generally, for an interface between two fluids, the density in the denominator should be the difference of the two densities, since that determines the changes in gravitational potential energy.

- Near the origin, a general surface with  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$  can be parametrized as

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 + cxy.$$

In polar coordinates, the radius of curvature in the  $\hat{\phi}$  direction is

$$\frac{1}{R(\phi)} = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right|_{r=0} = a \cos^2 \phi + b \sin^2 \phi + 2c \sin \phi \cos \phi = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\phi + c \sin 2\phi.$$

The minimum and maximum values of  $R(\phi)$  are attained for two orthogonal  $\hat{\phi}$ , and are called the principal radii of curvature  $R_1$  and  $R_2$ . For example, for  $c = 0$  they are simply  $a$  and  $b$ .

- By considering force balance on a small rectangle, one can show that the pressure discontinuity across a surface is

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

The quantity in parentheses is also called twice the mean curvature.

Note. The case of a liquid in air (pure cohesion) is relatively straightforward, but things become more subtle when one has interfaces of air, liquid, and solid. Many introductory textbooks give incorrect derivations of basic results such as Jurin's law and Young's law. For an example of the subtleties swept under the rug, see the paper [Derivation of Jurin's law revisited](#).

## 2.4.2 Solid Statics

Next, we consider solid statics, which is slightly more mathematically involved.

- In response to shear stresses, liquids flow and solids deform, so solids can support them in static equilibrium. A familiar example of a shear stress at the boundary between two solids is static friction, though shear stresses also exist in the interiors of solids.

- As a result, we have a general stress tensor, which acts on an infinitesimal surface element as

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}.$$

By considering the forces acting on a small closed volume, we find the total force is

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{f}^* dV, \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T$$

where  $\mathbf{f}$  is the external force density,  $\mathbf{f}^*$  is the total force density, and the final term is  $\nabla_j \sigma_{ij}$ .

- The diagonal elements of  $\boldsymbol{\sigma}$  are the negatives of the pressures in each direction, while the off-diagonal elements represent shear stresses. Therefore, in general there is no unique way to define "the" pressure, though a decent option is to use the "mechanical pressure",

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

which is a scalar that reduces to the pressure for an isotropic stress tensor. It can be interpreted as the negative of the normal component of the stress averaged over all possible surface orientations, which follows since  $\langle n_i n_j \rangle = \delta_{ij}/3$  for normal vectors  $\hat{\mathbf{n}}$ .

- A solid under tension will begin to plastically deform above the yield stress, and fail entirely when the stress equals the tensile strength. For typical metals, the tensile strength is several hundred MPa, modern composite carbon fibers have tensile strengths of a few GPa, and carbon nanotubes have tensile strengths of about 50 GPa.

- In mechanical equilibrium,  $\mathbf{f}^* = 0$ , which is known as Cauchy's equilibrium equation. They are a set of coupled PDEs, which must be supplemented with constitutive relations which give the stress in terms of the other properties of the material.

- The total moment acting on a body is

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV + \oint_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}^* dV - \int_V \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \sigma_{jk} dV$$

as is most conveniently shown in index notation. Since  $\mathbf{f}^*$  vanishes in equilibrium, this calculation is usually taken to show that the stress tensor is symmetric,  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ .

- However, this is actually an oversimplification, because we have ignored the possibility of external moments. For example, consider an electrically polarized material. If the material is placed in a uniform electric field, there is no force density, but there is a moment density.

- What happens next depends on whether the solid can support asymmetric stress. If it doesn't, we concluded that it cannot be in equilibrium until the polarization aligns with the external field; if it does, then an internal asymmetric stress appears to cancel the torque. This happens in liquid crystals, as they have long-range orientational order. However, for simplicity we'll take the stress tensor to be symmetric from this point on, as it holds for most materials.

- Symmetric stress tensors can be diagonalized, i.e. for every point in a body there exists a principal basis in which the stress tensor is diagonal.

- By balancing forces on a surface between two bodies, we have  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  is continuous across surfaces. For example, for a horizontal surface,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ , and  $\sigma_{zz}$  must be continuous. Note that the mechanical pressure can change discontinuously; the continuity of the pressure in fluid statics (ignoring surface tension) only held because the pressure was isotropic.

Note. There's a minor subtlety involving the definition of the stress tensor. The basic definition relevant for fluid mechanics is the one above, in terms of forces acting on surface

elements. However, since force is the rate of change of momentum, you can also define  $\sigma_{ij}$  as the rate of flow of momentum  $P_i$  across a unit  $j$ -area. For typical fluids, these definitions coincide, but they differ in general, and the latter is more fundamental.

For example, consider a gas of photons in a reflective box. Here the first definition of stress tensor becomes ambiguous: photons don't interact with each other classically, so they don't experience any force at all. We can still define a stress tensor by talking about the force that a physical small, flat object would experience if it were placed inside the photon gas, but that requires changing the setup. The definition is no longer intrinsic to the fluid itself, and worse, it depends on the kind of object placed inside, e.g. the result for a reflective element is twice that for an absorbing element. On the other hand, the second definition still works perfectly well, which is why it is almost universally used in relativistic contexts.

The choice of definition makes a difference in how one develops the theory. For example, consider the statement that the stress tensor is symmetric, for a fluid experiencing no external forces or moments. We proved this above in the case of statics, but for ordinary fluids where the stress tensor is defined the first way, there's a simple proof that holds for fluid dynamics too. The antisymmetric part of the stress tensor contributes a torque to an infinitesimal fluid element of size  $\Delta L$  scaling as  $(\Delta L)^3$ . The moment of inertia of the element scales as  $(\Delta L)^5$ , which implies an unphysical infinite angular acceleration as  $\Delta L \rightarrow 0$ , implying that the stress tensor must be symmetric.

In the relativistic context, where we use the second definition, we can define the stress(-energy) tensor using Noether's theorem, as discussed in the notes on Quantum Field Theory. It turns out that even for an isolated system, the stress tensor can come out antisymmetric! The physical interpretation of the antisymmetric part is that it transfers orbital angular momentum to spin, which evades the above argument because the amount of spin a volume element can suppose scales as  $(\Delta L)^3$ . (This subtlety doesn't occur for ordinary fluids, which aren't spin polarized.) However, it's possible to redefine the stress-energy tensor to include the bound momentum carried by the spin, in which case it is symmetric again.

Next, we describe the deformations within solids in terms of strain.

- The tricky thing about deformations is that they can't be inferred from the current state of the solid alone; we also need to know how it relates to the original state. We suppose a solid is deformed so that the material particle at  $\mathbf{X}$  moves to  $\mathbf{x}$ . The displacement field is

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

In the Euler representation, we think of everything as a function of  $\mathbf{x}$ , while in the Lagrange representation we think of everything as a function of  $\mathbf{X}$ . We will use the Euler representation, so all derivatives will be with respect to  $\mathbf{x}$ .

- Note that there is no analogue of the active/passive transformation distinction here, because there is no natural way to view a general deformation passively.

- When the displacements are large, we need the general machinery of differential geometry, so we will mostly restrict to the case of small displacements, in which case there is no fundamental difference between the Euler and Lagrange representations.

- Displacements can also include rigid transformations of the solid, such as translations and rotations, which do not count as deformations. Thus, we are motivated to extract the part of  $\mathbf{u}$  that refers to deformations only.

- Consider an infinitesimal "needle" that originally pointed from  $\mathbf{X}$  to  $\mathbf{X} + \mathbf{a}_0$ , but now points from  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ . To compute  $\mathbf{a}$ , note that

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Therefore, expanding to first order in  $\mathbf{a}$ ,

$$\delta \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{u}).$$

The tensor  $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \nabla_i \mathbf{u}_j$  contains the so-called displacement gradients.

- A displacement field is slowly varying when the displacement gradients are small, which means the fractional changes in lengths are small. We will work almost exclusively in this limit.
- Similarly, scalar products between two needles based at the same point change,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \sum_{ij} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) a_i b_j.$$

We can write this in terms of Cauchy's (infinitesimal) strain tensor,

$$\delta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}, \quad u_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) = \nabla_{(i} u_{j)}.$$

This can also be written in index-free notation as

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

where the bar is used to avoid notational confusion.

- The antisymmetric part of  $\nabla \mathbf{u}$  contains infinitesimal rotations, which don't contribute to  $\bar{\mathbf{u}}$ . Since  $\bar{\mathbf{u}}$  is symmetric, it can be diagonalized at each point; the eigenvectors are the principal strain axes.

- This result coincides with a more general result from differential geometry. We can think of  $\mathbf{u}$  as quantifying the difference of the metrics in the  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{X}$  coordinates, as we flow from  $\mathbf{X}$  to  $\mathbf{x}$  under the vector field  $\mathbf{u}$ . Therefore,  $\bar{\mathbf{u}}$  should be the Lie derivative of the metric with respect to  $\mathbf{u}$ , which it indeed is.

- The diagonal elements of  $u_{ij}$  reflect the fractional change in length along the corresponding axis, while the off-diagonal elements reflect the change in angle between the corresponding initially orthogonal coordinate axes. Specifically, if  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  are initially orthogonal, then

$$\delta\phi = -2u_{ab} \equiv -2\hat{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}, \quad \frac{\delta|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = u_{aa}.$$

In addition, note that

$$\delta\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{a} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a}$$

which separates the effects of infinitesimal rotations and deformations.

- By straightforwardly applying derivatives, Cauchy's strain tensor satisfies

$$\nabla_i \nabla_j u_{kl} + \nabla_k \nabla_l u_{ij} = \nabla_i \nabla_l u_{kj} + \nabla_k \nabla_j u_{il}$$

Conversely, it can be shown that any symmetric tensor satisfying this is the strain tensor corresponding to some displacement field. This is a symmetric version of the Poincare lemma.

- In order to do vector calculus, we need to compute the variations of infinitesimal line elements, surface elements, and volume elements. We have already treated line elements as our first example; note that in the line integral of a vector field  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , the vector field, the line element, and the endpoints all need to be transformed.

- To handle volume elements, note that we can build them out of three infinitesimal vectors,

$$dV = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

Expanding the infinitesimal changes out in index notation gives

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk} ((\nabla_l u_i) (a_l b_j c_k) + (\nabla_l u_j) (a_i b_l c_k) + (\nabla_l u_k) (a_i b_j c_l)).$$

On the other hand, we also have

$$(\nabla_l u_{[l]})(a_i b_j c_k) = 0$$

since antisymmetrizing over four spatial indices gives zero. Since the  $\epsilon_{ijk}$  already antisymmetrizes over  $i, j$ , and  $k$ , this identity relates the three terms above to a fourth, giving the result

$$\delta(dV) = \epsilon_{ijk}(\nabla_l u_l)(a_i b_j c_k) = (\nabla \cdot \mathbf{u})dV$$

which makes intuitive sense. As an application, volumes transform like

$$\delta\rho = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}.$$

- For a surface element, we note that we can write  $d\mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  and  $dV = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}$ . Then using the previous result gives

$$\mathbf{c} \cdot \delta(d\mathbf{S}) = \delta(dV) - \delta\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{c} \cdot d\mathbf{S}) - \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

Since  $\mathbf{c}$  is arbitrary, we can conclude that

$$\delta(d\mathbf{S}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})d\mathbf{S} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- As an example, suppose that an external force does work on the body, causing it to slowly deform. The work done against the internal forces in the body is

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV.$$

For simplicity, we suppose the surface of the body does not move. Then

$$\delta W = - \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \delta \mathbf{u}) dV$$

where we integrated by parts, and  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$ .

- The first term represents the work done against long-range forces, e.g. it contains the change in gravitational potential energy. The second term represents the work done against internal forces by deforming the body. For a symmetric stress tensor, it can be written as

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \bar{\mathbf{u}} dV.$$

As a simple check on this result, note that for an isotropic stress tensor  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ,

$$\delta W_{\text{deform}} = - \int_V p \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) dV = - \int_V p \delta(dV)$$

as expected. Note. When the deformations are large, it's better to use ideas from differential geometry rather than vector calculus. The positions of the material particles define a coordinate system, whose metric is  $\delta_{ij}$  when the material is not deformed. By viewing the map  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}$  as a diffeomorphism, this metric is pushed forward to

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}.$$

The general definition of the strain tensor is in terms of the change in the metric,

$$g_{ij} = \delta_{ij} - 2u_{ij}.$$

Finally, by substituting  $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ , we arrive at the so-called Euler-Almansi stress tensor,

$$u_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

which differs from our infinitesimal expression by a quadratic term. For example, for a uniform scaling  $\mathbf{x} = \kappa \mathbf{X}$ , we have

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (1 - \kappa^{-1/2}) \delta_{ij}$$

which makes sense for all  $\kappa$ , while our infinitesimal expression only made sense for  $\kappa \approx 1$ .

Note. The Lagrange representation. In this case, we work in terms of the variable  $\mathbf{X}$ . We define the Lagrangian displacement field to satisfy

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X})).$$

In other words, while  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  represents how much the material particle now at  $\mathbf{x}$  was displaced,  $\mathbf{U}(\mathbf{X})$  represents how much the material particle that was originally at  $\mathbf{X}$  was displaced. Starting with the ambient Euclidean metric, we can pull it back from  $\mathbf{x}$  to  $\mathbf{X}$  to define the metric

$$G_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$$

where  $G_{ij}$  is the Lagrangian deformation tensor. We define the Lagrange-Green stress tensor by

$$G_{ij} = \delta_{ij} + 2U_{ij}$$

which implies that

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right).$$

For infinitesimal deformations, this coincides with our other stress tensors. Note. Numeric computations can be done by discretizing either the Euler or Lagrange representation. As mentioned above, for small displacements the two are essentially equivalent. More generally, the Lagrange representation tends to be a bit easier to think about, so traditional 1D hydrodynamic codes are almost all Lagrangian. For more than one dimension, turbulence tends to "tangle up" the Lagrange representation's computation grid, making the Euler representation a better choice, as the Eulerian grid is fixed in space. On the other hand, that also means that matter can leave the computational domain.

Finally, we relate stress and strain with Hooke's law.

- For sufficiently small deformations, many materials have a linear relationship between stress and strain. For an isotropic material, we define the Young's modulus by

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{u_{xx}}$$

Thus, a rod of length  $L$  and cross-sectional area  $A$  has a spring constant of

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{\sigma_{xx} A}{u_{xx} L} = \frac{EA}{L}.$$

Young's modulus has dimensions of pressure, and typical values for metals are about 100GPa. Since the strain must be small, Hooke's law applies only for stresses much less than  $E$ . For instance, the yield stress is roughly a thousand times smaller. Hooke's law breaks down at the proportionality limit, which is usually well below the yield stress. Corrections to linearity are accounted for in "hyperelasticity", which is useful for describing rubber.



- Normal materials will also contract in the transverse direction when they are stretched. If a force is applied along the  $x$  direction, then both  $u_{xx}$  and  $u_{yy}$  will be proportional to it, so their ratio is independent of it. We hence define Poisson's ratio as

$$\nu = -\frac{u_{yy}}{u_{xx}}$$

- The most general linear relation between stress and strain is

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}u_{kl}$$

where  $E_{ijkl}$  is the elasticity tensor. For an isotropic material the most general option is

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

where  $\lambda$  and  $\mu$  are called the elastic moduli or Lamé coefficients, and  $\mu$  is called the shear modulus or modulus of rigidity. Explicitly, we have

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda\delta_{ij}u_{kk}$$

so only  $\mu$  contributes to shear stresses.

- These two parameters are determined by  $E$  and  $\nu$ , and vice versa. Specifically, for stretching along the  $x$  direction, the only nonzero components of stress and strain are

$$\sigma_{xx} = P, \quad u_{xx} = \frac{P}{E}, \quad u_{yy} = u_{zz} = -\frac{\nu P}{E}.$$

Comparing this to the definition of the elastic moduli gives the relations

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\mu, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

or conversely,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

The Young's modulus and Poisson's ratio are directly measurable, so they are found in tables.

- Note that the mechanical pressure is

$$\Delta p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)u_{ii}.$$

On the other hand,  $u_{ii} = -\Delta\rho/\rho$ , so the bulk modulus is

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Generically,  $K$ ,  $E$ ,  $\lambda$ , and  $\mu$  are all of the same order of magnitude.

- We can also solve for the strain in terms of the stress.

$$u_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}.$$

- In general, the work needed to deform a body is

$$\delta W_{\text{deform}} = \int_V \sigma_{ij}\delta u_{ij}dV.$$

However, since  $\boldsymbol{\sigma}$  depends on  $\bar{\mathbf{u}}$ , this integral can be path-dependent. It is path-independent if the cross derivatives are equal,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial u_{ij}}$$

which is the tensorial analogue of the condition that the curl of a vector field vanish.

- Assuming the stress is linear in the strain, this implies that

$$E_{ijkl} = E_{klij}.$$

Furthermore, the elasticity tensor is symmetric in its first two and second two indices, since the stress and strain tensors are symmetric. Thus, each of these pairs of indices has 6 degrees of freedom, and symmetry under exchanging the two pairs gives a total of 21 degrees of freedom. Of these, 3 are redundant because they just describe the orientation of the material.

- The number of degrees of freedom needed to describe a material depends on its degree of symmetry, with cubic crystals requiring 3, and triclinic crystals requiring all 18.

- Assuming this symmetry condition is satisfied, we can imagine building up  $\bar{\mathbf{u}}$  linearly, giving

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2} E_{ijkl} u_{ij} u_{kl}.$$

This must be positive definite for the solid to be stable, which leads to positivity conditions on the elasticity tensor. This can also be used to show that solutions to the equilibrium equation  $\mathbf{f}^* = 0$  are unique.

- For the special case of isotropic materials, we have

$$\varepsilon = \mu u_{ij} u_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (u_{ii})^2.$$

It can be shown that for this to be positive definite, we require

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0.$$

These impose stability against shearing and compression, respectively. Equivalently,

$$K > 0, \quad E > 0, \quad -1 < \nu < 1/2.$$

Most materials have  $\nu > 0$ , but exotic "auxetic" materials can have negative  $\nu$ . Example. Consider a static homogeneous cube of isotropic material of side length  $L$ , subject to a uniform shear stress  $P$  along the  $\hat{\mathbf{y}}$  direction on the faces perpendicular to  $\hat{\mathbf{x}}$ . As a result of this external stress, force balance ensures that a uniform shear stress  $\sigma_{xy} = P$  is set up throughout the entire material. However, torque balance tells us that this situation is actually impossible: the stress tensor is not symmetric, so torque balance can't be satisfied; in reality the cube will begin rotating about the  $\hat{\mathbf{z}}$  axis.

One way to prevent this is to put another external uniform shear stress  $P$  along the  $\hat{\mathbf{x}}$  direction on the faces perpendicular to  $\hat{\mathbf{y}}$ , in which case  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = P$  throughout the material, and

$$u_{xy} = \frac{P}{2\mu} = \frac{1}{2} (\nabla_x u_y + \nabla_y u_x).$$

There are multiple solutions for the displacement field  $\mathbf{u}$ , which is generally not determined uniquely. For example, the cube may shear along the  $\hat{\mathbf{x}}$  direction, the  $\hat{\mathbf{y}}$  direction, or some combination of both. Which one occurs in practice depends on how the external forces are applied.

### 2.4.3 Ideal Fluid Flow

We begin with the mathematical description of fluid flow.

- We describe the fluid's motion with a velocity field  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . As mentioned previously, this corresponds not to the motion of individual molecules, but to that of "material particles", i.e. it is the center of mass velocity of a small packet of fluid. The momentum of such a packet is

$$d\mathbf{P} = \rho \mathbf{v} dV.$$

- The motion can be visualized using streamlines, which are the field lines of  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  at a fixed time  $t$ . If the flow is not steady, this will differ from the trajectories of the material particles themselves. For example, the shape of the smoke that has come out of a chimney at time  $t$  is generally not a streamline, but rather is a "streakline", meaning a set of trajectories evaluated at time  $t$  released from the chimney at different initial times  $t_0$ .

- Conservation of mass implies the continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

For incompressible flow, this reduces to  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

- The rate of change of a property of the fluid experienced by a material particle is quantified by the material/comoving time derivative,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

The first term accounts for the local rate of change, while the "advective" term corresponds to the effect of following the motion of the fluid. For example, for the time-independent vector field  $\mathbf{x}$ , the rate of change of  $\mathbf{x}$  for a material particle is just the velocity,

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{x} = \mathbf{v}$$

- The continuity equation can be equivalently written as

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

which is intuitively clear. Also, note that in a small time interval, all points of the fluid are displaced by  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} \delta t$ . Therefore, using our earlier result for volume transformation under strain, the volume of the material particle changes as

$$\frac{D(dV)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV$$

where here the convective derivative is only formal. Combining these results gives  $D(dM)/Dt = 0$ , the obvious fact that the mass of a material particle does not change as it moves.

- By applying Newton's second law to a material particle, we have Cauchy's equation,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}^*$$

where  $\mathbf{f}^*$  is the effective force density. The field  $D\mathbf{v}/dt$  is called the material acceleration; note that it can be nonzero even for a steady flow.

- This result can also be written as a continuity equation for momentum,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{f}^*$$

The quantity  $\rho \mathbf{v}$  is called the current density of mass, or the momentum density, or the mass flux, or the mass flux density.

- To solve this equation, we generally need constitutive relations which give  $\mathbf{f}^*$  in terms of the material parameters. If  $\mathbf{f}^*$  only depends on  $\mathbf{x}$  and the density, then our equations for  $D\rho/Dt$  and  $D\mathbf{v}/Dt$  close by themselves.

- The formalism above also applies to solids, but now  $\mathbf{f}^*$  depends on the displacement field

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

which we must keep track of. The easiest way to do this is to note that  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  simply means the location the material particle at  $\mathbf{x}$  originally came from. This is time-independent, so

$$\frac{D\mathbf{X}}{Dt} = 0.$$

Plugging in the definitions gives

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

which must be solved along with the other three equations.

Next, we consider the case of incompressible and inviscid/ideal/perfect flow.

- Taking the only forces to be gravity and pressure,  $\mathbf{f}^* = \rho \mathbf{g} - \nabla p$ , we have the Euler equations

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

The first Euler equation is also called the Euler equation.

- The Euler equations determine the time evolution of  $\mathbf{v}$ . They also fix the pressure; taking the divergence of the Euler equation gives

$$\nabla^2 p = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{g} - \rho_0 \nabla \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}).$$

Thus, the pressure everywhere at some instant is determined by the velocity at that instant.

- This seems puzzling, because distant changes in the velocity affects the pressure instantaneously, seemingly in a nonlocal way. This is because changes in the pressure propagate at the speed of sound, and for an incompressible fluid the speed of sound is infinite. This is a decent approximation for many real-world situations involving water and air, where the speed of sound is much higher than the flow speed.

- At interfaces between two fluids, we additionally need the boundary conditions that  $p$  and  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  are continuous, where  $\mathbf{n}$  is the normal vector. For a solid boundary, this means the normal component of velocity must vanish.

- As we'll see below, the degree to which viscosity can be neglected is quantified by the Reynolds number, which is high for many real-world applications. However, even a small amount of viscosity can have qualitative effects. For instance, at solid boundaries there is always a boundary layer where the tangential velocity of the fluid approaches zero.

- In steady flow, the Euler equation reduces to

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho_0}.$$

As we'll see later, when a compressible fluid performs steady flow, it behaves as if it incompressible, as long as the flow speed is much lower than the speed of sound. Intuitively, this is a local increase in pressure will tend to drive fluid out of the way rather than compressing it. This makes incompressibility often a reasonable assumption even when applied to air.

- Bernoulli's theorem states that for steady flow, the Bernoulli field

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{p}{\rho_0}$$

is constant along streamlines, where  $\Phi$  is the gravitational potential. To see this, note that

$$\frac{DH}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0$$

where we used the assumption of steady flow, and the Euler equation.

- The first two terms in the Bernoulli field make up the total mechanical energy per unit mass, and the change in pressure quantifies the work done on particles as they flow, so Bernoulli's theorem can be thought of as a statement of conservation of energy.

- In hydrodynamics, the quantity  $\rho_0 v^2/2$  is also called the "dynamic pressure", since it is converted to pressure when a flow is stopped. For a constant gravitational field  $g_0$ , the quantity  $H/g_0$  is also called the "total head", since it quantifies how high the fluid can be raised.

Note. In steady flow through a constriction, there is an asymmetry between the inlet and outlet: the water converges in the inlet to the constriction, then leaves through the outlet in a narrow jet. (One can also see a boundary layer in the constriction.)

However, this asymmetry is not encoded in the Euler equations for steady flow, which are symmetric under time reversal. Time reversal symmetry is broken by viscosity (as a result of the usual thermodynamic arrow of time), but if we don't account for it, we must impose boundary conditions to get the appropriate physical solution, just as we do for, e.g. the advanced and retarded solutions in electromagnetism.

Next, we study the vorticity of the flow.

- Suppose that a steady flow originates from a asymptotically uniform flow at infinity. In this case, it is intuitive that  $H$  should be constant between all streamlines, and hence constant everywhere. However, this intuition can fail if streamlines form closed loops.

- To make this intuition precise, note that

$$\partial_i H = v_j \partial_i v_j + \partial_i \left( \Phi + \frac{p}{\rho_0} \right) = v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i$$

where we used the Euler equation. Therefore, exiting index notation,

$$\nabla H = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

where  $\boldsymbol{\omega}$  is the vorticity field. Thus,  $H$  is constant if the vorticity vanishes.

- Visually, the field lines of  $\boldsymbol{\omega}$  are called vortex lines. Since the vorticity field is a curl,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , so vortex lines generically close. One can think of the fluid as locally circulating around such lines. Since  $\nabla H$  is perpendicular to both  $\mathbf{v}$  and  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $H$  is constant on the surfaces made from vortex lines and streamlines, also called Lamb surfaces.

- Accounting for the time-dependent term in the Euler equation, we have

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla H$$

and taking the curl of both sides gives

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

Therefore, if an ideal fluid initially has no vorticity, then it never can gain any.

- This can be physically unintuitive. For example, if one moves a ball through initially still water, vortices will form in its wake. They are created by the "shedding" of boundary layers at the surface of the ball, which exist due to viscosity.

- By Stokes' theorem, the circulation of the fluid along a curve  $C$  is

$$\Gamma(C, t) = \oint_C \mathbf{v}(t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$$

where we used Stokes' theorem.

- In the absence of vorticity, the curl of the velocity vanishes, so we may write it as

$$\mathbf{v} = \nabla \Psi$$

where  $\Psi$  is called the velocity potential. Since the divergence of the velocity vanishes,

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

This case of "potential flow" is simple because it reduces the problem to linear differential equations, and much is known about Laplace's equation. If the flow is two-dimensional, complex analysis techniques can also be used.

- This approach is useful whether flow is steady or not. If the flow is not steady, we can solve for the pressure, and then use that to determine the time evolution from the Euler equation,

$$\nabla(H + \partial\Psi/\partial t) = 0$$

This determines  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  up to an arbitrary function of time, which is irrelevant, so we can take

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -H$$

- Since the divergence of the velocity vanishes, we can also take it to be the curl of some other function. In practice, this is useful in two-dimensional flows, where the curl effectively maps scalar fields to vector fields. In this case we can define the stream function  $\psi(x, y)$ , where

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

in which case the divergence vanishes by the equality of mixed partial derivatives. In addition,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

which implies that the stream function is constant along streamlines. The vorticity is

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2 \psi$$

so for irrotational flow one can find  $\psi$  by solving Laplace's equation. Example. Potential flow past a sphere. Consider an asymptotically uniform flow with velocity  $U\hat{\mathbf{z}}$  which encounters a sphere of radius  $r$  at the origin. Using standard techniques for solving Laplace's equation, the solution is

$$\Psi = Ur \cos \theta \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

where  $\theta$  is the angle from  $\hat{\mathbf{z}}$ . By Bernoulli's theorem, the change in pressure is  $\Delta p = \rho_0 v^2/2$ , and a straightforward computation gives

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_0 U^2 \frac{9 \cos^2 \theta - 5}{4}$$

on the surface of the sphere. The net force on the sphere vanishes; there is no drag force.

Note. D'Alembert's paradox is the fact that the drag force generally vanishes in steady potential flow. We saw this above, and we can prove it in general. Note that the drag force on the body is

$$\mathbf{F} = \oint_S p d\mathbf{S} = -\frac{1}{2}\rho_0 \oint_S v^2 d\mathbf{S}$$

where we used Bernoulli's theorem, and  $S$  is the surface of the body. Here, the uniform pressure contribution  $p_0 \oint d\mathbf{S}$  vanishes, and we have neglected the gravitational potential term, since it just yields the buoyant force. To evaluate this integral, we use the divergence theorem in the form

$$\int_V (\nabla T) dV = - \oint_S T d\mathbf{S}$$

where  $V$  is the volume outside of  $S$ . Switching to index notation,

$$F_i = -\frac{1}{2}\rho_0 \oint v_j v_j dS_i = \frac{1}{2}\rho_0 \int_V \partial_i (v_j v_j) dV.$$

Now we use the fact that the divergence and curl of  $\mathbf{v}$  vanish to write

$$\partial_i (v_j v_j) = 2v_j \partial_i v_j = 2v_j \partial_j v_i = 2\partial_j (v_j v_i).$$

Then using the divergence theorem again in reverse gives

$$F_i = \rho_0 \int_V \partial_j (v_j v_i) dV = -\rho_0 \oint_S v_j v_i dS_j = 0$$

since  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$  vanishes everywhere on the surface. One might worry that we pick up a term in the divergence theorem from the boundary at infinity, but in general the velocity field falls off at least as fast as  $1/r^3$ , so it does not contribute.

The paradox is that for an object with cross-sectional area  $A$  moving with velocity  $v$  through stationary fluid, the drag force does not actually vanish in the limit of zero viscosity, but rather approaches a constant of order  $\rho_0 A v^2$ . There are a few ways of thinking about why this effect is missing in the potential flow solution. In terms of forces, a boundary layer will be formed for any nonzero viscosity, and this produces a trailing wake behind the body in which the pressure is lower than in front, causing a drag force. In terms of conserved quantities, drag occurs because the object gives momentum to the initially stationary fluid to get it out of the way. In the potential flow solution, this does not happen because the fluid is already moving with the object appropriately, but the total momentum of the fluid is infinite, making such a situation unphysical.

Note. The convective derivative coincides with the Lie derivative for scalars,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

and a scalar  $u$  that simply flows along with the velocity field has  $Du/dt = 0$ . Similarly, we can define a modified convective derivative for general tensors,

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

which vanishes if the tensor is Lie transported along the velocity field. For a vector field,

$$\frac{\tilde{D}\mathbf{u}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

Starting from the equation of motion for the vorticity and using the product rule for the curl, we can show that  $\tilde{D}\omega/\tilde{D}t = 0$ , which means concretely that vortex lines are carried by the flow. Intuitively, this is because vorticity is a local measure of angular momentum, and the angular momentum of a parcel of fluid can't change in the absence of viscosity. Furthermore, we know that vortex lines cannot intersect each other, and form closed loops, as can be seen in the motion of smoke rings.

Remarkably, in the late 19th century these results were taken as a basis for a "vortex theory of everything". In this theory, which was popular among the greatest physicists of the United Kingdom, the different kinds of atoms are topologically distinct knots formed by vortex lines in the ether, which is taken to be an ideal fluid. Though the theory didn't succeed in explaining much about chemistry, it has an important historical legacy. For example, in the theoretical physics department at Cambridge, more people work on fluid dynamics than high energy physics or relativity.

### 2.4.4 Compressible Flow

Now we consider the compressible flow of ideal fluids. In this case, the speed of sound becomes finite, so we must begin with a treatment of sound waves.

- Neglecting gravity, the Euler equations are now

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

- For a small amplitude sound wave, we let  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$  and  $p = p_0 + \Delta p$ . In this case  $v/c$  is similarly small, and we can neglect the advective term. At lowest order, we have

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p), \quad \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}$$

which combine to give

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = \nabla^2(\Delta p)$$

- For a fluid with a barotropic equation of state,  $p = p(\rho)$ , we have

$$\Delta p = K_0 \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

which yields the wave equation,

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta\rho), \quad c_0 = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}.$$

- For the special case of an isentropic ideal gas,  $K_0 = \gamma p_0$  and

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}}$$

where  $\mu$  is the molar mass. The isothermal sound velocity is recovered for  $\gamma = 1$ .

- If we let the density variation be

$$\Delta\rho = \rho_1 \sin(kx - \omega t)$$

then the velocity field is

$$v_x = v_1 \sin(kx - \omega t), \quad v_1 = c_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$



This confirms our earlier statement that  $v/c$  is the same order as  $\Delta\rho/\rho$ . Also, note that

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\partial\mathbf{v}/\partial t|} \sim \frac{kv_1^2}{\omega v_1} = \frac{v_1}{c_0}$$

so the advective term does not contribute at lowest order, justifying our neglect of it above. We have also neglected gravity, which is a good approximation when  $g \ll \omega c$ .

Next, we consider steady compressible flow.

- In this case, the Euler equations reduce to

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0.$$

We assume a barotropic equation of state, for simplicity. The local Mach number is  $M = |\mathbf{v}|/c$ .

- We can combine the Euler equations to get an equation solely in terms of the velocity. The continuity equation states

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho = -\frac{1}{\rho c^2}(\mathbf{v} \cdot \nabla)p$$

where we used the definition of the speed of sound. Then, using the Euler equation gives

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}}{c^2}.$$

- Applying the Cauchy-Schwartz inequality to the numerator gives

$$|\nabla \cdot \mathbf{v}| \leq M^2 |\nabla \mathbf{v}|, \quad |\nabla \mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{ij} (\nabla_i v_j)^2}.$$

This demonstrates that when  $M \ll 1$ , the divergence  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  is small, and the flow can be treated as incompressible. In practice, this is a reasonable assumption for  $M \lesssim 0.3$ .

- By an analogous derivation to the incompressible case, the Bernoulli field is

$$H = \frac{1}{2}v^2 + \Phi + w(p)$$

where we include the gravitational potential  $\Phi$  for completeness, and  $w(p) = \int dp/\rho(p)$  is the pressure potential. For an isentropic ideal gas,

$$w = c_p T, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu}$$

where  $\mu$  is the molar mass.

- In general, an object moving through an ideal fluid has a stagnation point in front of it, where the fluid is at rest with respect to the object. There is also at least one behind it, but in practice the flow is not steady behind the object because of vortex formation and turbulence, making Bernoulli's theorem inapplicable.

- Bernoulli's theorem lets us compute the temperature at the forward stagnation point,

$$\frac{1}{2}v^2 + c_p T = c_p T_0.$$

For an isentropic ideal gas, this gives the result

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

where  $M$  is the Mach number of the flow at the initial point. Assuming the flow is isentropic,  $p \propto \rho^\gamma$ , which implies

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

For high speeds, the temperature rise is substantial. In practice, it can cause the gas to dissociate into a plasma, changing the molar mass  $\mu$  and hence the result.

- A sonic point is a point where  $M = 1$ . Applying Bernoulli's theorem between a sonic point and a stagnation point gives

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

which can be combined with our previous result to yield the local temperature in terms of the sonic point temperature,

$$\frac{T}{T_1} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right)^{-1}.$$

Example. Flow through a duct with a slowly varying cross-section  $A(x)$ . We approximate all properties of the flow to depend only on  $x$ , and treat the velocity as entirely along  $\hat{\mathbf{x}}$ . It is useful to relate quantities to those at a (possibly hypothetical) sonic point. Continuity of the mass flow gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v} = \frac{1}{M} \frac{c_1}{c} \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{M} \left( \frac{T_1}{T} \right)^{1/2 + 1/(\gamma-1)}.$$

Inserting our previous expression gives

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right)^{1/2 + 1/(\gamma-1)}.$$

Curiously, the right-hand side is not monotonic, but rather has a local minimum at  $M = 1$ . This means that if a sonic point exists, it must appear at the narrowest part of the duct. For subsonic flow, a decreasing duct area implies increasing flow velocity and decreasing temperature, pressure, and density, but for supersonic flow the reverse is true.

Away from the throat, there are two possible values of  $M$  for each value of  $A$ , and the one that is actually realized depends on the boundary conditions. Consider a "Laval nozzle", i.e. a symmetric duct containing a narrow throat. If there is no pressure difference, the fluid simply doesn't move at all. As the pressure difference is increased, the fluid flow grows faster, with  $M$  taking a local maximum at the throat, but remaining subsonic everywhere. At a certain critical pressure,  $M = 1$  is achieved at the throat; at this point, the fluid will continue to speed up past the throat, exiting with  $M > 1$ . This unintuitive behavior is used to maximize thrust in jets and rockets.

The flow through the nozzle is determined by the input velocity and pressure, and this in turn determines the output pressure. For subsonic flow, this output pressure must equal atmosphere pressure, constraining the input data. However, when the flow is supersonic, information cannot propagate backwards against the flow, so this constraint is not effective. What happens in practice is that if the output pressure and atmospheric pressure don't match, a discontinuity called a shock wave forms at the output. In this regime, we say the flow is "choked". Changing the pressure at the output doesn't change the flow rate at all; it can only change the location of the shock wave.

We also note that a nozzle can be used in reverse, giving a "diffuser". If a flow enters a Laval nozzle already supersonic, then it flows down as the nozzle contracts. If the contraction is sufficient,  $M = 1$  is achieved at the throat, and the fluid exits with  $M < 1$ . This requires the output pressure to be higher than the input pressure. As for the nozzle, shock waves may form, depending on the boundary conditions.

Example. A blunt object moving at supersonic speeds produces a "bow shock" in front of it, as shown. (For an object with a sharp tip, we would instead get a conical shock wave attached to the object, called a Mach cone.)

Across this shock, the properties of the fluid change discontinuously. For simplicity, we focus on a "normal" shock, where the shock wave is perpendicular to the fluid velocity; this applies at the forward tip of the bow shock shown. In the steady state and in the frame of the object, we can apply conservation of mass, momentum, and energy across the shock, to give

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad \rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2, \quad \frac{1}{2} v_1^2 + c_p T_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + c_p T_2.$$

Using the ideal gas law, the energy conservation condition can be rewritten as

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

These equations are called the Rankine-Hugoniot conditions. It is convenient to write their solutions in terms of the Mach number before the shock,  $M = v_1/c_1$  where  $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ . Then

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}.$$

The ratio of temperatures is given by the ideal gas law,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

In the limit  $M \rightarrow \infty$ , these results simplify to

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} M^2.$$

These results can also be applied to shock waves in a Laval nozzle. For an oblique shock, as occur elsewhere on the bow shock shown, the results are identical except that the  $v_i$  should be interpreted as the component of the velocity normal to the shock; the tangential velocity is unchanged.

Note. The Rankine-Hugoniot conditions treat both sides of the shock symmetrically, but in reality we must have  $T_2 > T_1$  by the second law of thermodynamics, as kinetic energy is converted to thermal energy. Note that our previous result for the stagnation point temperature is perfectly correct whether or not a shock wave exists, since it just used Bernoulli's theorem, which is one of the Rankine-Hugoniot conditions. It's only the isentropic assumption  $p \propto \rho^\gamma$  that breaks down.

### 2.4.5 Viscosity

Finally, we arrive at the full Navier-Stokes equations by including viscosity. We begin with some examples for intuition, always assuming incompressible flow.

- Viscosity is a shear stress opposing a velocity gradient. In a Newtonian fluid we assume the two are proportional, so that for a flow  $v_x(y)$ ,

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

where  $\eta$  is called the (dynamic) viscosity. The units of viscosity have various names,  $1\text{Pas} = 1\text{Poiseuille} = 0.1\text{poise}$

- For example, for an ideal gas we can show by kinetic theory that

$$\eta \sim \frac{\sqrt{k_B T m}}{\sigma} \sim \rho \lambda v$$

where  $\sigma$  is the collision cross section,  $m$  is the mass per molecule, and  $\lambda$  is the mean free path. Possibly surprisingly, the viscosity scales as  $\sqrt{T}$ , and at constant temperature is independent of the density. In liquids, the viscosity usually falls with temperature.

- Often, it is useful to work in terms of the kinematic viscosity

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

since this directly determines the acceleration of the fluid. In an ideal gas,  $\nu \propto T^{3/2}/p$ .

- As a first example, consider a planar incompressible flow, where the velocity is  $v_x(y, t)$ . In this case there is no advective acceleration, so in the absence of body forces,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

which has the form of a diffusion equation with diffusion constant  $\nu$ .

- As an example, suppose we drive a plate transversely, imposing the boundary condition

$$v_x(0, t) = u_0 \cos(\omega t).$$

Then the steady state solution is

$$v_x(y, t) = u_0 e^{-ky} \cos(ky - \omega t), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

so a shear wave propagates a distance  $1/k$  into the fluid.

- As another example, suppose we start with a "Gaussian river" of

$$v_x(y, 0) = u_0 e^{-y^2/a^2}.$$

Then the solution at later times is

$$v_x(y, t) = \frac{u_0 a}{\sqrt{a^2 + 4\nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{a^2 + 4\nu t}\right)$$

causing the river to spread out over time. Assuming the initial width is small, the momentum diffuses over time over the width  $\delta \sim 2\sqrt{\nu t}$ . When viscosity is weak, this is the typical width of the boundary layers that form.

- As a final example, suppose a plate is instantaneously kicked.

$$v_x(0, t) = u_0 \theta(t).$$

This is known as Stokes' first problem. Since there are no length scales in the problem besides  $\delta$ , the solution must depend on it alone,

$$v_x(y, t) = u_0 f(y/\sqrt{\nu t}).$$

Plugging in this ansatz gives

$$f''(s) + \frac{1}{2} s f'(s) = 0, \quad f(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_s^\infty e^{-u^2/4} du.$$

Sometimes, one defines the boundary layer thickness to be the distance where the velocity drops to  $u_0/100$ , which in this case is  $\delta_{99} = 3.64\sqrt{\nu t}$ .

- Note that viscosity within the fluid merely transports vorticity through it, which is in accordance with the conservation of angular momentum. The vorticity in this example arises purely from the external torque applied from the plate when it is kicked. Also, in all examples, the changes in velocity propagate instantaneously, which is again a consequence of assuming incompressibility.

Next, we write down the Navier-Stokes equations for incompressible flow.

- We assume the fluid is isotropic and incompressible and the stress tensor is symmetric. Then the most general possible stress tensor for a Newtonian fluid, where the shear stresses depend only on the gradient of velocity, is

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Assuming the fluid is homogeneous, so that  $\eta$  is uniform, the resulting force density is

$$\sum_j \nabla_j \sigma_{ij} = -\nabla_i p + \eta \nabla^2 v_i.$$

The stress tensor can't contain terms directly dependent on the velocity by Galilean invariance.

- By comparison, for an elastic solid we assumed the shear stress was proportional to the strain; for a Newtonian fluid we instead assume it is proportional to the time derivative of strain, also called the strain rate. There are also fluids where the shear stress has a more complicated dependence on the velocity gradients, such as ketchup, jelly, and putty, and viscoelastic materials that are both elastic and viscous.

- Inserting the above force density into Cauchy's equation of motion gives

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

which are the Navier-Stokes equations for incompressible isotropic homogeneous Newtonian fluids. The complex dynamics of such fluids result from the interplay of inertia, represented by the advective term  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ , and viscosity, represented by  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ .

- These equations must be supplemented with appropriate boundary conditions. At the interface between two fluids, or a fluid and a solid, the normal component of velocity must clearly be continuous. More subtly, the tangential component of velocity must be continuous; it is initially is not, a boundary layer quickly forms to make it so. As argued earlier,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  is also continuous.

- These facts can be combined to show that the pressure is continuous at a solid wall, which was not true for solids. Suppose this wall is at  $z = 0$ . At the origin,  $\nabla_x \mathbf{v} = \nabla_y \mathbf{v} = 0$  since the velocity vanishes at the wall. By incompressibility,  $\nabla_z v_z = 0$  at the wall as well, so the shear stress vanishes at the wall, and thus  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -p\hat{\mathbf{n}}$  is continuous, so  $p$  is.

- Taking the curl of this equation gives

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

which confirms that viscosity makes vorticity diffuse, as we saw in examples above.

- Suppose the velocity has a typical value  $u$  over an object with typical size  $L$ . Then we can quantify the ratio of the advective and viscous terms by the Reynolds number,

$$\text{Re} \sim \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{u^2/L}{\nu u/L^2} \sim \frac{uL}{\nu}.$$

There are several different qualitative regimes depending on the value of  $Re$ .

- For  $Re \ll 1$ , the flow is "creeping", and dominated by viscosity. Microorganisms live in this world. For an interesting description of it, see Life at Low Reynolds Number.
- For  $Re \sim 1$ , viscosity is still highly important; flies live in this world. In this regime, the fluid flow is still orderly and layered, which we call laminar.
- For  $Re \gg 1$ , turbulence sets in, with its accompanying erratic behavior. This regime is relevant for vehicles and human-sized objects in everyday life.
- Another way to highlight the importance of the Reynolds number is to nondimensionalize the Navier-Stokes equations. For steady flow with no external forces, it simplifies to

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}^2\tilde{\mathbf{v}}$$

where we used the scales  $\rho_0, u$ , and  $L$  to define the dimensionless variables by

$$\mathbf{v} = U\tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{x} = L\tilde{\mathbf{x}}, \quad p = \rho_0 U^2 \tilde{p}, \quad \nabla = \frac{1}{L}\tilde{\nabla}.$$

This means the aerodynamic properties of an aircraft can be simulated with a model in a wind tunnel if  $\rho_0$  and  $u$  are scaled to keep the Reynolds number the same. For supersonic aircraft, compressibility is important, and we would also have to keep the Mach number the same.

Finally, we consider some of the complications of compressible flow.

- In this case, the stress can also depend on  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , and it is conventional to define

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

where  $\zeta$  is called the bulk viscosity or expansion viscosity, in contrast to  $\eta$  which is called the shear viscosity. The point of this definition is that it makes the middle term traceless, so  $\eta$  does not affect the mechanical pressure.

- The resulting equations of motion are

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

where we again assumed a uniform  $\eta$  and  $\zeta$ . These equations close for a barotropic fluid. In the case where  $p = p(\rho, T)$ , we would also need a differential heat equation to describe the evolution of  $T$ . The viscosities  $\eta$  and  $\zeta$  could also depend on  $T$ .

- In this compressible case, velocity and  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  remain continuous at interfaces, but the pressure is no longer necessarily continuous. In addition, shock fronts may form. While our inclusion of viscosity allows us to describe shock fronts as continuous in principle, in practice they are often so thin that the continuum approximation breaks down. Thus, we must treat them as true discontinuities, and apply conservation laws across them.

- Borrowing from our earlier results for solids, the rate of work against internal stresses is

$$\dot{W} = \int_V \sum_{ij} \sigma_{ij} \nabla_j v_i dV = \int_V \left( -p \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \sum_{ij} v_{ij}^2 + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right) dV$$

As expected, the viscous terms are always positive, since they dissipate energy. Example. The viscous attenuation of sound. As in our earlier treatment of sound, we can linearize the equation of motion in the small parameters  $\Delta p = c_0^2 \Delta \rho$ . The result is

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla(\Delta p) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Combining these equations yields the damped wave equation

$$\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2(\Delta\rho) + \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} \nabla^2 \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t}.$$

For a sinusoidal wave  $\Delta\rho = \rho_1 e^{-\kappa x} \cos(kx - \omega t)$ , we thus have

$$\kappa = \frac{\omega^2}{2\omega_0 c_0}, \quad \omega_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\zeta + \frac{4}{3}\eta}.$$

In particular, higher frequency sound waves propagate a shorter distance before decaying. In practice, there is also attenuation from heat conduction.

Example. Flow past a sphere, as a function of  $Re$ , shows many qualitatively different behaviors. For  $Re \lesssim 1$ , we have a "creeping" flow that is superficially similar to potential flow; like potential flow, it can be solved for analytically. At  $Re \sim 10$ , a steady circulation forms behind the sphere. At  $Re \sim 100$ , this circulation periodically detaches from the sphere, forming a "Karman vortex street". (Physically, we can think of  $Re$  as describing the rate at which vorticity is created at the surface of the sphere. The vortices separate when this production is too fast to be simply diffused away.) At  $Re \sim 10^4$ , the flow becomes chaotic, with a turbulent wake formed behind the sphere. At  $Re \sim 10^5$ , a "drag crisis" occurs where the coefficient of drag suddenly drops and the turbulent flow reattaches to the sphere.

## 2.4.6 Основные законы элементарной гидродинамики

(тут то, с чем любые задачи общезифа по ней решаются! пропишу потом, пока не усвоено.)

### Формула Пуазейля

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

### Об уравнении мелкой воды (???)

Уравнения мелкой воды выводятся из уравнений сохранения массы и импульса (уравнения Навье-Стокса), которые справедливы для общего случая, в том числе в ситуациях, когда условия мелкой воды не выполняются. Без учёта сил Кориолиса, трения и вязкости уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta v)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\eta u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta u^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\eta v)}{\partial t} + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta v^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения могут быть записаны для скоростей. Поскольку скорости не входят в фундаментальные законы сохранения, эти уравнения не описывают явления типа гидравлического удара или гидравлического прыжка.

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - bu \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - bv \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (u(H + \eta)) - \frac{\partial}{\partial y} (v(H + \eta)), \end{aligned}$$

где  $u$  - скорость вдоль оси  $x$ ;  $v$  - скорость вдоль оси  $y$ ;  $H$  - средняя высота поверхности жидкости;  $\eta$  - отклонение давления в горизонтальной плоскости от среднего значения;  $g$  - ускорение свободного падения;  $f$  - параметр Кориолиса, равный на Земле  $2\Omega \sin \varphi$ ;  $\Omega$  - угловая скорость вращения Земли вокруг оси ( $\pi/12$  радиан/час);  $\varphi$  - географическая широта;  $b$  - коэффициент вязкого сопротивления.

### 2.4.7 Идеальная жидкость

(???? я забыл, откуда это писал.)

Уравнение непрерывности

Уравнение Эйлера

Условие отсутствия конвекции

Уравнение Бернулли

Поток энергии

Поток импульса

Сохранение циркуляции скорости

Потенциальное движение

Несжимаемая жидкость

Другое

Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Волны во вращающейся жидкости

### 2.4.8 О гидростатике (!!?)

(тут много крутых методов мб укажу потом.)

## 2.5 Турбулентность в двух словах

### 2.5.1 Устойчивости движений, разрывы

Устойчивость стационарного движения жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1,$$



где  $\mathbf{v}_0$  и  $p_0$  удовлетворяют

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + v \Delta \mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$$

При больших числах Рейнольдса у этой частоты  $\gamma_1 > 0$ , причем для  $R$ , близких к критическому,  $\gamma_1 \ll \omega_1^1$ ). Функция  $\mathbf{v}_1$ , соответствующая этой частоте, имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = A(t) \mathbf{f}(x, y, z)$$

где  $\mathbf{f}$  - некоторая комплексная функция координат, а комплексная амплитуда <sup>2)</sup>

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega t}.$$

Среди членов же четвертого порядка есть член, пропорциональный  $A^2 A^{*2} = |A|^4$ , при усреднении не выпадающий. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4,$$

где  $\alpha$  - положительная или отрицательная постоянная (постоянная Ландау).

### Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный примененному в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (Rayleigh, 1916).

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0.$$

Угловая скорость  $\dot{\varphi}$  частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

(!?!?!?) Вычисляя  $\mu$  как  $mr^2 \dot{\varphi}$  и опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (27.1) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \dot{\varphi} > 0.$$

### Устойчивость движения по трубе

(нужно читать и думать, ЛЛ6.28)

### Неустойчивость тангенциальных разрывов

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Поскольку  $\mathbf{v}$  направлено по оси  $x$ , то второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Если применить к обеим его частям операцию  $\text{div}$ , то в силу первого уравнения мы получим слева нуль, так что  $p'$  должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0.$$

$$p'_1 = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz}.$$

Подставляя это выражение в  $z$ -компоненту уравнения (29.1), найдем

$$v'_z = \frac{kp'_1}{i\rho_1(kv - \omega)}.$$

Смещение  $\zeta$  тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю  $e^{i(kx - \omega t)}$ , и получаем из (29.3)

$$v'_z = i\zeta(kv - \omega).$$

Вместе с (29.5) это дает

$$p'_1 = -\zeta \frac{\rho_1(kv - \omega)^2}{k}.$$

## 2.5.2 Квазипериодичность, аттракторы, удвоение периодов

### Квазипериодическое движение и синхронизация частот

$$\frac{1}{m_1} \frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = \Delta + \text{Im} \beta_2 \cdot \left| a_2^{(0)} \right|^2 + \Phi(\varphi_2)$$

(на одном шаге изменения дискретной переменной  $\bar{\tau}$  функция  $\varphi_2/m_1$  меняется незначительно).

В общем случае уравнение (30.8) имеет стационарные решения  $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ , определяющиеся обращением в нуль правой части уравнения. Но неизменность фазы  $\varphi_2$  в моменты времени, кратные  $m_1 T_1$ , означает, что на торе существует предельный цикл траектория через  $m_1$  оборотов замыкается. Ввиду периодичности функции  $\Phi(\varphi_2)$  такие решения появляются парами (в простейшем случае - одна пара): одно решение на возрастающем, а другое - на убывающем участках функции  $\Phi(\varphi_2)$ . Из этих двух решений устойчиво только последнее, для которого вблизи точки  $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$  уравнение (30.8) имеет вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = -\text{const} \cdot (\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})$$

### Странный аттрактор

(см. механику про это, потом напишу)

### Переход к турбулентности путем удвоения периодов

(см. механику про это, потом напишу)

(у Ландау прямо много про это написано)

### Переход к турбулентности через перемежаемость .

Рассмотрим, наконец, разрушение периодического движения при прохождении мультипликатора через значение  $\mu = +1$ .

Этот тип бифуркации описывается (в рамках одномерного отображения Пуанкаре) функцией  $x_{j+1} = f(x_j; R)$ , которая при определенном значении параметра (числа Рейнольдса),  $R = R_{кр}$ , касается прямой  $x_{j+1} = x_j$ . Выбрав точку касания в качестве  $x_j = 0$ , напомним вблизи нее разложение функции отображения в виде <sup>1</sup> )

$$x_{j+1} = (R - R_{кр}) + x_j + x_j^2.$$

При  $R < R_{кр}$  (рис. 23) существуют две неподвижные точки

$$x_*^{(1),(2)} = \mp (R - R_{кр})^{1/2},$$

из которых одна  $(x_*^{(1)})$  отвечает устойчивому, а другая  $(x_*^{(2)})$  неустойчивому периодическому движению. При  $R = R_{кр}$  муль-

$$dx/dt = (R - R_{кр}) + x^2.$$

Найдем время  $\tau$ , необходимое для прохождения отрезка между точками  $x_1$  и  $x_2$ , лежащими по обе стороны точки  $x = 0$  на расстояниях, больших по сравнению с  $(R - R_{кр})^{1/2}$ , но еще в области применимости разложения (32.22). Имеем

$$\tau = (R - R_{кр})^{-1/2} \operatorname{arctg} \left[ x (R - R_{кр})^{-1/2} \right] \Big|_{x_1}^{x_2},$$

откуда

$$\tau \sim (R - R_{кр})^{-1/2},$$

### 2.5.3 Турбулентная область, корреляции скоростей, струи, теорема Жуковского

#### Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерно чрезвычайно нерегулярным, беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока (развитая турбулентность)]

В число Рейнольдса  $R$ , определяющее свойства течения жидкости в целом, в качестве характеристических размеров входит длина  $l$ . Наряду с таким числом, можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса турбулентных пульсаций различных масштабов. Если  $\lambda$ -масштаб пульсаций, а  $v_\lambda$  - порядок величины их скорости, то  $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda / \nu$ . Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

Оказывается возможным получить ряд существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений подобия (А.Н. Колмогоров, 1941; А.М. Обухов, 1941).

Определим порядок величины  $v_\lambda$  изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка  $\lambda$ . Оно должно определяться только величиной  $\varepsilon$  и, разумеется, самим расстоянием <sup>1</sup> )  $\lambda$ . Из этих двух величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости:  $(\varepsilon \lambda)^{1/3}$ . Поэтому можно утверждать, что должно быть

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}$$

Таким образом, изменение скорости на протяжении малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния (закон Колмогорова-Обухова). Величину  $v_\lambda$

можно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба  $\lambda$  : изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях, и им можно пренебречь.

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости. Эти расстояния  $\lambda_0$  определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке (величину  $\lambda_0$  называют внутренним масштабом турбулентности в противоположность внешнему масштабу  $l$  ). Для этого составляем «локальное число Рейнольдса»:

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}} \sim R \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{4/3},$$

где  $R \sim \Delta u \cdot l / \nu$  - число Рейнольдса движения в целом. Порядок величины  $\lambda_0$  определяется тем, что должно быть  $R_{\lambda_0} \sim 1$ . Отсюда находим

$$\lambda_0 \sim l / R^{3/4}.$$

К этому же выражению можно прийти, составляя комбинацию размерности длины из величин  $\varepsilon$  и  $\nu$  :

$$\lambda_0 \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}.$$

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности быстро падает при увеличении числа Рейнольдса. Для соответствующей скорости имеем

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u / R^{1/4}.$$

Она тоже падает с увеличением  $R$ .

(тут еще пара умных соображений)

## Корреляционные функции скоростей

(это очень большой параграф 24 в ЛЛ-6)

### Основные концепции

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle$$

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k,$$

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{tr} = 0.$$

Выражение (34.2) можно теперь представить в виде

$$B_{ik} = B_{tt}(r)(\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r)n_i n_k.$$

Раскрыв скобки в определении (34.1), имеем

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle.$$

Ввиду однородности, средние значения произведения  $v_i v_k$  в точках 1 и 2 одинаковы, а ввиду изотропии среднее значение  $\langle v_{1i} v_{2k} \rangle$  не меняется при перестановке точек 1 и 2 (т. е. при изменении знака разности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ); таким образом,

$$\langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik}, \quad \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = \langle v_{2i} v_{1k} \rangle$$

Поэтому

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2b_{ik}, \quad b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle.$$

$$b_{ik} = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - ar^2 \delta_{ik} + \frac{a}{2} x_i x_k.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 15a, \quad \left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}} \right\rangle = 0.$$

Поскольку эти равенства справедливы при сколь угодно малых  $r$ , можно положить в них  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , после чего они дают

$$\left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle = 15a, \quad \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right\rangle = 0.$$

С другой стороны, согласно (16.3) имеем для средней диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \nu \left\{ \left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle \right\} = 15a\nu$$

$$B_{tt} = \frac{2\varepsilon}{15\nu} r^2, \quad B_{rr} = \frac{\varepsilon}{15\nu} r^2$$

(А.Н. Колмогоров, 1941). Далее, введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikl} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \rangle,$$

и вспомогательный тензор

$$b_{ik,l} = \langle (v_{1i} v_{1k} v_{2l}) \rangle = - \langle (v_{2i} v_{2k} v_{1l}) \rangle,$$

(далее очень много формул умных, потом подумаю про них)

**Интеграл Лойцянского.** (см Ландау, тут много умного)

**Спектральное представление корреляционных функций.** (тут очень много тоже формул)

### Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение завихренности вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших  $R$ ) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой завихренность отсутствует, и движение потенциально. Завихренность оказывается, таким образом, распределенной не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

### Турбулентная струя

(задача, про которую нужно пару часов подумать)

### Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют турбулентным следом. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нем (L. Prandtl, 1926).

### Теорема Жуковского

$$\int \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y dy + u_x dx),$$

взятого по контуру, выходящему из точки  $y_1$ , огибающему тело и приходящему в точку  $y_2$ , проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от  $y_1$  до  $y_2$ , превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая буквой  $\Gamma$  циркуляцию скорости по замкнутому контуру  $C$ , охватывающему тело (рис. 26 ):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

получаем для подъемной силы формулу

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz.$$

## 2.6 О других явлениях (???)

### 2.6.1 Пограничные слои, обтекаемость, подъемная сила

Ламинарный пограничный слой

Движение вблизи линии отрыва

Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Логарифмический профиль скоростей

Турбулентное течение в трубах

Турбулентный пограничный слой

Кризис сопротивления

Хорошо обтекаемые тела

Индуктивное сопротивление

Подъемная сила тонкого крыла

### 2.6.2 Теплопроводность в жидкости

Общее уравнение переноса тепла

Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Теплопроводность в неограниченной среде

Теплопроводность в ограниченной среде

Закон подобия для теплопередачи .

Теплопередача в пограничном слое

Нагревание тела в движущейся жидкости

Свободная конвекция

Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости

### 2.6.3 Диффузия

Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

Коэффициенты диффузии и термодиффузии .

Диффузия взвешенных в жидкости частиц .

### 2.6.4 Поверхностные явления

Формула Лапласа

Капиллярные волны

Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

### 2.6.5 Движение сквозь жидкость, плавание

Присоединенная масса – первая перенормировка в физике.

Квазиимпульс и импульс.

Лучший способ плыть.

Парадокс обратимости.

### 2.6.6 Ударные волны

Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

строеной из конца вектора  $\mathbf{v}$ , как из центра, сферы. Для угла раствора  $2\alpha$  этого конуса

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение  $c/v$ . На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке  $O$  не отразится вовсе.

Определяемый равенством (82.1) угол называют углом Маха. Отношение же  $v/c$ , весьма часто встречающееся в газодинамике, называют числом Маха:

$$M = v/c$$

### Стационарный поток сжимаемого газа

#### Поверхности разрыва

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва мы будем ниже обозначать с помощью квадратных скобок; так,

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

и полученное условие напишется в виде

$$[\rho v_x] = 0.$$

Далее, должен быть непрерывным поток энергии. Поток энергии определяется выражением (6.3). Поэтому мы получаем условие

$$\left[ \rho v_x \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right] = 0.$$

Наконец, должен быть непрерывен поток импульса, т. е. должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по обеим сторонам поверхности разрыва. Поток импульса через единицу площади равен (см. § 7)

$$p n_i + \rho v_i v_k n_k.$$

Вектор нормали  $\mathbf{n}$  направлен по оси  $x$ . Поэтому непрерывность  $x$ -компоненты потока импульса приводит к условию

$$[p + \rho v_x^2] = 0$$

а непрерывность  $y$  - и  $z$ -компонент дает

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0$$



Ударная адиабата .

Ударные волны слабой интенсивности

Направление изменения величин в ударной волне

Эволюционность ударных волн

Ударные волны в политропном газе.

Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Распространение ударной волны по трубе

Косая ударная волна

Ширина ударных волн

Ударные волны в релаксирующей среде

Изотермический скачок

Слабые разрывы

2.6.7 Одномерное движение сжимаемого газа

Истечение газа через сопло

Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Одномерное автомодельное движение

Разрывы в начальных условия

Одномерные бегущие волны

Образование разрывов в звуковой волне

Характеристики

Инварианты Римана

Произвольное одномерное движение сжимаемсго газа

Задача о сильном взрыве .

Сходящаяся сферическая ударная волна

Теория «мелкой воды»

2.6.8 Об определениях и основных уравнениях идеальной жидкости.

Непрерывность среды,

число Деборы,

непрерывные потоки

Задача тысячелетия на один миллион долларов.

2.6.9 О Гидростатика и атмосфера Земли.

Уравнения Эйлера идеальной гидродинамики.

2.6.10 Пересечение поверхностей разрыва

Волна разрежения

Типы пересечений поверхностей разрыва

Пересечение ударных волн с твердой поверхностью

Сверхзвуковое обтекание угла

Обтекание конического острия

#### Основные уравнения теории упругости

Тензор деформации

Тензор напряжений

Термодинамика деформирования

Закон Гука

Однородные деформации

Деформации с изменением температуры

Уравнения равновесия изотропных тел

Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Соприкосновение твердых тел

Упругие свойства кристаллов

#### Типичные модели деформаций

Для параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E} (T_y + T_z) \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E} (T_z + T_x) \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E} (T_x + T_y)\end{aligned}$$

#### Равновесие стержней и пластинок

Энергия изогнутой пластинки

Уравнение равновесия пластинки

Продольные деформации пластинок

Сильный изгиб пластинок

Деформации оболочек

Кручение стержней

Изгиб стержней

Энергия деформированного стержня

Уравнения равновесия стержней

Слабый изгиб стержней

Устойчивость упругих систем

Упругие волны

Упругие волны в изотропной среде

Упругие волны в кристаллах

Поверхностные волны

Колебания стержней и пластинок

Ангармонические колебания

Дислокации

Упругие деформации при наличии дислокации

Действие поля напряжений на дислокацию

Непрерывное распределение дислокаций

Распределение взаимодействующих дислокаций

3.0.2 Об упругости особых тел по Ландау

Теплопроводность и вязкость твердых тел

Уравнение теплопроводности в твердых телах

Теплопроводность кристаллов

Вязкость твердых тел

Поглощение звука в твердых телах

Очень вязкие жидкости

Механика жидких кристаллов

Статические деформации нематиков

Прямолинейные дисклинации в нематиках

Несингулярное осесимметричное решение уравнений равновесия нематиков

Топологические свойства дисклинации

Уравнения движения нематиков

Диссипативные коэффициенты нематиков

Распространение малых колебаний в нематиках

Механика холестериков

Упругие свойства смектиков

Дислокации в смектиках

Уравнения движения смектиков

---

## Part II

# Основы гидродинамики

## 4 элементарные основы

(тут общезнакомое)

### 4.0.1 Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности

В отличие от твердых тел жидкости и газы с точки зрения механики являются веществами текучими. Но если в твердых телах пластичность неотделима от диссипации, то в случае текучей среды диссипацией при рассмотрении многих важных процессов и явлений можно пренебречь. Такой подход называется приближением идеальной жидкости (заметим, что во многих случаях приближение идеальной жидкости описывает и динамику течения газа). Далее, очень многие практически важные задачи допускают представление о несжимаемой жидкости. Это понятие вошло в обиход и нередко используется в технических приложениях, но надо отдавать себе отчет в том, что сжимаемость жидкости, если понимать ее в контексте гл. 8.1,

замечательно превышает таковую у твердого тела. Но как твердое тело — вполне реальное и подверженное деформациям — можно во многих динамических задачах с хорошей точностью считать абсолютно твердым, так и жидкость в задаче о ее течении нередко с достаточной точностью представима как несжимаемая. Обычно такое представление оправдано, если перепады скоростей в жидкости гораздо меньше скорости звука, и в этом смысле даже воздух при атмосферном давлении может рассматриваться как несжимаемая жидкость, если скорость его течения меньше 300 м/с. Хотя, казалось бы, течение жидкости и движение тела конечных размеров весьма различны, общий «камертон» в системе основных понятий все же существует. Если мы выделим объем жидкости столь малый, что можно пренебречь его размерами и формой, и этот объем не перемешивается на характерном масштабе задачи (или за характерное время задачи) с другим веществом, то такой жидкий элемент можно рассматривать как материальную точку. Это позволяет определить скорость и ускорение элемента и вывести на этой основе уравнения течения (или, в частности, равновесия) жидкости. Траектория такого жидкого элемента называется линией тока (рис. 8.6 а).

Совокупность линий тока, близлежащих в пределах, заданных характерным временем и масштабом задачи, называется трубкой тока. Предполагается, что трубка тока охватывается некоторым односвязным контуром ( $C \rightarrow C'$  на рис. 8.6 б). Корректность понятий жидкого элемента и линии тока обусловлена лишь малостью элементарного объема. Понятие трубки тока подразумевает, что на интересующем нас пространственном масштабе линии тока достаточно мало расходятся и, в частности, не образуют вихрей.

при таком рассмотрении локальные характеристики — плотность вещества  $\rho$  и скорость  $\mathbf{v}$  — принято относить не к движущемуся жидкому элементу, а к потоку в целом и рассматривать как функции точки  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

Если протекание вещества не сопровождается никакими реакциями, то масса вещества в потоке сохраняется. Рассмотрим некоторую трубку тока (рис. 8.7 а). Пусть течение стационарно.

Выделим объем, ограниченный стенками трубки тока и двумя ее сечениями, нормальными к скорости жидкости. Сохранение массы в выделенном объеме выражается равенством массы жидкости, втекающей в сечение 1 и вытекающей из сечения 2 за время  $dt$ :  $\rho_1 S_1 \mathbf{v}_1 dt = \rho_2 S_2 \mathbf{v}_2 dt$ .

Здесь  $\rho_{1,2}$ ,  $S_{1,2}$  и  $\mathbf{v}_{1,2}$  — плотность жидкости, площадь нормального сечения трубки тока и скорость жидкости в точках 1 и 2. Тем самым закон сохранения массы принимает вид уравнения неразрывности струи

$$\rho S_{\perp} v = \text{const}$$

или для несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ )

$$S_{\perp} v = \text{const}.$$

Если поток нестационарен, уравнения (8.13, 8.14) должны быть модифицированы. Представим себе одномерную трубку тока (рис. 8.7 б). Закон сохранения массы вещества означает, что масса жидкости, втекающая в некоторый объем,  $\rho v(x) dt S$ , равна массе жидкости, накапливающейся в этом объеме,  $\dot{\rho} dt S dx$ , плюс массе вытекающей жидкости  $\rho v(x+dx) dt S$ . Имея в виду, что все характерные параметры зависят, вообще говоря, от двух переменных  $x$  и  $t$ , введем понятие частной производной

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \equiv \left. \frac{df}{dt} \right|_{x=\text{const}}, \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{t=\text{const}}$$

Закон сохранения массы принимает вид

$$\rho v(x) S = \dot{\rho} S dx + \rho v(x+dx) dt S \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v(x))}{\partial x}$$

Традиционная форма записи этого закона называется уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

В случае неоднородного течения обобщение уравнения (8.15) достигается посредством введения оператора дивергенции. По определению, для любой векторной функции  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(x, y, z)$  дивергенция  $\mathbf{j}$  есть

$$\text{div } \mathbf{j} \equiv \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

В общем случае трехмерного течения уравнение (8.15) принимает Вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Если же справедливо приближение несжимаемой жидкости, то изменением плотности как в пространстве, так и во времени можно пренебречь:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

Уравнения (8.16), (8.17) выглядят, конечно, сложнее, чем, соответственно, (8.13), (8.14), но обладают и заметным преимуществом — они локальны, т. е. не привязаны ни к какой трубке тока, и их решение, в принципе, просто некоторая функция точки в пространстве  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ .

## 4.0.2 Архимедова сила, уравнение Бернулли

В отличие от твердого тела, жидкость — среда бесструктурная, ее микроскопическое устройство не содержит такой «несущей конструкции», как кристаллическая решетка. Соответственно вопрос об ориентации поверхности, к которой приложено напряжение, здесь не возникает — все ориентации равноправны. Кроме того, в жидкости несравненно меньшую роль

играют касательные напряжения. Если в твердом теле они ответственны за сдвиговые деформации и вполне проявляют себя в статике, то в жидкости касательные напряжения возникают исключительно в динамической задаче и лишь при учете диссипативного эффекта - вязкости.

Опыт показывает, что в гидростатике - науке о равновесии жидких тел - а равно и в консервативной (бездиссипативной) гидродинамике существует всего один вид напряжения - давление, обладающее свойством изотропности. Это и составляет содержание закона Паскаля (по имени французского ученого Блеза Паскаля (1623–1662)) : давление жидкости и газа передается одинаково во всех направлениях. Иными словами, давление скалярная функция:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{r})$$

Одно из важнейших следствий изотропии давления было известно задолго до Паскаля - это закон Архимеда (по имени

древнегреческого ученого Архимеда (ок. 287–212 до н. э.)): тело, погруженное в жидкость, выталкивается с силой, равной весу вытесненной жидкости. Рассмотрим тело , плавающее в сосуде с жидкостью (рис. 8.8 а), и отдельно — сосуд, заполненный той же жидкостью до того же уровня, но без погруженного в него тела (рис. 8.8 б). Если жидкость, заполняющая полость на рис. 8.8 б, пребывает в равновесии, то значит силы, действующие на полость , как раз и удерживают ее собственный вес. Ввиду скалярности давления (8.18) и отсутствия касательных напряжений, неважно, чем заполнена полость , так что и на тело будут действовать так же распределенные силы, имеющие ту же равнодействующую. Хотя приведенные выше рассуждения и дают нам аргументы в пользу закона Архимеда, они не могут считаться доказательством.

В дополнение к ним хотелось бы дать современную трактовку архимедовой силы, пригодную для решения динамических задач. Мы сделаем это, опираясь на закон Паскаля. Пусть давление в жидкости или газе зависит от координаты:

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$  (рис. 8.9). Выделим мысленно в жидкости некоторый параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$ , ориентированными по координатным осям. Тогда в направлении оси  $x$  на него будет действовать сила  $\mathcal{P}(x) \cdot dydz$ , а навстречу ей  $-\mathcal{P}(x+dx) \cdot dydz$ , суммарная же сила будет равна их разности, которая, в силу малости  $dx$ , может быть линеаризована:

$$F_x = \mathcal{P}(x) \cdot dydz - \mathcal{P}(x+dx) \cdot dydz \approx -\frac{d\mathcal{P}}{dx} \cdot dx dydz$$

Удобно ввести понятие объемной плотности силы:

$$f_x \equiv \frac{dF_x}{dV} = -\frac{d\mathcal{P}}{dx}$$

Это и есть сила Архимеда. В случае зависимости давления от трех координат, вместо обычной производной в (8.19), следует использовать операцию градиента - см. (5.25).

Представим себе, например, несжимаемую жидкость в поле тяжести. При  $\rho(x) = \text{const}$  объемная плотность силы тяжести есть просто  $\rho g$ . Пусть ось  $x$  направлена вглубь жидкости. Запишем условие равновесия любого малого элемента объема  $dV$  :

$$\rho g \cdot dV - \frac{d\mathcal{P}}{dx} \cdot dV = 0$$

Сокращая  $dV$  и интегрируя, получаем хрестоматийный результат:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \rho g x$$

где  $\mathcal{P}_0$  - давление на поверхности жидкости. Из (8.20) можно

получить решение упомянутых выше статических задач. Рассмотрим в качестве примера два открытых сосуда, соединенных посредством сифона (рис. 8.10). Давление жидкости в точке  $A$ , с точностью до отношения ширины трубки к высоте ее над уровнем жидкости в сосудах  $h$ , равно

$$\mathcal{P}_0 + \rho g x_A = \mathcal{P}_0 - \rho g h$$

безотносительно к точке свободной поверхности, от которой мы отсчитываем  $x_a$ . тем самым подтверждается, что в сосудах, соединенных так, как показано на рис. 8.10, жидкость в равновесии оказывается на одном уровне, а при нарушении этого условия должно возникнуть течение, перекачивающее жидкость в сосуд с более низким уровнем через трубку. на этом и основан принцип сифона.

рассмотрим эффекты, обусловленные работой давления. прежде всего представим себе жидкость или газ, занимающие в состоянии равновесия некий цилиндр с площадью основания  $s$

(рис. 8.11 а). Давление в пределах данного цилиндрического объема будем считать постоянным и равным  $\mathcal{P}$ . Пусть одно из оснований смещается на малое расстояние  $dx$ , однако при этом количество текучего вещества внутри цилиндра сохраняется, т. е. жидкость (газ) не течет через движущуюся границу. Сила давления вещества, заполняющего цилиндр, на границу равна  $\mathcal{P} \cdot S$ , соответственно, работа, совершаемая веществом при расширении, есть

$$\delta A = \mathcal{P} \cdot S \cdot dx = \mathcal{P} dV$$

где  $dV$  — изменение объема жидкости или газа. Если в процессе расширения как-то изменится и давление,  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} + d\mathcal{P}$ , то это даст поправку в (8.21) всего лишь второго порядка. Пусть теперь слегка меняет объем жидкое или газообразное тело произвольной формы - на рис. 8.11 б начальное и конечное состояние показаны соответственно сплошной и штриховой линиями. В силу закона Паскаля, давление на любой участок границы действует в направлении нормали. Поэтому на любой малой площадочке, принадлежащей границе, мы можем построить цилиндрик с образующей, параллельной направлению нормали  $\xi$  (рис. 8.11 б). Дальнейшие рассуждения аналогичны выводу (8.21); вклад всех цилиндриков можно просуммировать (с учетом знака!) и получить тот же ответ:

$$\delta A = \mathcal{P} dV$$

где под  $dV$  подразумевается полное изменение объема жидкого элемента.

Рассмотрим стационарное течение жидкости или газа без диссипации. Выделим некоторую трубку тока (рис. 8.12). Пусть

$s_1$  и  $s_2$  — два произвольных сечения, нормальных к потоку,  $\rho_1, v_1$  и  $\rho_2, v_2$  — соответственно, плотность и скорость в сечениях  $s_1$  и  $s_2$ . За время  $dt$  через сечение  $s_1$  протекает объем  $s_1 v_1 dt$ , при этом втекающий

газ совершает работу  $\mathcal{P}_1 s_1 v_1 dt$ . За то же время из сечения  $S_2$  вытекает объем  $S_2 v_2 dt$ , совершая при этом работу  $\mathcal{P}_2 S_2 v_2 dt$  над всем вытекающим газом. При стационарном течении массы  $\rho_2 S_2 v_2 dt$  и  $\rho_1 S_1 v_1 dt$ , очевидно, равны. Введем плотность энергий текущей среды:

$$\frac{dE}{dV} = \rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2}$$

где  $\varepsilon$  включает отнесенную к единице массы внутреннюю энергию плюс энергию во внешних полях, т. е. всю энергию, кроме кинетической, плотность которой равна  $\rho v^2/2$ . Поскольку мы положили диссипативные эффекты несущественными, используем закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} S_2 v_2 dt \left( \rho_2 \varepsilon_2 + \rho_2 \frac{v_2^2}{2} \right) - S_1 v_1 dt \left( \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} \right) = \\ = \mathcal{P}_1 S_1 v_1 dt - \mathcal{P}_2 S_2 v_2 dt. \end{aligned}$$



Разделим это уравнение почленно на величину  $dm$  протекающей через сечение за время  $dt$  массы. Удобно первый член левой части и второй член правой части (8.22) разделить на  $dm = \rho_2 S_2 v_2 dt$ , а второй член левой части и первый член правой части (8.22) разделить на  $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt$ . В результате получаем уравнение Бернулли (по имени математика и физика Д. Бернулли (1700 – 1782))

$$\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\mathcal{P}_2}{\rho_2} + \varepsilon_2 + \frac{v_2^2}{2},$$

или, что то же,

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho} + \varepsilon + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Важный частный случай уравнения Бернулли – течение в поле силы тяжести при неизменной массовой плотности внутренней энергии (для идеального газа это обусловлено постоянством температуры). Тогда  $dE/dV = \rho gh + \rho v^2/2$ , где  $h$  – высота по отношению к некоторому заранее определенному нулевому уровню. Как следствие, получаем

$$\frac{\mathcal{P}}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Если к тому же, жидкость несжимаема, то (8.24) можно использовать в виде

$$\mathcal{P} + \rho gh + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

Именно эту форму записи чаще всего связывают с именем Бернулли; подчеркнем, однако, что уравнение (8.23) гораздо более универсально.

Уравнение (8.25) позволяет легко получить формулу Торричелли для скорости вытекания несжимаемой жидкости из сосуда

через малое отверстие (она, правда, была выведена за сто лет до уравнения Бернулли). Постановка задачи ясна из рис. 8.13. Пусть высота уровня воды в сосуде равна  $h_1$ , а высота, на которой расположено отверстие,  $-h_2$ , так что  $h_1 - h_2 = h$ .

Отверстие должно быть достаточно малым, чтобы выполнялось условие  $\dot{h} \ll v$ . Из уравнения непрерывности (8.14) легко усмотреть, что для этого необходимо, чтобы сечение отверстия было много меньше сечения сосуда. Таким образом обеспечивается с необходимой точностью, во-первых, стационарность течения и тем самым применимость уравнения Бернулли. Во-вторых, при медленном вытекании мы можем избежать вихревых течений, что позволяет рассматривать наше течение как одну-единственную трубку тока (обозначена пунктиром на рис. 8.13). Это очень важный аспект данной задачи; напомним, что уравнения (8.23) – (8.25) задают инвариант только в пределах трубки тока, который не всегда можно распространить на поток как целое.

Итак,  $\rho(h_1) = \rho(h_2)$ ; на уровне  $h_1 v \approx 0$ , а на уровне  $h_2$ , как следует из (8.24),

$$v = \sqrt{2gh}$$

т. е. скорость вытекания несжимаемой жидкости из малого отверстия совпадает со скоростью тела, свободно падающего с высоты  $h$ . Это и есть формула Торричелли (по имени итальянского физика Э. Торричелли (1608 – 1647)).

Отметим в заключение, что величина  $\rho v^2/2$  иногда называется динамическим давлением, а формула (8.25) трактуется как инвариантность суммы статического и динамического давлений. В стационарном потоке несжимаемой жидкости давление  $\mathcal{P}$  должно быть меньше там, где больше скорость. Так объясняют принцип работы пульверизатора, эффект «присасывания» кораблей при близком прохождении параллельными курсами и т. д.

### 4.0.3 тензор напряжений?

(что вообще рассматриваем?)

ходят слухи, что нужно ввести

**Определение 4.1.** *тензор напряжений  $\mathbf{t}$*

мун говорит, что начало в уравнении:

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

и в самом деле, оно похоже на уравнение навье-стокса. в самом деле!

### 4.0.4 формула Пуазейля

(пока общезвестно только)

До сих пор мы ничего не говорили о касательных напряжениях в жидкости или газе, ограничиваясь только изотропным давлением в рамках закона Паскаля. Оказывается, однако, что закон Паскаля является исчерпывающим лишь в гидростатике, а в случае неоднородных в пространстве течений вступает в Игру диссипативный эффект - вязкость, вследствие которого как раз и возникают касательные напряжения.

Пусть в некоторой области потока жидкости два бесконечно близких ее слоя, движущихся в направлении оси  $x$ , соприка-

саются друг с другом на горизонтальной поверхности с площадью  $S$  (рис. 8.14). Опыт показывает, что возникающая на этой площадке сила трения  $F$  между слоями тем больше, чем больше площадь  $S$  и чем быстрее изменяется в этом месте скорость  $v$  в направлении оси  $y$ . Быстрота изменения скорости  $v$  как

функции  $y$  характеризуется производной  $dv/dy$ . Окончательно, полученный из опыта результат можно записать в виде

$$F = \eta S \frac{dv}{dy}$$

Здесь  $F$  — сила, действующая со стороны вышележащего слоя на нижележащий,  $\eta$  — коэффициент пропорцио-

нальности, получивший название коэффициента вязкости жидкости (сокращенно его называют просто вязкостью жидкости). Размерность его вытекает из формулы (8.27):  $[\eta] = [m]/[l][t]$  единицу измерения принято выражать как 1 Па · с. Направление силы  $F$  (вправо или влево на рис. 8.14) зависит от того, быстрее или медленнее движется вышележащий слой относительно нижележащего. З (8.27) следует выражение для касательных напряжений:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

Коэффициент вязкости  $\eta$  имеет разные значения для различных жидкостей, и для определенной жидкости зависит от внешних условий, в первую очередь, от температуры. По своей природе силы трения в жидкости являются силами межмолекулярного взаимодействия, то есть электромагнитными силами, Как и силы трения между твердыми телами.

Перейдем к рассмотрению задачи о вычислении расхода несжимаемой жидкости, текущей в горизонтальной круглой прямолинейной трубе с постоянной площадью поперечного сечения

при заданном перепаде давлений. Расходом называется масса жидкости, протекающая в единицу времени через сечение трубы. Эта задача имеет чрезвычайно большое практическое значение: инженерный расчет нефтепроводов и даже обычного водопровода без условно требует ее решения. Будем полагать, что нам заданы длина трубы  $l$ , ее радиус  $R$ .

давления на концах трубы  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  ( $\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2$ ), а также плотность жидкости  $\rho$  и ее вязкость  $\eta$  (рис. 8.15).

Наличие сил трения приводит к тому, что на разных расстояниях от центра трубы жидкость течет с разной скоростью. В частности, непосредственно у стенки жидкость должна быть неподвижна, иначе из (8.28) следовали бы бесконечные касательные напряжения

Для вычисления массы жидкости, протекающей ежесекундно через все поперечное сечение трубы, мы разобьем это поперечное сечение на бесконечно малые кольцевые площадки с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r+dr$  и вычислим сначала расход жидкости через каждое из этих бесконечно малых сечений, в которых скорость жидкости можно считать одинаковой. Просуммировав потом по всем бесконечно малым сечениям, мы определим полный расход жидкости.

Масса жидкости  $dm$ , протекающая ежесекундно через бесконечно малое поперечное сечение  $2\pi r dr$  со скоростью  $v(r)$ , равна

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi r dr \rho v(r)$$

Полный расход жидкости  $Q$  мы получим, проинтегрировав выражение (8.29) по  $r$  от 0 до  $R$

$$Q \equiv \frac{dm}{dt} = 2\pi \rho \int_0^R r v(r) dr$$

Где мы вынесли за знак интегрирования постоянную величину  $2\pi\rho$ . Чтобы вычислить интеграл в (8.30), необходимо знать зависимость скорости жидкости от радиуса, то есть конкретный вид функции  $v(r)$ . Для определения  $v(r)$  мы воспользуемся уже известными нам законами механики. Рассмотрим в некоторый момент времени цилиндрический объем жидкости некоторого произвольного радиуса  $r$  и длины  $l$  (рис. 8.15). Заполняющую этот объем жидкость можно рассматривать как совокупность бесконечно малых жидких частиц, образующих систему взаимодействующих материальных точек. При стационарном течении жидкости в трубе все эти материальные точки движутся с независимыми от времени скоростями. Следовательно, центр масс всей этой системы также движется с постоянной скоростью. Уравнение для движения центра масс системы материальных точек имеет вид (см. гл. 6)

$$M \frac{d\mathbf{V}_{\text{ц.м.}}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{\text{вн}}$$

где  $M$  — полная масса системы,  $\mathbf{V}_{\text{ц.м.}}$  — скорость центра масс,  $\sum \mathbf{F}_{\text{вн}}$  — сумма внешних сил, приложенных в выбранный момент времени к рассматриваемой системе.

Так как в нашем случае  $\mathbf{V}_{\text{ц.м.}} = \text{const}$ , то из (8.31) получаем

$$\sum \mathbf{F}_{\text{вн}} = 0$$

Внешние силы — это силы давления  $F_{\text{давл}}$ , действующие на основания выбранного цилиндрического объема, и силы трения  $F_{\text{тр}}$ , действующие на боковую поверхность цилиндра со стороны окружающей жидкости — см. (8.27):

$$F_{\text{давл}} = \pi r^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2), \quad F_{\text{тр}} = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

Как мы показали, сумма этих сил равна нулю, то есть

$$2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} + \pi r^2 (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = 0$$

Это соотношение после простых преобразований можно записать в виде

$$dv = -\frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{2\eta l} r dr$$

Интегрируя обе части написанного выше равенства, получим

$$v = -\frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{4\eta l} r^2 + \text{const.}$$

Постоянная интегрирования определится из условия, что при  $r = R$  скорость  $v$  должна обращаться в нуль. Это дает

$$v = \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Как мы видим, скорость жидкости максимальна на оси трубы и при удалении от оси меняется по параболическому закону (см. рис. 8.15)

Подставив (8.32) в (8.30), находим искомый расход жидкости

$$Q = \pi \rho \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

Или

$$Q = \pi \rho \frac{\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2}{8\eta l} R^4$$

Отличительной чертой соотношения (8.33) является сильная зависимость расхода жидкости от радиуса трубы: расход пропорционален четвертой степени радиуса.

(Сам Пуазейль эту формулу не выводил, а исследовал проблему только экспериментально, изучая движение жидкости в капиллярах). На формуле Пуазейля основан один из экспериментальных методов определения коэффициентов вязкости жидкостей.

#### 4.0.5 турбулентность

Формула Пуазейля применима только для ламинарных течений жидкости. Ламинарным называется такое течение, когда жидкие частицы движутся вдоль устойчивых траекторий. При достаточно больших скоростях ламинарное течение становится неустойчивым, хаотичным и переходит в так называемое турбулентное течение. При этом основные уравнения гидродинамики остаются в силе, но большинство результатов настоящей главы должно быть подвергнуто ревизии. Характер турбулентных движений может быть весьма различным в зависимости от внешних условий. Из повседневного опыта нам более всего знакомо явление гидродинамической турбулентности несжимаемой жидкости — представление о таком режиме дает турбулентная струя, вытекающая из крана. Реализуется данное состояние жидкости в случае перепада скоростей течения, много меньшего скорости звука. Для него характерно образование множественных вихрей (М. В. Ломоносов подразделял течения жидкости на «покойные» и «коловратные»). На рис. 8.16 а схематически изображено образование вихрей при обтекании несжимаемой жидкостью шара, а на рис. 8.16 б — при течении в прямой трубе.

Следует особо обратить внимание на то, что во всех оценках, относящихся к турбулентному состоянию, фигурирует не скорость течения как таковая, а именно перепад скоростей  $|\Delta \mathbf{v}|$ . Действительно, если некоторое течение происходит с постоянной всюду скоростью  $\mathbf{v}$ , мы можем, переходя в движущуюся систему отсчета, сделать эту скорость как угодно малой или большой, так что подлинная «индивидуальность» течения может быть отражена лишь величиной  $|\Delta \mathbf{v}|$ .

Хотя детальное рассмотрение физики турбулентных состояний далеко выходит за рамки нашего курса, мы все же можем кое-что сказать о переходе от ламинарного («ПоКойного») к турбулентному («коловратному») течению. Принципиальным моментом здесь будет использование методов подобия и размерности.

Дело в том, что размерность физическиХ величин - не НО и метод получения новых результатов в физике вообще и В механике, в частности, Хотя Возможности его ограничены и предсказательная сила не абсолютна (чему последующее рассмотрение будет хорошим примером).

Попробуем проанализировать физические предпосылки переХода к турбулентному течению, представленному на рис. 8.16. Пока и поскольку течение остается ламинарным, у него сохраняется характерный пространственный масштаб  $a$  (радиус Шара на рис. 8.16 а либо диаметр трубы на рис. 8.16 б). Турбулизация течения приводит к измельчению масштаба, а значит, и к росту пространственных производных от скорости, чему, как можно усмотреть из формул (8.27), (8.28), противодействуют эффекты, обусловленные вязкостью. Таким образом, чем больше вязкости жидкости, тем более затруднен переход в турбулентное состояние. Еще более очевидным представляется следующее утверждение: чем больше перепад скоростей, тем легче переход из ламинарного режима в турбулентный - скажем, в предельном случае пространственно-однородного течения турбулентности просто не может быть, поскольку оно эквивалентно состоянию покоя.

Как уже указывалось выше, размерность вязкости составляет

$$[\eta] = \frac{[m]}{[l][t]}$$

Составим безразмерную комбинацию

$$\text{Re} = \frac{m}{l t \eta}$$

Подставляя в это выражение значения характерных параметров:

$$m = \rho a^3, \quad l = a, \quad t = \frac{a}{v},$$

получим величину

$$\text{Re} = \frac{\rho v a}{\eta}$$

которую принято называть числом Рейнольдса (по имени английского физика О. Рейнольдса (1842 – 1912)). Число Рейнольдса можно переписать в виде

$$\text{Re} = \frac{\rho v^2 l^3}{\eta v l^2}$$

откуда следует, что оно характеризует отношение кинетической энергии движущейся жидкости  $T \sim \rho v^2 l^3 / 2$  к потере этой энергии, равной работе сил вязкости на характерной длине  $l$ ,  $A \approx \eta v l^2$ . Помимо вязкости  $\eta$ , жидкость характеризуется еще и плотностью  $\rho$ , а течение как таковое - пространственным

масштабом  $l$  и характерным перепадом скоростей  $v$ . (Применительно к ситуации рис. 8.16 это просто скорость по порядку величины, так как вблизи неподвижных стенок скорость ДОЛЖНА обращаться в нуль). Изложенные выше рассуждения позволяют заключить, что чем больше величина  $\text{Re}$ , тем благоприятнее ситуация для турбулентного течения, и напротив, для течений с малыми числами Рейнольдса должен, по-видимому, реализоваться ламинарный режим.

Данные эксперимента находятся с этими соображениями В полном согласии. Оказывается, действительно существует критическое число Рейнольдса, при превышении которого происходит переход из ламинарного режима в турбулентный. Но сама величина  $Re_{кр}$ , как показывает опыт, не универсальна - она зависит от геометрии системы. Например, в случае течения по трубе (рис. 8.16 б)  $Re_{кр} \sim 2 \cdot 10^3$ , тогда как при вращении цилиндра в газе переход в турбулентный режим происходит при  $Re_{кр} \sim 50$ . В этом и состоит некоторая слабость чисто размерной Оценки.

Но у нее есть и очень сильная сторона. Сами по себе величины  $\rho, v, a, \eta$  могут меняться в очень широком диапазоне; скажем труба может быть капилляром, а может быть аэродинамической трубой диаметром в десятки метров - ответ, тем не менее, будет универсальным и опираться он будет всего ЛИШЬ на одну безразмерную комбинацию - число Рейнольдса. Такие зависимости называются в физике законами подобия, а переход на их основании от одних экспериментальных ситуаций к другим принято именовать скейлингом. Таким образом, если для некоторого физического явления известен закон подобия, мы можем ставить эксперименты в малом масштабе, так чтобы они были более дешевыми или, например, более безопасными, а затем проводить скейлинг для получения ответа в интересующем нас масштабе. Поэтому методы подобия и размерности занимают достаточно почетное место в арсенале современной физики

#### 4.0.6 число Рейнольдса

и когда его еще можно ввести, если не в обычной механике?

#### 4.0.7 связь с хаосом

## 5 Турбулентность по Ландау

Устойчивость стационарного движения жидкости 137 § 27. Устойчивость вращательного движения жидкости 143 § 28. Устойчивость движения по трубе 147 § 29. Неустойчивость тангенциальных разрывов 152 § 30. Квазипериодическое движение и синхронизация частот 155 § 31. Странный аттрактор 162 § 32. Переход к турбулентности путем удвоения периодов 169 § 33. Развитая турбулентность 184 § 34. Корреляционные функции скоростей 193 § 35. Турбулентная область и явление отрыва 207 § 36. Турбулентная струя 210 § 37. Турбулентный след 216 § 38. Теорема Жуковского

## 6 гидростатика

(по идее этого раздела полностью должно на неё хватить.)

### 6.1 Поверхностное натяжение. Формула Лапласа.

я просто не могу уложить это в термодинамику. ну, да, не гидродинамика. но блин, это уж никак не термодинамика.

я все забыл.

особенно хрен я свяжу это с кривизнами поверхностей, хотя начать с этого хотелось бы.

## 6.2 Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.

## 7 Одномерное движение сжимаемого газа

### 7.0.1 Истечение газа через сопло

Рассмотрим стационарное вытекание газа из большого сосуда через трубку переменного сечения, или, как говорят, через сопло. Мы будем предполагать, что движение газа можно считать в каждом месте трубы однородным по ее сечению, а скорость - направленной практически вдоль оси трубы. Для этого труба должна быть не слишком широка, и площадь  $S$  ее сечения должна достаточно медленно меняться вдоль ее длины. Таким образом, все величины, характеризующие течение, будут функциями только от координаты вдоль оси трубы. При этих условиях можно применять полученные в § 83 соотношения, имеющие место вдоль линии тока, непосредственно к изменению величин вдоль длины трубы.

Количество (масса) газа, проходящего в единицу времени через поперечное сечение трубы, или, как говорят, расход газа, равно  $Q = \rho v S$ ; эта величина должна, очевидно, оставаться постоянной вдоль всей трубы:

$$Q = S\rho v = \text{const},$$

Линейные размеры самого сосуда предполагаются очень большими по сравнению с диаметром трубы. Поэтому скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, и соответственно этому все величины с индексом нуль в формулах §83 будут представлять собой значения соответствующих величин внутри сосуда.

Мы видели, что плотность потока  $j = \rho v$  не может превышать некоторого предельного значения  $j_*$ . Ясно поэтому, что и возможные значения полного расхода газа  $Q$  будут иметь (для данной трубы и при заданном состоянии газа внутри сосуда) верхнюю границу  $Q_{\max}$ , которую легко определить. Если бы значение  $j_*$  плотности потока было достигнуто не в самом узком месте трубы, то в сечениях с меньшим  $S$  было бы  $j > j_*$ , что невозможно. Поэтому значение  $j = j_*$  может быть достигнуто только в самом узком месте трубы, площадь сечения которого обозначим посредством  $S_{\min}$ . Таким образом, верхняя граница полного расхода газа есть

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} S_{\min} \quad (97, 2)$$

Рассмотрим сначала сопло, монотонно суживающееся по направлению к своему внешнему концу, так что минимальная площадь сечения достигается на этом конце (рис. 70). В силу (97, 1) плотность потока  $j$  монотонно возрастает вдоль трубы. То же самое касается скорости газа  $v$ , а давление соответственно монотонно падает. Наибольшее возможное значение  $j$  будет достигнуто, если скорость  $v$  достигает значедавлению  $p$  в сосуде, и вплоть до значения  $p_*$  одновременно с ним оба эти давления ( $p_1$  и  $p_e$ ) остаются равными друг другу; друоба эти давления ( $p_1$  и  $p_e$ ) остаются равными друг другу; друхими словами, все Падение давления от  $p_0$  до внешнего проиствага  $Q = j_1 S_{\min}$  монотонно возрастают, При  $p_e = p_*$  газа  $Q = j_1 S_{\min}$  монотонно возрастают, При  $p_e = p_*$  выходная него давления выходное давление перестает падать и остается все время равным  $p_*$ ; падение же давления от  $p_*$  до  $p_e$  происходит уже вне трубы, в окружающем пространстве. Другими словами, ни при каком внешнем давлении падение давления газа в трубе не может быть бОльшим, чем от  $p_0$  до  $p_*$ ; так, для воздуха ( $p_* = 0,53p_0$ ) максимальное падение давления составляет  $0,47p_0$ . Выходная скорость и расход газа тоже остаются (при ( $p_e < p_*$ ) постоянными, Таким образом, при истечении через суживающееся сопло газ не может приоб-рести сверхзвуковой

скорости. Невозможность достижения сверхзвуковых скоростей при выпуске газа через суживающееся сопло связана с тем, что скорость, равная местной скорости звука, может достигаться только на самом выходном конце такой трубы. Ясно, что сверхзвуковая скорость может быть достигнута с помощью сопла сначала суживающегося, а затем вновь расширяющегося (рис. 71). Такие сопла называются соплами Лаваля. Максимальная плотность потока  $j_*$ , если и достигается, то опять-таки только в наиболее узком сечении, так что и в таком сопле расход газа не может превышать значения  $S_{\min} j_*$ . В суживающейся части сопла плотность потока возрастает (а давление падает); на кривой рис. 72, изображающей зависимость  $j$  от  $p^1$ , это соответствует передвижению от точки  $c$  по направлению к  $b$ . Если в сечении  $S_{\min}$  достигается максимальный поток (точка  $b$  на рис. 72), то в расширяющейся части сопла давление будет продолжать падать и начнет падать также и  $j$  соответственно перемещению по кривой рис. 72 от точки  $b$  по направлению к  $a$ . На выходном конце трубы поток  $j$  приобретает тогда вполне определенное значение, равное

$$j_{1\max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1}.$$

а давление - соответствующее этому потоку значение, обозначенное на рис. 72 посредством  $p'_1$  (некоторая точка  $d$  на кривой). Если же в сечении  $S_{\min}$  достигается лишь некоторая точка  $e$ , то в расширяющейся части сопла давление будет возрастать соответственно обратному перемещению по кривой вниз от точки  $e$ . На первый взгляд могло бы показаться, что с ветви  $cb$  кривой можно перейти на ветвь  $ab$  скачком, минуя точку  $b$ , посредством образования ударной волны; это, однако, невозможно, так как «втекающий» в ударную волну газ не может иметь дозвуковой скорости.

Имея в виду все эти замечания, проследим теперь за изменением режима вытекания по мере постепенного увеличения внешнего давления  $p_e$ . При малых давлениях, начиная от нуля и до значения  $p_e = p'_1$ , устанавливается режим, при котором в сечении  $S_{\min}$  достигается давление  $p_*$  и скорость  $v_* = c_*$ . В расширяющейся части сопла скорость продолжает расти, так что осуществляется сверхзвуковое течение газа, а давление продолжает соответственно падать, достигая на выходном конце значения  $p'_1$  вне зависимости от величины  $p_e$ . Падение давления от  $p'_1$  до  $p_e$  происходит вне сопла, в отходящей от края его отверстия волне разрежения (как это будет описано в § 112).

Когда  $p_e$  начинает превышать значение  $p'_1$ , появляется отходящая от края отверстия сопла косая ударная волна, сжимающая газ от выходного давления  $p'_1$  до давления  $p_e$  (§112). Мы увидим, однако, что стационарная ударная волна может отходить от твердой поверхности лишь постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§111). Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причем перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв. При некотором значении  $p_e$  ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла. Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трехмерный характер.

**З а д а ч а**

На малом участке длины трубы к стационарно текущему по ней газу подводится небольшое количество тепла. Определить изменение скорости газа при прохождении им этого участка. Газ предполагается политропным.

**Решение.**

Пусть  $Sq$  есть подводимое в единицу времени количество тепла ( $S$  - площадь сечения трубы в данном ее участке). На обеих сторонах участка подогрева одинаковы плотности потока массы  $j = \rho v$  и потока импульса  $p + jv$ ; отсюда  $\Delta p = -j\Delta v$ , где  $\Delta$  обозначает изменение величины при прохождении этого участка. Разность же плотностей потока



энергии  $(w + v^2/2) i$  равна  $q$ , Написав  $w$  в виде

$$\omega = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{\gamma p v}{(\gamma - 1)j},$$

получим (считая  $\Delta 0$  и  $\Delta p$  малыми):

$$vj\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p\Delta v + v\Delta p) = q$$

Исключая  $\Delta p$  из этих двух соотношений, найдем:

$$\Delta v = \frac{(\gamma - 1)q}{\rho(c^2 - v^2)}$$

Мы видим, что при дозвуковом течении подвод тепла ускоряет поток ( $\Delta v > 0$ ), а при сверхзвуковом - замедляет.

Написав температуру газа в виде  $T = \mu p/R\rho = \mu p v/R$  ( $R$ — газовая постоянная), найдем для ее изменения выражение

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma - 1)q}{Rj(c^2 - v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

При сверхзвуковом движении это выражение всегда положительно-температура газа повышается; при дозвуковом же движении оно может быть как положительным, так и отрицательным.

## **7.0.2 Вязкое движение сжимаемого газа по трубе**

### **7.0.3 Одномерное автомодельное движение**

### **7.0.4 Разрывы в начальных условиях**

### **7.0.5 Одномерные бегущие волны**

### **7.0.6 Образование разрывов в звуковой волне**

### **7.0.7 Характеристики**

### **7.0.8 Инварианты Римана**

### **7.0.9 Произвольное одномерное движение сжимаемого газа**

### **7.0.10 Задача о сильном взрыве**

### **7.0.11 Сходящаяся сферическая ударная волна**

### **7.0.12 Теория “мелкой воды”**

---

## Part III

# Основы теории упругости

## 8 Основы (?)

### 8.0.1 Тензор деформации

(ландау)

#### Суть

**Теория** Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется ее радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (с компонентами  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела; если ее радиус-вектор до деформирования был  $\mathbf{r}$ , то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение  $\mathbf{r}'$  (с компонентами  $x'_i$ ). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , который мы обозначим буквой  $\mathbf{u}$ :

$$u_i = x'_i - x_i$$

Вектор  $\mathbf{u}$  называют вектором деформации (или вектором смещения). Координаты  $x'_i$  смещенной точки являются, конечно, функциями и от координат  $x_i$  той же точки до ее смещения. Поэтому  $\mathbf{u}$  и вектор деформации является функцией координат  $x_i$ . Задание вектора  $\mathbf{u}$  как функции от  $x_i$  полностью определяет деформацию тела

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был  $dx_i$ , то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет  $dx'_i = dx_i + du_i$ . Само расстояние между точками до деформирования было равно

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$$

Так как  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , то перепишем  $dl'^2$  в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

Поскольку во втором члене оба индекса  $i$  и  $k$  являются немymi, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$$

В третьем же члене поменяем местами индексы  $i$  и  $l$ . Тогда окончательно получаем

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Этим и выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела. Тензор  $u_{ik}$  называют тензором деформации; по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki}$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор  $u_{ik}$  в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат - главные оси тензора, - в которой из всех компонент  $u_{ik}$  отличны от нуля только диагональные компоненты  $u_{11}, u_{22}, u_{33}$ . Эти компоненты - главные значения тензора деформации обозначим через  $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ . Надо, конечно, помнить, что если тензор  $u_{ik}$  приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведен в данной точке к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (1.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = \\ &= (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2 \end{aligned}$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объема тела деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых

деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям - главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина  $dx_1$  вдоль первой из трех главных осей превращается в длину

$$dx'_1 = \sqrt{1 + 2u^{(1)}} dx_1$$

и аналогично для двух других осей. Величины

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

представляют собой, следовательно, относительные удлинения  $(dx'_i - dx_i) / dx_i$  вдоль этих осей. Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации, то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев<sup>1</sup>), при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трехмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не специально малы ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в гл. II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях смещения  $u_i$ , а с ними и их производные по координатам, малы. Поэтому в общем выражении (1.3) можно пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

относительные удлинения элементов длины вдоль главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора  $u_{ik}$ . Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема  $dV$  и определим его величину  $dV'$  после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины  $dx_1, dx_2, dx_3$  вдоль этих осей после деформирования перейдут в  $dx'_1 = (1 + u^{(1)}) dx_1$  и т. д. Объем  $dV$  есть

произведение  $dx_1 dx_2 dx_3$ , объем же  $dV'$  равен  $dx'_1 dx'_2 dx'_3$ . Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u^{(1)}) (1 + u^{(2)}) (1 + u^{(3)})$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV (1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})$$

Но сумма  $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$  главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент  $u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$ . Таким образом,

$$dV' = dV (1 + u_{ii})$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема  $(dV' - dV) / dV$ . Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведем

здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  имеем

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r} \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \\ 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2u_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 2u_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

## его применения

## 8.0.2 Тензор напряжения

## Суть

**Теория** В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются внутренними напряжениями. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем

отсутствуют.

Внутренние напряжения обуславливаются молекулярными силами и, т.

е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень небольшим радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обуславливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от

каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, действующие на какую-нибудь

часть тела со стороны окружающих ее частей, проявляют это действие только непосредственно через поверхность этой части тела.

Здесь необходима следующая оговорка: сделанное утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей; такие (так называемые пьезо- и пьезоэлектрические) тела рассматриваются в т. VIII этого курса.

Выделим в теле какой-нибудь объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила может быть представлена в виде объемного интеграла

$$\int \mathbf{F} dV$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, действующая на единицу объема тела. С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объема, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объем со стороны окружающих его частей тела. Но, согласно сказанному выше, эти силы действуют на рассматриваемый

объем через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема, т. е. в виде некоторого интеграла

по этой поверхности.

Таким образом, для любого объема тела каждая из трех компонент  $\int F_i dV$  равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объема. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор  $F_i$  должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга,

т. е. иметь вид <sup>1)</sup>

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей этот объем <sup>2)</sup>

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k$$

Тензор  $\sigma_{ik}$  называют тензором напряжений. Как видно из (2.2),  $\sigma_{ik} df_k$  есть  $i$ -я компонента силы, действующей на элемент поверхности  $df$ . Выбирая элементы

поверхности в плоскостях  $xy$ ;  $yz$ ;  $xz$ , находим, что компонента  $\sigma_{ik}$  тензора напряжений есть  $i$ -я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси  $x_k$ . Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси  $x$ , действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси  $x$ ) сила  $\sigma_{xx}$  и тангенциальные (направленные по осям  $y$  и  $z$ ) силы  $\sigma_{yx}$  и  $\sigma_{zx}$

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы  $\sigma_{ik} df_k$ . В (2.2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объем со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объем действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$- \oint \sigma_{ik} df_k$$

где интеграл берется по поверхности тела, а  $df$  направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объем тела. Момент силы  $\mathbf{F}$  можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами  $F_i x_k - F_k x_i$ , где  $x_i$  — координаты точки приложения силы <sup>1)</sup>. Поэтому момент сил, действующих на элемент объема  $dV$ , есть  $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ , а на весь объем действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV$$

Как и полная сила, действующая на любой объем, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объема. Подставляя для  $F_i$  выражение (2.1), находим

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int \left( \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \\ &= \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left( \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV \end{aligned}$$

Замечаем, что во втором члене производные  $\partial x_k / \partial x_l$  составляют единичный тензор  $\delta_{kl}$ . В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл преобразуется в интеграл по поверх ности. В результате находим

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV$$

Тензор  $M_{ik}$  будет выражен в виде интеграла только по поверхности, если тензор напряжений симметричен,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

так что объемный интеграл исчезает (к обоснованию важного утверждения (2.4) мы вернемся еще в конце параграфа). Момент сил, действующих на некоторый объем тела, представится тогда в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного всестороннего сжатия тела. При таком сжатии на каждую единицу поверх ности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объема тела. Если обозначить это давление буквой  $p$ , то на элемент поверх ности  $df_i$  действует сила  $-p df_i$ . С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид  $\sigma_{ik} df_k$ . Написав  $-p df_i$  в виде  $-p \delta_{ik} df_k$ , мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению. В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, скалывающие, напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверх ности друг относительно друга. В равновесии силы внутренних напряжений должны взаим но компенсироваться в каждом элементе объема тела, т. е. должно быть  $F_i = 0$ . Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма  $\mathbf{F} + \rho \mathbf{g}$  сил внутренних напряжений и силы тяжести  $\rho \mathbf{g}$ , действующей на единицу объема тела ( $\rho$  — плотность<sup>1)</sup>,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

поверх ности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть  $P$  есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверх ности тела, так что на элемент поверх ности  $df$  действует сила  $\mathbf{P} df$ . В равновесии она должна компенсироваться силой  $-\sigma_{ik} df_k$ , действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i df - \sigma_{ik} df_k = 0$$

Написав  $df_k$  в виде  $df_k = n_k df$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхнoсти, находим отсюда

$$\sigma_{ik} n_k = P_i$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь еще формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2.7) на  $x_k$  и проинтегрируем по всему объему тела:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l} dV - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dV = 0$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором интеграле имеем ввиду, что  $\partial x_k / \partial x_l = \delta_{kl}$ . Отсюда получаем

$$\oint \sigma_{il} x_k df_l - \int \sigma_{ik} dV = 0$$

Подставляя в первый интеграл (2.9), находим

$$\oint P_i x_k df = \int \sigma_{ik} dV = V \bar{\sigma}_{ik}$$

где  $V$  — объем тела, а  $\bar{\sigma}_{ik}$  — среднее по всему объему значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ , можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i) df$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнений равновесия. Вернемся к приведенному выше доказательству симметричности тензора напряжений; оно нуждается в уточнении. Поставленное физическое условие (представимость тензора  $M_{ik}$  в виде интеграла только по поверхности) будет выполнено, не только

если антисимметричная часть тензора  $\sigma_{ik}$  (т. е. подынтегральное выражение в объемном интеграле в (2.3)) равна нулю, но и если она представляет собой некоторую полную дивергенцию, т. е.  $\epsilon_{ijk}$  и

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2 \frac{\partial}{\partial x_l} \varphi_{ikl}, \quad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil}$$

где  $\varphi_{ikl}$  — произвольный тензор, антисимметричный по первой паре индексов. В данном случае этот последний тензор должен выражаться через производные  $\partial u_i / \partial x_k$  и соответственно в тензоре напряжений возникнут члены с высшим и производными от вектора смещения. В рамках излагаемой в этой книге теории упругости все такие члены должны рассматриваться как малые высшего порядка и опускаться.

С принципиальной точки зрения существенно, однако, что тензор напряжений может быть приведен к симметричному виду и без этих пренебрежений<sup>1)</sup>. Дело в том, что определение этого тензора, согласно (2.1), неоднозначно — допустимо любое преобразование вида

$$\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l} \chi_{ikl}, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}$$



где  $\chi_{ikl}$  — произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов; очевидно, что производные  $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$  и  $\partial\tilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$ , определяющие силу  $\mathbf{F}$ , тождественно совпадают. Если антисимметричная часть тензора  $\sigma_{ik}$  имеет вид (2.11), то несимметричный тензор  $\sigma_{ik}$  может быть приведен к симметричному виду преобразованием такого вида. Симметричный тензор имеет вид

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk} + \varphi_{kli})$$

Действительно, легко убедиться, что разность  $\tilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$  имеет вид (2.12) с тензором

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{ilk} - \varphi_{ikl}$$

его применения

### 8.0.3 Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации  $u_i$  изменяется на малую величину  $\delta u_i$ . Определим работу,

Суть

Теория

### 8.0.4 Закон Гука

Суть

Теория

### 8.0.5 Однородные деформации

Суть

Теория

### 8.0.6 Деформации с изменением температуры

часто возникает вопрос, как изменится температура тела при деформациях?

Суть

Теория

### 8.0.7 Уравнения равновесия изотропных тел

Суть

Теория

### 8.0.8 Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Суть

Теория

### 8.0.9 Соприкосновение твердых тел

Суть

Теория 10

### 8.0.10 Упругие свойства кристаллов

Суть

Теория

## 8.1 Основные примеры деформаций

соберем полезные заготовки для задач на деформацию, чтобы потом брать их - и применять в аналогичных случаях в жизни.

так что тут простые задачи и модели будут, которые потом вставляются в задачи про деформацию

### 8.1.1 Деформация прямоугольного параллелепипеда

### 8.1.2 Всесторонне сжатие и растяжение

Суть

Теория

### 8.1.3 Кручение

интересно очень, как описывать кручение?

вот тут теория прямо на это

**простейшая теория** (общефиз)

В отличие от растяжения и сжатия, деформация сдвига вызывается касательными напряжениями (рис. 8.3а). Пусть  $\tau = dF_{\parallel}/dS$  – касательное напряжение ( $\dot{F}_{\parallel}$  – сила, параллельная поверхности пробного кубика). Следствием деформации будет угол перекоса  $\gamma$ . При условии его малости связь между воздействием и откликом должна быть линейной

$$\gamma = G\tau$$

где коэффициент  $G$  именуется модулем сдвига, а все соотношение (8.9), как и (8.3), – законом Гука.

Для равновесия деформированного кубика к нему одновременно с касательным напряжением  $\tau$  должно быть приложено еще одно, равное и противоположно направленное (показано на рис. 8.3 а штрихованной стрелкой), а также дополнительная пара сил, уравнивающая момент этих сил, показанная на рис. 8.3 а точечными стрелками. Два верхних напряжения

обеспечиваются непосредственно воздействием, нижние — реакцией опоры. Рассмотрим равновесие уголка  $ABC$  (рис. 8.3 б). Из построения равновесия сил, действующих на уголок ( $\tau dS$  вдоль граней  $BA$  и  $BC$ ,  $\tau dS\sqrt{2}$  — по биссектрисе угла  $ABC$ ), следует, что на поверхности  $BA$  возникает такое же напряжение  $\tau$ , но уже не касательное, а нормальное. Как следствие, внутри деформируемого кубика можно выделить кубик  $abcd$  (рис. 8.3 в), который подвергается растяжению по оси  $\eta$  и сжатию по оси  $\xi$ . Далее каждому способу рассмотрения упругой деформации будет удобно поставить в соответствие свою плотность энергии. Во-первых, в соответствии с рис. 8.3а,

$$dU = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \tau dx dy \cdot dz \gamma \Rightarrow w = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

С другой стороны (см. рис. 8.38)

$$-\varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta = \frac{\tau}{E} + \mu \frac{\tau}{E} \Rightarrow dU = 2 \cdot \tau d\eta d\xi \frac{|\varepsilon_\xi| d\xi}{2} \Rightarrow w = \tau |\varepsilon_\xi|$$

Таким образом,

$$\frac{\tau^2}{2G} = \tau^2 \frac{1+\mu}{E} \Rightarrow G = \frac{E}{1+\mu}$$

Итак, модуль сдвига удастся выразить через две ранее введенные упругие константы.

Рассмотрим деформацию кручения (рис. 8.4). Пусть к цилиндру радиуса  $R$  с закрепленным основанием приложен крутящий момент  $M$ . Если при этом свободный конец прокручивается на угол  $\varphi$ , то линейный закон, аналогичный (8.3), имеет вид

$$M = f\varphi$$

где  $f$  именуется модулем кручения. Рассмотрев деформацию трубочки радиуса  $r$  и толщины  $\delta r \ll r$ , нетрудно убедиться, что для нее кручение эквивалентно деформации сдвига, причем угол

сдвига тривиальным образом связан с  $\varphi$ ,

$$\gamma h = \varphi r$$

где  $h$  — длина образца. Вклад в полный момент от нашей трубочки равен  $\delta M = \tau \cdot 2\pi r \delta r \cdot r$ , где  $\tau = G\gamma = G\varphi \frac{r}{h}$ . Соответственно, для сплошного цилиндра

$$M = \int \delta M = \int_0^R \frac{2\pi G}{h} \varphi r^3 dr = \varphi \frac{\pi G R^4}{2h} \equiv f \cdot \varphi$$

6

Таким образом, модуль кручения однородного стержня равен  $\pi G R^4 / (2h)$ , а для тонкой трубочки  $-2\pi r^3 \delta r \cdot G / h$ . Мы вновь

убедились в том, что линейный отклик на внешнее воздействие может быть выражен исключительно через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Интересным следствием закона (8.11) оказывается соотношение для так называемых крутильных колебаний. Пусть массивное симметричное тело радиуса  $R$  с моментом инерции  $I$  подвешено на проволоке длины  $l$  и радиуса  $r$  с модулем кручения  $f$  (рис. 8.5). Уравнение моментов (7.13) для этого случая приводится к виду

$$I\ddot{\varphi} = -M(\varphi) = -f\varphi$$

а это уравнение типа (4.18), решение которого хорошо известно

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \psi), \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{f}{I} = \frac{\pi G r^4}{m l R^2}$$

### 8.1.4 Простейшие деформации

соберем тут общефиз всякий.

## 8.2 Равновесие стержней и пластинок

### 8.2.1 Энергия изогнутой пластинки

### 8.2.2 Уравнение равновесия пластинки

### 8.2.3 Продольные деформации пластинок

### 8.2.4 Сильный изгиб пластинок

### 8.2.5 Деформация оболочек

### 8.2.6 Кручение стержней

### 8.2.7 Изгиб стержней

### 8.2.8 Энергия деформированного стержня

### 8.2.9 Уравнение равновесия стержней

20

### 8.2.10 Слабый изгиб стержней.

2

### 8.2.11 Устойчивость упругих систем

## 9 Упругие волны

(пока глава, вообще, мб частью сделаю отдельной)

2

### 9.1 Упругие волны в изотропной среде

### 9.2 Упругие волны в кристаллах

### 9.3 Поверхностные волны

### 9.4 Колебания стержней и пластинок

### 9.5 Ангармонические колебания

---

## Part IV

# Problems

### 10 Типичные задачи механики сплошных сред

#### 10.0.1 Задачи на понимание и оценки явлений (!?!?!)

(тут же задачи о пузырях)

##### С какой скоростью будет всплывать пузырь

(там на ютубе есть о всплывающих пузырях, дойду - изучу)

Человек начинает тонуть в воде. Оценить при этом его ускорение.

Найти расход вязкого газа при адиабатическом течении через длинную трубу под действием большого перепада давления.

Горизонтальная тонкая пластина находится в воде на малом расстоянии от дна по сравнению с поперечным размером пластины, выдавливая воду из зазора. Оценить скорость опускания пластины.

Почему перепад давления в воздухе не приводит к переносу тепла?

Показать, что теплопроводность воздуха при очень высоких температурах пропорциональна пятой степени температуры.

При медленном течении воды в трубке температура стенок трубки поддерживается постоянной. Оценить разность температур на оси трубки и на ее стенках.

Горячая струя воздуха бьет горизонтально из отверстия и изгибается вверх под действием силы Архимеда. Найти форму струи.

Оценить коэффициент диффузии сахара в стакане воды в зависимости от ее температуры.

Оценить толщину пленки типичного мыльного пузыря.

За какое время притянутся друг к другу две параллельные спички на поверхности воды при начальном расстоянии в 1 см между ними.

Как зависит от температуры скорость звука в воздухе при очень высоких температурах?

Звуковая волна распространяется вверх в атмосфере. На какой высоте ее скорость минимальна?

Оценить мощность звукового излучения от типичной молнии.

Как движется пылинка в воздухе под действием звуковой волны?

Лектор читает лекцию. Какая доля звуковой энергии поглощается в стенках аудитории?

Как зависит от температуры теплопроводность воздуха при низких температурах?

В слабоионизованном газе оценить ионную проводимость в слабом электрическом поле.

На какое расстояние проникает в плазму электромагнитная волна малой частоты?

Как зависит сечение рассеяния света в воде от его частоты?

Как зависит сечение поглощения света в воде от его частоты?

При каком условии в слабоионизованном газе можно вводить отдельно электронную и ионную температуры?

Почему равновесная температура устанавливается в плазме гораздо быстрее, чем равновесная плотность?

Почему проводимость плазмы определяется столкновениями электронов с ионами, а не с электронами?

Начиная с какой степени ионизации слабо ионизованного газа электрическая проводимость обусловлена столкновениями электронов с ионами, а не с нейтральными атомами?

На каком расстоянии остановятся в ткани человека протоны с начальной энергией 200 МэВ?

Как зависит от температуры температурный коэффициент линейного расширения диэлектрического кристалла при низких температурах?

Как зависит от температуры температурный коэффициент линейного расширения металла при очень низких температурах?

Как зависит от температуры кинематическая вязкость фононного газа в диэлектриках при температурах выше температуры Дебая?

Как зависит от температуры теплопроводность чистого диэлектрика при температурах, много меньших температуры Дебая?

Как зависит от температуры теплопроводность диэлектрика из-за рассеяния акустических фононов на примесных центрах?

Показать, что в металле при температурах выше температуры Дебая установление равновесия в фононном газе происходит из-за столкновений фононов друг с другом, а не из-за столкновений фононов с электронами.

Как зависит от температуры металла электрическая проводимость, обязанная электрон-электронным столкновениям?

Как зависит от температуры металла теплопроводность, обязанная электрон-электронным столкновениям?

## 10.0.2 Типичные технические задачи для проверки знаний (???)

(тут скорее всего из ЛЛ гидродинамика все будет, очень много крутых задач!)

### Обтекание жидкостью движущегося в ней шара

(?? звучит просто, а пока не готов вообще решать.)

задача об обтекании жидкостью движущегося в ней шара (см. V, §20):

### ЛЛ5-20.2. Пузырь

Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью  $\eta'$ ), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью  $\eta$  ( W. Rybczynski, 1911).

**Р е ш е н и е.** Воспользуемся системой координат, в которой капля покоится. Для жидкости снаружи капли ищем решение уравнения (20.5) опять в виде (20.6), так что скорость имеет вид (20.7). Для жидкости же внутри капли надо искать решение, не обладающее особой точкой при  $r = 0$  (причем должны оставаться конечными также и вторые производные от  $f$ , определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4}r^2 + \frac{B}{8}r^4$$

чему соответствует скорость

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{un}) - 2\mathbf{u}]$$

На поверхности шара <sup>1</sup>) должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости вещества вне ( $\mathbf{v}^{(e)}$ ) и внутри ( $\mathbf{v}^{(i)}$ ) капли должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

то же самое должно иметь место для компоненты  $\sigma_{r\theta}$  тензора напряжений

$$\sigma_{r\theta}^{(i)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент  $\sigma_{rr}$  тензора напряжений можно не писать - оно определило бы собой искомую скорость  $u$ , которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырех условий получаем четыре уравнения для постоянных  $a, b, A, B$ , решение которых дает

$$a = R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3 \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (20.14a):

$$F = 2\pi u \eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}$$

При  $\eta' \rightarrow \infty$  (что соответствует твердому шару) эта формула переходит в формулу Стокса. В предельном же случае  $\eta' \rightarrow 0$  (газовый пузырек) получается  $F = 4\pi u \eta R$ , т. е. сила сопротивления составляет  $2/3$  сопротивления твердому шару.

Приравняв  $F$  действующей на каплю силе тяжести  $\frac{4\pi}{3} R^3 (\rho - \rho') g$ , найдем

$$u = \frac{2R^2 g (\rho - \rho') (\eta + \eta')}{3\eta (2\eta + 3\eta')}$$

(только на самом деле шар то сплюснутым будет, но мб про это потом подумаю.)

<sup>1</sup>) Изменение формы капли при ее движении можно не рассматривать, так как оно представляет собой эффект высшего порядка малости. Но для того чтобы движущаяся капля фактически была шарообразной, силы поверхностного натяжения на ее границе должны превышать силы, происходящие от неравномерности давления и стремящиеся нарушить шаровую форму. Это значит, что должно быть  $\eta u / R \ll \alpha / R$  ( $\alpha$  - коэффициент поверхностного натяжения) или, подставляя  $u \sim R^2 g \rho / \eta$ :

$$R \ll (\alpha / (\rho g))^{1/2}$$

### ЛЛ5-20.3. Две пластины

Две параллельные плоские круглые пластинки (радиуса  $R$ ) расположены одна над другой на малом расстоянии друг от друга; пространство между ними заполнено жидкостью. Пластины сближаются друг с другом с постоянной скоростью, вытесняя жидкость. Определить испытываемое пластинками сопротивление ( $O. Reynolds$ ).

**Решение.** (??? типичная общезнаковая задача, напишу в 1ю часть про нее тоже!)

Выбираем цилиндрические координаты с началом в центре нижней пластинки (которую полагаем неподвижной). Движение жидкости осесимметрично, а ввиду тонкости слоя жидкости в основном радиально ( $v_z \ll v_r$ ), причем  $\partial v_r / \partial r \ll \partial v_r / \partial z$ . Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 : \quad v_r = v_z = 0, \\ \text{при } z = h : \quad v_r = 0, \quad v_z = -u, \\ \text{при } r = R : \quad p = p_0 \end{aligned}$$

( $h$  - расстояние между пластинками,  $p_0$  - внешнее давление). Из уравнений (1) находим

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dr} z(z-h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по  $dz$ , получим

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right),$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3} (R^2 - r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая на пластинку, равна

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

### 10.0.3 Задачи общей физике (???)

(с нее начну, там в механике есть эти элементы!)

### 10.0.4 Задачи олимпиад общей физике (???)

(с нее начну, там в механике есть эти элементы!)

### 10.0.5 Задачи о странных явлениях (???)

(с нее начну, там в механике есть эти элементы!)

### 10.0.6 О некоторых прикладных задачах

(тут указываю на задачи в приложениях, важная тоже заготовка. все в параграфах, потому что нужно просто указать и всё, так-то про каждую задачу можно будет под 100 страниц написать.)

### 10.0.7 Задачи о поверхности воды

#### ТУЙМ-48. Волны в ручье (2010 год)

При обтекании воткнутой в дно ручья палки образовались неподвижные относительно берега поверхностные волны (рис. 16,17).

1. Определите диаметр  $d$  палки.
2. Определите скорость  $u$  течения ручья.



**Примечание.** Зависимость скорости  $v$  поверхностных волн от длины волны  $\lambda$  (закон дисперсии) имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  - ускорение свободного падения,  $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$  - коэффициент поверхностного натяжения воды,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  - плотность воды.



Рис. 16. Короткие волны перед палкой (крупный масштаб)



Рис. 17. Длинные волны после палки (мелкий масштаб)

**ТУЙМ-решение.48. Волны в ручье (2010 год)** Начнем с прикидывания, сколько разница длин волн.

Запишем длины волн, образовавшихся по разные стороны от палки, в виде  $\lambda_1 = k_1 d$  и  $\lambda_2 = k_2 d$ , где коэффициенты  $k_1 = 1/6$  и  $k_2 = 8$  определяются по фотографиям: сколько  $\lambda_1$  укладывается в  $d$  и сколько  $d$  укладывается в  $\lambda_2$ .

В системе отсчёта, связанной с водой, палка и обе волны движутся со скоростью  $u$  (аналогично картине волн от катера). Подставим  $v = u$  в закон дисперсии и запишем его в виде

$$\frac{g}{2\pi} \lambda^2 - u^2 \lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho} = 0$$

Поскольку  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - корни данного уравнения, по теореме Виета

$$\frac{g}{2\pi} \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho}, \quad \frac{g}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2) = u^2.$$

После подстановки выражений для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  находим

$$d = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{k_1 k_2 \rho g}} \approx 15 \text{ мм}, \quad u = \sqrt{\sqrt{\frac{g\sigma}{k_1 k_2 \rho}} (k_1 + k_2)} \approx 43 \text{ см/с}.$$

**Решение Клименюка (????)** (пока просто не до просмотра этого.)

Из первой, крупной фотографии, выясняем, что в диаметре палки укладывается примерно 6 коротких волн  $\lambda_1 \approx d/6$ , в то время как в одной длинной волне, как видно из второго снимка, укладывается примерно 7.5 диаметров палки  $\lambda_2 \approx 7.5d$ . Таким образом,  $\lambda_2 \approx 45\lambda_1$ .

Далее удобно рассуждать, перейдя в систему, связанную с водой. В этой системе препятствие, движущееся относительно воды со скоростью реки  $v$ , порождает волны, покоящиеся относительно препятствия и, соответственно, движущиеся относительно воды со скоростью  $v$ . Этой скорости соответствуют волны с длинами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые являются решением квадратного уравнения:

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$$

$$\lambda^2 - \frac{2\pi v^2}{g}\lambda + \frac{4\pi^2\sigma}{\rho g} = 0$$

По теореме Виета  $\lambda_1\lambda_2 = 4\pi^2\sigma/g\rho$ . Учитывая, что  $\lambda_2 \approx 45\lambda_1$ , получаем  $\lambda_1 = 2\pi\sqrt{\sigma/45g\rho} = 2.6$  мм;  $\lambda_2 = 45\lambda_1 = 116$  мм. Скорость  $v^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)g/2\rho$  (вторая часть т. Виета) тогда  $V = 43$  см/с. Диаметр палки  $d = 6\lambda_1 = 15.5$  мм.

**Разные задачи****ТУЙМ-26. Цунами (2003 год)**

В данной задаче исследуются некоторые особенности распространения волн В жидКОстЯх.

1. На поверхности океанов иногда наблюдаются гигантские волны - цунами. Найдите скорость таких волн, предполагая, что длина волны много больше глубины океана  $h$ . При этом условии в волновое движение вовлекаются все частицы воды, в противном случае только те частицы, которые находятся в поверхностном слое толщиной порядка длины волны.
2. Вблизи прямолинейного участка берега моря на расстоянии  $L$  от него произошёл взрыв. Считая, что дно моря слабо отличается от наклонной плоскости, найдите длину участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом. Считать, что глубина моря в месте взрыва достаточно мала.

**ТУЙМ-решение.26. Цунами (2003 год)** Пусть цунами перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . Рассмотрим движение частиц воды в системе отсчёта, связанной с горбом волны (рис. 99).

Вдали от горба в сечении 1 вода относительно этой системы отсчёта движется со скоростью  $v$  в направлении, противоположном оси  $x$ . В области горба горизонтальная составляющая скорости частиц воды равна  $u$ . Вследствие несжимаемости жидкости массы воды, проходящей за время  $\Delta t$  через сечения 1 и 2, равны:

$$\rho h b v \Delta t = \rho h_1 b u \Delta t$$

где  $\rho$  - плотность воды,  $b$  - толщина рассматриваемого слоя воды в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Из полученного соотношения следует, что

$$u = v \frac{h}{h_1}$$

Применим к воде рассматриваемого слоя, которая заключена в объёме между сечениями 1 и 2, закон изменения импульса за время  $\Delta t$ :

$$\rho v b h v \Delta t - \rho u b h v \Delta t = \frac{1}{2} (-\rho g h^2 b + \rho g h_1^2 b) \Delta t, \text{ или } h v (v - u) = \frac{g}{2} (h_1 - h) (h + h_1),$$

где  $g$  - ускорение свободного падения, а множитель  $1/2$  учитывает линейное уменьшение давления с высотой. Подставляя в последнее выражение соотношение (97) и учитывая, что высота волны существенно меньше глубины водоёма, то есть  $h + h_1 \approx 2h$ , получим

$$v \approx \sqrt{gh}$$

Этот результат ограничен требованием малости глубины  $h$  по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . В противном случае в волновое движение вовлекается только слой воды глубиной порядка  $\lambda$ . Тогда скорость волны выражается приближённой формулой

$$v \sim \sqrt{g\lambda}, \quad \text{или, точнее,} \quad v = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Скорость волн, о которых идёт речь во втором пункте, уменьшается при приближении к берегу в соответствии с полученным выше результатом:

$$v(x) = \sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}$$

где  $\alpha$  - угол наклона к горизонту морского дна. Эта зависимость приводит к искривлению линии (волнового луча), вдоль которой распространяется волна. Изменение направления волнового луча определяется соотношением, которое чаще всего используется для оптических волн:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - углы падения и преломления луча на границе сред, скорости распространения волн в которых равны соответственно  $v_1$  и  $v_2$ . Соотношение (99) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2} = \frac{\sin \varphi}{v} = \text{const}$$

В таком виде формула (100) применима и к непрерывному изменению угла  $\varphi$  (искривлению луча), если скорость волны плавно изменяется от точки к точке.

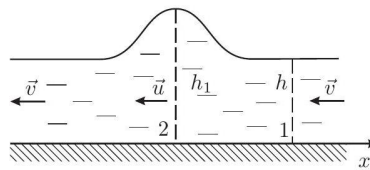


Рис. 99

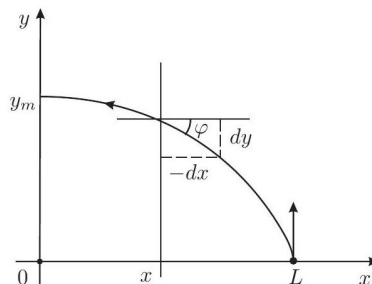


Рис. 100 Для определения положения точки на поверхности моря введём декартову систему координат так, чтобы ось  $y$  была направлена вдоль берега, а ось  $x$  проходила через точку с координатой  $x = L$ , в которой произошёл взрыв, вызвавший волны. Рассмотрим искривление луча, попадающего в точку берега с координатой  $y_m$ , наиболее удалённую от места взрыва (рис. 100). Из этого рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dx}$$

В соотношение (99) подставим выражение (98) и учтём, что при  $x \rightarrow L$  угол падения  $\varphi$  стремится к  $\pi/2$  :

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{gL \operatorname{tg} \alpha}}$$

откуда

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Последнее выражение позволяет переписать уравнение (101) в виде

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{x}{L - x}}.$$

Остаётся проинтегрировать это уравнение:

$$y_m = -\int_L^0 \sqrt{\frac{x}{L - x}} dx$$

Используя подстановку  $x = L \sin^2 \beta$ , получим

$$y_m = L \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} 2 \cos \beta \sin \beta d\beta = L \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \beta d\beta = L \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, длина участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом, равна  $2y_m = \pi L$ .

## 10.0.8 Задачи на реакцию-диффузию

(Пухов, раздел 7)

### Пухов.диффуз-метод.л1з1

Найти форму профиля фронта  $u(\xi)$  и скорость распространения кинка  $v$  в модели, когда нелинейная функция  $f(u)$  имеет вид кубического полинома:  $f(u) = -\alpha u(u - 1)(u - \beta)$ . Найдите предельную скорость кинка в этой модели.

Ответ:  $v = \sqrt{\alpha/2}(1 - 2\beta)$ .

### Пухов.диффуз-метод.л1з2

1. Найти форму профиля фронта  $u(\xi)$  и скорость распространения кинка  $v$  в скачковой модели:

$$f(u) = -u + \theta(u - \beta)$$

где  $\theta(x)$  - ступенчатая функция Хевисайда. Найдите предельную скорость кинка в этой модели.

Ответ:  $v = (1 - 2\beta)/\sqrt{\beta(1 - \beta)}$ .

### Пухов.диффуз-метод.л133

2. Найти форму профиля фронта  $u(\xi)$  и скорость распространения кинка  $v$  в модели, когда нелинейная функция  $f(u)$  имеет вид

$$f(u) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\lambda u - \beta, & u \leq 0, \\ u - \beta, & 0 < u < 1, \\ -\lambda(u - 1) + 1 - \beta, & u \geq 1 \end{cases}$$

Ответ:  $v = K/\sqrt{1 + K^2}$ , где  $K = \pi^{-1} \frac{\ln(1-\beta)}{\beta}$ .

### Пухов.диффуз-метод.л134

3. В 2D-среде  $(x, y)$  распространение кинка с прямолинейным фронтом  $u(x - vt)$  происходит со скоростью  $v$ . Найдите скорость распространения кинка с искривленным фронтом  $u(r - v(R)t)$  при  $R \gg 1$ . Используя полученное Вами асимптотическое выражение  $v(R)$ , оцените радиус критического зародыша стабильной фазы  $R_c$  из условия остановки кругового фронта  $v(R_c) = 0$ .
4. В бесконечной одномерной среде кинк покоится при  $\beta = \beta_p$ . Что будет с тем же кинком при тех же граничных условиях  $u_\xi(\pm\infty) = 0$ , если длина среды  $L$ ? Укажите критерий бесконечной протяженности среды.
5. Получите выражение для скорости кинка в приближении больших скоростей (Зельдовича), качественно проанализировав поведение сепаратрисы на фазовой плоскости УРД.
5. Покажите, что особые точки фазовой плоскости уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова являются:  $(0, 0)$  — неустойчивым узлом при  $v > v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$ ,  $(1, 0)$  — седлом при  $v > 0$ .
6. Для двумерной задачи (19) покажите, что любое реалистическое распределение (например, в форме зародыша) эволюционирует в круговую фазовую волну с минимальной скоростью  $v = v_{\min}$ .
7. Покажите, что оператор  $L$  задачи Штурма-Лиувилля (33) не является самосопряженным. Укажите способ приведения его к самосопряженному виду. Исходя из этого, качественно оцените максимальную скорость кинка. Подсказка: в данной задаче оператор  $L$  самосопряженный, если для любых интегрируемых с квадратом  $\psi(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , удовлетворяющих граничным условиям, выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(L\varphi(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(L\psi(x))dx.$$

9. Покажите, что оценка (10) совпадает с приближенным выражением для скорости кинка (20) в пределе больших скоростей.

10. В 1D-уравнении «реакция-диффузия» функция  $f(u) = 0$  имеет пять корней, т.е. существует три устойчивые фазы среды:  $u_1, u_3$  и  $u_5$ . Известно, что фаза  $u_1$  вытесняется фазой  $u_3$  кинком со скоростью  $v_{13}$ , а фаза  $u_3$  вытесняется фазой  $u_5$  кинком со скоростью  $v_{35}$ . На основании механической аналогии вынесите суждение о том, всегда ли существует кинк, переводящий среду из фазы  $u_1$  в фазу  $u_5$ . В каком соотношении его скорость  $v_{15}$  находится с  $v_{13}$  и  $v_{35}$  ?

---

## Part V

# —— Special Topics in Continuum Mechanics in a Nutshell ——

## 11 Об отдельных применениях механики сплошных сред (??)

### 11.0.1 Гидродинамика в конденсированных средах

(?? мб потом большой раздел будет, пока не занимался этим)

Электроны в графене и парадокс Стокса. (??)

### 11.1 О других моделях гидро- и аэродинамики

#### 11.1.1 Реакционно-диффузионная модель, ZFK, KPP–Fisher equations

(см Пухова методичку чуть что, прикольное явление, но не актуально пока что)

#### Основное

Основные формулы (???) (спишу у Пухова!)

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

Рассмотрим решения вида  $u(x, t) = u(\xi)$ , где  $\xi = x - vt$  — автомодельная переменная, координата в сопутствующей системе, двигающейся с фронтом кинка; с граничными условиями  $u(-\infty) = u_3, u(+\infty) = u_1$ .

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u) = 0.$$

Часто появляется параметр  $\beta$  в  $f$ , этот параметр отражает влияние на систему.

**Механическая аналогия для УРД** Введем аналог потенциала

$$V(u) = \int_0^u f(u') du'$$

$$u_{\xi\xi} = -\frac{\partial V}{\partial u} - vu_{\xi}$$

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u') du' = 0$$

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u', \beta_p) du' = 0$$

**Фазовая плоскость УРД** На плоскости  $(u, u_{\xi})$  уравнение (3) имеет три особые точки, из которых стационарные точки  $(u_1, 0)$  и  $(u_3, 0)$  являются седлами, а точка  $(u_2, 0)$  — фокусом.

**Точно решаемые модели**

$$f(u) = -\alpha (u - u_1) (u - u_2) (u - u_3)$$

Нетрудно показать, что в этом случае сепаратриса представляет собой параболу:

$$u_\xi = \text{const} (u - u_1) (u - u_3)$$

$$v = \sqrt{\alpha/2} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

**Приближение малых скоростей кинка**

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p), \quad u(\xi) = u_0(\xi) + \delta u(\xi),$$

$|\delta u| \ll u_0$ .  $u_0$  - стационарное.

Задача на собственное значение может быть решена по теории возмущений методом итераций. Нулевое приближение:  $v = 0, u = u_0(\xi)$ , удовлетворяющее уравнению

$$u_{0\xi\xi} + f(u_0, \beta) = 0$$

может быть решено в квадратурах:

$$\xi = \int_{u_1}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{2[V(u_1) - V(u)]}}.$$

Домножая (3) на  $u_\xi$  и интегрируя по координате  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , для скорости получаем

$$v = \frac{V(u_3, \beta) - V(u_1, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi}$$

Варьируя числитель (13) по  $\beta$ , имеем

$$\delta V(u_3, \beta) = \delta u_3 \partial V(u_3, \beta) / \partial u + \delta \beta \partial V(u_3, \beta) / \partial \beta$$

С учетом  $\partial V(u_3, \beta) / \partial u = f(u_3, \beta) = 0$  для  $\delta v = v$  получаем

$$v = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \int_{u_1}^{u_3} f(u, \beta) du \right) \Big|_{\beta_p}}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi} (\beta - \beta_p).$$

Таким образом, вблизи параметра распространения  $\beta \approx \beta_p$  скорость кинка меняется линейно

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p).$$

**Приближение больших скоростей кинка**

$$u_{\xi\xi} + \frac{\partial V}{\partial u} \approx 0$$

$$u_\xi|_{u_2} \approx -\sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

$$u_{\xi\xi} + v u_\xi \approx 0$$



$$u_2 - u_1 = v^{-1} u_\xi|_{u_2}$$

скорость быстрых кинков в приближении Зельдовича:

$$v \approx (u_2 - u_1)^{-1} \sqrt{2 [V(u_3) - V(u_2)]}$$

$$v \approx (u_3 - u_1)^{-1} \sqrt{2 \int_{u_1}^{u_3} f(u') du'}.$$

**Качественно, почему такие картинки?** (общий ответ тоже хочется услышать, а не только уравнения и результаты моделирования)

**О другом про УРД (??)**

(что еще важно - сюда потом тоже напишу.)

**Элементарные УРД модели и решения (???)** (тут к Левену подготовка.)

### 11.1.2 Особа аэродинамика: эфф. Магнуса, бумеранг

(другие тоже сюда дописывать буду)

**Эффект Магнуса наличия дополнительной силы на вращающиеся объекты**

**О применениях эффекта Магнуса** Спортивные игры очень сильно используют это: в настольном теннисе, в футболе профессионалы обязательно умеют закручивать шары и мячи, гольф, большой теннис.

А еще парус некоторых кораблей так работает, отклоняя перпендикулярные ветры (???)

Так что по сути очень важный эффект.

**Бумеранг (?????)**

(когда-то напишу тут, как же он работает? хз, нужно минимум день думать про это)

### 11.1.3 Особенности струй жидкостей

**Эффект Коандэ (???)**

Струя жидкости, вытекающая из сопла, стремится отклониться по направлению к стенке и при определенных условиях прилипает к ней. Это объясняется тем, что боковая стенка препятствует свободному поступлению воздуха с одной стороны струи, создавая вихрь в зоне пониженного давления. Аналогично и поведение струи газа. На основе этого эффекта строится одна из ветвей пневмоники (струйной автоматики).

**Выпрыгивание падающей струи**

(есть такой эффект, почти не думал про него)

#### 11.1.4 Горение

(см Ландау, большая тема)

128.Медленное горение 129.Детонация 130.Распространение детонационной волны 131.Соотношения между различными режимами горения 132.Конденсационные скачки

#### 11.1.5 Сверхтекучая гидродинамика, возбуждения, конденсаты,

см ПТФ-[4, 5, 11].

**Спектр элементарных возбуждений в квантовой бозе-жидкости и явление сверхтекучести**

**Двухскоростная гидродинамика.**

Квантованные вихревые нити.

**Вихревая решетка, волны Ткаченко.**

(специфика, статьи про это гуглятся, не изучал пока)

**Сверхтекучая турбулентность.**

**Слабо неидеальный бозе-газ при нуле температур, уравнение Гросса-Питаевского.**

**Неустойчивость конденсата и коллапс волновой функции в случае притяжения.**

#### 11.1.6 О гидродинамике в космологии

(см. пока запись по космологии, потом и сюда это пропишу когда-то)

**Общая идея космологии и жидкостей на космологических масштабах**

(описание вообще общей концепции)

#### Формулы (???)

Consider a non-relativistic fluid with mass density  $\rho$ , pressure  $P \ll \rho$  and velocity  $\mathbf{u}$ . Denote the position vector of a fluid element by  $\mathbf{r}$  and time by  $t$ . The equations of motion are given by basic fluid dynamics. <sup>1</sup> Mass conservation implies the continuity equation

$$\partial_t \rho = -\nabla_r \cdot (\rho \mathbf{u})$$

while momentum conservation leads to the Euler equation

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_r) \mathbf{u} = -\frac{\nabla_r P}{\rho} - \nabla_r \Phi$$

The last equation is simply " $F = ma$ " for a fluid element. The gravitational potential  $\Phi$  is determined by the Poisson equation

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

#### 11.1.7 О гравитационных волнах в средах

(см. пока отдельная запись)

### Затухание гравитационных волн по ЛЛ6.25

(??? интересно, но это специфика)

$$\bar{E}_{\text{Mex}} = \rho \int \bar{v}^2 dV = \rho \int \overline{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2} dV$$

$$\bar{E}_{\text{mex}} = 2\rho k^2 \int \bar{\varphi}^2 dV$$

Затухание волн удобно характеризовать коэффициентом затухания  $\gamma$ , определенным как отношение

$$\gamma = \left| \dot{\bar{E}}_{\text{Mex}} \right| / (2\bar{E})$$

### 11.1.8 О выработке энергии из аэро- и гидродинамики

---

## Part VI

# Другие темы

(потом второстепенные темы понижу в приоритетности, пока это не фильтровал, структура Ландау.)

## 12 Другие известные модели

### 12.1 Распространение и устойчивость УРД по Пухову

#### 12.1.1 Одномерные автомодельные решения УРД

##### 1. Уравнение кинка

Автоволновые режимы являются аналогом автоколебаний для распределенных сред, описываемых уравнением «реакция-диффузия» (1). Основными типами автоволновых режимов является распространение одиночных волн переключения (кинков) и одиночных бегущих импульсов (автосолитонов). Распространение с постоянной скоростью волны стационарного профиля (с не изменяющейся формой фронта) в нелинейном уравнении «реакция-диффузия» - довольно неожиданный результат, впервые установленный независимо для волн популяций и генов (Колмогоров-Петровский-Пискунов, 1937; Фишер, 1938) и для волн горения (Зельдович, Франк-Каменецкий, 1938).

Основным типом структуры, возникающей в простых (однокомпонентных) бистабильных средах, является автоволна переключения (кинк). При её распространении среда из состояния  $u = u_1$  переходит (переключается) в состояние  $u = u_3$ . Кинк (англ. kink - изгиб, перегиб), движущийся со скоростью  $v$ , представляет собой частное (автомодельное) решение (1) вида  $u(x, t) = u(\xi)$ , где  $\xi = x - vt$  - автомодельная переменная, координата в сопутствующей системе, двигающейся с фронтом кинка; с граничными условиями  $u(-\infty) = u_3, u(+\infty) = u_1$ . Для  $u(\xi)$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u) = 0$$

Фактически (3) представляет собой нелинейную краевую задачу на собственное значение  $v$ .

##### 2. Механическая аналогия для УРД

Для качественного анализа уравнения (3) удобно воспользоваться следующей «механической» аналогией. Если ввести функцию потенциальной энергии

$$V(u) = \int_0^u f(u') du'$$

то уравнение (3) приобретает вид уравнения Ньютона для частиц единичной массы с координатой  $u$ , зависящей от времени  $\xi$ . Частица движется в потенциале  $V(u)$  при наличии вязкого трения:

$$u_{\xi\xi} = -\frac{\partial V}{\partial u} - vu_{\xi}$$

Для бистабильной среды в точках  $u = u_1$  и  $u = u_3$  функция  $V(u)$  имеет максимумы, а в промежуточной точке  $u = u_2$  она имеет локальный минимум. Предположим, что  $V(u_3) >$

$V(u_1)$ , то есть согласно (4) алгебраическая площадь под кривой  $f(u)$  положительна:  $\int_{u_1}^{u_3} f(u) du$ .

Решение типа кинка с его граничными условиями тогда приобретает наглядный физический смысл. Оно соответствует ситуации, когда частица скатывается с горки высотой  $V(u_3)$  из положения  $u = u_3$  с нулевой начальной скоростью при  $-\infty$  начальном времени и забирается на горку высотой  $V(u_1)$ . При этом существует единственное значение коэффициента трения  $v$ , при котором потеря энергии частицы на трение в точности компенсируется разницей потенциалов  $V(u_3) - V(u_1)$ . Тогда частица попадает в положение  $u = u_1$  так же с нулевой скоростью при  $+\infty$  конечном времени. Это условие однозначно определяет как скорость распространения  $v$ , так и форму фронта  $u(\xi)$  кинка. Скорость  $v$  положительна при  $V(u_3) > V(u_1)$  и отрицательна при  $V(u_3) < V(u_1)$  (фаза  $u = u_1$  среды вытесняет фазу  $u = u_3$ ). Скорость кинка обращается в ноль (волна переключения покоится, имеет место фазовое равновесие) при выполнении условия  $V(u_3) = V(u_1)$ , аналогичного теореме равных площадей Максвелла [6, 9, 25, 26]:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u') du' = 0$$

Если нелинейность  $f(u, \beta)$  среды зависит от какого-либо управляющего параметра  $\beta$  (тока, температуры охладителя, скорости реакции и т.д.), то условие (6) определяет значение параметра распространения  $\beta_p$ , при котором кинк покоится:

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u', \beta_p) du' = 0$$

### 3. Фазовая плоскость УРД

Качественный анализ уравнения (3) можно произвести также при помощи фазовой плоскости.

Действительно, на плоскости  $(u, u_\xi)$  уравнение (3) имеет три особые точки, из которых стационарные точки  $(u_1, 0)$  и  $(u_3, 0)$  по стандартной классификации [5, 6] являются седлами, а точка  $(u_2, 0)$  — фокусом.

При произвольном выборе величины  $v$  имеется разнообразный набор неограниченных и осциллирующих решений (3), не удовлетворяющих граничным условиям (3). Существует единственное значение  $v$ , при котором траектория идет из седла в седло, то есть является сепаратрисой. Это значение и определяет скорость кинка, а сепаратриса форму его фронта.

### 4. Точно решаемые модели

Точных аналитических методов, позволяющих решить нелинейную краевую задачу (3) и рассчитать скорость кинка при произвольной  $f(u)$ , не существует [1-4]. Поэтому представляют большой интерес частные случаи, которые допускают точное решение. Они приведены в качестве задач в конце пособия. Здесь укажем только случай, когда  $f(u)$  представляет собой кубический полином:

$$f(u) = -\alpha(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

Нетрудно показать, что в этом случае сепаратриса представляет собой параболу:

$$u_\xi = \text{const} (u - u_1)(u - u_3)$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой (9) в (3), которая позволяет найти константу (9). Профиль фронта при этом имеет вид гиперболического тангенса, а скорость кинка равна

$$v = \sqrt{\alpha/2} (u_1 + u_3 - 2u_2)$$

Несколько других примеров, допускающих точное решение, приведены в конце пособия в качестве задач.

## 5. Приближение малых скоростей кинка

Поскольку задача (3) определения собственного значения  $v$  нелинейна, обычно при расчете скорости волн переключения приходится использовать приближенные и асимптотические методы. Рассмотрим сначала приближение медленных волн, когда параметр  $\beta$  близок к параметру распространения  $\beta_p$ . Вблизи параметра распространения  $v(\beta) \sim (\beta - \beta_p)$ , а профиль фронта кинка близок к покоящемуся  $u(\xi) = u_0(\xi) + \delta u(\xi)$ ,  $|\delta u| \ll u_0$ . Задача на собственное значение может быть решена по теории возмущений методом итераций. Нулевое приближение:  $v = 0, u = u_0(\xi)$ , удовлетворяющее уравнению

$$u_{0\xi\xi} + f(u_0, \beta) = 0$$

может быть решено в квадратурах:

$$\xi = \int_{u_1}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{2[V(u_1) - V(u)]}}.$$

Домножая (3) на  $u_\xi$  и интегрируя по координате  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , для скорости получаем

$$v = \frac{V(u_3, \beta) - V(u_1, \beta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi}$$

Варьируя числитель (13) по  $\beta$ , имеем

$$\delta V(u_3, \beta) = \delta u_3 \partial V(u_3, \beta) / \partial u + \delta \beta \partial V(u_3, \beta) / \partial \beta$$

С учетом  $\partial V(u_3, \beta) / \partial u = f(u_3, \beta) = 0$  для  $\delta v = v$  получаем

$$v = \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \int_{u_1}^{u_3} f(u, \beta) du \right) \Big|_{\beta_p}}{\int_{-\infty}^{+\infty} u_\xi^2 d\xi} (\beta - \beta_p).$$

Таким образом, вблизи параметра распространения  $\beta \approx \beta_p$  скорость кинка меняется линейно

$$v(\beta) \sim (\beta - \beta_p).$$

## 6. Приближение больших скоростей кинка

При стремлении управляющего параметра к границам интервала бистабильности  $[\beta_-, \beta_+]$  скорость кинка достигает своих максимальных положительного  $v(\beta_+)$  и отрицательного  $v(\beta_-)$  значений. Их величина будет оценена ниже при исследовании устойчивости кинка. Кроме того, приближенный способ её расчета может быть дан в важном частном случае (Зельдович, Франк-Каменецкий, 1938), когда функция  $f(u)$  достигает больших положительных значений в узком интервале  $u_2 < u < u_3$ ,  $|u_3 - u_2| < u$  и является отрицательной, малой по модулю в интервале  $u_1 < u < u_2$ . Такая ситуация характерна для волн горения [10]. Обратимся к механической аналогии. На участке  $u_2 < u < u_3$  происходит быстрый разгон частицы; потенциальная сила  $f(u)$  велика по сравнению с силой вязкого трения  $-vu_\xi$ , которой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + \frac{\partial V}{\partial u} \approx 0$$

Тогда, интегрируя (15), понимаем, что при  $u_2$  скорость частицы достигает значения

$$u_{\xi}|_{u_2} \approx -\sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

На участке же  $u_1 < u < u_2$ , наоборот, основное влияние на движение частицы оказывает сила вязкого трения, тогда как потенциальной силой можно пренебречь:

$$u_{\xi\xi} + vu_{\xi} \approx 0$$

Уравнение (17) описывает торможение частицы, имеющей в точке  $u_2$  начальную скорость (16). Собственное значение определяется из условия, что в конце длины торможения  $u_2 - u_1$  частица остановится с нулевой скоростью через время  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $u(+\infty) = u_1$ ,  $u_{\xi}(+\infty) = 0$ . Интегрируя (17) по  $\xi$ , получаем

$$u_2 - u_1 = v^{-1}u_{\xi}|_{u_2}$$

Приравнявая (18) и (16), находим скорость быстрых кинков в приближении Зельдовича:

$$v \approx (u_2 - u_1)^{-1} \sqrt{2[V(u_3) - V(u_2)]}$$

Вспоминая теперь, что согласно сделанным выше предположениям о свойствах функции  $f(u)$  величина  $v(u_2)$  близка к  $v(u_1)$ , а значение  $u_2$  мало отличается от  $u_3$ , для скорости кинка получаем

$$v \approx (u_3 - u_1)^{-1} \sqrt{2 \int_{u_1}^{u_3} f(u') du'}.$$

То же рассуждение можно провести и на фазовой плоскости. Ниже мы увидим, что (20) является хорошей оценкой максимальной скорости кинка по порядку величины и в случае произвольного вида нелинейной функции  $f(u)$ .

### 3. Критический зародыш стабильной фазы (домен)

(у пухова отдельная часть, объясняю это тем, что он плохо умеет писать книги.)

Проведенное выше рассмотрение показывает, что из двух устойчивых фаз бистабильной среды  $u_1$  и  $u_3$  одна является метастабильной, а другая - абсолютно стабильной. Критерием является знак  $v$  (направление движения кинка), т.е. метастабильна та фаза, у которой ниже горка потенциала. Абсолютно стабильной является та фаза среды, которая при данных параметрах вытесняет метастабильную. Поскольку метастабильная фаза, тем не менее, устойчива по отношению к малым возмущениям, возникает проблема расчета критического зародыша, которого достаточно, чтобы инициировать переход всей распределенной системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. Форме критического зародыша (домена, лат. *domen* - область) ставится в соответствие стационарное решение (2), то есть решение уравнения (1) с граничными условиями  $u(\pm\infty) = u_1$  при  $v = 0$ . На языке механической аналогии это означает, что частица спускается без трения с горки  $V(u_1)$ , достигает точки поворота  $u_m$  при  $\xi = 0$  и возвращается обратно. Для нахождения формы критического зародыша с центром в точке  $\xi = 0$  можно воспользоваться решением в квадратурах (12), а величина  $u(0) = u_m$  в центре зародыша определяется равенством

$$\int_{u_1}^{u_m} f(u, \beta) du = 0$$

Это соотношение также представляет собой правило площадей, модифицированное на случай критического зародыша [25-27]. В случае  $\beta < \beta_p$ , когда метастабильна фаза  $u = u_3$ , его форма находится аналогично. Ниже мы увидим, что критический зародыш представляет собой стационарное, но абсолютно неустойчивое решение УРД. Это значит, что энергия его образования может служить оценкой величины критического возмущения, достаточного для инициации нелинейной стадии развития неустойчивости.

### 12.1.2 4УРД для 2D- и 3D-бистабильных сред

В этом разделе мы приведем несколько количественных результатов, относящихся к двумерным и трехмерным бистабильным средам. Ясно, что проведенное выше рассмотрение одномерных волн переключения справедливо и для волн с плоским фронтом, распространяющихся в 2D- или 3D-бистабильной среде. Возникает вопрос, как будут распространяться волны с искривленным фронтом?

Рассмотрим сначала волны переключения в двумерной бистабильной среде. Очевидно, что всякую волну с искривленным фронтом можно разбить на совокупности достаточно малых участков, каждый из которых представляет собой сегмент окружности. Поэтому найдем закон расширения кругового фронта, радиус  $R$  которого велик по сравнению с шириной фронта волны  $R \gg 1$ . В полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с учетом аксиальной симметрии фронта ( $\partial^2 u / \partial \varphi^2 = 0$ ) УРД имеет вид

$$u_t = r^{-1} u_r + u_{rr}.$$

Пусть  $v(R)$  есть мгновенная скорость распространения фронта с локальным радиусом  $R$ . С учетом сделанных выше приближений такой фронт отвечает автомодельному решению

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - v(R)t$$

дифференциального уравнения

$$u_{\xi\xi} + (v(R) + 1/r)u_{\xi} + f(u) = 0$$

с граничными условиями  $u(+\infty) = u_1$  и  $u(-\infty) = u_3$ . Заметим, что координата  $\xi$ , конечно, формально не может принимать сколь угодно больших отрицательных значений, в силу полярности системы координат. Однако величина  $u$  экспоненциально мало отличается от  $u_3$  уже на небольшом удалении от фронта волны, поэтому граничные условия справедливы в приближении  $R \gg 1$ .

Кроме того, фактически производная  $u_r$  в (22) отлична от нуля лишь в пределах узкого фронта волны вблизи значения  $r = R$ . В том же приближении  $R \gg 1$  во втором слагаемом (24) можно приближенно положить  $r = R$ . Тогда (24) принимает вид

$$u_{\xi\xi} + (v(R) + 1/R)u_{\xi} + f(u) = 0$$

полностью совпадающий с одномерным уравнением (3) для плоской волны переключения, если положить  $v = v(R) + 1/R$ . Идентичны также граничные условия, которым должны удовлетворять оба эти решения. Поэтому, если известна скорость движения плоской волны переключения, то скорость распространения фронта с радиусом кривизны можно выразить как

$$v(R) = v - \frac{1}{R}$$

Следовательно, выпуклый фронт движения медленней, чем плоский. Более того, если  $R$  достаточно мало, направление движения может смениться на обратное. Области



достаточно малых размеров не растут, а сокращаются. Критический радиус области, которая не растет и не сокращается, равен

$$R_c = \frac{1}{v}$$

Такая область и представляет собой критический зародыш «новой» ( $u = u_1$ ) фазы в «старой» ( $u = u_3$ ): если радиус области чуть-чуть увеличится, то она начинает расти, если же его слегка уменьшить, то область сокращается и исчезает. Здесь имеется полная аналогия с фазовыми переходами первого рода, что и является основанием для названия критический зародыши (домен).

Следует напомнить, что выражение (26) является асимптотическим и верно лишь для больших зародышей, с радиусом значительно большим ширины фронта  $R \gg 1$ . Это условие выполнено, если скорость распространения плоского фронта мала.

Полученный результат имеет еще один важный физический смысл. Соотношение (26) обеспечивает устойчивость плоского фронта по отношению к малым возмущениям его формы. Если на фронте появляется выступ, т.е. выпуклый участок, он станет сдвигаться с меньшей скоростью, и возмущенный участок фронта выравнивается.

Для волн переключения в 3D-бистабильных средах рассмотрение проводится совершенно аналогично. Скорость перемещения выпуклого 3D-фронта равна

$$v(R) = v - \frac{2}{R}$$

а 3D-критический зародыш имеет радиус

$$R_c = \frac{2}{v}$$

Выражение (29) является асимптотическим и справедливо при  $R_c \gg 1$ .

### 12.1.3 Устойчивость одномерных автомодельных решений УРД

Рассмотрим теперь важный вопрос об устойчивости автомодельных решений УРД. Начнем с однородных стационарных состояний.

#### 1. Устойчивость однородных стационарных состояний

Линейный анализ устойчивости производится следующим образом. Исходное состояние  $u_i (i = 1, 2, 3)$  слабо возмущается  $u(x, t) = u^i + \delta u(x, t)$ . Если любое малое возмущение затухает, то состояние устойчиво. Подставляя возмущенное решение в (1) и учитывая  $u_t^i = u_{xx}^i + f(u^i) = 0$ , получаем уравнение в вариациях:

$$\delta u_t = \delta u_{xx} + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i) \delta u$$

Решение (30) пишется в стандартном виде:  $\delta u(x, t) = e^{\lambda t} \psi(x)$  где,  $\lambda$  — инкремент. Однако, учитывая, что (1) — уравнение с постоянными коэффициентами,  $\psi(x)$  можно разложить в интеграл Фурье и сразу исследовать устойчивость Фурье-гармоники  $\sim e^{\lambda(k)t} e^{ikx}$ . Подставляя разложение  $\delta u(x, t)$  в (30), получаем дисперсионное соотношение:

$$\lambda(k) = -k^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(u_i)$$

из которого видно, что наиболее «опасными» в этом случае являются однородные возмущения с  $k = 0$ . При этом состояния  $u = u_1$  и  $u = u_3$  ( $\partial f / \partial u(u_i) < 0$ ) устойчивы, а состояние  $u = u_2$  ( $\partial f / \partial u(u_i) > 0$ ) — нет. Этот вывод совпадает с качественным рассмотрением, данным выше.

## 2. Устойчивость кинка

Здесь нам понадобится все наше умение отличать то, что легко, от того, что правильно. Проф. Альбус Дамблдор

Теперь рассмотрим устойчивость движущегося кинка  $u(x, t) = u_k(x - vt)$ . Перейдем в систему отсчёта, движущуюся вместе с кинком  $t \rightarrow t, x \rightarrow \xi + vt$ . Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$u_t = u_{\xi\xi} + vu_{\xi} + f(u)$$

а уравнение в вариациях для малого возмущения  $\delta u(\xi, t)$  :

$$\delta u_t = \delta u_{\xi\xi} + v\delta u_{\xi} + \frac{\partial f[u_k(\xi)]}{\partial u} \delta u$$

Так же, как и для (30), решение (33) ищется в виде  $\sim e^{\lambda(k)t} e^{ikx}$ , однако теперь (33) представляет собой уравнение с переменными коэффициентами. Это значит, что (33) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля с граничными условиями  $\delta u(\pm\infty, t) = 0$  и оператором  $L = \partial^2/\partial\xi^2 + vW(\xi)\partial/\partial\xi$ , где  $W(\xi) = -\partial f[u_k(\xi)]/\partial u$ . Сразу отметим, что оператор  $L$  не является самосопряженным. Поэтому сначала для того, чтобы качественно разобраться в вопросе об устойчивости, рассмотрим простейший случай покоящегося кинка:  $v = 0$ .

В этом случае оператор  $L$  — самосопряженный, а уравнение (33) полностью аналогично уравнению Шредингера. При этом  $-\lambda$  играет роль энергии, а  $W(\xi)$  — потенциальной энергии частицы. Легко видеть, что в случае кинка потенциал  $W(\xi)$  представляет собой несимметричную яму с  $W(-\infty) = -\partial f(u_3)/\partial u$  и  $W(+\infty) = -\partial f(u_1)/\partial u$ . Глубина ямы равна  $\max |\partial f/\partial u|$ , найденному на участке  $\partial f/\partial u < 0$ . Дискретный набор уровней этой ямы и будет определять устойчивость кинка. Сразу отметим, что в яме всегда есть уровень  $\lambda = 0$ . Действительно, (33) удовлетворяется тождественно, если в качестве волновой функции взять  $\psi = \partial u_k/\partial\xi$ . Этот факт не чувствителен к небольшим «шевелениям» функции  $f(u)$  при сохранении её качественного вида. Наличие собственного значения  $\lambda = 0$  имеет ясный физический смысл и связано с трансляционной инвариантностью уравнения (33), т.е. отсутствием явной зависимости от  $x$ . Действительно, решение УРД можно сместить на любое расстояние  $a$ , так что  $u_k(\xi + a)$  также будет решением (33). Если  $a$  мало, то

$$u_k(\xi + a) = u_k(\xi) + a \frac{\partial u_k}{\partial \xi}.$$

Таким образом,  $\partial u_k/\partial\xi$  является решением уравнения в вариациях при  $\lambda = 0$ . Это позволяет вынести суждение о знаке остальных собственных значений  $\lambda_k$  в полном решении уравнения (33):

$$\delta\psi(\xi) = \sum_k \psi_k(\xi) e^{\lambda_k t}$$

Действительно, при  $v = 0$  оператор  $L$  эрмитов, и к задаче может быть применена осцилляционная теорема. Наименьшему собственному значению (основному состоянию) соответствует собственная функция без узлов. Поскольку  $u_k(\xi)$  имеет вид доменной стенки, то  $\partial u_k/\partial\xi$  имеет вид гауссова колпачка! Это означает, что все остальные значения  $\lambda_k$  отрицательны и кинк устойчив.

Теперь рассмотрим случай движущегося кинка:  $v \neq 0$ . Оператор  $L$  можно привести к самосопряженному виду при помощи замены:

$$\psi(\xi) = e^{-v\xi/2}\varphi(\xi).$$

Тогда для новой собственной функции  $\varphi(\xi)$  мы получаем ту же задачу Штурма–Лиувилля, но с потенциалом  $W(\xi) \rightarrow W(\xi) + v^2/4$ . Эффективно это сводится к тому, что с ростом скорости кинка  $v$  потенциальная яма сдвигается вверх на величину  $v^2/4$ . Это обстоятельство позволяет дать качественную оценку максимально возможной скорости кинка. Действительно, поскольку из-за наличия уровня  $\lambda_0 = 0$  дно ямы не может подняться выше нуля, максимальная скорость кинка приблизительно равна

$$\frac{v^2}{4} \approx \max \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|,$$

где производная берется на участке положительного наклона функции  $f(u)$ . Легко убедиться, что эта оценка совпадает с приближенным выражением для скорости кинка (20) в пределе больших скоростей (приближение Зельдовича).

### 3. Устойчивость домена

Теперь рассмотрим устойчивость критического зародыша стабильной фазы (домена)  $u_d(\xi)$ . Действуем совершенно аналогично. Форма домена  $u_d(\xi)$  имеет вид колпачка, то есть  $\partial u_d(\xi)/\partial \xi$  имеет один узел. В соответствии с осцилляционной теоремой это означает, что выше уровня  $\lambda_1 = 0$  существует еще один положительный уровень  $\lambda_0 > 0$ . Таким образом, критический зародыш абсолютно неустойчив: он либо «рассасывается», либо эволюционирует в участок новой фазы, распространяющийся затем на весь образец. Время разрушения домена  $\approx \lambda_0^{-1}$  можно оценить в пределе домена большой длины  $\beta \rightarrow \beta_p$ . В этом случае потенциал  $W(\xi)$  можно представить себе как совокупность двух ям, разделенных большим расстоянием  $R \gg 1$ . Каждая яма локализована возле одной из двух стенок домена, где  $\partial u_d(\xi)/\partial \xi$  велико. Тогда уровни представляют собой расщепленную пару близких уровней  $\lambda_1$  и  $\lambda_0$ , где по-прежнему  $\lambda_1 = 0$  [8, 9]:

$$\lambda_0 \sim e^{-R}$$

То есть, при  $\beta \rightarrow \beta_p$  домен эквивалентен двум удаленным  $R \gg 1$  и покоящимся доменным стенкам (кинку и антикинку) и практически стабилен. Такую ситуацию на языке температурных доменов в металлах принято называть стабильностью в «режиме постоянного тока» [7, 23, 27]. Следует отметить, что в «режиме постоянного напряжения» температурный домен практически всегда стабилен [27].

### 12.1.4 Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова. Фазовые волны

До сих пор мы рассматривали бистабильные среды, где имеется два устойчивых,  $u = u_1, u = u_3$ , и одно неустойчивое  $u = u_2$  однородные стационарные состояния. Волну переключения, распространяющуюся в такой среде, поэтому естественно назвать триггерной.

Помимо триггерных, возможно существование фазовых [6, 8, 10] волн переключения. Они осуществляют переключение среды из состояния хотя и стационарного, но неустойчивого по отношению к малым возмущениям. Это возможно, если функция  $f(u)$  обращается в ноль лишь при двух значениях: неустойчивом  $u = u_2$  и устойчивом  $u = u_3$ .

Исторически такие среды были первыми, рассмотренными при помощи УРД в 1937 г. независимо и одновременно Колмогоровым, Петровским и Пискуновым в задаче о волнах заселения среды популяцией и Фишером в задаче о распространении ареала гена.

Пусть, например, в среде идет процесс размножения и диффузии популяции. Число новых организмов, рождающихся в единицу времени, пропорционально числу уже имеющихся

организмов  $u$  и массе пищи, убывающей с ростом  $u$ . Тогда нелинейную функцию  $f(u)$  можно представить в виде

$$f(u) = \alpha u(1 - u)$$

Может возникнуть вопрос, зачем вообще рассматривать задачу о распространении волны по неустойчивой среде. Казалось бы, малые флуктуации, всегда присутствующие в реальных системах, должны разрушить неустойчивое однородное состояние еще до прихода волны переключения. Так и произошло бы при рассмотрении системы физической или химической природы. В задаче же о распространении биологического вида спонтанное рождение организмов невозможно, поэтому малые флуктуации в незаселенном состоянии отсутствуют. Поэтому оно сохраняется до тех пор, пока пришедшая волна не внесет в него «затравку» в виде некоторого числа организмов. Итак, рассмотрим волну переключения (заселения среды), описываемую в стационарном режиме решением уравнения (3) с правой частью вида (39) с граничными условиями вида

$$u(+\infty) = u_2 = 0, u(-\infty) = u_3 = 1$$

Качественно проанализировать свойства такого решения можно на языке механической аналогии. Частица скатывается с горки  $V(u_3)$  из точки  $u = u_3$  в бесконечно удаленный момент времени  $\xi \rightarrow -\infty$ . Она должна попасть в яму потенциала  $V(u_2)$  в точку  $u = u_2$  асимптотически, то есть при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Это возможно, только если коэффициент трения не слишком мал:  $v > v_{\min}$ . Иначе частица придет в точку  $u = u_2$  за конечное время и с ненулевой скоростью и продолжит движение в сторону меньших значений, нарушив тем самым необходимые граничные условия. Таким образом, в отличие от триггерных волн, где значение скорости кинка имеет единственное значение, для фазовых волн возможен целый спектр значений  $v > v_{\min}$ . Для фазовых волн с большой скоростью  $v \gg 1$  в уравнении (3) можно пренебречь диффузией:  $vu_\xi + f(u) = 0$  и получить форму профиля быстрой фазовой волны в квадратурах:

$$-v^{-1}\xi = \int_{u(0)}^u \frac{du'}{f(u')}$$

Таким образом, чем больше скорость волны  $v$ , тем более пологим является её профиль.

Еще большую информацию о волне может дать рассмотрение фазовой плоскости. На фазовой  $(u, u_\xi)$  плоскости уравнения КПП (39) имеется две особые точки:  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Можно показать, что (см. задачи) точка  $(0, 0)$  является неустойчивым узлом при всех  $v > v_{\min}$ , где

$$v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$$

В остальных случаях это неустойчивый фокус, что соответствует осциллирующим и отрицательным решениям, которые, как мы видели выше, неустойчивы. Особая точка  $(1, 0)$  является седлом для любых положительных  $v \geq 0$ . Таким образом, каждому значению скорости  $v > v_{\min}$  соответствует устойчивая фазовая волна. Континуум этих волн обладает одним замечательным свойством. Любое начальное распределение  $u(x, 0)$  реалистического вида (скажем, в форме ступеньки), обращаясь в ноль правее определенной величины  $x$ , всегда будет эволюционировать в фазовую волну с минимальной скоростью  $v = v_{\min}$ . То есть начальное распределение эволюционирует в профиль, который движется направо, не изменяя формы с минимально возможной скоростью. Идея доказательства этого факта заключается в том, чтобы рассмотреть нестационарную скорость распространения фронта. Её можно определить как скорость перемещения точки  $X(t)$  на фронте волны, в которой  $u(X(t), t)$  равно некоторой определенной, фиксированной величине  $u(X(t), t) =$

$U$ . Рассмотрение задачи Коши показывает, что эта скорость меньше, чем граничная скорость  $v_{\min}$  и при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к этому пределу. Таким образом, из бесконечного набора стационарно распространяющихся решений в действительности осуществляется лишь одно, являющееся устойчивым. Действительно, если в результате решения задачи Коши получен выход на стационарный режим распространения автоволны, то тем самым доказана и её устойчивость по отношению к малым возмущениям.

Выход на режим стационарного распространения можно наглядно проиллюстрировать, рассмотрев передний хвост волны, в котором  $u(x, t) < U \ll 1$ . В хвосте  $u(x, t)$  мало, и уравнение КПП можно линеаризовать:

$$u_t = u_{xx} + \alpha u$$

После замены  $u(x, t) = e^{\alpha t} \tilde{u}(x, t)$  это уравнение сводится к уравнению диффузии:  $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$ . Его решением при  $t \rightarrow \infty$  (далеко от области локализации начального распределения  $u(x, 0)$ ), как известно, является

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

где  $c = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx$ . Для  $u(x, t)$  в «хвосте» фронта получаем

$$u(x, t) = \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t} + \alpha t}$$

Таким образом, точка на фронте с фиксированным значением  $u(X(t), t) = U$  распространяется по закону  $X(t)$  :

$$\ln U = \ln \frac{c}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\ln t}{2} + \alpha t - \frac{X^2}{4t}$$

или, при  $t \rightarrow \infty$ , асимптотически:

$$X(t) = 2\sqrt{\alpha t} \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \frac{\ln t}{t} + \dots \right)$$

со скоростью  $dX(t)/dt = 2\sqrt{\alpha} - 1/(\sqrt{\alpha t}) + \dots$ . Значит, скорость фронта стремится снизу к своему постоянному пределу  $v_{\min} = 2\sqrt{\alpha}$ .

## 12.2 Зарождение и эволюция УРД по Пухову

### 12.2.1 Вариационный принцип. Градиентная форма УРД. Функционал Ляпунова

Проведенный в предыдущей главе анализ устойчивости однородных и неоднородных решений УРД по отношению к малым возмущениям оставляет открытыми ряд важных вопросов. Являются ли волны переключения единственным возможным типом установившегося волнового режима в бистабильной среде? Что происходит при столкновении двух таких волн? Какова последующая эволюция произвольного начального распределения  $u(x, 0)$ ? Ответы на эти вопросы помогает получить подходящим образом сформулированный для УРД вариационный принцип. Это можно сделать, придав УРД (1) градиентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta u}$$

подобрав соответствующий функционал Ляпунова  $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x) dx$  (см. задачу 1). Здесь вариационная производная определяется обычным образом:  $\delta F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta u} \right) \delta u dx$  или, что то же самое,

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} = \lim_{\int \delta u(x') dx' \rightarrow 0} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int \delta u(x') dx'},$$

где вариация  $\delta u(x')$  локализована вблизи точки  $x' = x$ . Нетрудно показать, что для УРД следует выбрать

$$F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} (u_x)^2 - V(u) \right] dx$$

где потенциал  $V(u)$  определяется выражением  $V(u) = \int_0^u f(u') du'$ .

Из (48) следует, что величина  $F$  не возрастает с течением времени независимо от выбора исходного состояния среды - начального распределения  $u(x, 0)$ . Действительно, полная производная функционала Ляпунова по времени равна

$$\frac{dF}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta F[u]}{\delta u(x, t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

или, с учетом (48):

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\delta F}{\delta u} \right)^2 dx.$$

Видно, что в любой момент времени (52) является неположительной величиной. Это означает, что выбранная в форме (50) величина  $F$  действительно является функционалом Ляпунова. Или, в терминах теории фазовых переходов,  $F$  представляет собой термодинамический потенциал для параметра порядка  $u(x, t)$ . В соответствии с этим стационарным состоянием среды соответствуют минимумы функционала  $F$ , а эволюция системы с течением времени заключается в приближении к одному из таких стационарных состояний. Этот вариационный принцип позволяет ответить на вопросы, сформулированные в начале этого параграфа.

## 1. Стационарные однородные состояния среды

Отметим прежде всего, что состояния  $u = u_1$  и  $u = u_3$  всегда устойчивы по отношению к малым возмущениям. В самом деле, слабое возмущение одного из этих состояний  $\delta u(x)$  приводит к изменению функционала  $\delta F$ , складывающегося из двух частей. Во-первых, из-за изменения  $u$  становится отличным от нуля первое слагаемое в (50), пропорциональное  $(u_x)^2$ , и поэтому положительное. Во-вторых, из-за изменения  $u(x)$  возрастает и второе слагаемое в (50), поскольку выбранные нами однородные решения  $u_1$  и  $u_3$  отвечают максимумам  $V(u)$ . Видно, что обе возникающие добавки к  $F$  положительны, и, следовательно, любое малое неоднородное возмущение  $\delta u(x)$  может приводить лишь к возрастанию функционала Ляпунова. Это и означает устойчивость однородных состояний  $u = u_1$  и  $u = u_3$  по отношению к малым возмущениям.

## 2. Начальное распределение в форме кинка

Пусть начальное распределение имеет форму волны переключения из метастабильной  $u = u_1$  в стабильную  $u = u_3$  фазу среды. Распределение такого типа «глобально» неустойчиво, поскольку всегда можно понизить значение функционала  $F$ , сдвигая границу между областями в сторону метастабильной фазы. Действительно, если сдвинуть фронт волны на величину  $a$ , не изменяя его формы, то вклад первого слагаемого в (50), очевидно,

не из-за второго слагаемого будет отрицательным:  $-aV(u_3)$ . В результате последовательности таких сдвигов (распространение кинка), в конце концов, установится стационарное однородное распределение  $u = u_3$ .

Особой является ситуация, когда оба минимума  $F$  при  $u = u_1$  и  $u = u_3$  имеют одинаковую глубину:  $V(u_1) = V(u_3)$ , то есть выполняется условие неподвижности кинка:  $\beta = \beta_p$ . В этом случае в среде возможно стационарное сосуществование двух фаз, разделенных плоским переходным слоем. Такое фазовое равновесие не отвечает абсолютному минимуму функционала  $F$  из-за наличия неоднородности переходного слоя между фазами. Тем не менее мы не можем понизить значение  $F$ , сдвигая границу. Это означает, что фазовое равновесие является «безразличным», т.е. обладает нейтральной устойчивостью.

### 3. Начальное распределение в форме кинка и антикинка. Аннигиляция кинков

Пусть в тех же условиях,  $V(u_3) > 0$ , начальное распределение представляет собой участок фазы  $u = u_3$  на фоне фазы  $u = u_1$  или наоборот. С точки зрения примера, рассмотренного в предыдущем пункте, такое распределение соответствует паре кинк-антикинк. Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что оно релаксирует к однородному распределению  $u = u_3$ . Это, в частности, означает, что две столкнувшиеся автоволны переключения всегда полностью гасят друг друга.

### 4. Начальное распределение в форме критического зародыша

Выше мы отмечали, что оба однородных состояния  $u = u_1$  и  $u = u_3$  устойчивы относительно малых возмущений. Абсолютному же минимуму функционала  $F$  соответствует, однако, лишь одно из них, с наибольшим значением  $V(u_i)$ . Другое состояние при этом будет метастабильным. Если система первоначально находилась в метастабильном состоянии, то, создав достаточно большое возмущение, её можно перевести в наиболее устойчивое состояние, отвечающее более глубокому (абсолютному) минимуму функционала  $F$ . Одной из возможных форм таких критических возмущений и является критический зародыш.

Действительно, существует значительная аналогия между рассматриваемыми явлениями и фазовыми переходами I рода. В соответствии с этой аналогией однородные распределения  $u_1$  и  $u_3$ , которым соответствует минимум  $F$ , являются фазами системы. Если данная фаза соответствует лишь локальному, а не абсолютному минимуму  $F$ , её называют метастабильной. Метастабильная фаза неустойчива по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри неё возник достаточно большой зародыш устойчивой фазы, то он начинает расти и формирует две разбегающиеся волны переключения (пара кинк-антикинк), после расхождения которых среда переходит в наиболее однородное устойчивое состояние.

Размер и форма критического зародыша определяется конкуренцией двух факторов. С одной стороны, образование зародыша, внутри которого  $u(x)$  близко к  $u_3$ , выгодно для системы, поскольку это уменьшает второе слагаемое в (50). С другой стороны, неоднородность  $u(x)$  внутри зародыша приводит к возрастанию первого слагаемого в (50) и появлению положительного вклада в  $F$ . Это означает, что форма критического зародыша соответствует стационарному, но абсолютно неустойчивому неоднородному решению уравнения (1). Это возможно только при  $F[u(x)] = 0$ , что как раз и соответствует профилю критического зародыша  $u = u_d(x)$ , полученному ранее, в главе 1.

### 5. Достаточное условие перехода среды в абсолютно устойчивое состояние

В заключение этого параграфа укажем достаточное условие разрушения метастабильного состояния  $u = u_1$  начальным возмущением  $u(x, 0)$ . Нетрудно убедиться, что  $F[u_1] = 0$  и  $F[u_3] < 0$ . Таким образом, если  $F[u(x, 0)] > 0$ , то дальнейшую эволюцию возмущения однозначно предсказать невозможно. Однако если  $F[u(x, 0)] < 0$ , то, в силу  $dF/dt < 0$ ,

финальной стадией такой эволюции может быть только однородное состояние  $u = u_3$ . Это условие доставляет нам достаточное, но не необходимое условие перехода среды из «холодного» в «горячее» состояние.

## 9. Критические возмущения в бистабильной среде

Выше мы установили, что каждая из фаз  $u = u_1$  и  $u = u_3$  бистабильной среды устойчива по отношению к малым возмущениям. Однако одна из них является метастабильной, т.е. может быть разрушена достаточно сильным возмущением. Пусть для определённости это будет «холодная» фаза  $u = u_1$ . Это значит, что возмущение с достаточно большой энергией переводит среду из состояния  $u = u_1$  в состояние  $u = u_3$ . Таким образом, процесс перехода носит пороговый характер. Возмущение, действующее на среду, характеризуется своей мощностью  $w(x, t)$ , которую следует добавить в правую часть УРД (1). В задаче имеется естественный масштаб времени 1. В соответствии с этим возмущения удобно разделить на длительные (со временем действия 1) и импульсные (со временем действия 1). Длительное возмущение аналогично неоднородности среды. Поэтому даже без детальных вычислений ясно, что в результате действия длительных возмущений в среде либо возникают метастабильные структуры типа локализованных в неоднородностях доменов [27], либо среда переводится в «горячее» состояние вследствие распространения кинка и антикинка [25, 26]. Поэтому наибольший интерес представляет рассмотрение импульсных возмущений. За время действия возмущения выделяется энергия

$$e = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, t) dt dx$$

Если энергия возмущения мала, то возникшее в результате возмущения начальное распределение  $u(x, 0)$  будет расплываться за счет диффузии, и первоначальное однородное состояние среды  $u = u_1$  восстановится. Если же энергия возмущения достаточно велика, то в результате его действия формируются две доменные стенки (кинк и антикинк), которые разбегаются друг от друга и переводят образец в абсолютно стабильное однородное состояние  $u = u_3$ . Возникает задача определения критической энергии  $e = e_c$ , где

$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, 0) - u_1] dx$$

достаточной для перехода. Такая терминология возникла в нелинейных тепловых задачах, где  $u$  играет роль температуры.

В общем случае величина критической энергии  $e_c$  определяется решением нелинейного дифференциального уравнения и может быть найдена только численно. Однако поскольку в задаче есть естественный масштаб длины (ширина фронта кинка 1), то все возмущения естественным образом делятся на два класса. Это протяженные возмущения с шириной начального распределения  $\gg 1$  и локальные возмущения с шириной  $\ll 1$ . Рассмотрим сначала протяженные возмущения.

## 12.2.2 Протяженные возмущения

Разрушение «холодного» состояния  $u = u_1$  протяженными возмущениями также представляет собой сложную нелинейную задачу. Однако по порядку величины  $e_c$  может быть оценена как энергия  $e_d$  неустойчивого доменного решения  $u_d$  (см. [25-27]), представляющего собой критический зародыш «горячей» фазы. Выше было показано, что такое решение удовлетворяет стационарному уравнению

$$(u_d)_{xx} + f(u_d) = 0$$



с граничными условиями  $u_d(\pm\infty) = u_1$ . Наиболее просто энергия критического зародыша  $e_d = \int_{-\infty}^{+\infty} [u_d(x, 0) - u_1] dx$  может быть получена в рамках скачковой модели  $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$ . Тогда УРД приобретает вид  $u_{d,xx} - u_d + \theta(u - \beta) = 0$ . Интегрируя его по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , для  $e_d$  получаем  $e_d = 2R$ , где  $2R$  - длина критического зародыша  $u_d(R) = \beta$ . Величину  $R$  можно получить из решения того же стационарного УРД:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1}{1 - 2\beta} \right)$$

Таким образом, для энергии критического зародыша получаем

$$e_d = \ln \left( \frac{1}{1 - 2\beta} \right)$$

Данный результат допускает обобщение на двух- и трехмерный случаи (см. задачу 18).

## 2. Локальные возмущения

Рассмотрим теперь локальные импульсные возмущения длительностью  $\ll 1$ , действующие на область среды с размером  $\ll 1$ . Тогда возмущение среды после действия такого импульса в одномерном случае будет описываться уравнением

$$u_t = u_{xx} + f(u, \beta) + e\delta(x)\delta(t).$$

Критической энергии соответствует минимальное значение  $e = e_c$ , начиная с которого зародившаяся горячая фаза неограниченно расширяется на весь образец. Из (58) видно, что  $e_c(\beta)$  является универсальной функцией, зависящей лишь от размерности задачи  $D$  и одного безразмерного управляющего параметра  $\beta$ . Поскольку (58) представляет собой нелинейное уравнение в частных производных, то функция  $e_c(\beta)$  может быть найдена только численно. Однако в рамках скачковой модели

$$f(u, \beta) = -u + \theta(u - \beta)$$

качественный анализ задачи позволяет получить асимптотическую оценку для функции  $e_c(\beta)$ . Рассмотрим качественно физическую интерпретацию эволюции зародыша горячей фазы в этом случае.

Ясно, что вблизи границы интервала бистабильности  $\beta \approx 1$  время существования горячей фазы, возникающей под действием импульсного возмущения, мало:  $(1 - \beta)$ . Поэтому основным механизмом «рассасывания» возмущения является диффузия тепла вдоль среды, а величину критической энергии можно оценить как  $e_c = \Delta u \cdot l^D$ , где  $\Delta u \approx \beta$  - характерное изменение  $u$  в нагретой (возмущенной) области,  $l$  - характерный размер этой области. Величину  $l$  можно получить из (58), оценив по порядку величины

$$\frac{\Delta u}{l^2} \approx 1 - \gamma \Delta u$$

где  $\gamma$  - численный коэффициент порядка единицы, пока неизвестный. Поскольку очевидно, что вблизи параметра распространения  $\beta \approx \beta_p = 1/2$  скорость кинка  $v \rightarrow 0$ , то критическая энергия  $e_c \rightarrow \infty$ , а с ней и  $l \rightarrow \infty$ . Это значит, что в (60) следует положить  $\gamma = 2$ . Тогда для размера прогретой области  $l$  получаем

$$l \approx \sqrt{\frac{\Delta u}{1 - 2\Delta u}} \approx \sqrt{\frac{\beta}{1 - 2\beta}}.$$

Соответственно для величины критической энергии  $e_c$  имеем

$$e_c \approx \frac{C_D \beta^{\frac{D}{2}+1}}{(1-2\beta)^{D/2}}.$$

Множитель  $C_D$  в (62) может быть определен только численно [31]. В другом предельном случае, когда управляющий параметр близок к параметру распространения  $\beta \approx \beta_p$ , основным механизмом «рассасывания» возмущения является уменьшение и за счет функции источника  $f(u)$ , которая в данном случае работает как «сток». Тогда, пренебрегая в (1) положительным вкладом в  $f(u)$ , получаем линейное уравнение диффузии «со стоком»  $u_t = u_{xx} - u$ . Его решение хорошо известно [42]:

$$u(x, t) = \frac{e}{(2\sqrt{\pi t})^D} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t} - t}$$

Размер прогретой области тогда можно определить из условия  $u(l, t) \approx \beta$ . Поскольку время существования возмущенной области в этом случае велико,  $\sim \ln(l)$ , зависимостью предэкспоненциального множителя от времени в (63) можно пренебречь. Тогда для зависимости  $l$  от  $t$  получаем

$$l^2 = 4t \ln \left( \frac{1}{\beta} \right) - 4t^2$$

и, следовательно, максимальный размер прогретой области, достигнутый за время действия возмущения  $l_m$ , равен

$$l_m \approx \ln \left( \frac{1}{\beta} \right).$$

Теперь величину критической энергии  $e = e_c$  можно оценить из условия, что максимальная длина возмущенной области равна размеру критического зародыша горячей фазы:  $l_m \approx R_d$ . Например, в одномерном случае ( $D = 1$ )  $R_1 = -\frac{1}{2} \ln(1 - \beta/2)$ , что даёт  $e_c \approx \beta \exp(R_1)$ , т.е.  $e_c \approx (1 - 2\beta)^{-1/2}$ . Эта оценка согласуется с (62), что говорит о правильности оценки численного фактора  $\gamma$ . Численные множители в (65) могут быть получены только путём численного решения (58). Например, в одномерном случае ( $D = 1$ ) получается [31]

$$e_{c1} = 2.3(1 - 2\beta)^{-1/2}.$$

Данный результат допускает обобщение на двумерный и трехмерный случаи (см. задачу 18).

Сравним теперь величины  $e_c$  и  $e_d$ . Соотношение между ними зависит от величины  $\beta$ . Из сказанного выше следует, что  $e_d \gg e_c$  при  $\beta \approx 1$  и  $e_d \ll e_c$  при  $\beta \approx 1/2$ . Поскольку разрушение холодного состояния инициируется в основном возмущением с минимальной критической энергией, от  $\beta$  зависит сам характер разрушения метастабильного состояния. При  $\beta \approx 1$  наибольшую «опасность» представляют локальные импульсы, а величина критической энергии существенным образом зависит от деталей динамики  $u(x, t)$ . Вблизи  $\beta \approx 1/2$  метастабильное состояние разрушается в результате возникновения неустойчивых зародышей горячей фазы, то есть наиболее «опасными» являются возмущения с пространственным размером  $\sim 1$ . В этом случае величина  $e_c$  порядка  $e_d$  и не зависит от конкретной динамики среды  $u(x, t)$  после действия возмущения.

### 12.2.3 УРД для моностабильной среды. Критические возмущения и нелинейная стадия развития неустойчивости в моностабильной среде

Целый ряд сильнонеравновесных физических систем (активных сред) описывается 3D-нелинейным уравнением типа «реакция-диффузия»:

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ , а  $u$  в зависимости от характера диссипативного процесса может представлять собой температуру среды, концентрацию реагентов, электрическое поле и т.д. Ниже для определенности под величиной и будем подразумевать температуру. Характер нелинейной стадии развития неустойчивости в таких системах полностью определяется видом функции источника  $f(u)$ . Например, для бистабильных систем переход между двумя устойчивыми состояниями среды  $u(x, y, z, t) = u_1$  и  $u(x, y, z, t) = u_3$  осуществляется посредством распространения по ней автоволны переключения. В одномерном случае асимптотическое поведение такой волны  $u(x, t) = u(x - vt)$  характеризуется постоянством скорости ее распространения  $v$ . Способы приближенного вычисления скорости волны и ее зависимость от параметров задачи были описаны ранее, в первой главе.

Однако в целом ряде ситуаций бистабильность утрачивается системой (сильная зависимость диссипации от температуры, резкое возрастание дифференциальной проводимости и т.д.). При превышении температурой  $u$  в какой-либо области среды порогового значения  $u_2$  происходит ее неограниченный саморазогрев. Это обстоятельство является причиной особого характера развития неустойчивости в моностабильной среде и структуры фронта нелинейной автоволны  $u(x, y, z, t)$ , разделяющей «горячую» и «холодную» области среды.

Рассмотрим сначала одномерный случай ( $D = 1$ ). Уравнение (67) не имеет автомодельного решения типа бегущей автоволны  $u(x, t) = u(x - vt)$  в силу неограниченного увеличения температуры «горячей» области при  $u(x, t) > u_2$ . Однако для целого ряда моностабильных активных сред численное моделирование показало [32-34], что, несмотря на нестационарность температуры  $u(x, t)$  в «горячей» области среды, фронт движется с постоянной скоростью  $v$ . Таким образом, распределение  $u(x, t)$  в «холодном» хвосте фронта имеет вид  $u(x, t) = u(x - vt)$ , и в системе, движущейся вместе с волной, удовлетворяет асимптотически ( $u \cong u_1$ ) уравнению (67). В достаточно общем виде нелинейную функцию источника  $f(u)$  можно представить как [33, 34]

$$f(u) = au^m(u^n - b),$$

где  $m, n, a, b$  - произвольные положительные величины,  $b = u_2^n$ . Отсутствие автомодельного решения не позволяет определить величину скорости  $v$  стандартными методами [6-11] теории распространения автоволн конечной амплитуды как собственное значение уравнения (67) с граничными условиями  $u_x(\pm\infty) = 0$ . Для нахождения величины  $v$  в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями [35-37]. Будем считать, что степени  $m$  и  $n$  фиксированы, а  $a$  и  $b$  являются управляющими параметрами задачи. Тогда уравнения (67), (68) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида [35-37]

$$x = L^{-p}x', u = L^q u', v = L^p v', a = L^{2p+(1-m-n)q} a', b = L^{nq} b',$$

представляющих собой группу растяжений с масштабным фактором  $L$ . Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (67), (68) относительно преобразования (69) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (67), (68). Это приводит к тому, что группа преобразований (69) содержит свободные параметры  $L, p$  и  $q$ , которые могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости  $v$  в (67), (68) есть функция только  $a$  и  $b$  :  $v = F(a, b)$ . Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (69), т.е.  $v' = F(a', b')$ . Будем искать решение в виде  $v \propto a^r b^s$ , где степени  $r$  и  $s$  подлежат определению. Тогда

$$v / (a^r b^s) = L^{p(2r-1)+q(ns+(1-n-m)r)} v' / (a'^r b'^s)$$

и из условия инвариантности  $v / (a^r b^s) = v' / (a'^r b'^s)$  получаем  $p(2r - 1) + q(ns + (1 - m - n)r) = 0$ . В силу произвольности  $p$  и  $q$  в (69) получаем однозначные выражения для степеней:  $r = 1/2$ ,  $s = (m + n - 1)/2n$ . Итак, для скорости  $v$  имеем

$$v \propto a^{1/2} b^{(m+n-1)/2n}.$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (71) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты, либо привлечение дополнительных соображений [32-34].

В симметричных двумерном ( $D = 2, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) и трехмерном ( $D = 3, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) случаях автомодельность является приближенной:  $u(x, t) \cong u(x - vt)$ , и при  $r \gg 1$  для скорости фронта волны получаем  $x_t = v - (D - 1)/r$ . Кривизна фронта вызывает замедление волны, что приводит к логарифмической поправке в равномерном распространении фронта:  $r \cong vt - v^{-1}(D - 1) \ln(t)$ . Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (67), (68) позволяет получить функциональную зависимость  $v$  от управляющих параметров при любой размерности задачи.

Отметим, что рассмотренные особенности нелинейной стадии развития неустойчивости в моностабильной активной среде сближают ее с так называемыми режимами с обострением. Такие режимы возникают в задачах о нелинейных активных средах с сильной зависимостью теплоемкости и тепловыделения от температуры, описываемых уравнением

$$u^k u_t = \nabla (u^l \nabla u) + f(u).$$

Применяя рассмотренную выше процедуру к уравнениям (68), (72), для скорости фронта волны получаем [32-34]

$$v \propto a^{1/2} b^{(m+n+l-2k-1)/2n}.$$

Однако, используя этот результат, следует принимать во внимание, что для режима с обострением может быть характерен «взрывной» характер развития неустойчивости, когда температура среды обращается в бесконечность за конечное время ( $m+n-k-1 > 0$ ).

Отдельно следует исследовать вопрос о критических возмущениях, инициирующих развитие неустойчивости. Инициация развития неустойчивости в сильнонеравновесных физических системах (активных средах) внешними возмущениями имеет пороговый характер, причем наиболее «опасными» являются локальные и импульсные возмущения, обладающие минимальной критической энергией. Действие локального импульсного критического возмущения в активной среде (67), (68) описывается уравнением

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t)$$

где  $\Delta = r^{-(D-1)} \partial (r^{D-1} \partial / \partial r) / \partial r$  — радиальная часть лапласиана,  $r$  и  $t$  — безразмерные координата и время,  $\delta^D(r) = (k_D r^{D-1})^{-1} \delta(r)$ ,  $k_D$  — геометрический фактор ( $k_1 = 1, k_2 = 2\pi, k_3 = 4\pi$ ). Как отмечалось выше, величина критической энергии  $e_c$  полностью определяется видом функции источника  $f(u)$ .

Для моностабильной среды зависимость  $f(u)$  описывается уравнением (68). Такая среда имеет одно устойчивое состояние  $u = u_1 = 0$  и при превышении температурой  $u$  в

достаточно большой области среды порогового значения  $u_2$  происходит ее неограниченный саморазогрев. Для нахождения величины  $e_c$  в этом случае также можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями. Действительно, уравнения (68), (74) инвариантны относительно группы преобразования переменных вида [32 – 34]

$$t = L^{2p}t', r = L^p r', u = L^q u', e_c = L^{q+Dp} e'_c, \\ a = L^{-2p+(1-m-n)q} a', b = L^{nq} b'.$$

Как и при вычислении скорости, степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (68), (74) относительно преобразования (75) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тем же уравнениям (68), (74). Используя процедуру, описанную выше, для критической энергии  $e_c$  имеем [32-34]

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{(1-D(m+n-1)/2)/n}$$

Коэффициент пропорциональности порядка единицы в (76) не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения необходимы либо численные расчеты, либо привлечение дополнительных соображений. Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнений (68), (74) позволяет получить функциональную зависимость  $e_c$  от управляющих параметров при любой размерности задачи.

Из (75) следует, что с ростом пороговой температуры  $u_2 = b^{1/n}$  устойчивость моностабильной среды по отношению к внешним возмущениям возрастает - при не слишком больших значениях  $m, n$  критическая энергия  $e_c$  растет степенным образом. Обсудим это условие подробнее. Рассмотренный выше метод вычисления критической энергии  $e_c$  применим и для активных сред с сильной зависимостью теплоемкости и теплопроводности от температуры, описываемых уравнением

$$u^k u_t = \nabla (u^l \nabla u) + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t).$$

Здесь  $\nabla (u^l \nabla u) = r^{-(D-1)} \partial (r^{D-1} u^l \partial u / \partial r) / \partial r$ . Применяя описанную выше процедуру к уравнениям (24), (32), для критической энергии  $e_c$  получаем

$$e_c \propto a^{-D/2} b^{(k+1-D(m+n-l-1)/2)/n}.$$

Для таких сред характерно наличие так называемых режимов с обострением. В частности, при условии

$$m + n - k > 1$$

происходит тепловой взрыв: температура достаточно большой, однородно прогретой области среды (диффузия тепла от границ мала по сравнению с диссипацией внутри области) обращается в бесконечность за конечное время [32-34]. Из (78) видно, что в этом случае существенным образом меняется зависимость критической энергии  $e_c$  от пороговой температуры  $u_2 = b^{1/n}$ . Так, при

$$m + n - k > 1 + 2/D + l + k(2/D - 1)$$

величина  $e_c$  убывает степенным образом с ростом  $u_2$ , то есть стабильность среды снижается с ростом пороговой температуры.

Отметим, что условие (80) может быть более «жестким», чем условие (79). Физический смысл поправки в (80) связан с локальностью разогрева среды внешним возмущением. Энергия возмущения расходуется не только на разогрев и расширение области «горячей» фазы ( $u > u_2$ ), но и на диффузию тепла от ее границ. Быстрый рост теплоемкости ( $\sim u^k$ ) и теплопроводности ( $\sim u^l$ ) затрудняет процесс образования в среде области «горячей» фазы, достаточной для инициации развития неустойчивости [32-34].

## 1. Взрывные режимы и режимы с обострением для УРД

Суть же метода, мной применённого тут,

Объяснить я подробней готов, Если есть у вас пара свободных минут

И хотя бы крупица мозгов.

Л. Кэрролл. Охота на сарка

Важной особенностью автомодельных решений УРД является наличие у них режимов с обострением и взрывных режимов [38-41]. Для возникновения таких режимов необходима сильная зависимость теплоёмкости  $c(u)$ , теплопроводности  $k(u)$  и тепловыделения  $f(u)$  среды от температуры  $u$ . Используя такой «тепловой» язык, УРД можно записать в виде

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u).$$

Подобные сильные зависимости характерны для нелинейного горения среды [8], высокотемпературных процессов в плазме [39], эффектов локализации и инерции тепла [40, 41] и т.д. Режимы с обострением характеризуются обращением  $u(x)$  при конечном значении  $x$  (отсутствие «диффузионного» хвоста). Физический смысл такого обострения заключается в том, что решение  $u(x)$  локализовано на конечном интервале координаты, и у него отсутствует «диффузионный» хвост. В таких случаях говорят об обострении по координате. Кроме того, возможны режимы с обострением по времени. В этом случае решение  $u(t)$  неограниченно растет и обращается в бесконечность за конечное время. Такие режимы, называемые также взрывными, возникают при резкой зависимости тепловыделения в среде от её температуры. Например, в задачах о динамике народонаселения Земли [41] и химическом взрыве [10]. Они описывают процессы нелинейного горения и теплопроводности в активных средах.

Основные особенности диссипативных процессов в активных средах связаны с их нелинейностью. Первое следствие нелинейности - нарушение принципа суперпозиции, свойственного линейным однородным задачам. Это обеспечивает неисчерпаемое множество возможных направлений эволюции, а также определяет возникновение в среде дискретного набора пространственно-временных масштабов. Они характеризуют автономные свойства среды, не зависящие от внешних воздействий. Второе следствие - нелинейные диссипативные среды могут проявлять некоторую внутреннюю упорядоченность, связанную со спонтанным нарушением симметрии. Оно проявляется в спонтанном возникновении в среде сложных диссипативных структур, устойчивых к возмущениям. В ходе эволюции, таким образом, происходит процесс самоорганизации среды.

Особое место среди таких нелинейных процессов занимают неограниченные решения, или, как их иначе называют, режимы с обострением. Такие решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени. То, что такие сингулярные по времени решения имеют физический смысл, было известно еще из задач теплового взрыва, кумуляции ударных волн, самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, нестационарных структур в магнитной гидродинамике, нелинейных задачах лазерной термохимии и т.д. До настоящего времени до конца не ясно, какие свойства нестационарных диссипативных процессов они описывают. Свойства эти очень необычны и парадоксальны с позиций обычных взглядов на нестационарные диссипативные процессы.

Сформулируем критерии возникновения режимов с обострением. Обострение по времени (взрывной режим) возникает при достаточно быстром возрастании  $f(u)$  с ростом  $u$ . Рассмотрим однородную среду  $\partial u / \partial x = 0$ . Тогда, интегрируя (81), получаем  $\int_{u_0}^{u_1} c(u') du' / f(u) = t + \text{const}$ , то есть «температура» среды  $u$  обращается в бесконечность за конечное время при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{c(u) du}{f(u)} < \infty$$

где  $u_0$  — некоторое фиксированное значение  $u(t_0) = u_0$ . При выполнении условия (82) «тепловой взрыв» среды наступает в момент времени обострения:  $\tau = t_0 + \int_{u_0}^{\infty} c(u) du / f(u)$ .

Вопрос о пространственном обострении касается формы профиля температурной волны. Обычно холодный хвост фронта волны простирается до бесконечности (диффузионное «размытие», бесконечная скорость диффузионного распространения). Но при определённых условиях фронт имеет резкую границу, т.е. температура  $u$  обращается в ноль с конечной производной  $u_x$ , и далее перед фронтом  $u$  равна нулю (финитное решение). Возникает обострение по координате. Для этого необходимо, чтобы  $k(u)$  достаточно быстро возрастала с ростом  $u$ . Рассмотрим температурную волну, описываемую уравнением (81) при  $f(u) \equiv 0$ . Считая, что на коротких временах фронт описывается автомодельным решением  $u(\xi)$  с  $\xi = x - vt$ ,  $v = \text{const}$ , и интегрируя  $(k(u)u_\xi)_\xi + vc(u)u_\xi = 0$ , с учетом  $u(+\infty) = u_\xi(+\infty) = 0$  получаем  $\int_u^\infty k(u) du / w(u) = -v\xi + \text{const}$ , где  $w(u) = \int_0^u c(u') du'$  — удельная энтальпия среды. Таким образом, финитное решение с резким краем фронта (температурная ударная волна) получается при выполнении условия

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{k(u) du}{w(u)} < \infty$$

или, что то же самое,  $\int_{u_0}^{\infty} \frac{\chi(w) dw}{w} < \infty$  (см. задачу 13).

И, наконец, в условиях нелинейного горения ( $f(u) \neq 0$ ) могут возникать конечные домены с резкими границами (локализация горения, инерция тепла). Рассмотрим такую покоящуюся границу ( $u_t = 0$ ), описываемую уравнением  $(k(u)u_x)_x + f(u) = 0$ . Интегрируя его с учётом  $u(+\infty) = u_x(+\infty) = 0$ , получаем  $(k(u)u_x)^2 + 2 \int^u k(u) f(u) du = \text{const}$ . Постоянная интегрирования равна нулю из-за граничных условий, так что  $k(u)u_x = \sqrt{-2V(u)}$ , где  $V(u) = \int_0^u k(u') f(u') du'$  — обобщение механического потенциала частицы. Таким образом, резкая граница области локализованного горения возникает при условии

$$\int_0^{u_0} \frac{k(u) du}{\sqrt{-2V(u)}} < \infty$$

Рассмотрим возникновение таких режимов с обострением на нескольких конкретных примерах.

## 1. Взрывной рост народонаселения Земли

Подробные и достоверные демографические данные о динамике роста народонаселения Земли за последние три сотни лет показывают, что число людей  $N(t)$  растёт не в соответствии с законом Мальтуса:  $\dot{N} \sim N$  (геометрическая прогрессия), а быстрее.  $N(t)$  растёт в соответствии с законом бимолекулярной реакции:  $\dot{N} \sim N^2$  (парные столкновения мужских и женских особей), что приводит к режиму с обострением. Действительно, решением в этом случае является  $N(t) \sim (\tau - t)^{-1}$ , т.е. обращается в  $\infty$  за конечное время. Решение такого вида соответствует обострению по времени. В частности, демографические данные дают  $\tau \approx 2030$  г., т.е. модель предсказывает  $\infty$  большое число людей к этому году. Естественно, что реально  $\infty$  численность не является достижимой. В окрестности точки  $t = \tau$  начнут проявляться процессы, ограничивающие рост населения [38 – 41].

Рассмотрим рост численности населения Земли подробнее. Оказывается, что несмотря на территориальные, расовые и сословные барьеры темп роста населения пропорционален произведению числа мужчин и женщин. Считая с большой точностью, что они равны, получаем

$$\dot{N} = \frac{N^2}{C}$$

где  $C$  - постоянная Фёрстера [41]. Интегрируя (85) с учетом начального условия  $N(t_0) = N_0$ , получаем

$$N = \frac{C}{\tau - t}$$

где  $\tau = t_0 + CN_0^{-1}$  — момент времени, когда число обитателей земного шара обратится в бесконечность. Учитывая, что значение постоянной Фёрстера составляет  $C \approx 2 \cdot 10^{11}$  лет·чел<sup>-1</sup>, можно предсказать дату «конца света»:  $\tau \approx 2030$  г. Этот сенсационный результат проник даже в средства массовой информации, где катастрофа была назначена на пятницу 13 ноября 2026 года [35, 39, 41].

## 2. Температурная ударная волна

Процесс линейной теплопроводности обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство. Например, тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в ноль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от  $u$  теплопроводностью  $k(u)$ , если она - не слишком быстро возрастающая функция  $u$ . Если же теплопроводность возрастает достаточно быстро, то это приводит к замедлению процесса диффузии тепла. В результате влияние любого теплового возмущения будет простирается в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства [38-41]. Вне этой области температура среды  $u$  строго равна нулю. Возникает режим обострения по координате в соответствии с критерием (38). Таким образом, речь идет о распространении температурной ударной волны с резким фронтом [38-41].

В качестве примера рассмотрим среду с  $f(u) = 0$  и степенными зависимостями теплоёмкости и теплопроводности от  $u$ . Тогда решение задачи сводится к уравнению для внутренней энергии  $w$  (см. задачу 7); далее, для единообразия изложения сохраним за ней обозначение  $u$  :

$$u_t = (u^n u_x)_x.$$

Будем искать его симметричное решение:  $u(-x, t) = u(x, t)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = 1$ . Обратимся к теоретикогрупповым соображениям [43]. Уравнение (87) инвариантно относительно группы растяжений [42, 43] :

$$t' = Lt, x' = L^\alpha x, u' = L^\beta u.$$

Показатели  $\alpha$  и  $\beta$  однозначно фиксируются требованием инвариантности относительно группы (88) как уравнения, так и начального условия:  $L^\alpha L^\beta = 1$  и  $L^{\beta-1} = L^{\beta(n+1)-2\alpha}$ . Отсюда  $\alpha = 1/(n+2)$ ,  $\beta = -1/(n+2)$ . Инвариантами группы являются две величины  $ut^{1/(n+2)}$  и  $xt^{-1/(n+2)}$ , так что автомодельное решение (42) следует искать в виде

$$u(x, t) = t^{-1/(n+2)} \cdot f(xt^{-1/(n+2)})$$

Автомодельная подстановка приводит уравнение к обыкновенному дифференциальному:

$$(f^n f')' + (n+2)^{-1} \cdot (\xi f') = 0$$

где  $\xi = xt^{-1/(n+2)}$ . Уравнение (90) легко интегрируется:

$$f^n f' + (n+2)^{-1} \cdot \xi f = C_1.$$



Поскольку мы рассматривали симметричное решение, то  $f'(0) = 0$  и  $C_1 = 0$ . Интегрируя еще раз, получаем

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{n+2}} \left[ C - \frac{nx^2}{2(n+2)t^{2/n+2}} \right]^{1/n}$$

при  $x^2 < x_\phi^2 = 2C(n+2)t^{2/n+2}/n$  и  $u(x, t) = 0$  при  $x^2 > x_\phi^2$ . Константа интегрирования находится из начального условия  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0)dx = 1$  :

$$C = \left[ \frac{n(n+2)}{8\pi} \cdot \frac{\Gamma^2(1/n + 1/2)}{\Gamma^2(1/n)} \right]^{\frac{n}{n+2}}$$

где  $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$  — гамма-функция Эйлера. В частности, при  $n = 2$  получаем  $C = \pi^{-1}$ . Данное решение соответствует температурной ударной волне при  $n > 0$ . Действительно, вблизи от края фронта  $u \sim [x_\phi^2 - x^2]^{1/n}$  или  $u \sim |x - x_\phi|^{1/n}$ . При  $n = 0$  решение (92), (93) переходит в диффузионный хвост и остается инфинитным и при  $n < 0$  [39-41].

### 3. Нелинейное горение

Некоторые процессы в плазме, ряд эффектов в биологических системах, химические реакции на определенной стадии описываются нелинейным УРД вида (81). В важном для физики плазмы и теории горения частном случае  $k(u)$  и  $f(u)$  являются степенными функциями температуры  $u$  :  $k(u) = k_0 u^\sigma$ ;  $f(u) = q_0 u^\beta$ ;  $\sigma > 0, \beta > 1$ . Решения этого уравнения доставляет необычные явления: локализация тепла и режим с обострением — температура в локальной области возрастает до бесконечности за конечное время. Возникает диссипативная структура, для образования которой нелинейная теплопроводность (диссипация) играет ключевую роль: «рассасывание» тепла вдоль нелинейной среды действует совместно с горением и формирует эту структуру [39-41]. Иными словами, диффузия тепла согласует процессы роста температуры  $u$  (обусловленные нелинейностью горения) в разных точках среды.

Будем искать решение (81) методом разделения переменных  $u(x, t) = g(t)f(\xi)$ ;  $\xi = x/\varphi(t)$ . Тогда

$$g(t) = A \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right)^{-\frac{1}{1-\beta}}$$

$$\varphi(t) = B \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}$$

Здесь  $A = (q_0\sigma(\sigma+2)/2(\sigma+1))^{-1/\sigma}$  и  $B = \sqrt{\delta^2 q_0/4k_0(1+\sigma)}$  [41], а  $f(u)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{(\beta-1)\tau} f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)\tau} f_\xi \xi = (f^\sigma f_\xi)_\xi + f^\beta.$$

Качественно решения (95) имеют схожий вид при произвольных  $\sigma$  и  $\beta$ , но особенно просто они выглядят при  $\beta = \sigma + 1$ , когда  $f(\xi)$  можно представить в аналитическом виде [39-41]:

$$f(\xi) = \left( \cos^2 \left( \frac{\pi \xi}{L} \right) \cdot \frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \right)^{\frac{1}{\sigma+1}}$$

Здесь  $L = 2\pi\sqrt{(\sigma+1)k_0}/\sigma\sqrt{q_0}$  — длина области локализации горения, а  $\tau$  — время обострения горения. Таким образом, в нелинейной среде на конечное время возникают устойчивые области горения с фиксированным размером.

## 2. Задачи для самостоятельного решения

11. Прямым вычислением покажите, что вариационная производная функционала  $F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, u_x) dx$  равна  $\delta F/\delta u = \partial F/\partial u - d(\partial F/\partial u_x)/dx$ . 12. Приведите УРД к градиентному виду  $u_t = -\delta F/\delta u$ , указав явный вид функционала  $F[u]$ . Сформулируйте и докажите вариационный принцип (принцип минимальности функционала Ляпунова) для полной производной  $F[u]$  по времени. Покажите, что функционал достигает локальных минимумов в стационарных состояниях  $u(x, t) = u_1$  и  $u(x, t) = u_3$ .
12. Приведите УРД к градиентному виду  $u_t = -\delta F/\delta u$ , указав явный вид функционала  $F[u]$ . Вычислите его значение  $F[u_1]$  для метастабильного и  $F[u_3]$  для стабильного состояний 1D-среды длины  $L$ . Вынесите суждение об эволюции начального распределения  $u(x, 0)$  в зависимости от величины  $F[u(x, 0)]$ .
13. Критическим зародышем стабильной фазы  $u_3$  на фоне метастабильной  $u_1$  называется стационарное решение уравнения «реакция-диффузия» с  $u(\pm\infty) = u_1$ . Вычислите энергию его образования в рамках скачковой модели  $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$ , где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Как связаны значения параметра  $\beta$ , соответствующие нулевой скорости кинка и бесконечной энергии зародыша  $e_d(\beta) = \infty$ ?
14. Пусть начальное распределение  $u(x, 0)$  таково, что оно нигде не превосходит значения  $u_2$ , отвечающего минимуму функции  $V(u)$ . Покажите, что такое распределение не отвечает минимуму функционала  $F$  и будет релаксировать к стационарному однородному состоянию  $u = u_1$ . Аналогичное утверждение можно сделать для любого начального распределения  $u(x, 0)$ , нигде не опускающегося ниже величины  $u_2$ . Оно неустойчиво и релаксирует к однородному стационарному состоянию  $u = u_3$ .
15. Пусть фаза  $u = u_3$  стабильна, а фаза  $u = u_1$  метастабильна. Покажите, что любое начальное распределение  $u(x, 0)$ , для которого  $F[u(x, 0)] < 0$ , будет релаксировать к однородному состоянию  $u = u_3$ .
16. Определите радиус  $R$  и энергию образования  $e_d$  критического зародыша в рамках скачковой модели  $f(u) = -u + \theta(u - \beta)$  в одномерном ( $D = 1$ ), двумерном ( $D = 2$ ), трехмерном ( $D = 3$ ) случаях. Покажите, что

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1}{1 - 2\beta} \right), e_{d1} = 2R_1, \quad D = 1,$$

$$\beta = \frac{I_1(R_2)K_0(R_2)}{I_1(R_2)K_0(R_2) + I_0(R_2)K_1(R_2)}, e_{d2} = \pi R_2^2, \quad D = 2,$$

$$\beta = \frac{R_3 \operatorname{th}(R_3) - 1}{R_3(1 + \operatorname{th}(R_3))}, e_{d3} = \frac{4}{3}\pi R_3^3, \quad D = 3,$$

где  $I(x), K(x)$  — модифицированные функции Бесселя.

Используя процедуру качественной оценки  $e_c(60) - (61)$ , покажите справедливость выражения (62) для  $D = 1, 2, 3$ .

18. Высокотемпературные сверхпроводники с током характеризуются быстрым ростом электрического сопротивления с температурой [31-33]. Это приводит к неограниченному джоулеву саморазогреву сверхпроводника при достаточно высоком токе, т.е. моностабильности

таких сред и особому характеру развития тепловой неустойчивости в них. Она может быть описана уравнением (1) с функцией источника вида  $f(u) = (au - b)\theta(u - b/a)$ , где постоянные  $a, b$  зависят от тока [32-34]. Неограниченный разогрев нормальной области сверхпроводника является причиной особого характера развития неустойчивости. Оно осуществляется за счет двух параллельно идущих процессов: вытеснение сверхпроводящего участка нормальным и быстрый разогрев нормального участка. Отсутствие стационарной нормальной зоны и ее экспоненциально быстрый разогрев могут служить основанием для названия «взрывная» неустойчивость. Автомоделное решение типа кинка отсутствует, однако холодные хвосты границ с нормальными областями распространяются с постоянной скоростью  $v$ . Распределение температуры в «холодном» хвосте границы имеет вид  $u(x, t) = u(x - vt)$  и удовлетворяет асимптотически ( $u \ll 1$ ) уравнению

$$u_{xx} + vu_x + f(u) = 0$$

где  $x$  - координата в сопутствующей системе. Уравнение (97) не имеет решения типа бегущей автоволны в силу неограниченного разогрева нормального участка ( $u > b/a$ ). Однако границы саморазогревающегося участка разбегаются с постоянной скоростью  $v$ . Установившаяся скорость не зависит от выбора начального профиля температуры, что свидетельствует об устойчивости такой волны. Отсутствие автомоделного решения (97) не позволяет определить величину скорости  $v$  стандартными методами теории распространения автоволн конечной амплитуды как собственное значение уравнения (97). Для нахождения величины  $v$  в этом случае можно воспользоваться теоретико-групповыми соображениями. Покажите, что уравнение (97) инвариантно относительно группы преобразований координат и переменных вида [32-34]

$$\xi = L^p \xi', u = L^q u', v = L^{-p} v', a = L^{-2p} a', b = L^{q-2p} b',$$

представляющей собой группу растяжений с масштабным фактором  $L$ . Степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (97) относительно преобразований (98) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (97). Это приводит к тому, что свободные параметры  $L, p$  и  $q$  могут принимать произвольные значения.

Из физических соображений ясно, что величина скорости  $v$  в (97) есть функция только  $a$  и  $b$ :  $v = F(a, b)$ . Это соотношение должно быть инвариантно относительно группового преобразования (98), то есть  $v' = F(a', b')$ . Будем искать решение в виде  $v \propto a^r b^s$ , где степени  $r$  и  $s$  подлежат определению. Тогда  $v / (a^r b^s) = L^{-p+2pr+2ps-2qs} v' / (a'^r b'^s)$ , и из условия инвариантности  $v / (a^r b^s) = v' / (a'^r b'^s)$  получаем  $p(2r + 2s - 1) - qs = 0$ . Воспользовавшись произвольностью величин  $p$  и  $q$  в (98), получите однозначные выражения для степеней:  $r = 1/2, s = 0$ .

Убедитесь, что скорость кинка имеет вид  $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$ .

19. Неизвестный коэффициент пропорциональности в  $v \sim a^{1/2} b^0 \sim \sqrt{a}$  не может быть получен с помощью групповых соображений. Для его определения требуется привлечение дополнительных соображений. Рассмотрите случай  $a = 1, b = 0$ , когда уравнение (97) соответствует известной задаче Колмогорова, Петровского, Пискунова [6, 7]. Покажите, что скорость распространения в этом случае есть  $v = 2\sqrt{df(u)/du}\big|_{u=0} = 2$  [8, 10, 11]. Получите для скорости распространения волны «взрывной» неустойчивости выражение  $v = 2\sqrt{a}$  [32-34].

20. Развитие неустойчивости, как правило, инициируется внешними тепловыми возмущениями. Этот процесс имеет пороговый характер, то есть существуют критические возмущения,

«запускающие» неустойчивость. Величина энергии критических возмущений  $e_c$  может быть найдена при помощи групповых соображений, аналогичных использованным в предыдущих задачах для нахождения скорости  $v$ .

Действие локального импульсного критического возмущения в активной среде описывается уравнением

$$u_t = \Delta u + f(u) + e_c \delta^D(r) \delta(t)$$

где  $\Delta = r^{-(D-1)} \partial (r^{D-1} \partial / \partial r) / \partial r$  — радиальная часть лапласиана,  $r$  и  $t$  — безразмерные координата и время,  $\delta^D(r) = (k_D r^{D-1})^{-1} \delta(r)$ ,  $k_D$  — геометрический фактор ( $k_1 = 1, k_2 = 2\pi, k_3 = 4\pi$ ). Покажите, что уравнение (99) инвариантно относительно группы преобразования переменных вида

$$t = L^{2p} t', r = L^p r', u = L^q u', e_c = L^{q+p} e'_c, \\ a = L^{-2p} a', b = L^{q-2p} b'.$$

Как и при вычислении скорости, степени масштабных факторов растяжения определяются условием инвариантности (99) относительно преобразования (100) так, что новые (штрихованные) переменные удовлетворяют тому же уравнению (99). Используя процедуру, описанную выше, для критической энергии возмущений  $e_c$ , достаточной для инициации неустойчивости, получите выражение

$$e_c \propto ab^{(D+2)/2}.$$

Таким образом, теоретико-групповой анализ уравнения (99) позволяет получить функциональную зависимость  $e_c$  от управляющих параметров при любой размерности задачи.

21. Автомодельное решение уравнения теплопроводности. Покажите, что уравнение  $u_t = u_{xx}$  с граничными  $u(\pm\infty) = 0$  и начальным  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = 1$  условиями инвариантно относительно группы растяжений  $t' = L^\alpha t$ ,  $x' = L^\beta x$ ,  $u' = L^\gamma u$  и с масштабным фактором  $L$ . Найдите  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Используя инварианты группы  $x/\sqrt{t}$  и  $u\sqrt{t}$ , найдите автомодельное решение задачи  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ .
22. Показать, что для уравнения теплопроводности  $u_t = u_{xx}$  начальная энергия возмущения (условие нормировки) сохраняется со временем  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const}$ .
23. Показать, что в уравнении (81) можно «избавиться» от теплоёмкости, приведя его к виду  $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$ . Подсказка: сделать замену  $dw = c(u)du$  и перейти от температуры  $u$  к удельной энтальпии  $w = \int_0^u c(u') du'$ . Привести уравнение к виду  $w_t = (\chi(w)w_x)_x + F(w)$ , где

температуропроводность  $\chi(w) = k(u)/c(u)$ , а функция источника  $F(w) = f[u(w)]$

24. Теплоёмкость  $c(u) = c_0 u^p$ , теплопроводность  $k(u) = k_0 u^q$  и функция источника  $f(u) = f_0 u^r$  среды являются степенными функциями  $u$ . Совершая переход к удельной энтальпии  $w$  (см. задачу 24), показать, что  $\chi \sim w^s$  и  $F \sim w^t$  — также степенные функции, и определить  $s, t$ .
25. Определить погрешность времени «конца света»  $\tau$  в (86), если постоянная Фёрстера  $C = 2 \cdot 10^{11}$  лет · чел.<sup>-1</sup> известна с относительной точностью  $\Delta C/C = \alpha$ . В момент времени  $t_0 = 2000$  г. население Земли  $N_0 = 6 \cdot 10^9$  чел. известно практически достоверно.

### 12.2.4 Локализация и структуры

(пока вообще не нужно это)

### 3. Локализация кинков и доменов на неоднородностях

В предыдущих главах мы подробно рассмотрели вопросы зарождения, распространения и устойчивости нелинейных автоволн. Теперь обратимся к исследованию локализации таких волн и возникновения диссипативных структур на их основе.

В реальных средах всегда существуют неоднородности физических величин (их зависимость от  $x$ ), определяющих  $f(u)$  в уравнении (1). Наличие в среде неоднородностей в условиях бистабильности влияет на условия зарождения и характер распространения автоволн. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи о динамике прохождения автоволн через такие неоднородности. В этом разделе мы рассмотрим, как изменяются полученные ранее результаты при наличии в среде неоднородностей. Будет показано, что при определенных условиях возможна локализация автоволн на неоднородностях и определены интервалы значений управляющего параметра  $\beta$ , соответствующие локализации.

В общем случае для произвольного вида неоднородности (произвольной зависимости функции источника  $f(u, x)$  от координаты  $x$ ) аналитическое решение задачи о локализации невозможно. Однако в задаче существует естественный пространственный масштаб (ширина фронта кинка 1). Поэтому для качественного анализа ситуации достаточно ограничиться двумя предельными случаями: плавной ( $\gg 1$ ) и точечной ( $\ll 1$ ) неоднородностей.

#### 1. Плавная неоднородность

Начнем с плавной неоднородности 1D-среды, когда все параметры медленно меняются на характерном масштабе ширины фронта кинка 1. Если теперь возбудить в такой среде автоволну типа кинка, то скорость движения его фронта  $\dot{X}$  будет медленно изменяться вдоль среды в зависимости от локальной величины параметра распространения  $\beta_p(x)$ , а именно  $v(x) = v(\beta, \beta_p(x))$ . Таким образом,

$$\dot{X} = v(X)$$

где  $X(t)$  - координата фронта кинка,  $v(X)$  - его скорость, полученная из локального уравнения (1), локально для каждой точки среды  $x = X$  в соответствии с процедурой, описанной в первой главе. Например, при малых скоростях  $v \ll 1$  зависимость от  $\beta$  линейная  $v(x) \approx (\beta - \beta_p(x))$  [6, 8, 10, 11].

С математической точки зрения ситуацию удобно представлять себе так. Функция источника в (1)  $f(u, \beta, x)$  зависит как от управляющего параметра  $\beta$ , так и от локальной координаты  $x$ . Для анализа распространения кинка (доменной стенки) удобно представлять себе зависимость функции источника в другом, эквивалентном виде  $f(u, \beta, \beta_p(x))$ . Тогда распространение кинка происходит квазистационарно, а его скорость адиабатически подстраивается под значение  $v(\beta, \beta_p(x))$ .

Рассмотрим окрестности «точки остановки» кинка  $x = a$ , в которой его локальная скорость обращается в ноль:  $\beta = \beta_p(a)$ . В этой точке в соответствии с (102) кинк покоится:  $X(t) = a$ . Рассмотрим малое отклонение  $\delta X(t)$  фронта кинка от положения равновесия. В силу (102) получаем

$$\delta \dot{X} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_a \delta X$$

Декремент затухания (нарастания)  $\lambda$  возмущения  $\delta X \sim e^{\lambda t}$  имеет вид

$$\lambda = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_a = \frac{\partial v}{\partial \beta_p} \frac{\partial \beta_p(a)}{\partial x},$$

где  $\partial v / \partial \beta_p \approx \pm \beta_p^{-1}$ , а знак зависит от того, какая фаза (горячая, холодная) исчезает на границе интервала бистабильности (правой, левой). Или, что то же самое, знак зависит от  $\text{sign}(v / (\beta - \beta_p))$ . Выражение (104) показывает, что положение равновесия кинка  $X(t) = a$  устойчиво ( $\lambda < 0$ ), если горячая фаза  $u = u_3$  возбуждена в области, где знак скорости совпадает со знаком  $\partial \beta_p(a) / \partial x$ . То есть скорость кинка должна быть направлена к точ-

## 12.3 Диффузия

### 12.3.1 Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

### 12.3.2 Коэффициенты диффузии и термодиффузии

### 12.3.3 Диффузия взвешенных в жидкости частиц

## 12.4 Поверхностные явления (????)

### 12.4.1 Формула Лапласа

### 12.4.2 Капиллярные волны

### 12.4.3 Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

## 13 Звук

### 13.0.1 Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнем с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют звуковыми волнами. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость  $v$  в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом  $(v \nabla) v$ . По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные  $p$  и  $\rho$  в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где  $\rho_0, p_0$  — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а  $\rho', p'$  — их изменения в звуковой волне ( $\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$ ). Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$$

при подстановке в него (64, 1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка ( $\rho', p', \mathbf{v}$  надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho}$$

В том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0.$$

Условие применимости линеаризованных уравнений движения (64, 2) и (64, 3) для распространения звуковых волн заключается в малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука:  $v \ll c$ . Это условие можно получить, например, из требования  $\rho' \ll \rho_0$  (см. ниже формулу (64, 12))

Уравнения (64, 2) и (64, 3) содержат неизвестные функции  $\mathbf{v}, p', \rho'$ . Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение  $p'$  давления связано с малым изменением  $\rho'$  плотности уравнением

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho'.$$

Заменив с его помощью  $\rho'$  на  $p'$  в уравнении (64, 2), получим:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Два уравнения (64, 3) и (64, 5) с неизвестными  $\mathbf{v}$  и  $p'$  полностью описывают звуковую волну.

Для того чтобы выразить все неизвестные величины через одну из них, удобно ввести потенциал скорости согласно  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . Из уравнения (64, 3) получим равенство

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

связывающее  $p'$  с  $\varphi$  (индекс у  $\rho_0$  и  $\rho_0$  здесь и ниже мы будем для краткости опускать). После этого найдем из (64, 5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0,$$

которому должен удовлетворять потенциал  $\varphi$ ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}.$$

Уравнение вида (64, 7) называется волновым. Применив к (64, 7) операцию  $\operatorname{grad}$ , найдем, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трех компонент скорости  $\mathbf{v}$ , а взяв производную по времени от (64, 7), найдем, что волновому уравнению удовлетворяет и давление  $p'$  (а потому и  $\rho'$ ).

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от  $x$ . Другими словами, все движение однородно в плоскости  $y, z$ ; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (64, 7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения вводим вместо  $x, t$  новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

352 Звук | ГЛ. VIII Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (64, 9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $\xi$ , находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = F(\eta),$$

где  $F(\eta)$  - произвольная функция. Интегрируя еще раз, получим  $\varphi_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  - произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин ( $p'$ ,  $\rho'$ ,  $v$ ) в плоской волне.

Будем говорить для определенности о плотности. Пусть, например,  $f_2 = 0$ , так что  $\rho' = f_1(x - ct)$ . Выясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости  $x = \text{const}$  плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных  $x$ . Очевидно, что плотность одинакова для координат  $x$  и моментов времени  $t$ , удовлетворяющих соотношениям  $x - ct = \text{const}$ , или

$$x = \text{const} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент  $t = 0$  в некоторой точке жидкости ее плотность имеет определенное значение, то через промежуток времени  $t$  то же самое значение плотность имеет на расстоянии  $ct$  вдоль оси  $x$  от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движения распространяется в среде вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ , называемой скоростью звука.

Таким образом,  $f_1(x - ct)$  представляет собой, как говорят, бегающую плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Очевидно, что  $f_2(x + ct)$  представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси  $x$ .

Из трех компонент скорости  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$  в плоской волне отлична от нуля только компонента  $v_x = \partial \varphi / \partial x$ . Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена вдоль распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость  $v_x = v$  связана с давлением  $p'$  и плотностью  $\rho'$  простыми соотношениями. Написав  $\varphi = f(x - ct)$ , имеем

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x - ct), p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct).$$

Сравнив эти выражения, находим:

$$v = \frac{p'}{\rho c}.$$

Подставляя сюда согласно (64, 4)  $p' = c^2 \rho'$ , находим связь между скоростью и изменением плотности:

$$v = \frac{c \rho'}{\rho}.$$

Укажем также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем  $T' = (\partial T / \partial p)_s p'$  и, воспользовавшись известной термодинамической формулой

$$\left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$



и формулой (64, 11), получим:

$$T' = \frac{c\beta T}{c_p}v,$$

где  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  — температурный коэффициент расширения. Формула (64, 8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости вещества. Последняя связана с изотермической сжимаемостью известной термодинамической формулой

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T.$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Уравнение состояния идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где  $R$  — газовая постоянная, а  $\mu$  — молекулярный вес. Для скорости звука получим выражение

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

где посредством  $\gamma$  обозначено отношение  $\gamma = c_p/c_v$ . Поскольку  $\gamma$  обычно слабо зависит от температуры, то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры. При заданной температуре она не зависит от давления газа.

Весьма важным случаем волн являются монохроматические волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения (см. начало § 24). Так, для потенциала скорости напомним

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ \varphi_0(x, y, z) e^{-i\omega t} \},$$

где  $\omega$  — частота волны. Функция  $\varphi_0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0,$$

получающемуся при подстановке (64, 16) в (64, 7). Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . В такой волне все величины являются функциями только от  $x - ct$ , и потому, скажем, потенциал имеет вид где  $A$  — постоянная, называемая комплексной амплитудой. Написав ее в виде  $A = ae^{i\alpha}$  с вещественными постоянными  $a$  и  $\alpha$  будем иметь:

$$\varphi = a \cos \left( \frac{\omega}{c} x - \omega t + \alpha \right).$$

Постоянную  $a$  называют амплитудой, а аргумент под знаком в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$$

называют волновым вектором (а его абсолютную величину часто называют волновым числом). С этим обозначением выражение (64, 18), записывается в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ A e^{t(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}$$

Монохроматические волны играют весьма существенную роль в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические волны является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нем говорят также как о спектральном разложении). Об отдельных компонентах этого разложения говорят как о монохроматических компонентах волны или как о ее компонентах Фурье.

**ЛЛ6**

Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нем мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы. Решение. В двухфазной системе  $p$  и  $T$  не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз. Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую. Пусть  $x$  - доля (по массе) фазы 2 в системе. Имеем:

$$s = (1 - x)s_1 + xs_2, \\ V = (1 - x)V_1 + xV_2,$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам 1 и 2. Для вычисления производной  $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$  преобразуем ее от переменных  $p, s$  к переменным  $p, x$  и получаем:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p}$$

после чего подстановка (1) дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = x \left[ \frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_2}{dp} \right] + (1 - x) \left[ \frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \frac{ds_1}{dp} \right]$$

**13.0.2 Энергия и импульс звуковых волн****13.0.3 Отражение и преломление звуковых волн****13.0.4 Геометрическая акустика****13.0.5 Распространение звука в движущейся среде****13.0.6 Собственные колебания****13.0.7 Сферические волны****13.0.8 Цилиндрические волны****13.0.9 Другое о звуке (???)**

(тут много еще может быть вопросов, ну и ладно, чуть что займусь ими, пока не до них.)

Общее решение волнового уравнения

Боковая волна

Излучение звука

Возбуждение звука турбулентностью

Принцип взаимности

Распространение звука по трубке

Рассеяние звука

Поглощение звука

Акустическое течение

Вторая вязкость

## 14 Ударные волны

14.0.1 Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

14.0.2 Стационарный поток сжимаемого газа

14.0.3 Поверхности разрыва

14.0.4 Ударная адиабата

14.0.5 Ударные волны слабой интенсивности

14.0.6 Направление изменения величин в ударной волне

14.0.7 Эволюционность ударных волн

### Теория

Вывод неравенств (87, 1 – 4) в §§86, 87 был связан с определенным предположением о термодинамических свойствах среды - с положительностью производной  $(\partial^2 V / \partial p^2)_s$ . Весьма существенно, однако, что неравенства

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2$$

для скоростей могут быть получены также и из совершенно иных соображений, показывающих, что ударные волны с нарушенными условиями (88, 1) все равно не могли бы существовать, даже если бы это не противоречило изложенным выше чисто термодинамическим соображениям<sup>1</sup>).

Именно необходимо исследовать еще вопрос об устойчивости ударных волн. Наиболее общее необходимое условие устойчивости состоит в требовании, чтобы любое бесконечно малое возмущение начального (в некоторый момент  $t = 0$ ) состояния приводило бы лишь к вполне определенным бесконечно малым же изменениям течения, - по крайней мере в течение достаточно малого промежутка времени  $t$ . Последняя оговорка означает недостаточность указанного условия; так, если начальное малое возмущение возрастает даже экспоненциально (как  $e^{\gamma t}$  с положительной постоянной  $\gamma$ ), то в течение времени  $t \leq 1/\gamma$  возмущение остается малым, хотя в конце концов оно и приводит к разрушению данного режима движения. Возмущением, не удовлетворяющим поставленному необходимому условию, является расщепление ударной волны на два (или более) последовательных разрыва; очевидно, что изменение движения при этом сразу же оказывается не малым,

хотя при малых  $t$  (когда оба разрыва не разошлись еще на большое расстояние) оно и занимает лишь небольшой интервал расстояний  $\delta x$ .

Произвольное начальное малое возмущение определяется некоторым числом независимых параметров. Дальнейшая же эволюция возмущения определяется системой линеаризованных граничных условий, которые должны удовлетворяться на поверхности разрыва. Поставленное выше необходимое условие устойчивости будет выполнено, если число этих уравнений совпадает с числом содержащихся в них неизвестных параметров - тогда граничные условия определяют дальнейшее развитие возмущения, которое при малых  $t > 0$  останется малым. Если же число уравнений больше или меньше числа независимых параметров, то задача о малом возмущении не имеет решений вовсе или имеет их бесконечное множество. Оба случая свидетельствовали бы о неправомерности исходного предположения (малость возмущения при малых  $t$ ) и, таким образом, противоречили бы поставленному требованию. Сформулированное таким образом условие называют условием эволюционности течения.

Рассмотрим возмущение ударной волны, представляющее собой ее бесконечно малое смещение в направлении, перпендикулярном ее плоскости<sup>1</sup>). Оно сопровождается бесконечно малым возмущением также и других величин - давления, скорости и т. д. газа по обеим сторонам поверхности разрыва. Эти возмущения, возникнув вблизи волны, будут затем распространяться от нее, переносясь (относительно газа) со скоростью звука; это не относится лишь к возмущению энтропии, которое будет переноситься только с самим газом. Таким образом, произвольное возмущение данного типа можно рассматривать как совокупность звуковых возмущений, распространяющихся в газах 1 и 2 по обе стороны ударной волны, и возмущения энтропии; последнее, перемещаясь вместе с газом, будет, очевидно, существовать лишь в газе 2 позади ударной волны. В каждом из звуковых возмущений изменения всех величин связаны друг с другом определенными соотношениями, следующими из уравнений движения (как в любой звуковой волне; §64); поэтому каждое такое возмущение определяется всего лишь одним параметром. Подсчитаем теперь число возможных звуковых возмущений. Оно зависит от относительной величины скоростей газа  $v_1, v_2$  и скоростей звука  $c_1, c_2$ . Выберем направление движения газа (со стороны 1 на сторону 2) в качестве положительного направления оси  $x$ . Скорость распространения возмущения в газе 1 относительно неподвижной ударной волны есть  $u_1 = v_1 \pm c_1$ , а в газе 2  $u_2 = v_2 \pm c_2$ . Тот факт, что эти возмущения должны распространяться по направлению от ударной волны, означает, что должно быть  $u_1 < 0, u_2 > 0$ .

## 14.0.8 Ударные волны в политропном газе

### 14.0.9 Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Соблюдение условий эволюционности само по себе необходимо, но еще недостаточно для гарантирования устойчивости ударной волны. Волна может оказаться неустойчивой по отношению к возмущениям, характеризующимся периодичностью вдоль поверхности разрыва и представляющим собой как бы «рябь», или «гофрировку», на этой поверхности (такого рода возмущения рассматривались уже в §29 для тангенциальных разрывов)<sup>l</sup>). Покажем, каким образом исследуется этот вопрос для ударных волн в произвольной среде (С. П. Дьяков, 1954). Пусть ударная волна поконится, занимая плоскость  $x = 0$ ; жидкость движется сквозь нее слева направо, в положительном направлении оси  $x$ . Пусть поверхность разрыва испытывает возмущение, при котором ее точки смещаются вдоль оси  $x$  на малую величину

$$\zeta = \xi_0 e^{i(k_y y - \omega t)}$$

где  $k_y$  — волновой вектор «ряби». Эта рябь на поверхности вызывает возмущение течения позади ударной волны, в области  $x > 0$  (течение же перед разрывом,  $x < 0$ , не испытывает возмущения в силу своей сверхзвуковой скорости).

Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны (см. задачу к §82). В обоих зависимость величин от времени и координат дается множителем вида  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  с той же частотой  $\omega$ , что и в (90, 1). Из соображений симметрии очевидно, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xy$ ; его  $y$ -компонента совпадает с  $k_y$  в (90, 1), а  $x$ -компонента различна для возмущений двух типов. В энтропийно-вихревой волне  $k_2 = \omega$ , т. е.  $k_x = \omega/v_2$  ( $v_2$  — невозмущенная скорость газа за разрывом). В этой волне возмущение давления отсутствует, возмущение удельного объема связано с возмущением энтропии,  $\delta V^{(3)} = (\partial V/\partial s)_p \delta s$ , а возму-

#### 14.0.10 Распространение ударной волны по трубе

#### 14.0.11 Косая ударная волна

#### 14.0.12 Ширина ударных волн

Мы говорили до сих пор об ударных волнах как о геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что ударные волны с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в ударной волне не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что в макроскопической теории не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (85, 1 – 3) на ударной волне были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (85, 1) не меняется:

$$\rho v \equiv j = \text{const.}$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси  $x$ ), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой  $-\sigma'_{xx}$  вязкого тензора напряжений; согласно общему выражению (15, 3) для этого тензора имеем:

$$\sigma'_{xx} = \left( \frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx}$$

Условие (85, 2) приобретает теперь вид <sup>1)</sup>

$$p + \rho v^2 - \left( \frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx} = \text{const.}$$

Как и в §85, введем вместо скорости  $v$  удельный объем  $V$  согласно  $v = jV$ . Постоянную же в правой стороне равенства выразим через предельные значения величин на большом расстоянии впереди ударной волны (сторона 1). Тогда написанное

#### 14.0.13 Ударные волны в релаксирующей среде

#### 14.0.14 Изотермический скачок

#### 14.0.15 Слабые разрывы

### 15 Пересечение поверхностей разрыва

#### 15.0.1 Волна разрежения

#### 15.0.2 Типы пересечений поверхностей разрыва

#### 15.0.3 Пересечение ударных волн с твердой поверхностью

#### 15.0.4 Сверхзвуковое обтекание угла

#### 15.0.5 Обтекание конического острия

### 16 Другие темы

#### 16.1 Модели аэродинамики для приложений

##### 16.1.1 Бумеранг

(когда-то напишу тут, как же он работает?)

#### 16.2 Плоское течение сжимаемого газа

Потенциальное движение сжимаемого газа

Стационарные простые волны

Уравнение Чаплыгина (общая задача о двухмерном стационарном движении сжимаемого газа)

Характеристики плоского стационарного течения

Уравнение Эйлера-ТрикомиПереход через звуковую скорость

Решения уравнения Эйлера-Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Обтекание со звуковой скоростью

Отражение слабого разрыва от звуковой линии

#### 16.3 Обтекание конечных тел

Образование ударных волн при сверхзвуковом обтекании тел

**Теория** Простые соображения показывают, что при обтекании произвольного тела сверхзвуковым потоком перед телом возникает ударная волна. Действительно, в сверхзвуковом потоке возмущения, обусловленные наличием обтекаемого тела, распространяются только вниз по течению. Поэтому натекающий на тело однородный сверхзвуковой поток должен был бы доходить до самого переднего конца тела невозмущенным. Но тогда на поверхности этого конца нормальная компонента скорости газа была бы отличной от нуля в противоречии с необходимым граничным условием. Выходом из этого положения может являться только возникновение ударной волны, в результате чего движение газа между нею и передним концом тела становится дозвуковым.

Таким образом, при сверхзвуковом обтекании тела перед ним возникает ударная волна; ее называют головной. При обтекании тела с тупым передним концом эта волна не соприкасается с самим телом. Спереди от ударной волны Поток однороден, а позади нее движение меняется, и поток огибает обтекаемое тело (рис. 127, а). Поверхность ударной волны уходит на бесконечность, причем вдали от тела, где интенсивность волны мала, она пересекает направление набегающего потока под углом, близким к углу маха. Характерной чертой обтекания тела с тупым концом является существование дозвуковой области течения за ударной волной - позади наиболее выдающейся вперед части ее поверхности; эта область простирается до обтекаемого тела и, таким образом, ограничена поверхностью разрыва, поверхностью тела и «боковой» звуковой поверхностью (пунктирные линии на рис. 127, а).

Ударная волна может соприкоснуться с телом только если его передний конец заострен. Тогда поверхность разрыва тоже обладает точкой заострения, совпадающей с острием тела (рис. 127, б); при несимметричном обтекании часть этой поверхности может являться поверхностью слабого разрыва. Для тела заданной формы такой режим обтекания оказывается, однако, возможным лишь при скоростях, превышающих определенный предел; при меньших скоростях ударная волна отрывается от носика тела, несмотря на наличие острия (см. §113).

Рассмотрим осесимметричное сверхзвуковое обтекание тела вращения и определим давление на переднем закругленном конце тела (в точке остановки - точка на рис. 127, а). Из соображений симметрии очевидно, что линия тока, заканчивающаяся в точке  $O$ , пересекает ударную волну в нормальном к ней направлении, так что в точке  $A$  нормальная к поверхности разрыва компонента скорости совпадает с полной скоростью. Значения величин в набегающем потоке отмечаем, как обычно, индексом 1, а значения величин в точке  $A$  на задней стороне ударной волны - индексом 2. Последние определяются по формулам (89, 6 – 7) в виде

$$p_2 = \frac{p_1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]$$

$$v_2 = c_1 \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1}, \quad \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}.$$

Давление  $p_0$  в точке  $O$  (в которой скорость газа  $v = 0$ ) можно получить теперь с помощью формул, определяющих изменение величин вдоль линии тока. Имеем (см. задачу к §83):

$$p_0 = p_2 \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_2^2}{c_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

и простое вычисление приводит к следующему результату:

$$p_0 = p_1 \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} M_1^2 \left[ \gamma - \frac{\gamma - 1}{2M_1^2} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Этим и определяется давление на переднем конце тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком ( $M_1 > 1$ ).

Для сравнения приведем формулу для давления в точке остановки, которое получилось бы в результате непрерывного адиабатического торможения газа без ударной волны (как это было бы при дозвуковом обтекании):

$$p_0 = p_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

При  $M_1 = 1$  обе формулы дают одинаковое значение  $p_0$ , а при  $M_1 > 1$  давление (122, 2) всегда превышает истинное давление, даваемое формулой (122, 1)<sup>1)</sup>.

В предельном случае очень больших скоростей ( $M_1 \gg 1$ ) формула (122,1) дает

$$p_0 = p_1 \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma-1}} M_1^2,$$

т. е. давление  $p_0$  пропорционально квадрату скорости обтекания. На основании этого результата можно сделать заключение о том, что и полная испытываемая телом сила сопротивления при скоростях, больших по сравнению со скоростью звука, пропорциональна квадрату скорости. Обращаем внимание на то, что этот закон - такой же, по которому меняется сила сопротивления при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, но настолько больших, чтобы число Рейнольдса было достаточно велико (см. § 45).

Помимо самого факта необходимости возникновения ударных волн, можно еще утверждать, что при сверхзвуковом обтекании конечного тела на больших расстояниях от него во всяком случае должны иметься две следующие друг за другом ударные волны (Л. Ландау, 1945). Действительно, на больших расстояниях от тела вызываемые им возмущения слабы и поэтому их можно рассматривать как цилиндрическую звуковую волну, расходящуюся от оси  $x$ , проходящей через тело параллельно направлению обтекания; рассматривая, как это мы везде делаем, движение в той системе координат, в которой тело покоится, мы будем иметь волну, в которой роль времени играет  $x/v_1$ , а роль скорости распространения  $v_1/\sqrt{M_1^2 - 1}$  (см. ниже § 123). Поэтому мы можем непосредственно применить результаты, полученные в §102 для цилиндрической волны на больших расстояниях от тела: в первой ударной волне давление испытывает скачок вверх, так что за ней возникает сгущение; затем давление постепенно убывает, сгущение сменяется разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во второй ударной волне. Интенсивность передней ударной волны падает с увеличением расстояния  $r$  от оси  $x$  как  $r^{3/4}$ , а расстояние между обеими волнами возрастает как  $r^{1/41}$ ).

Проследим за появлением и развитием ударных волн при постепенном увеличении числа Маха  $M_1$ . Сверхзвуковая область в газовом потоке появляется впервые при некотором значении  $M_1 < 1$  в виде области, прилегающей к поверхности обтекаемого тела. В этой области появляется по крайней мере одна ударная волна - обычно замыкающая сверхзвуковую область. По мере увеличения  $M_1$  эта область расширяется, а вместе с ней удлиняется и ударная волна, существование которой при  $M_1 = 1$  было доказано (для плоского случая) в § 120; тем самым была доказана необходимость первого появления ударной волны уже при  $M_1 < 1$ . Как только  $M_1$  начинает превышать единицу, появляется еще одна ударная волна - головная волна, пересекающая весь бесконечно широкий натекающий поток газа. При  $M_1$ , в точности равном единице, все течение впереди тела является дозвуковым. Поэтому при  $M_1 > 1$ , но сколь угодно близком к единице, головная ударная волна находится сколь угодно далеко впереди тела. По мере дальнейшего увеличения  $M_1$  головная волна постепенно приближается к телу.

Ударная волна в местной сверхзвуковой зоне должна каким-то образом пересекаться со звуковой линией (мы будем говорить о плоском случае). Вопрос о характере такого пересечения нельзя считать выясненным. Если ударная волна заканчивается в точке пересечения, то в самой этой точке ее интенсивность обращается в ноль, а во всей плоскости вблизи точки пересечения движение околослуковое. Картина течения в таком случае должна описываться соответствующим решением уравнения Эйлера Трикоми. Помимо общих условий однозначности решения в физической плоскости и граничных условий на ударной волне, должны выполняться еще и следующие условия: 1) если по обе стороны от ударной волны движение сверхзвуковое (так будет, если в точке пересечения кончается только ударная волна, «упираясь» в звуковую линию), то ударная волна должна быть



«приходящей» по отношению к точке пересечения, 2) «приходящие» к точке пересечения характеристические линии в сверхзвуковой области не должны нести на себе никаких особенностей течения (особенности могли бы возникнуть лишь в результате самого пересечения и, таким образом, должны были бы уноситься от точки пересечения). Существование решения уравнения Эйлера-Трикоми, удовлетворяющего всем этим требованиям, по-видимому, еще не доказано.

Другая возможность для конфигурации ударной волны и звуковой линии в местной сверхзвуковой зоне состоит в окончании в точке пересечения одной лишь звуковой линии (рис. 128,б); в этой точке интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль, так что течение вблизи нее является околосзвуковым лишь по одну сторону от ударной волны. Сама ударная волна может при этом одним концом «упираться» в твердую поверхность, а другим (или обоими) начинаться непосредственно в сверхзвуковом потоке (ср. конец §115).

### Сверхзвуковое обтекание заостренного тела

### Дозвуковое обтекание тонкого крыла

### Сверхзвуковое обтекание крыла

### Околосзвуковой закон подобия

### Гиперзвуковой закон подобия

## 16.4 Гидродинамика горения

### Медленное горение

**Теория** Скорость химической реакции (измеряемая, скажем, числом прореагировавших в единицу времени молекул) зависит от температуры газовой смеси, в которой она происходит, увеличиваясь вместе с ней. Во многих случаях эта зависимость очень сильная. Скорость реакции может при этом оказаться при обычных температурах настолько малой, что реакция практически вовсе не идет, несмотря на то, что состоянию термодинамического (химического) равновесия соответствовала бы газовая смесь, компоненты которой прореагировали друг с другом. При достаточном же повышении температуры реакция протекает со значительной скоростью. Если реакция эндотермична, то для ее протекания необходим непрерывный подвод тепла извне; если ограничиться одним только начальным повышением температуры смеси, то прореагирует лишь незначительное количество вещества, вслед за чем температура газа настолько понизится, что реакция снова прекратится. Совсем иначе будет обстоять дело при сильно экзотермической реакции, сопровождающейся значительным выделением тепла. Здесь достаточно повысить температуру хотя бы в одном каком-нибудь месте смеси; начавшаяся в этом месте реакция в результате выделения тепла сама будет производить нагревание окружающего газа и, таким образом, реакция, раз начавшись, будет сама собой распространяться по газу. В таких случаях говорят о медленном горении газовой смеси или о дефлаграции.

Горение газовой смеси непременно сопровождается также и движением газа. Другими словами, процесс горения представляет собой, отвлекаясь от его химической стороны, также и газодинамический процесс. В общем случае для определения режима горения необходимо совместное решение системы уравнений, включающей в себя как уравнения химической кинетики данной реакции, так и уравнения движения газовой смеси.

Положение, однако, существенно упрощается в том весьма важном случае (с которым обычно и приходится иметь дело), когда характерные размеры  $l$ , определяющие условия данной конкретной задачи, достаточно велики (по сравнению с чем именно, будет выяснено

ниже). Мы увидим, что в таких случаях чисто газодинамическая задача может быть в известном смысле отделена от задачи химической кинетики.

Область сгоревшего газа (т. е. область, в которой реакция уже закончилась и газ представляет собой смесь продуктов горения) отделена от газа, в котором горение еще не началось, некоторым переходным слоем, где как раз и происходит самая реакция (зона горения или пламя); с течением времени этот слой передвигается вперед со скоростью, которую можно назвать скоростью распространения горения в газе. Величина скорости распространения зависит от интенсивности теплопередачи из зоны горения в ненагретую исходную газовую смесь, причем основной механизм теплопередачи состоит в обычной теплопроводности (В. А. Михельсон, 1890).

Порядок величины ширины зоны горения  $\delta$  определяется средним расстоянием, на которое успевает распространиться выделяющееся в реакции тепло за то время  $\tau$ , в течение которого длится эта реакция (в данном участке газа). Время  $\tau$  есть величина, характерная для данной реакции, и зависит лишь от термодинамического состояния горящего газа (но не от характеристических параметров  $l$  задачи). Если  $\chi$ -температуропроводность газа, то имеем см. (51,6) : 1)

$$\delta \sim \sqrt{\chi\tau}$$

Уточним теперь сделанное выше предположение: мы будем считать, что характерные размеры задачи велики по сравнению с толщиной зоны горения ( $l \gg \delta$ ). При соблюдении этого условия можно выделить чисто газодинамическую задачу. При определении движения газа можно пренебречь толщиной зоны горения и рассматривать ее просто как поверхность, разделяющую продукты горения и несгоревший газ. На этой поверхности (фронт пламени) состояние газа испытывает скачок, т. е. она представляет собой своеобразную поверхность разрыва.

Скорость перемещения  $v_1$  этого разрыва относительно самого газа (в нормальном к фронту направлении) называют нормальстраницей на расстояние порядка величины  $\delta$ ; поэтому искомая скорость пламени:

$$v_1 \sim \delta/\tau \sim (\chi/\tau)^{1/2}.$$

Обычная температуропроводность газа - порядка величины произведения длины свободного пробега молекул на их тепловую скорость, или, что то же, произведения времени свободного пробега молекул совпадает по порядку величины со скоростью звука, найдем:

$$v_1/c \sim (\chi/\tau c^2)^{1/2} \sim (\tau_{св}/\tau)^{1/2}.$$

Отнюдь не каждое столкновение молекул сопровождается химической реакцией между ними; напротив, в реакцию вступает лишь очень незначительная доля сталкивающихся молекул. Это значит, что  $\tau_{св} \ll \tau$  и потому  $v_1 \ll c$ . Таким образом, в рассматриваемом режиме скорость распространения пламени мала по сравнению со скоростью звука.

На поверхности разрыва, заменяющего собой зону горения, как и на всяком вообще разрыве, должны выполняться условия непрерывности потоков вещества, импульса и энергии. Первое из этих условий, как обычно, определяет отношение нормальных к поверхности разрыва компонент скорости газа относительно разрыва:  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , или

$$v_1/v_2 = V_1/V_2,$$

где  $V_1, V_2$  — удельные объемы несгоревшего газа и продуктов горения. Согласно общим результатам, полученным в § 84 для произвольных разрывов, при наличии скачка нормальной скорости касательная компонента скорости должна быть непрерывна. Поэтому линии тока преломляются на поверхности разрыва.

Благодаря малости нормальной скорости распространения пламени по сравнению со скоростью звука условие непрерывности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии - к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2.$$

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга. Считая газ политропным, имеем:

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2;$$

аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчета энергии), поскольку здесь  $w_{01}$  и  $w_{02}$  различны. Введем обозначение  $w_{01} - w_{02} = q$ ;  $q$  есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесенная к единице массы), если бы эта реакция происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ 1) и сгоревшего (газ 2) газов:

$$p_1 = p_2, T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left( \frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (128, 5)$$

Наличие определенной нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения самого газа, приводит к установлению определенной формы фронта пламени при стационарном горении в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если  $v$  есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что  $v_1 S_1 = v S$ , где  $S$  - площадь поперечного сечения трубки, а  $S_1$  - полная площадь поверхности фронта пламени.

(далее забил выгружать.)

## Детонация

### Распространение детонационной волны

### Соотношение между различными режимами горения

### Конденсационные скачки

## 16.5 Релятивистская гидродинамика

### Тензор энергии-импульса жидкости

### Релятивистские гидродинамические уравнения

### Ударные волны в релятивистской гидродинамике

### Релятивистские уравнения движения вязкой и теплопроводной среды

## 16.6 Гидродинамика сверхтекучей жидкости

### Основные свойства сверхтекучей жидкости

### Термомеханический эффект

### Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

### Диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости

### Распространение звука в сверхтекучей жидкости

## 16.7 О теории упругости

(это отдельная запись, тут пока вижу смысл указать основы её)

ности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии - к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2.$$

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга. Считая газ политропным, имеем:

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, \quad w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2;$$

аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчета энергии), поскольку здесь  $w_{01}$  и  $w_{02}$  различны. Введем обозначение  $w_{01} - w_{02} = q$ ;  $q$  есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесенная к единице массы), если бы эта реакция происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ 1) и сгоревшего (газ 2) газов:

$$p_1 = p_2, T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left( \frac{q}{c_{p1}T_1} + 1 \right). \quad (128, 5)$$

Наличие определенной нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения самого газа, приводит к установлению определенной формы фронта пламени при стационарном горении в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если  $v$  есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что  $v_1 S_1 = v S$ , где  $S$  - площадь поперечного сечения трубки, а  $S_1$  - полная площадь поверхности фронта пламени.

## 16.8 Магнитная гидродинамика

## 16.9 гидродинамика плазмы

## 16.10 неньютоновская жидкость

интересно ведь.

## 16.11 Ударные волны

(структура лл)

(мб подглавой сделаю, пока так)

### 16.11.1 Основное по Ландау

Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

Стационарный поток сжимаемого газа

Поверхности разрыва

Ударная адиабата

Ударные волны слабой интенсивности

Направление изменения величин в ударной волне

### 16.11.2 Другое по Ландау

(по идее эти темы не очень нужны)

Эволюционность ударных волн

Ударные волны в политропном газе

Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Распространение ударной волны по трубе

Косая ударная волна

Ширина ударных волн

Ударные волны в релаксирующей среде

Изотермический скачок

Слабые разрывы

---

## Part VII

# Appendix

## A Введение в механику сплошных сред

### A.1 Еще мотивация

Обсудим, какова польза предмета и приведем всю мотивацию, которая позволит нам его познать без проблем.

**Гидродинамика - это круто и мало кто в ней разбирается**

(раскрою потом)

**Фундаментальные вопросы о физике, например, о турбулентности, именно в рамках гидродинамики (!?!?)**

(дорасти - пойму, впишу)

### A.2 Мышление профессионала механики сплошных сред

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоения предмета.

#### A.2.1 Способы догадаться до всех главных идей

незаменимая часть нормального понимания предмета.

#### A.2.2 Необходимые темы для Предмет

#### A.2.3 Дополнительные темы для Предмет

#### A.2.4 Способы изучения предмета

### A.3 Литература

#### A.3.1 Основная

##### Основная обучающая

Tong Fluid Dynamics

Разве есть повод сомневаться, что лекции Тонга и по этому будут очень полезными?

Georgy Falkovich Fluid Mechanics A Short Course for Physicists

Шикарная небольшая книга, которая по идее и даст минимальное понимание предмета.

Думал даже выгрузить, но не в планах заниматься МСС. Потом начну с нее изучать МСС.

[1] Ландау Л. Д. Гидродинамика

основа записи. основа структуры и много крутых задач.

Kevin Zhou Lecture Notes on Undergraduate Physics

Записи аспиранта Стенфорда (на 2023 год), там есть раздел, где коротко основные темы МСС обсуждаются, идеально для минимальной подготовки.

[3] А. А. Пухов. Лекции по колебаниям и волнам : учеб. пособие. В двух частях. Ч.

2. Волны

Наверное, хорошая очень методичка для начала. Скорее всего с нее и начну когда-то. По сути те же темы, что и Ландау там.

## Задачники

### А.3.2 Дополнительная

#### Дополнительная профессиональная

#### Об особых моделях гидродинамики

[2] Пухов А. А. Уравнение «реакция–диффузия» : учебное пособие

Хорошая методичка, над которой можно недели 2 посидеть. Однако экзамен она сдать мне не помогла, не все там написано, где-то можно было бы более простую теорию почитать про это. Но в целом, вроде неплохая методичка. На либ мипте ищется.

ПТФ-1 Г.Е. Фалькович, Современная гидродинамика. Краткий курс. (R&C Dynamics, Москва-Ижевск, 2018).

ПТФ-2 В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Успехи Физ. Наук 167, 1137 (1997).

ПТФ-3 Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика, (Москва, Наука, 1988).

ПТФ-4 Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика. Часть 2.

ПТФ-5 И.М. Халатников, Теория сверхтекучести, (Москва, Наука, 1971).

ПТФ-6 В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи, (Москва, Наука, 1980).

ПТФ-7 А. I. Dyachenko, Y. V. L'vov, and V. E. Zakharov, Physica D 87, 233 (1995).

ПТФ-8 А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, Физика Плазмы 22, 916 (1996).

ПТФ-9 А.М. Balk, Physica D 139, 137 (2000).

ПТФ-10 A.N. Pushkarev, V.E. Zakharov, Physica D 135, 98 (2000).

ПТФ-11 С.К. Немировский, В.В. Лебедев, ЖЭТФ 84, 1729 (1983).

ПТФ-12 V. P. Ruban and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E 68, 056301 (2003).

ПТФ-13 V. P. Ruban, Phys. Rev. E 70, 066302 (2004); Phys. Lett. A 340, 194 (2005). Phys. Rev. E 78, 066308 (2008).

#### Статьи о теоретических методах

#### О приложениях

### А.4 Обзор механики сплошных сред

что вообще в нем происходит?

#### А.4.1 МСС в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

#### появление Предмет в нашей картине мира

#### один подход

#### второй подход

#### О диффузионной гидродинамике

(про УРД всякие рассуждения)

**Чем автоволны отличаются от солитонов** Волны в возбудимых (активных) средах отличаются как от линейных волн, так и от солитонов и солитоноподобных решений. Если среда описывается линейными уравнениями, то для распространяющихся в ней волн выполняется принцип суперпозиции: при встрече двух волн наблюдается простое наложение их амплитуд и связанные с этим явления интерференции. Для нелинейных

сред принцип суперпозиции всегда нарушен – волны сильно взаимодействуют между собой. Характер такого взаимодействия, однако, существенно отличается для солитонов и автоволн (автосолитонов). Солитоны (англ. solitary wave – уединенная волна) возникают в консервативных нелинейных средах без затухания и подвода энергии от внешних источников. Солитон – это нелинейная уединенная волна в виде импульса, способного распространяться без изменения формы и без потерь энергии. При столкновении двух солитонов принцип суперпозиции не выполняется. Однако после столкновения волны восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями и в тех же направлениях. Способность сохранять свою структуру после нелинейного взаимодействия с себе подобными означает, что солитоны в определенном смысле ведут себя как частицы. В отличие от этого при столкновении двух плоских автоволн в возбужденной неравновесной среде происходит их полное взаимное погашение (аннигиляция). Аннигиляцией при столкновениях автоволн объясняются также разнообразные эффекты синхронизации в возбудимых средах: быстрые периодические источники автоволн подавляют низкочастотные источники. Например, ревербераторы могут уничтожать соседний с ними ведущий центр.

В солитоне эффекты дисперсии сбалансированы нелинейным эффектом на непрерывном промежутке значений скоростей: дисперсия  $\leftrightarrow$  нелинейность. Эффекты дисперсии заключаются в распределении энергии солитона, а нелинейные эффекты – в связывании этих двух эффектов в единый процесс: дисперсия растаскивает, а нелинейность укручивает фронт. Таким образом, уединенная волна (солитон) проявляется как независимая (консервативная) сущность, в которой поддерживается баланс между «Инь» дисперсии и «Янь» нелинейности. Этот баланс представляет собой замкнутую причинно-следственную связь и подобен древней мифологической змее Уроборос, кусающей свой хвост [20].

На языке этой аналогии для УРД «Инь» термальной диффузии находится в состоянии баланса с «Янь» нелинейного высвобождения энергии: диффузия нелинейность. Это представляет собой другую замкнутую причинно-следственную связь, которая приводит к возникновению новой сущности – автоволны переключения.

(по Пухову тут теория)

## А.4.2 наиболее прикладные темы Предмета

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

title

### А.4.3 Итоговые формулы и закономерности

### А.4.4 обзор теоретических подходов

такие-то есть, такие полезные, такие - нет.



**А.4.5 Удивительные факты**

**А.4.6 Результаты Предмет**

**А.4.7 Применения Предмет в других разделах физики**

**А.4.8 Обзор дальнейших развитий Предмет**

**А.5 Описание записи**

**А.5.1 описание глав и разделов**

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

**А.5.2 обозначения и константы**

**А.6 Головоломки на разные случаи жизни**

(придумаю потом, пока не так нужно это)

**А.7 Короткий исторический обзор**

(не актуально это)

**В Математика для механики сплошных сред**

**В.0.1 О комплексном анализе**

(просто слышал, что он тут нужен)

## C References

- [1] Лифшиц Е. М. Ландау, Л. Д. *Теоретическая физика*. Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.
- [2] А. А. Пухов. *Уравнение «реакция–диффузия» : учебное пособие*. Москва : МФТИ, 2014.
- [3] А. А. Пухов. *Лекции по колебаниям и волнам : учеб. пособие. В двух частях. Ч. 2. Волны*. Москва : МФТИ, 2019.